Домашняя работа по геометрии за 10 класс

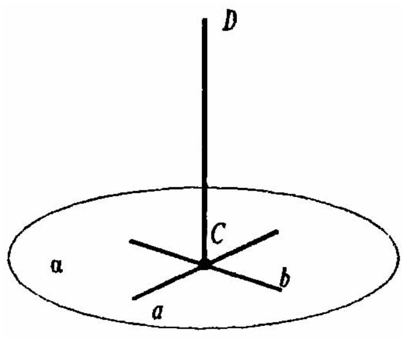
к учебнику «Геометрия. 10-11 класс»
А.В. Погорелов, М.: «Просвещение», 2001 г.

§15. Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия

1. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AB и CD не пересекаются.[1]

Допустим, что AB и CD пересекаются, тогда по аксиоме 3 через них можно провести плоскость и в ней лежат все четыре точки, что противоречит условию задачи. Так что AB и CD не пересекаются. Что и требовалось доказать.

2. Можно ли через точку пересечения двух данных прямых провести третью прямую, не лежащую с ними в одной плоскости? Ответ объясните.

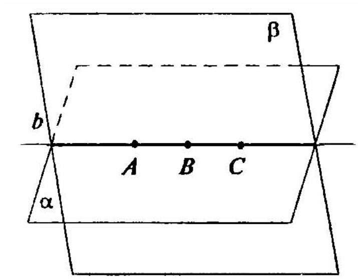


Можно. Пусть прямые *a* и *b* пересекаются в точке C и лежат в плоскости α (аксиома 3). Тогда возьмем точку D вне плоскости α (по аксиоме 1) и рассмотрим прямую CD. Эта прямая и не принадлежит плоскости α, а плоскость, содержащая прямые *a* и *b*, единственная (аксиома 3). Значит, прямая CD – удовлетворяет условию задачи.

---

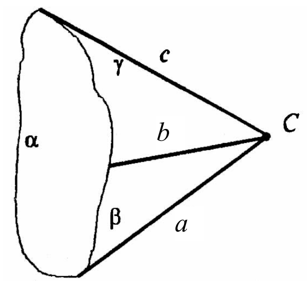
[1] Условия заданий приводятся в учебных целях и в необходимом объеме как иллюстративный материал. Имя автора и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги. (Ст. 19 п. 2 закона РФ об авторском праве и смежных правах от 9 июня 1993 г.).

3. Точки А, В, С лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.



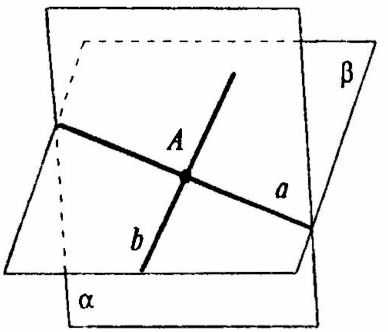
По аксиоме 2, так как α и β имеют общие точки А, В и С, то плоскости α и β пересекаются по прямой, которая содержит эти точки. Следовательно, А, В, С принадлежат одной прямой. Что и требовалось доказать.

4. Даны три различные попарно пересекающиеся плоскости. Докажите, что если две из прямых пересечения этих плоскостей пересекаются, то третья прямая проходит через точку их пересечения.



Допустим плоскости α и β пересекаются по прямой *a*, а плоскости β и γ — по прямой *b*, причем прямые *a* и *b* пересекаются в точке С. Тогда по аксиоме 2 точка С принадлежит всем трем плоскостям α, β, γ, а значит, и третьей прямой *c* пересечения плоскостей α и γ. Что и требовалось доказать.

5. Даны две плоскости, пересекающиеся по прямой *a*, и прямая *b*, которая лежит в одной из этих плоскостей и пересекает другую. Докажите, что прямые *a* и *b* пересекаются.



Пусть α и β пересекаются по прямой a. И прямая b содержится в β и пересекает α в точке A. Точка A — общая точка двух плоскостей. Тогда по аксиоме 2 точка A принадлежит a. То есть a и b пересекаются. Что и требовалось доказать.

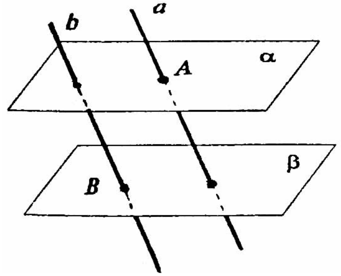
6. Четыре точки не лежат в одной плоскости. Могут ли какие-нибудь три из них лежать на одной прямой? Объясните ответ.

Если какие-нибудь три точки лежат на одной прямой, тогда через эту прямую и четвертую точку можно провести плоскость (теорема 16.1). В этой плоскости лежат все четыре точки. А это противоречит условию задачи. Значит, никакие три точки не могут лежать на одной прямой.

7. Докажите, что через прямую можно провести две различные плоскости.

Задача решена в учебнике п. 136 стр. 5.

8. Даны две непересекающиеся плоскости. Докажите, что прямая, пересекающая одну из этих плоскостей, пересекает и другую.

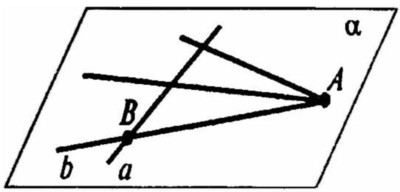


Через произвольную точку B плоскости β проведем прямую *b* параллельно прямой *a*. Так как прямая *a* пересекает плоскость α, то параллельная ей прямая *b* пересекает эту плоскость (если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую: см. задачу №15 §16), а *b* пересекает плоскость β. Значит, прямая *a* пересекает плоскость β. Что и требовалось доказать.

9. Даны две различные прямые, пересекающиеся в точке A. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через точку A, лежат в одной плоскости.

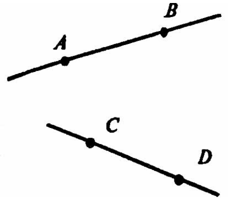
Задача решена в учебнике п. 137 стр. 6.

10. Докажите, что все прямые, пересекающие данную прямую и проходящие через данную точку вне прямой, лежат в одной плоскости.



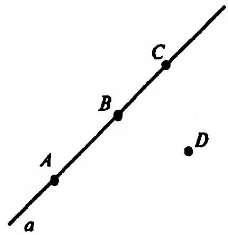
Проведем плоскость α через данную прямую *a* и точку A (по теореме 16.1). Если прямая *b* проходит через точку A и пересекает прямую *a* в точке B, то прямая *b* имеет с плоскостью α две различные общие точки (A и B), а, значит, лежит в полученной плоскости α (по теореме 16.2). Что и требовалось доказать.

11. Докажите, что если прямые AB и CD не лежат в одной плоскости, то прямые AC и BD также не лежат в одной плоскости.



Допустим, что прямые AC и BD лежат в одной плоскости α, но тогда и AB и CD лежат в той же плоскости α, так как имеют с ней 2 различные общие точки. Получаем противоречие с условием задачи. Значит AC и CD не лежат в одной плоскости. Что и требовалось доказать.

12. Даны четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько можно провести различных плоскостей, проходящий через три из этих точек? Объясните ответ.



Четыре различных плоскости.

Плоскость задается тремя точками не лежащими на одной прямой (теорема 16.3). Если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, то все они и никакие три из них не лежат на одной прямой. Так что имеем четыре возможные тройки точек (A, B, C), (A, B, D), (A, C, D) и (B, C, D), которые определяют четыре различные плоскости.

13. Можно ли провести плоскость через три точки, если они лежат на одной прямой? Объясните ответ.

Задача решена в учебнике п. 141 стр. 11.

14. Даны четыре точки. Известно, что прямая, проходящая через любые две из этих точек, не пересекается с прямой, проходящей через другие две точки. Докажите, что данные четыре точки не лежат в одной плоскости.

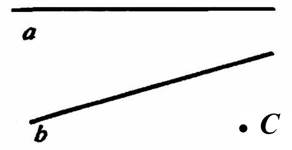
Допустим, что точки A, B, C, D лежат в одной плоскости. Тогда прямые AB и CD, AC и BD параллельны, поэтому точки A, B, C, D являются вершинами параллелограмма ABCD. Но тогда диагонали AD и BC этого параллелограмма должны пересекаться, что противоречит условию задачи. Значит A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Что и требовалось доказать.

§ 16. Параллельность прямых и плоскостей

1. Докажите, что если прямые AB и CD скрещивающиеся, то прямые AC и BD тоже скрещивающиеся.

Если прямые AC и BD не являются скрещивающимися, то они могут быть пересекающимися или параллельными, но в обоих случаях они лежат в одной плоскости α, тогда $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $D \in \alpha$. Таким образом, прямые AB и CD также лежат в одной плоскости, что невозможно по условию так как AB и CD скрещивающиеся. Значит, AC и BD – скрещивающиеся. Что и требовалось доказать.

2. Можно ли через точку C, не принадлежащую скрещивающимся прямым *a* и *b*, провести две различные прямые, каждая из которых пересекает прямые *a* и *b*? Объясните ответ.

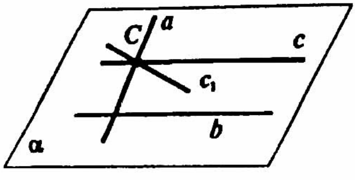


Нельзя. Для того, чтобы провести прямую из точки C, пересекающую прямые *a* и *b*, точка C должна лежать в одной плоскости с *a* и *b*. Но *a* и *b* не лежат в одной плоскости, так как они скрещивающиеся прямые.

3. Докажите, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.

Задача решена в учебнике п. 141 стр. 11.

4. Прямые *a* и *b* пересекаются. Докажите, что все прямые, параллельные прямой *b* и пересекающие прямую *a*, лежат в одной плоскости.

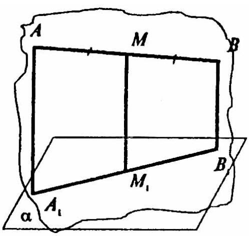


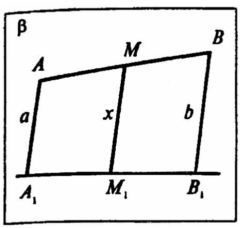
Пусть c — произвольная прямая, параллельная прямой b, пересекающая прямую a. Прямые a и b обращают плоскость α. Проведем через точку С пересечения прямых a и c в плоскости α прямую c_1, параллельную b. По теореме 17.1 через точку С можно провести только одну прямую, параллельную b. А, значит, прямая c совпадает с прямой c_1, а, значит, принадлежит плоскости α.

Итак, любая прямая c, параллельная b и пересекающая прямую a, лежит в плоскости α.

5. Через концы отрезка АВ и его середину М проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках A_1, B_1 и M_1. Найдите длину отрезка MM_1, если отрезок АВ не пересекает плоскость и если:
1) $AA_1 = 5$ м, $BB_1 = 7$ м;
2) $AA_1 = 3{,}6$ дм, $BB_1 = 4{,}8$ дм;
3) $AA_1 = 8{,}3$ см, $BB_1 = 4{,}1$ см;
4) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$.

Из решения задачи №4 следует, что прямые AA_1, MM_1, BB_1 лежат в одной плоскости β.





Значит точки A_1, B_1 и M_1 лежат на прямой A_1B_1 пересечения плоскостей α и β. Рассмотрим далее картинку в плоскости β. По теореме Фалеса M_1 середина отрезка A_1B_1. А, значит, MM_1 — средняя линия трапеции AA_1B_1B и по теореме о средней линии:

$MM_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1)$. Тогда:

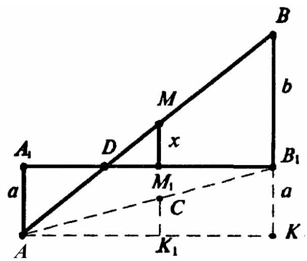
1) $MM_1 = \frac{1}{2}(5 + 7) = 6$ (м);

2) $MM_1 = \frac{1}{2}(3{,}6 + 4{,}8) = 4{,}2$ (дм);

3) $MM_1 = \frac{1}{2}(8{,}3 + 4{,}1) = 6{,}2$ (см),

4) $MM_1 = \frac{1}{2}(a + b)$.

6. Решите предыдущую задачу при условии, что отрезок AB пересекает плоскость.



Допустим, что $AA_1 < BB_1$, тогда как и в задаче №5 получаем рисунок.

Рассмотрим ΔBAB_1: Пусть MC — средняя линия треугольника и, значит, $MC = \frac{1}{2}BB_1$.

Рассмотрим ΔAA_1B_1: M_1C — средняя линия треугольника, поэтому $M_1C = \frac{1}{2}AA_1$.

Тогда $MM_1 = MC - M_1C = \frac{1}{2}BB_1 - \frac{1}{2}AA_1$.

Если $AA_1 \geq BB_1$, тогда аналогично получаем:

$MM_1 = \frac{1}{2}AA_1 - \frac{1}{2}BB_1$. Значит, $MM_1 = \frac{1}{2}|AA_1 - BB_1|$.

Тогда:

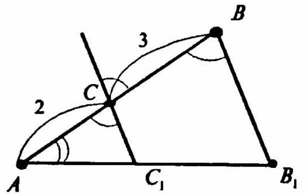
1) $MM_1 = \frac{1}{2}|5 - 7| = 1$ (м);

2) $MM_1 = \frac{1}{2}|3{,}6 - 4{,}8| = 0{,}6$ (дм);

3) $MM_1 = \frac{1}{2}|8{,}3 - 4{,}1| = 2{,}1$ (см);

4) $MM_1 = \frac{1}{2}|a - b|$.

7. Через конец A отрезка AB проведена плоскость. Через конец B и точку C этого отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка BB_1, если:
1) $CC_1 = 15$см, AC : BC = 2 : 3;
2) $CC_1 = 8{,}1$см, AB : AC = 11 : 9;
3) AB = 6см, AC : CC_1 = 2 : 5;
4) AC = a, BC = b; $CC_1 = c$.



Прямые BB_1 и CC_1 образуют плоскость β, которая содержит прямую AB и пересекает данную плоскость по прямой AB_1 так, что в плоскости β имеются два подобных треугольника ACC_1 и ABB_1 (угол A у них общий, а ∠C и ∠B так как прямые CC_1 и BB_1 параллельны). Тогда:

1) $\frac{AB}{AC} = \frac{BB_1}{CC_1}$, то есть $\frac{AC+BC}{AC} = \frac{BB_1}{15}$, $1 + \frac{BC}{AC} = \frac{BB_1}{15}$,

$1 + \frac{3}{2} = \frac{BB_1}{15}$, $BB_1 = 15 \cdot \frac{5}{2} = 37{,}5$ (см);

2) $\frac{AB}{AC} = \frac{BB_1}{CC_1}$, $BB_1 = \frac{AB}{AC} \cdot CC_1 = \frac{11}{9} \cdot 8{,}1 = 9{,}9$ (см);

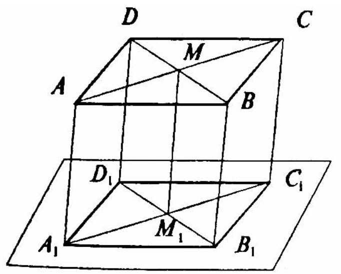
3) $\frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC}$; $BB_1 = \frac{CC_1}{AC} \cdot AB = \frac{5}{2} \cdot 6 = 15$ (см);

4) AB = AC + BC = $a + b$. Далее: $\frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC}$;

$BB_1 = \frac{AB \cdot CC_1}{AC} = \frac{c(a+b)}{a}$.

8. Даны параллелограмм и не пересекающая его плоскость. Через вершины параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках A_1, B_1, C_1 и D_1. Найдите длину отрезка DD_1, если:
1) $AA_1 = 2$ м, $BB_1 = 3$ м, $CC_1 = 8$ м;
2) $AA_1 = 4$ м, $BB_1 = 3$ м, $CC_1 = 1$ м;
3) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.

Пусть M — точка пересечения диагоналей параллелограмма ABCD. Проведем через M прямую, параллельную прямым AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1.



Она пересечет данную плоскость в точке M_1, так как если одна прямая пересекает плоскость, то и параллельная ей прямая пересекает плоскость. Пусть $DD_1 = x$. MM_1 – средняя линия трапеции ACC_1A_1, (следует из задачи 5). Но с другой стороны MM_1 – средняя линия трапеции DD_1B_1B. Так что $MM_1 = \frac{1}{2}(BB_1 + DD_1)$. Тогда

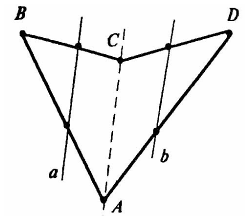
$\frac{AA_1 + CC_1}{2} = \frac{BB_1 + DD_1}{2}$, то есть $DD_1 = AA_1 + CC_1 - BB_1$. Тогда:

1) $DD_1 = 2 + 8 - 3 = 7$ (м);
2) $DD_1 = 4 + 1 - 3 = 2$ (м);
3) $DD_1 = a + c - b$.

9. Прямые a и b не лежат в одной плоскости. Можно ли провести прямую c, параллельную прямым a и b?

Если c параллельна a и b, то прямые параллельные (по теореме 17.2), а следовательно, лежат в одной плоскости, что противоречит условию. Так что нельзя.

10. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AB и BC, параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AD и CD.

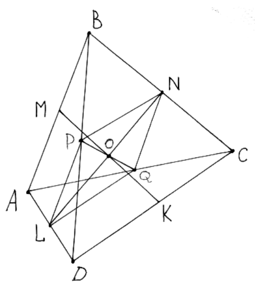


Пусть *a* – прямая, проходящая через середины AB и BC, а b — прямая, проходящая через середины CD и AD. Тогда в ΔABC: прямая *a* — средняя линия в ΔADC: прямая *b* — средняя линия. Так что прямая *a* параллельна AC, и прямая *b* параллельна AC, а, значит, прямые *a* и *b* параллельны. Что и требовалось доказать.

11. Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма (вершины пространственного четырехугольника не лежат в одной плоскости).

Задача решена в учебнике п. 142 стр. 13.

12. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что прямые, соединяющие середины отрезков AB и CD, AC и BD, AD и BC, пересекаются в одной точке.

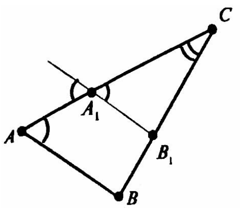


Пусть точки M, N, K, L, P, Q — середины отрезков AB, BC, CD, AD, BD, AC соответственно.

Из задачи №11 получаем, что отрезки МК и NL являются диагоналями параллелограмма MNKL с вершинами в серединах сторон четырехугольника ABCD. Значит, МК и NL пересекаются в некоторой точке О и делятся этой точкой пополам. Также отрезки PQ и NL являются диагоналями параллелограмма PNQL с вершинами в серединах сторон четырехугольника ABCD, образованного этими сторонами. Значит, PQ и NL пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, а так как О — середина NL, то, значит, О — середина PQ. И PQ и NL пересекаются в точке О. Так что искомые прямые MK, NL и PQ, соединяющие середины отрезков AB и CD, BC и AD, AC и BD соответственно пересекаются в одной точке О, что и требовалось доказать.

13. Дан треугольник ABC. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC этого треугольника в точке A_1, а сторону BC — в точке B_1. Найдите длину отрезка A_1B_1, если:

1) $AB = 15$ см, $AA_1 : AC = 2 : 3$;
2) $AB = 8$ см, $AA_1 : A_1C = 5 : 3$;
3) $B_1C = 10$ см, $AB : BC = 4 : 5$;
4) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$.



Так как AB параллельна плоскости, то $AB \parallel A_1B_1$, так как A_1B_1 лежит в плоскости. А, значит, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по двум углам). Тогда:

1) $\dfrac{A_1C}{AC} = \dfrac{A_1B_1}{AB}$, $A_1B_1 = AB \cdot (\dfrac{A_1C}{AC}) = AB \cdot (\dfrac{AC - AA_1}{AC}) =$

$= AB(1 - \dfrac{AA_1}{AC}) = 15(1 - \dfrac{2}{3}) = 5$ (см);

2) $\dfrac{AC}{A_1C} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$, $\dfrac{A_1C + AA_1}{A_1C} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$, $1 + \dfrac{5}{3} = \dfrac{8}{A_1B_1}$,

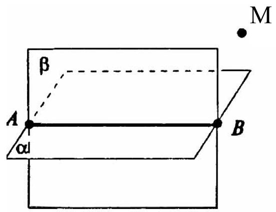
$A_1B_1 = 8 : \dfrac{8}{3} = 3$ (см);

3) $\dfrac{A_1B_1}{B_1C} = \dfrac{AB}{BC}$, $A_1B_1 = \dfrac{AB \cdot B_1C}{BC} = \dfrac{10 \cdot 4}{5} = 8$ (см);

4) $AC = AA_1 + A_1C = a + c$. Далее $\dfrac{A_1B_1}{A_1C} = \dfrac{AB}{AC}$,

$A_1B_1 = \dfrac{AB \cdot A_1C}{AC} = \dfrac{bc}{a+c}$.

14. Через данную точку проведите прямую, параллельную каждой из двух данных пересекающихся плоскостей.

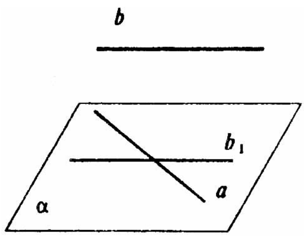


Пусть данные плоскости пересекаются по прямой AB. Проведем через точку M прямую, параллельную прямой AB. Она единственная (теорема 17.1). Это и будет искомая прямая.

15. Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

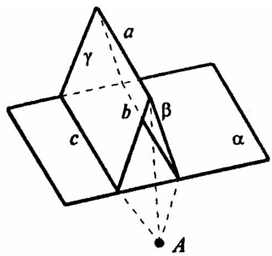
Задача решена в учебнике п. 143 стр. 13.

16. Докажите, что через любую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой.



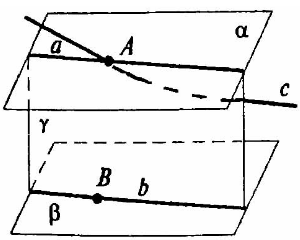
Пусть a и b скрещивающиеся прямые. Через любую точку на прямой a проведем через прямую b_1 параллельную прямой b. Тогда прямые a и b_1 образуют плоскость α. По теореме 17.3 она будет параллельна прямой b. Что и требовалось доказать.

17. Докажите, что если две плоскости, пересекающиеся по прямой a, пересекают плоскость α по параллельным прямым, то прямая a параллельна плоскости α.



Пусть плоскости β и γ пересекаются по прямой a и пересекают плоскость α по параллельным прямым b и c. Если прямая a не параллельна плоскости α, то она пересекает плоскость α в некоторой точке А. Тогда точка А принадлежит всем трем плоскостям α, β и γ, а, значит, и прямым b и c. Таким образом, прямые b и c имеют общую точку А, что противоречит условию. Так что a параллельна α, что и требовалось доказать.

18. Докажите, что если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.



Допустим плоскости α и β параллельны, а прямая c пересекает плоскость α в точке А.

Предположим, что эта прямая не пересекается с плоскостью β. Возьмем в плоскости β точку B и проведем плоскость γ через прямую c и точку B. Плоскость γ пересекается с плоскостями α и β по параллельным прямым a и b (теорема 17.6). Но по предположению, прямая c параллельна плоскости β, а поэтому прямая c параллельна и прямой b (теорема, обратная теореме 17.3).

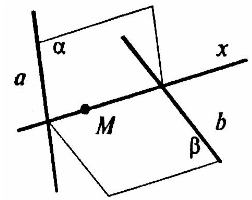
Получилось, что в плоскости γ через точку A к прямой b проведены две различные параллельные прямые a и c, что противоречит аксиоме. Значит предположение неверно и c пересекает β.

19. Докажите, что через две скрещивающиеся прямые можно провести параллельные плоскости.

Задача решена в учебнике п. 144 стр. 14.

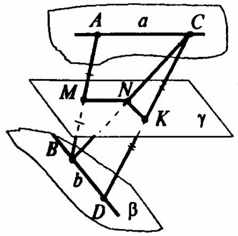
20. Через данную точку пространства проведите прямую, пересекающую каждую из двух скрещивающихся прямых. Всегда ли это возможно?

Пусть a и b — скрещивающиеся прямые, M — данная точка. Искомая прямая x вместе с каждой из этих прямых a и b определяет плоскость (аксиома 3).Пусть α и β – это плоскости.



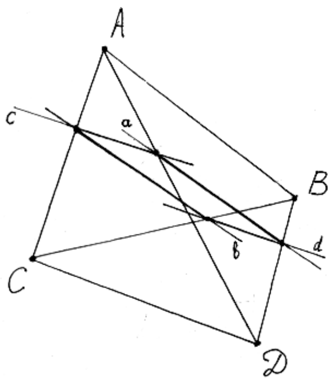
Плоскости α и β однозначно определяются точкой M и прямыми a и b (теорема 16.1). Наоборот плоскости α и β, которые мы можем построить по точке M и прямым a, b в пересечении дадут прямую x. Если прямая x пересекает прямые a и b, то x — искомая прямая. Если x будет параллельна прямым a и b, то, значит, решения не существует. Это будет если точка M принадлежит плоскости, проведенной через прямую b параллельно прямой a или же если точка M лежит в плоскости, проведенной через прямую a параллельно прямой b. Если же точка M лежит на прямой a, на прямой b, то можно провести бесконечно много прямых, удовлетворяющих условию задачи.

21. Докажите, что геометрическое место середины отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость, параллельная этим прямым.



Пусть середина отрезка AB – точка M, где A и B принадлежат скрещивающимся прямым a и b. Проведем через прямые a и b параллельные плоскости α и β, а через точку M проведем плоскость γ параллельно плоскостям α и β. Тогда все рассматриваемые середины отрезков принадлежат плоскости γ. Что и требовалось доказать.

22. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что любая плоскость, параллельная прямым AB и CD, пересекает прямые AC, AD, BD и BC в вершинах параллелограмма.



Допустим некоторая плоскость α параллельна прямым AB и CD.

Согласно утверждению: если плоскость β, проходит через прямую a, параллельную другой плоскости α, и пересекает эту плоскость по второй прямой b, то прямые a и b параллельны. Из параллельности прямой AB и плоскости α следует, что плоскости определенные тремя точками ABC и ABD пересекают плоскость α по прямым a и b, параллельным прямой AB. Из теоремы 17.2 следует, что прямые a и b параллельны.

Из параллельности прямой CD и плоскости α следует, что плоскости ACD и BCD пересекают плоскость α прямым c и d параллельным прямой CD, а, значит, $c||d$. Каждая из точек пересечения плоскости α с прямыми AC, AD, BD, BC лежат в плоскости α и является точкой пересечения каких-то двух не параллельных из прямых a, b, c, d. Например, точка пересечения прямой AC с плоскостью α принадлежит плоскостям ABC и ACD, а значит является точкой пересечения прямых b и c, где b и c — прямые пересечения плоскости α с плоскостями ABC и ACD соответственно.

Так как прямые a и b, c и d попарно параллельны, то построенная по условию задачи фигура есть параллелограмм. Что и требовалось доказать.

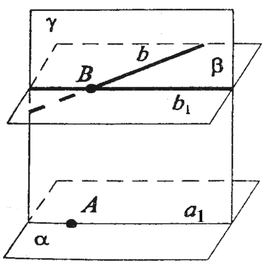
23. Плоскости α и β параллельны плоскости γ. Могут ли плоскости α и β пересекаться?

Задача решена в учебнике п. 145 стр. 15.

24. Плоскости α и β пересекаются. Докажите, что любая плоскость γ пересекает хотя бы одну из плоскостей α, β.

Если бы плоскость γ не пересекалась ни с одной из плоскостей α, β, то плоскости α и β были бы параллельны плоскости γ, а значит и между собой, что противоречит условию задачи (так как α и β пересекаются). Получаем, что плоскость x пересекает хотя бы одну из плоскостей α или β, что и требовалось доказать.

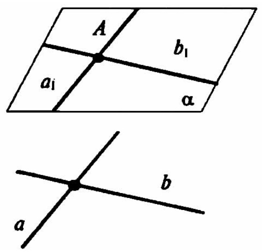
25. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку параллельно данной плоскости, лежат в одной плоскости.



Пусть B — данная точка и α — данная плоскость. Проведем через точку B плоскость β, параллельную плоскости α.

Пусть b произвольная прямая, проходящая через точку B, параллельно α. Возьмем в плоскости α произвольную точку A и проведем через точку A и прямую b плоскость γ. Тогда плоскость γ пересекает плоскости α и β по параллельным прямым a_1 и b_1, но прямая b_1 проходит через точку B, а прямая b тоже лежит в плоскости γ, и проходит через точку B и по теореме 17.3 (обратной) параллельна прямой a_1. Тогда по аксиоме прямые b и b_1 должны совпадать, поэтому прямая b лежит в плоскости β, что и требовалось доказать.

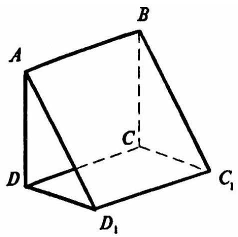
26. Через данную точку проведите плоскость, параллельную каждой из двух пересекающихся прямых. Всегда ли это возможно?



Проведем через данную точку A прямые a_1 и b_1, параллельные данным прямым a и b, (теорема 17.3). Прямые a_1 и b_1 определяют искомую плоскость α.

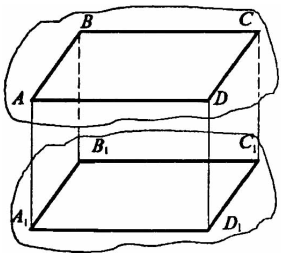
Эту плоскость можно построить, только, при условии, если точка A не лежит в плоскости, образованной прямыми a и b.

27. Параллелограммы ABCD и ABC_1D_1 лежат в разных плоскостях. Докажите, что четырехугольник, CDD_1C_1 тоже параллелограмм.



Противолежащие стороны параллелограммов параллельны и равны, поэтому $CD = AB = C_1D_1$. Получаем, что прямые CD и C_1D_1 параллельны прямой AB и, следовательно, параллельны между собой (теорема 17.2). Значит четырехугольник CC_1D_1D это параллелограмм. Что и требовалось доказать.

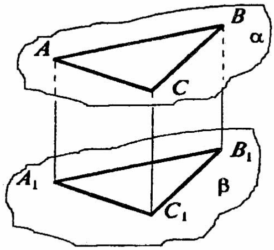
28. Через вершины параллелограмма ABCD. лежащего в одной из двух параллельных плоскостей, проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ тоже параллелограмм.



По свойству параллельных плоскостей и теореме 17.2, получаем что:

$A_1B_1 \parallel AB \parallel CD \parallel C_1D_1$, а также $A_1D_1 \parallel AD \parallel BC \parallel B_1C_1$. Поэтому $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм (по определению). Что и требовалось доказать.

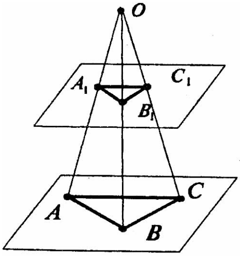
29. Через вершины треугольника ABC, лежащего в одной из двух параллельных плоскостей, проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.



По свойству параллельных плоскостей $AC \| A_1C_1$, $BC \| B_1C_1$ и $AB \| A_1B_1$. Также $AA_1 \| BB_1 \| CC_1$. Так что четырехугольники AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1A_1A параллелограммы (их противолежащие стороны попарно параллельны). Так как у параллелограмма противолежащие стороны равны, то $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам (3-й признак равенства треугольников). Что и требовалось доказать.

30. Три прямые, проходящие через одну точку, пересекают данную плоскость в точках A, B, C, а параллельную ей плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

Пусть O — данная точка.



Рассмотрим пары треугольников OA_1B_1 и OAB, OB_1C_1 и OBC, OC_1A_1 и OCA.

Так как плоскости α и β параллельны, то эти треугольники подобны.

Из подобия следует, что:

$$\frac{OB_1}{OB} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA}; \; \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{OB_1}{OB} = \frac{OC_1}{OC};$$

$$\frac{O_1C_1}{OC} = \frac{OA_1}{OA} = \frac{A_1C_1}{AC}.$$

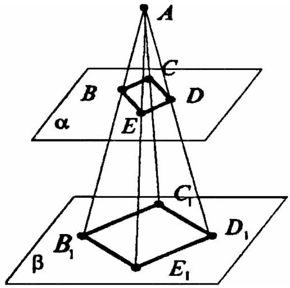
Из этих пропорций получаем, что $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$. А значит, по признаку подобия треугольников (по трем сторонам):: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Что и требовалось доказать.

31. Докажите, что если четыре прямые, проходящие через точку A, пересекают плоскость α в вершинах параллелограмма, то они пересекают любую плоскость, параллельную α и не проходящую через A, тоже в вершинах параллелограмма.

Пусть A — данная точка, BCDE — данный параллелограмм. Рассмотрим плоскости BAC, CAD, DAE, EAB.

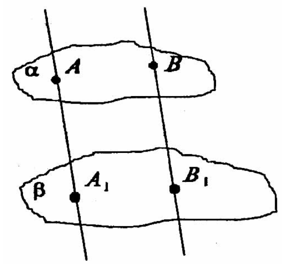
По теореме о пересечении двух параллельных плоскостей третьей: $BC \| B_1C_1$, $CD \| C_1D_1$, $ED \| E_1D_1$, $BE \| B_1E_1$. Так что $B_1C_1 \| BC \| ED \| E_1D_1$, то есть $B_1C_1 \| E_1D_1$ и $B_1E_1 \| BE \| CD \| C_1D_1$, то есть $B_1E_1 \| C_1D_1$.

А, значит, $B_1C_1D_1E_1$ — также параллелограмм. Что и требовалось доказать.



32. Даны две параллельные плоскости. Через точки A и B одной из этих параллельных плоскостей проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1 и B_1. Чему равен отрезок A_1B_1, если $AB = a$?

Проведем через прямые AA_1 и BB_1 плоскость. Она пересекает плоскости α и β по параллельным прямым AB и A_1B_1. А значит четырехугольник AA_1BB_1 — параллелограмм, так как $AB \| A_1B_1$ и $AA_1 \| BB_1$. У параллелограмма противолежащие стороны равны, поэтому $AB = A_1B_1 = a$.



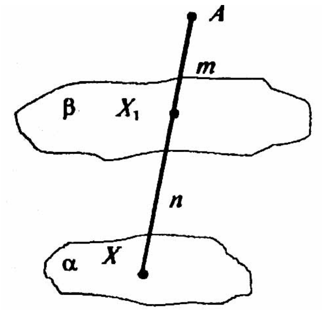
33. Даны две параллельные плоскости α_1 и α_2 и точка A, не лежащая ни в одной из этих плоскостей. Через т. A проведена произвольная прямая. Пусть X_1

и X_2 — точки пересечения ее с плоскостями α_1 и α_2. Докажите, что отношение длины отрезков $AX_1 : AX_2$ не зависит от взятой прямой.

Задача решена в учебнике п. 146 стр. 16.

34. Точка А лежит вне плоскости α, X — произвольная точка плоскости α, X_1 точка отрезка AX, делящая его в отношении $m : n$. Докажите, что геометрическое место точек X_1 есть плоскость, по параллельная плоскости α.

Возьмем в плоскости α произвольную точку X, построим соответствующую точку X_1 ($AX_1 : XX_1 = m : n$) и проведем через точку X_1 плоскость β, по параллельную α. Докажем, что плоскость β — соответствующее геометрическое место точек.

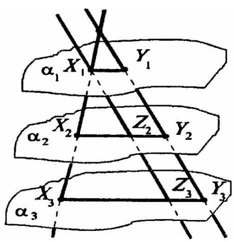


1) Для любой точки Y плоскости α точка Y_1 пересечения прямой $AY_1 : Y_1Y = AX_1 : X_1X = m : n$, отсюда следует, что любая точка плоскости β удовлетворяет данному условию.

2) Если для точки Y плоскости α точка Y_2 делит отрезок AY в отношении $m : n$, то из соотношения пункта 1 следует, что точка Y_2 совпадает с точкой Y_1 и поэтому принадлежит плоскости β.

Два указанных утверждения означают, что рассматриваемое геометрическое место точек есть параллельная плоскости α плоскость β.

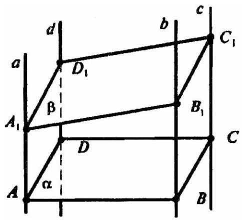
35. Даны три параллельные плоскости α_1, α_2, α_3. Пусть X_1, X_2, X_3 — точки пересечения этих плоскостей с произвольной прямой. Докажите, что отношение длин отрезков $X_1X_2 : X_2X_3$ не зависит от прямой, т.е. одинаково для любых двух прямых.



Предположим, что другая прямая пересекает плоскости α_1, α_2, α_3 в точках Y_1, Y_2, Y_3. Через точку X_1 проведем прямую параллельную второй прямой и пересекает плоскости α_2 и α_3 соответственно в точках Z_2 и Z_3. Из задачи 33 следует, что $\frac{X_1X_2}{X_2X_3} = \frac{X_1Z_2}{Z_2Z_3}$ (из подобия треугольников $X_2X_1Z_2$ и $X_3X_1Z_3$).

По свойству отрезков параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями, $X_1Z_2 = Y_1Y_2$ и $Z_2Z_3 = Y_2Y_3$, поэтому $\frac{X_1X_2}{X_2X_3} = \frac{Y_1Y_2}{Y_2Y_3}$, т.е. величина постоянная.

36. Даны четыре параллельные прямые. Докажите, что если какая-нибудь плоскость пересекает эти прямые в вершинах параллелограмма, то любая плоскость, не параллельная этим прямым, пересекает их в вершинах некоторого параллелограмма.



Пусть a, b, c, d — данные прямые, и плоскость α пересекает эти прямые в вершинах параллелограмма ABCD.

Пусть другая плоскость пересекает эти прямые в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Плоскости ABB_1A_1 и CDD_1C_1, параллельны, поскольку прямые AB и CD, и прямые a и d параллельны. А, значит, плоскость β пересекает эти плоскости по параллельным прямым A_1B_1 и C_1D_1.

Аналогично устанавливается параллельность прямых B_1C_1 и A_1D_1. Так что $A_1B_1C_1B_1$ — параллелограмм. Что и требовалось доказать.

37. Дана параллельная проекция треугольника. Как построить проекции медиан этого треугольника?

Задача решена в учебнике п. 147 стр. 18.

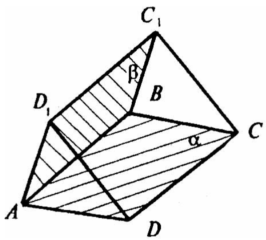
38. Дана параллельная проекция треугольника. Чем изобразится проекция средней линии треугольника?

Проекция средней линии треугольника изобразится средней линией проекции треугольника, так как середины отрезков проектируются в середины проекций этих отрезков.

39. Может ли при параллельном проектировании параллелограмма получиться трапеция? Объясните ответ.

Не может, так как при параллельном проектировании параллельные прямые переходят в параллельные прямые, а значит, параллельной проекцией параллелограмма не может быть трапеция.

40. Может ли проекция параллелограмма при параллельном проектировании быть квадратом?



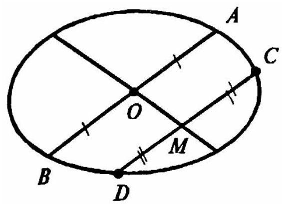
Докажем, что может. Построим квадрат ABCD в плоскости α, и проведем через прямую AB плоскость β, отличную от плоскости α. Построим в плоскости β параллелограмм ABC_1D_1.

Рассмотрим четырехугольник CDD_1C_1 — это параллелограмм. Так как $CD \parallel AB \parallel C_1D_1$ и $CD = AB = C_1D_1$, поэтому $DD_1 \parallel CC_1$. Получили, что при проектировании параллелограмма ABC_1D_1 на плоскость α параллельно прямой CC_1, получился как раз квадрат ABCD.

41. Докажите, что параллельная проекция центрально-симметричной фигуры также является центрально-симметричной фигурой.

Проекция центра симметрии фигуры будет являться центром симметрии проекции этой фигуры, так как при параллельном проектировании середина отрезка перейдет в середину его проекции. Что и требовалось доказать.

42. Дана параллельная проекция окружности и ее диаметра. Как построить проекцию перпендикулярного диаметра?



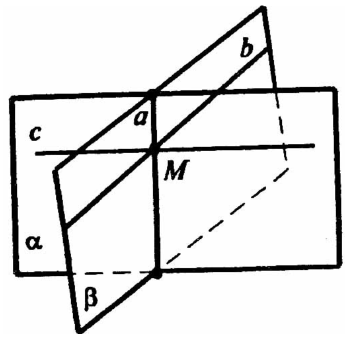
Диаметр, перпендикулярный данному, делит пополам любую хорду, параллельную данному диаметру. Так что проведем хорду CD, параллельную данному диаметру AB, и найдем середину M этой хорды. Тогда прямая OM, где O — центр окружности содержит перпендикулярный AB диаметр.

§17. Перпендикулярность прямых и плоскостей

1. Докажите. что через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.

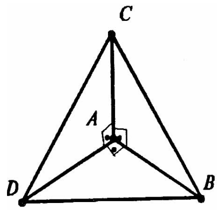
Задача решена в учебнике п. 148, стр. 24.

2. Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести две различные перпендикулярные ей прямые.



Проведем через прямую a две различные плоскости α и β. В этих плоскостях через любую точку M проведем перпендикулярные к данной прямой прямые c и b. Они различны, так как лежат в разных плоскостях. Таким образом через любую точку M прямой a можно провести 2 разные перпендикулярные к a прямые.

3. Прямые AB, AC и AD попарно перпендикулярны. Найдите отрезок CD, если:
1) AB = 3 см, BC = 7 см, AD = 1,5 см;
2) BD = 9 см, BC = 16 см, AD = 5 см;
3) AB = b, BC = a, AD = d;
4) BD = c, BC = a, AD = d.



Так как прямые AB, AC, AD попарно перпендикулярны, то они образуют 3 прямоугольных треугольника, со смежными сторонами. Тогда:

1. В ΔABC:

$AB = 3$см, $BC = 7$см, значит, $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 49 - 9 = 40$ (см).

Далее в ΔACD:

$CD^2 = AC^2 + AD^2 = 40 + 2{,}25 = 42{,}25$ (см^2), тогда $CD = 6{,}5$ (см).

2. В ΔABD:

$AB^2 = DB^2 - AD^2 = 81 - 25 = 56$ (см^2).

Далее в ΔABC:

$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 256 - 56 = 200$ (см^2); $AC^2 = 200$см^2.

Далее в ΔCAD:

$DC^2 = AC^2 + AD^2 = 200 + 25 = 225$ (см^2), то есть $DC = 15$см.

3. В ΔCAB : $AC^2 = BC^2 - AB^2$, то есть $AC^2 = a^2 - b^2$.

Далее в ΔCAD : $CD^2 = AC^2 + AD^2 = (a^2 - b^2) + d^2$, значит,

$CD = \sqrt{a^2 - b^2 + d^2}$.

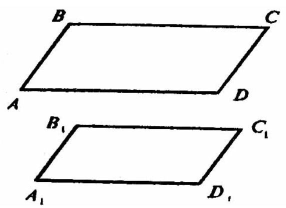
4. В ΔADB : $AB^2 = DB^2 - AD^2 = c^2 - d^2$.

Далее в ΔABC : $AC^2 = BC^2 - AB^2 = a^2 - (c^2 - d^2)$.

И в ΔACD : $DC^2 = AC^2 + AD^2 = (a^2 - c^2 + d^2) + d^2$, тогда

$DC = \sqrt{a^2 - c^2 + 2d^2}$.

4. Стороны четырехугольника ABCD и прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ соответственно параллельны. Докажите, что ABCD — прямоугольник.

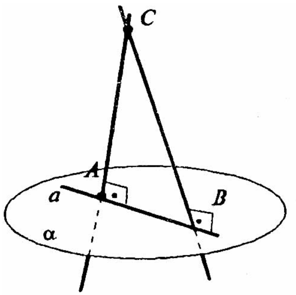


Так как пары сторон AB и BC и A_1B_1 и B_1C_1 параллельны по условию, то $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ — так как это углы с сонаправленными сторонами. Значит, $\angle ABC = 90°$.

Аналогично доказывается, что $\angle BCD$, $\angle CDA$, $\angle DAB$ так же равны 90°.

Таким образом четырехугольник ABCD — прямоугольник. Что и требовалось доказать.

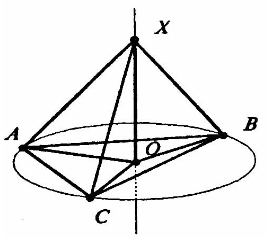
5. Докажите, что через точку, не лежащую в данной плоскости, нельзя провести более одной прямой, перпендикулярной этой плоскости.



Допустим, что прямые *a* и *b*, проходящие через точку C, перпендикулярны не проходящей через точку C плоскости α. Пусть они пересекают плоскость α в точках A и B. Но тогда эти точки должны совпасть, иначе получится ΔABC с двумя прямыми углами, что не может быть. Прямые *a* и *b* имеют две общие точки C и A, так что и по аксиоме I_2 эти прямые должны совпасть. Что и требовалось доказать.

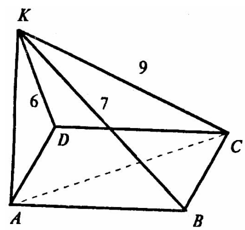
6. Через центр описанной около треугольника окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от вершины треугольника.

Пусть ABC — данный треугольник, O — центр описанной около треугольника окружности, X — любая точка на перпендикулярной ΔABC прямой.



Тогда поскольку O – центр описанной окружности, то OA = OB = =OC = R. Тогда XA = XB = XC – как наклонные с равными проекциями. Что и требовалось доказать.

7. Через вершину A прямоугольника ABCD проведена прямая AK, перпендикулярная его плоскости. Расстояние от точки K до других вершин прямоугольника равны 6 м, 7 м и 9 м. Найдите отрезок AK.



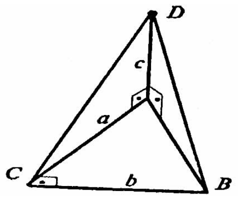
Пусть ABCD — прямоугольник, $AK \perp ABCD$. Значит KC = 9м; пусть KB = 7м, KD = 6м.

$\angle KBC = 90°$ (по теореме о трех перпендикулярах), поэтому $BC^2 = =KC^2 - KB^2 = 9^2 - 7^2 = 32$ (м^2) (по теореме Пифагора).

Далее $AD^2 = BC^2$ (так как ABCD — прямоугольник). Поскольку $KA \perp AD$, то

$$AK = \sqrt{KD^2 - AD^2} = \sqrt{36-32} = \sqrt{4} = 2 \text{ (м)}.$$

8. Через вершину острого угла прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD, перпендикулярная плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до вершин B и C, если AC = a, BC = b, AD = c.



AD⊥ABC, а, значит, треугольник CAD — прямоугольный. Тогда $DC^2 = AD^2 + AC^2 = a^2 + c^2$; $DC = \sqrt{a^2 + c^2}$.

ΔABC — прямоугольный (по условию). По теореме Пифагора получаем, что:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = a^2 + b^2$.

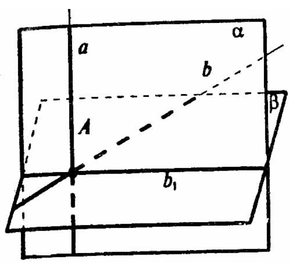
Далее ΔDAB — прямоугольный, так что $DB^2 = AD^2 + AB^2 =$

$= c^2 + a^2 + b^2$; $DB = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

9. Докажите, что через данную точку прямой можно провести одну и только одну перпендикулярную ей плоскость.

Задача решена в учебнике п. 150, стр. 26.

10. Через точку A прямой a проведены перпендикулярные ей плоскость β и прямая b. Докажите, что прямая b лежит в плоскости β.



Проведем через прямые a и b плоскость α. Она пересечет плоскость β по прямой b_1, перпендикулярной прямой a. Так как b_1 лежит в β. В плоскости α прямые b и b_1 должны совпадать как две перпендикулярные к прямой a прямые, проходящие через одну точку. Значит прямая b лежит в плоскости β, что и требовалось доказать.

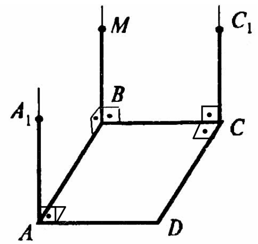
11. Докажите, что через данную точку плоскости можно провести одну и только одну перпендикулярную ей прямую.

Задача решена в учебнике п. 150 стр. 26.

12. Докажите, что через любую точку A можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости α.

Задача решена в учебнике п. 151 стр. 27.

13. Через вершину квадрата ABCD проведена прямая BM, перпендикулярная его плоскости. Докажите, что:
1) прямая AD перпендикулярна плоскости прямых AB и BM;
2) прямая CD перпендикулярна плоскости прямых BC и BM.

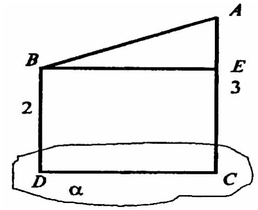


1) В плоскости ABM проведем $AA_1 \parallel BM$. Тогда $AA_1 \perp AD$ (по признаку перпендикулярности прямых). $AB \perp AD$ (по условию), значит, AD перпендикулярна плоскости ABM (по теореме 18.2).

2) В плоскости MBC проведем $CC_1 \parallel BM$. Тогда $CD \perp CC_1$ (по признаку перпендикулярности прямых). $CD \perp CC_1$ и $CD \perp BC$ (по условию), значит, CD перпендикулярна плоскости MBC (по теореме 18.2). Что и требовалось доказать.

14. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α, пересекающие ее в точках C и D соответственно. Найдите расстояние между точками A и B, если AC = 3 м, BD = 2 м, CD = 2,4 м и отрезок AB не пересекает плоскость α.

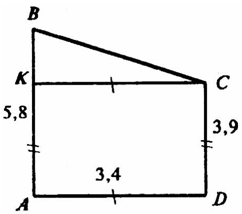
Проведем BE || DC, тогда BE ⊥ AC. Так что



EC = BD = 2 м. Значит, AE = AC – EC = 3 – 2 = 1 (м).
Далее, BE = DC = 2,4 м. И в ÄABE по теореме Пифагора.
$AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{1^2 + 2,4^2} = 2,6$ (м).

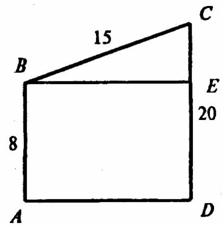
15. Верхние концы двух вертикально стоящих столбов, удаленных на расстояние 3,4м, соединены перекладиной. Высота одного столба 5,8 м, а другого — 3,9 м. Найдите длину перекладины.

Проведем KC ⊥ AB.
Тогда CD = AK = 3,9 м, так что
BK = AB – AK = 5,8 – 3,9 = 1,9 (м).
Далее AD = KC = 3,4 м.



Поэтому в ÄBKC по теореме Пифагора получаем:
$BC = \sqrt{BK^2 + KC^2} = \sqrt{1,9^2 + 3,4^2} = \sqrt{15,17} \approx 3,9$ (м).

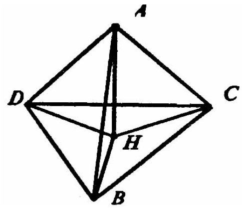
16. Телефонная проволока длиной 15 м протянута от телефонного столба, где она прикреплена на высоте 8 м, от поверхности земли, к дому, где ее прикрепили на высоте 20 м. Найдите расстояние между домом и столбом, предполагая, что проволока не провисает.

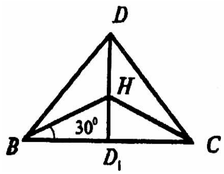


Проведем BE $\perp$ CD. Тогда AB = DE = 8 м, и
CE = CD – ED = 20 – 8 = 12 (м).
Далее в ÄBCE по теореме Пифагора получаем:

$$BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = \sqrt{225 + 144} = \sqrt{81} = 9 \text{ (м)}.$$

17. Точка A находится на расстоянии a от вершин равностороннего треугольника со стороной a. Найдите расстояние от точки A до плоскости треугольника.





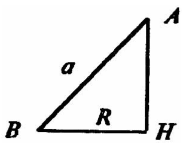
Пусть ÄBCD — равносторонний. Проведем AH $\perp$ (BCD).

Так как AB = AC = AD = a, то проекции наклонных также равны, то есть:

HB = HC = HD.

Значит, H — центр описанной около ΔBCD окружности, радиус которой $HB = R = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

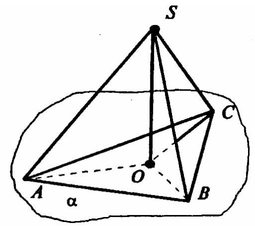
Далее так как AH $\perp$ (BCD), то треугольник AHB прямоугольный.



И по теореме Пифагора получаем:

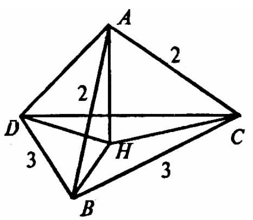
$$AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

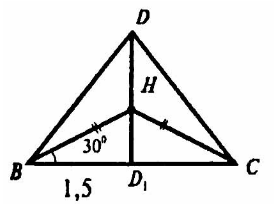
18. Из точки S вне плоскости α проведены к ней три равные наклонные SA, SB, SC и перпендикуляр SO. Докажите, что основание перпендикуляра O является центром окружности, описанной около треугольника ABC.



Так как наклонные SA, SB, SC равны, то их проекции OA, OB, OC также равны, а это значит, что точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности. Что и требовалось доказать.

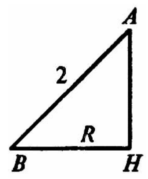
19. Стороны равностороннего треугольника равны 3 м. Найдите расстояние до плоскости треугольника от точки, которая находится на расстоянии 2 м от каждой из его вершин.





Проведем AH $\perp$ (BCD). Так как AB = AC = AD = 2 м, то проекции этих наклонных также равны: HB = HC = HD. Значит, H — центр описанной около ΔBCD окружности, так что

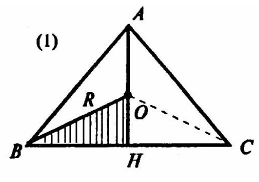
$$HB = R = \frac{BD}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \text{ (м)}.$$

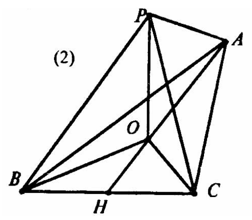


Далее так как AH⊥(BCD), то треугольник AHB прямоугольный, поэтому: $AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = \sqrt{4 - 3} = 1$ (м).

20. В равнобедренном треугольнике основание и высота равны 4 м. Данная точка находится на расстоянии 6 м от плоскости треугольника и на равном расстоянии от его вершин. Найдите это расстояние.

Пусть AH высота равнобедренного треугольника ABC с основанием BC и равными сторонами AB = AC. Нарисуем ΔABC на плоскости (1) и на проекционном чертеже (2). Пусть P данная точка.





Так как точка P равноудалена от точек A, B, C, т.е. PA = PB = =PC, то проекция O точки P на плоскость ABC — центр описанной около ΔABC окружности. Значит, точка O лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC, т.е. на прямой AH.

Рассмотрим ΔOBH. По теореме Пифагора:

$OB^2 = BH^2 + OH^2$; BH = BC : 2 = 2 м, а OB = R, тогда

OH = AH – AO = 4 – R, получаем:

$R^2 = 2^2 + (4 - R)^2$; $R^2 = 4 + 16 - 8R + R^2$;

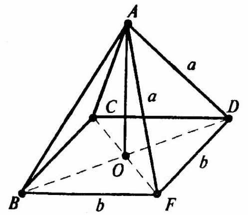
8R = 20; R = 2,5 м.

Далее в ÄPOC по теореме Пифагора:

$PC^2 = PO^2 + OC^2 = 6 + 2{,}5^2 = 36 + 6{,}25 = 42{,}25$, тогда

$PC = \sqrt{42{,}25} = 6{,}5$ (м).

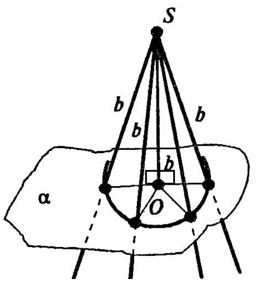
21. Расстояния от точки A до вершин квадрата равны a. Найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата, если сторона квадрата равна b.



Пусть AO перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость квадрата. Поскольку AB = AC = AD = AF, то и OB = OC = =OD = OF и, значит, O — точка пересечения диагоналей. Тогда $\mathrm{OF} = \frac{1}{2}\mathrm{CF} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$. Далее треугольник AOF — прямоугольный. Так что

$$\mathrm{AO} = \sqrt{\mathrm{AF}^2 - \mathrm{OF}^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}.$$

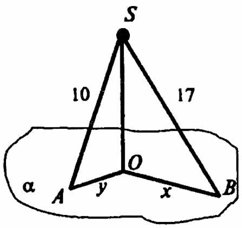
22. Найдите геометрическое место оснований наклонных данной длины, проведенных из данной точки к плоскости.



Пусть S — данная точка, SO — перпендикуляр к плоскости α, b — длина наклонных. Поскольку каждая наклонная из точки S имеет одинаковую длину, то расстояния от точки O до оснований всех наклонных будут одинаковы. Поэтому искомое геометрическое место точек — это окружность в данной плоскости с центром в точке O и радиусом $\mathrm{R} = \sqrt{b^2 - SO^2}$.

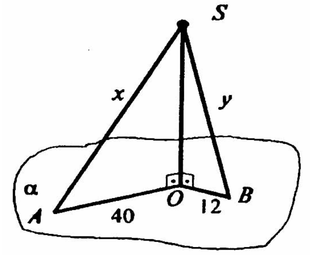
23. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 10см и 17см. Разность проекций этих наклонных равна 9см. Найдите проекции наклонных.

Пусть SA и SB – данные диагонали. Обозначим проекции AO = y, OB = x, $x > y$, так как SB > SA. Пусть SO — перпендикуляр к плоскости α. Тогда из двух прямоугольных треугольников AOS и BOS получаем:



$SO^2 = AS^2 - AO^2$; $SO^2 = BS^2 - OB^2$;
$AS^2 - AO^2 = BS^2 - OB^2$;
$10^2 - y^2 = 17^2 - x^2$.
Далее $x - y = 9$, то есть $x = 9 + y$;
$10^2 - y^2 = 17^2 - (9 + y)^2$;
$100 - y^2 = 289 - 81 - 18y - y^2$;
$18y = 108$; $y = 6$ см;
$x = 9 + 6 = 15$ см.

24. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если:
1) одна на 26 см больше другой, а проекции наклонных раны 12 см и 40 см;
2) наклонные относятся как 1 : 2, а проекции наклонных равны 1 см и 7 см.



1) Проведем SO – перпендикуляр к плоскости α, и обозначим SA = x, SB = y; x > y, так как AO > OB. Из двух прямоугольных треугольников SOA и SOB получаем:

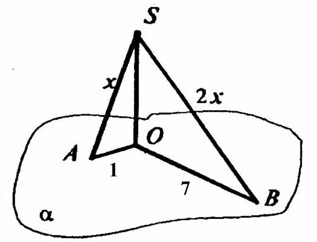
$SO^2 = AS^2 - AO^2$; $SO^2 = BS^2 - OB^2$, то есть $x^2 - 40^2 = y^2 - 12^2$.

Далее $x - y = 26$; $x = 26 + y$, так что $x^2 - 40^2 = y^2 - 12^2$;

$(26 + y)^2 - 40^2 = y^2 - 12^2$;

$52y = 780$; $y = 15$ (см), тогда $x = 26 + 15 = 41$ (см).

То есть AS = 41 (см), BS = 15 (см).



2) Обозначим AS = x, тогда AS : SB = 1 : 2, то SB = $2x$.

SO — перпендикуляр. В прямоугольных треугольниках AOS и BOS имеем:

$SO^2 = SA^2 - AO^2$; $SO^2 = SB^2 - OB^2$, то есть $x^2 - 1 = (2x)^2 - 7^2$,

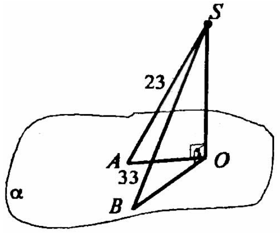
$x^2 - 1 = 4x^2 - 49$;

$3x^2 = 48$; $x^2 = 16$;

$x = 4$. Так что AS = 4 (см) и BS = 8 (см).

25. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 23 см и 33 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости, если проекции наклонных относятся как 2 : 3.

Пусть SO — перпендикуляр к плоскости α, а SA и SB — данные наклонные.



Обозначим AO = 2x. Так как AO : BO = 2 : 3, то BO = $3x$. Далее из прямоугольных треугольников AOS и BOS получаем:

$SO^2 = AS^2 - AO^2$; $SO^2 = BS^2 - BO^2$, то есть

$23^2 - 4x^2 = 33^2 - 9x^2$.

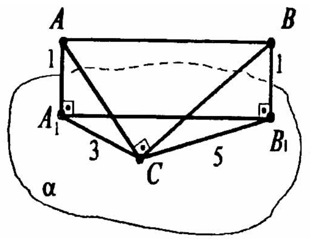
$5x^2 = 560$; $x^2 = 112$. Далее

$SO^2 = AS^2 - AO^2 = 23^2 - 4x^2 = 81$, то есть SO = 9 (см).

26. Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости.

Задача решена в учебнике п. 152 стр. 29.

27. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость, параллельная гипотенузе, на расстоянии 1 м от нее. Проекция катетов на эту плоскость равны 3 м и 5 м. Найдите гипотенузу.



Пусть ΔABC — данный. Проведем AA_1 и BB_1 перпендикулярны к α, тогда $AA_1 = BB_1 = 1$ м — расстояние от гипотенузы до плоскости α. A_1C и B_1C — проекции наклонных AC и BC на плоскость α.

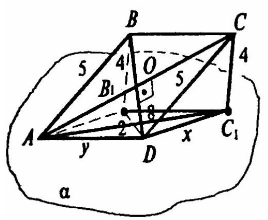
Тогда в прямоугольных треугольниках AA_1C и BB_1C имеем:

$CA^2 = AA_1^2 + A_1C^2 = 3^2 + 1^2 = 10$ (м^2), и

$CB^2 = BB_1^2 + B_1C^2 = 5^2 + 1^2 = 26$ (м^2).

По теореме Пифагора в треугольнике ABC:
$AB^2 = CA^2 + CB^2$; $AB^2 = 10 + 26 = 36$; $AB = 6$ (м).

28. Через одну сторону ромба проведена плоскость на расстоянии 4 м от противолежащей стороны. Проекции диагоналей на эту плоскость равны 8 м и 2 м. Найдите проекции этих сторон.



Из точек B и C опустим перпендикуляры BB_1 и CC_1 на плоскость α; $BB_1 = CC_1 = 4$м. AC_1 — проекция диагонали AC на плоскость α, B_1D — проекция диагонали BD на плоскость α.

Так что $AC_1 = 8$ м, $B_1D = 2$ м.

Рассмотрим прямоугольные треугольники BB_1D и CC_1A. По теореме Пифагора:

$AC^2 = CC_1{}^2 + AC_1{}^2 = 8^2 + 4^2 = 80$; $AC = \sqrt{80}$ (м), а

$BD^2 = BB_1{}^2 + B_1D^2 = 4^2 + 2^2 = 20$; $BD = \sqrt{20}$ (м).

Далее $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{80}$ (м);

$OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{20}$ (м).

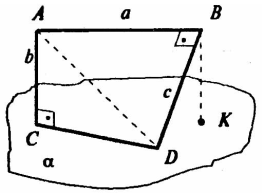
По свойству ромба: $AC \perp BD$. Так что треугольник OCD - прямоугольный, поэтому:

$CD^2 = OC^2 + OD^2 = \frac{80}{4} + \frac{20}{4} = 25$; $CD = 5$ (м).

Так как $BC \parallel \alpha$, то $B_1C_1 = BC = 5$ (м).

Из прямоугольных треугольников DC_1C и AB_1B найдем AB_1 и DC_1 по теореме Пифагора: $AB_1 = DC_1 = \sqrt{DC^2 - CC_1^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$ (м).

29. Из концов отрезка AB, параллельного плоскости, проведены перпендикуляр AC и наклонная BD, перпендикулярная отрезку AB. Чему равно расстояние CD, если $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$?



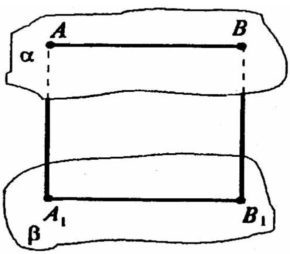
Проведем AD. Тогда из прямоугольного треугольника ABD имеем: $AD^2 = AB^2 + BD^2 = a^2 + b^2$.

Далее по теореме Пифагора в ÄACD :

$CD^2 = AD^2 - AC^2 = (a^2 + c^2) - b^2 = a^2 + c^2 - b^2$, так что

$CD = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$.

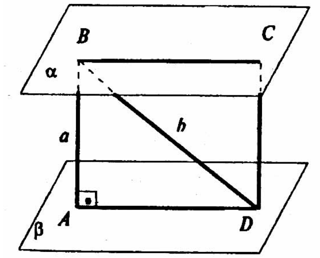
30. Докажите, что расстояние от всех точек плоскости до параллельной плоскости одинаковы.



Выберем произвольные точки A и B на плоскости α, параллельной плоскости β.

Прямая AB лежит в плоскости α поэтому параллельна плоскости β. Опустим перпендикуляры AA_1 и BB_1 на плоскость β. По теореме 18.4 прямые AA_1 и BB_1 параллельны и лежат в одной плоскости; у четырехугольника AA_1B_1B противоположные стороны параллельны, значит, это параллелограмм; так что, $AA_1 = BB_1$. Что и требовалось доказать.

31. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно a. Отрезок длины b своими концами упирается в эти плоскости. Найдите проекцию отрезка на каждую из плоскостей.

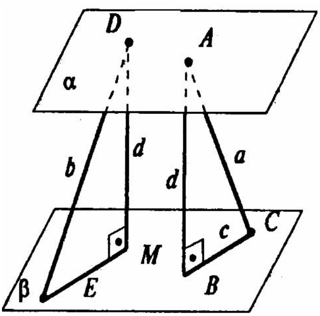


Пусть плоскости α и β параллельны. BD – данная наклонная. Проведем BA⊥â и DC⊥α. Тогда CD = AB — расстояние между параллельными плоскостями α и β. Так что AB = CD = a.

Проекции наклонной BD на плоскости α и β равны: BC = AD. И по теореме Пифагора:

$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{b^2 - a^2}$.

32. Два отрезка длин a и b упираются концами в две параллельные плоскости. Проекция первого отрезка (длины a) на плоскость равна c. Найдите проекцию второго отрезка.



Пусть DE и AC – данные наклонные. Проведем DM ⊥ β. Тогда DM = AB расстояние между двумя параллельными плоскостями. Так что DM = AB = d. Далее по теореме Пифагора:

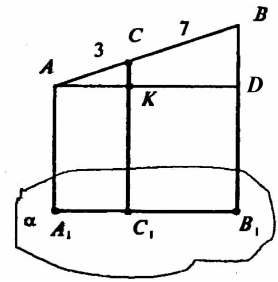
$d = AB = \sqrt{a^2 - c^2}$. Так что

$DM = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Но тогда ΔEMD — прямоугольный, поэтому:

$$EM = \sqrt{DE^2 - DM^2} = \sqrt{b^2 - (a^2 - c^2)} = \sqrt{b^2 - a^2 + c^2}\ .$$

33. Концы данного отрезка, не пересекающего плоскость, удалены от нее на 0,3 м и 0,5 м. Как удалена от плоскости точка, делящая данный отрезок в отношении 3 : 7?



Пусть AB — данный отрезок, C — точка на нем, такая что AC : :CB = 3 : 7.

AA_1, CC_1, BB_1 — перпендикуляры, опущенные из точек A, C, B на плоскость α. $AA_1 = 0{,}3$м, $BB_1 = 0{,}5$м.

По теореме 18.4 отрезки AA_1, BB_1, CC_1 параллельны, и значит, лежат в одной плоскости. Точки A_1, C_1, B_1 лежат на прямой пересечения этой плоскости с плоскостью α.

Проведем из точки A прямую AD параллельную A_1B_1, значит $AD \perp BB_1$. Тогда AA_1C_1K — прямоугольник. Так что $KC_1 = AA_1$. DB_1=0,3 м.

$\Delta ACK \sim \Delta ABD$ так как CK параллельна BD. Далее

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC+BC}{AC} = 1 + \frac{BC}{AC} = = 1 + \frac{7}{3} = \frac{3}{10};$$

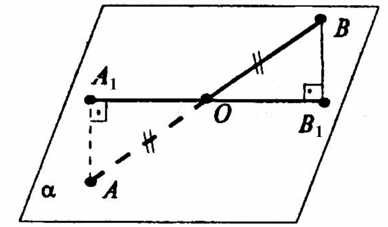
$$\frac{BD}{CK} = \frac{AB}{AC} = \frac{10}{3}.\ \text{Так что}\ CK = \frac{3BD}{10}.$$

Так $BD = BB_1 - DB_1 = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$ (м),

$$CK = \frac{3 \cdot 0{,}2}{10} = 0{,}06\ \text{(м)}.$$

Ну и $CC_1 = CK + KC_1 = 0{,}06 + 0{,}3 = 0{,}36$ (м).

34. Через середину отрезка проведена плоскость. Докажите, что концы отрезка находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости.



Пусть AB — данный отрезок, точка O — середина отрезка, через точку O проведена плоскость. Проведем AA_1 и BB_1 перпендикуляры на плоскость α.

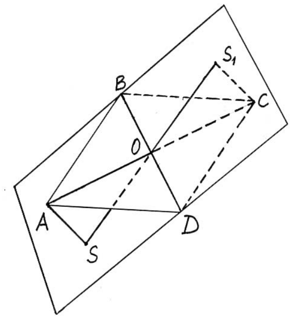
По теореме 18.4 прямые AA_1 и BB_1, а вместе с ними и отрезок AB и точка O лежат в одной плоскости.

Далее рассмотрим ΔAA_1O и ΔBB_1O — они прямоугольные.

$AO = OB$ — по условию, $\angle A_1OA = \angle B_1OB$ как вертикальные. Так что, $\Delta AA_1O = \Delta BB_1O$, а, значит, $AA_1 = BB_1$. Что и требовалось доказать.

35. Через диагональ параллелограмма проведена плоскость. Докажите, что концы другой диагонали находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости.

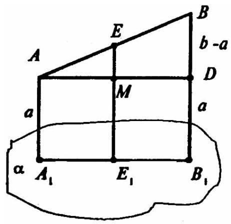
Пусть AC и BD — диагонали параллелограмма и точка O – середина диагоналей. Проведем плоскость α через диагональ BD. Проведем перпендикуляры AS и CS, на плоскость α.



Тогда треугольники ΔAOS и ΔCOS_1 — прямоугольные: $AO = OC$ — по свойству диагоналей параллелограмма, $\angle SOA = S_1OC$; так что

$\Delta AOS = \Delta COS_1$ (по стороне и острому углу), откуда следует, что $AS = S_1C$. Что и требовалось доказать.

36. Найдите расстояние от середины отрезка АВ до плоскости, не пересекающей этот отрезок, если расстояние от точек А и В до плоскости равны: 1) 3,2 см и 5,3 см; 2) 7,4 см и 6,1 см; 3) a и b.



Пусть АВ — искомый отрезок. Е — середина отрезка АВ. AA_1, EE_1, BB_1 — перпендикуляры, опущенные из точек А, Е, В на плоскость α. По теореме 17.4 эти перпендикуляры параллельны между собой. Тогда решим сначала общий случай $AA_1 = a$ и $BB_1 = b$.

3)$AE = EB = \frac{1}{2}AB$; $\Delta AME \sim \Delta ADB$, так как $EM \| BD$. Так что

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EM}{BD};\ EM = \frac{AE}{AB} \cdot BD = \frac{1}{2}BD.$$

Но $BD = BB_1 - DB_1 = b - a$, поэтому $EM = \frac{1}{2}(b - a)$.

Далее $EE_1 = EM + ME_1 = a + \frac{1}{2}(b - a) = a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a =$

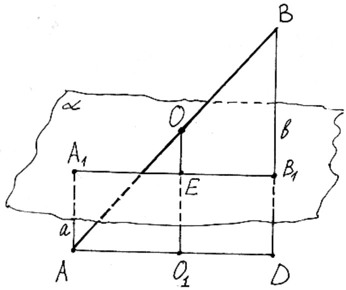
$$= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(a + b).$$

Теперь подставив вместо a и b числа, получим:

1) $EE_1 = \frac{1}{2}(3{,}2 + 5{,}3) = \frac{1}{2} \cdot 8{,}5 = 4{,}25$ (см).

2) $EE_1 = \frac{1}{2}(7{,}4 + 6{,}1) = \frac{1}{2} \cdot 13{,}5 = 6{,}75$ (см).

37. Решите предыдущую задачу, считая. что отрезок АВ пересекает плоскость.



Решим общий случай:

O — середина AB. ΔADB — прямоугольный.

OO_1 — средняя линия. Тогда

$BD = a + b$ и $OO_1 = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a+b}{2}$.

Если a < b, то $OE = OO_1 - O_1E = \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}b - a = \dfrac{1}{2}(b - a)$.

Если $a > b$, то $OE = \dfrac{1}{2}(a - b)$. Так что в любом случае

$OE = \dfrac{1}{2}|a - b|$.

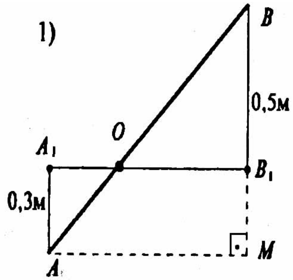
Подставив числа, получим:

1) $OE = \dfrac{1}{2}|3{,}2 - 5{,}3| = \dfrac{1}{2} \cdot 2{,}1 = 1{,}05$ (см).

2) $OE = \dfrac{1}{2}|7{,}4 - 6{,}1| = \dfrac{1}{2} \cdot 1{,}3 = 0{,}65$ (см).

38. Отрезок длины 1 м пересекает плоскость, концы его удалены от плоскости на 0,5 м и на 0,3 м. Найдите длину проекции отрезка на плоскость.

1)



Пусть отрезок AB пересекает плоскость α в точке O. Спроектируем его на плоскость α. Проведем перпендикуляры AA_1 и BB_1

$AA_1 = 0{,}3$ м, $BB_1 = 0{,}5$ м.

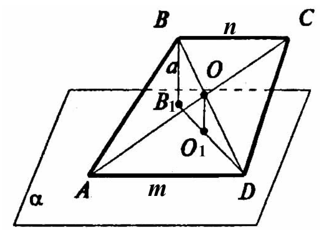
Проведем через т. A прямую, параллельную A_1B_1. Она пересечет продолжение отрезка BB_1 в точке M. $AM \perp BM$. В Δ ABM по теореме Пифагора: $AM^2 = AB^2 - MB^2$, но

$MB = MB_1 + BB_1 = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$ (м), а $AB = 1$ (м), так что

$AM^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$ (м^2); $AM = 0{,}6$ (м). Далее

так как AA_1B_1M — прямоугольник, то $A_1B_1 = AM = 0{,}6$ м.

39. Через основание трапеции проведена плоскость, отстающая от другого основания на расстояние a. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до этой плоскости. если основания трапеции относятся как $m : n$.



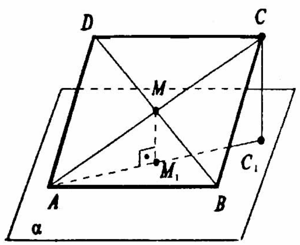
Пусть ABCD и α — данные трапеция и плоскость. O — точка пересечения диагоналей трапеции. BB_1 и OO_1 — перпендикуляры к плоскости α. Тогда $BB_1 = a$. Так как ÄOAD ~ÄOCB , то $\dfrac{OD}{OB} = \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{m}{n}$.

Далее рассмотрим ΔBB_1D BB_1 и OO_1 лежат в плоскости BB_1D. $DO_1O \sim BB_1D$ так как $\angle B_1DB$ — общий и $\angle OO_1D = \angle BB_1D = 90°$.

Тогда $\dfrac{OO_1}{BB_1} = \dfrac{OD}{BD} = \dfrac{OD}{OD+OB} = \dfrac{m}{m+n}$.

Так что $OO_1 = \dfrac{m \cdot BB_1}{m+n} = \dfrac{am}{m+n}$.

40. Через сторону параллелограмма проведена плоскость на расстоянии a от противолежащей стороны. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до этой плоскости.



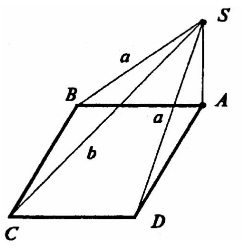
Пусть ABCD и α данные параллелограмм и плоскость. Проведем перпендикуляр CC_1 на плоскость α. Тогда $CC_1 = a$. M — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Проведем MM_1 — перпендикуляр к плоскости α. Тогда $MM_1 \| CC_1$.

ΔAM_1M подобен ΔAC_1C. Поэтому $\frac{AM}{AC} = \frac{MM_1}{CC_1}$.

Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам так что $\frac{AM}{AC} = \frac{1}{2}$. Поэтому $MM_1 = \frac{1}{2} \cdot CC_1 = \frac{1}{2} a$.

41. Из вершины квадрата восстановлен перпендикуляр к его плоскости. Расстояния от конца этого перпендикуляра до других вершин квадрата равны a и b ($a < b$). Найдите длину перпендикуляра и сторону квадрата.

Пусть SA – данный перпендикуляр. Тогда SB = SD = a (так как равные наклонные имеют равные проекции). $AB \perp BC$ (стороны квадрата). $SB \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах).



Значит, ΔSBC — прямоугольный, поэтому по теореме Пифагора: $BC^2 = SC^2 - SB^2 = b^2 - a^2$, так что

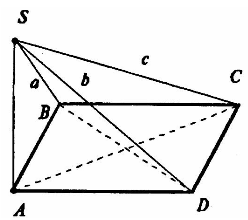
$AB = AD = CD = BC = \sqrt{b^2 - a^2}$.

$SA \perp AB$ (по условию), так что

$SA^2 = SB^2 - AB^2$; $a^2 - (b^2 - a^2) = 2a^2 - b^2$, так что

$SA = \sqrt{2a^2 - b^2}$.

42. Из вершины прямоугольника восстановлен перпендикуляр к его плоскости. Расстояние от конца этого перпендикуляра до других вершин прямоугольника равны a, b, c ($a < c$, $b < c$). Найдите длину перпендикуляра и стороны прямоугольника.



Пусть SA – данный перпендикуляр. Тогда SD, SC и SB — наклонные, $SD = b$, $SC = c$, $SB = a$.

$\Delta SDC = 90°$ (теорема о 3-х перпендикулярах). Так что ΔSDC — прямоугольный. Поэтому

$DC^2 = SC^2 - SD^2 = c^2 - b^2$, так что

$DC = \sqrt{c^2 - b^2}$; $DC = AB$ — стороны прямоугольника.

По теореме Пифагора в ΔSAB:

$SA^2 = SB^2 - AB^2 = a^2 - (c^2 - b^2) = a^2 + b^2 - c^2$, так что

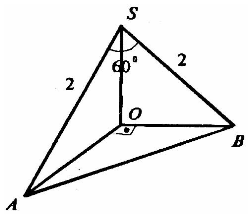
$SA = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

Далее ΔSBC — прямоугольный по теореме о трех перпендикулярах, поэтому

$BC^2 = SC^2 - SB^2 = c^2 - a^2$. Так что

$AD = BC = \sqrt{c^2 - a^2}$.

43. Из данной точки к плоскости проведены две наклонные длиной 2 м. найдите расстояние от точки до плоскости, если наклонные образуют угол 60°, а их проекции перпендикулярны.



Проведем SO – перпендикуляр к плоскости. Тогда наклонные SA = SB = 2м. $\angle ASB = 60°$.

Равные наклонные имеют равные проекции, значит, AO = OB.

Так как угол $\angle ASB = 60°$, то ΔASB — равносторонний, а, значит, AB = AS = SB = 2м.

Далее AO $\perp$ OB (по условию), ΔAOB — равнобедренный и прямоугольный.

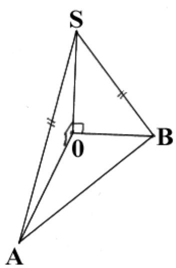
Так что $\angle OAB = \angle OBA = 45°$. А, значит,

$$BO = AO = AB \cdot \cos 45° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ (м)}.$$

Далее по теореме Пифагора в ΔAOS:

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2} \text{ (м)}.$$

44. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние 1 м, проведены две равные наклонные. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если известно, что наклонные перпендикулярны и образуют с перпендикуляром к плоскости углы, равные 60°.



Пусть SA = SB данные наклонные, SO — перпендикуляр к плоскости, SO = 1м. $\Delta AOS = \Delta BOS$ — прямоугольные, (по гипотенузе и острому углу) $\angle ASO = 60°$ и $\angle BSO = 60°$, а, значит, $\angle SAO = \angle SBO = 30°$. Поэтому:

$SO = \frac{1}{2} SA = \frac{1}{2} SB$. Так что SB = SA = 2м.

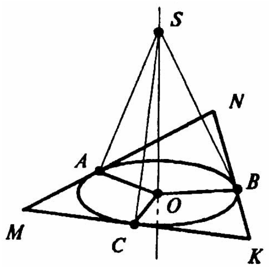
По условию $SA \perp SB$, тогда, по теореме Пифагора, получаем:

$AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (м).

45. Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.

Задача решена в учебнике п. 153 стр. 30.

46. К плоскости треугольника из центра вписанной в него окружности радиуса 0,7 м восстановлен перпендикуляр длиной 2,4 м. Найдите расстояние от конца этого перпендикуляра до сторон треугольника.



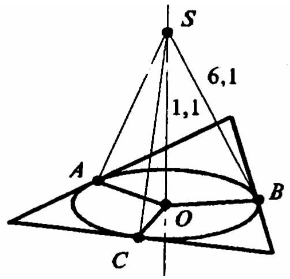
Пусть O –центр вписанной окружности, а OS – данный перпендикуляр. Тогда r = AO = OB = OC = 0,7 м., где точки A,B,C — точки касания сторон треугольника с окружностью.

По теореме о трех перпендикулярах $SA \perp MN$.

Тогда по теореме Пифагора в ΔAOS:

$SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \sqrt{2{,}4^2 + 0{,}7^2} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ (м).

47. Расстояние от данной точки до плоскости треугольника равно 1,1 м, а до каждой из его сторон — 6,1 м. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

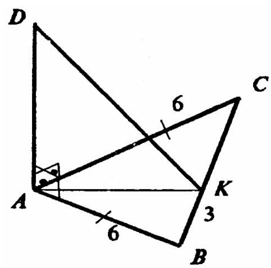


Пусть S — данная точка, и SO – перпендикуляр.Тогда SO = 1,1 м, расстояние от данной точки до плоскости треугольника. SB, SC, SA — наклонные; перпендикуляры к сторонам треугольника. Тогда AO = BO = CO как проекции равных наклонных. По теореме о трех перпендикулярах AO, BO, CO перпендикулярны сторонам треугольника. Значит O – центр вписанной окружности в треугольник и r = AO = OB = OC.

По теореме Пифагора в треугольнике SOB:

$$\text{OB} = \sqrt{\text{SO}^2 - \text{SO}^2} = \sqrt{6{,}1^2 - 1{,}1^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ (м)}.$$

48. Из вершины равностороннего треугольника ABC восстановлен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до стороны BC, если AD = 13 см, BC = 6 см.



Проведем DK ⊥ BC, тогда по теореме о трех перпендикулярах AK ⊥ BC. DK — искомое расстояние. Так как AK – высота, то AK – медиана (ΔABC — равносторонний), поэтому BK = 3 см. По теореме Пифагора в ΔABK :

$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27}$ (м).

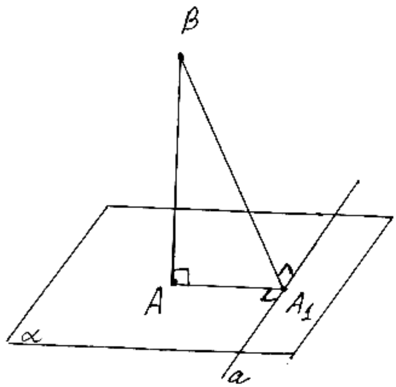
Аналогично в ΔDAK по теореме Пифагора:

$DK = \sqrt{AD^2 + AK^2} = \sqrt{13^2 + 27} = \sqrt{196} = 14$ (м).

49. Через конец A отрезка AB длины b проведена плоскость, перпендикулярная отрезку, и в этой плоскости проведена прямая. Найдите расстояние от точки B до прямой, если расстояние от точки A до прямой равно a.

BA — перпендикуляр к плоскости α, тогда $BA \perp AA_1$, где AA_1 — расстояние от точки A до прямой c в плоскости α и $AA_1 \perp c$. По теореме о трех перпендикулярах $BA_1 \perp a$.

Значит, BA_1 и есть расстояние от точки B до прямой a.

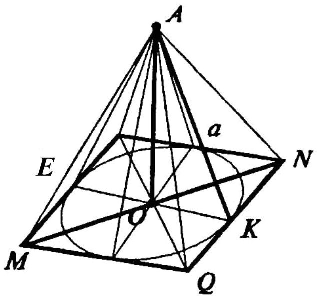


По теореме Пифагора в ΔABA_1 :

$BA_1^2 = BA^2 + AA_1^2 = b^2 + a^2$, так что

$BA_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

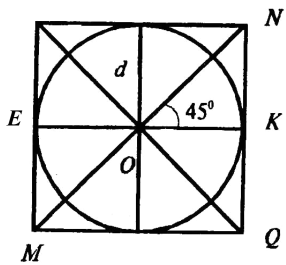
50. Расстояния от точки A до всех сторон квадрата равны a. Найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата, если диагональ квадрата равна d.



Пусть A — данная точка. AO — искомое расстояние, то есть AO – перпендикуляр. Наклонные AK = AE; OE, OK — проекции равных наклонных, а значит, OE = OK.

Далее по теореме о трех перпендикулярах OE и OK — перпендикулярны к сторонам квадрата. Значит, O — центр вписанной окружности. То есть O – точка пересечения диагоналей.

Тогда, $ON = \frac{d}{2}$ (по свойству диагоналей квадрата), и по теореме Пифагора в треугольнике OKN:



$$OK = ON \cdot \sin\angle NOK = ON \cdot \sin 45° = \frac{d}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{2\sqrt{2}}.$$

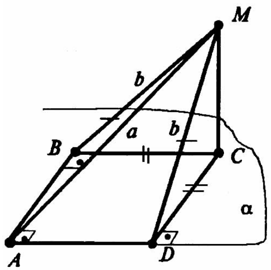
Далее в треугольнике AOK по теореме Пифагора:

$$AO = \sqrt{AK^2 - OK^2} = \sqrt{a^2 - \frac{d^2}{8}}.$$

51. Точка M, лежащая вне плоскости данного прямого угла, удалена от вершины угла на расстояние a, а от его сторон на расстояние b. Найдите расстояние от точки M до плоскости угла.

Пусть α — плоскость данного прямого угла BAD. Тогда MB = MD = b (перпендикуляры к сторонам угла), MA = a, и MC — перпендикуляр к плоскости α.

Далее по теореме о трех перпендикулярах BC $\perp$ AB, CD $\perp$ AD, причем как проекции равных наклонных BC = CD. Значит, ABCD — квадрат со сторонами:

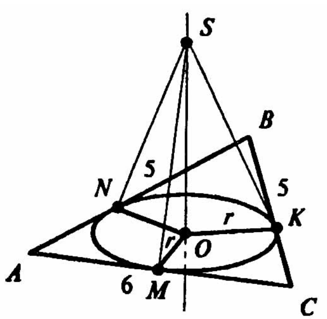


CD=BC = AB = AD = $\sqrt{a^2 - b^2}$ (По теореме Пифагора в ΔAMD).

В треугольнике DCM имеем:

MC = $\sqrt{\mathrm{DM}^2 - \mathrm{DC}^2} = \sqrt{b^2 - (a^2 - b^2)} = \sqrt{2b^2 - a^2}$.

52. Дан равнобедренный треугольник с основанием 6 м и боковой стороной 5 м. Из центра вписанного круга восставлен перпендикуляр к плоскости треугольника длиной 2 м. Найдите расстояние от конца этого перпендикуляра до сторон треугольника.



Пусть SO — данный перпендикуляр, K, M, N — точки касания сторон треугольника с окружностью. Тогда по теореме о трех перпендикулярах SK⊥BC, SN⊥AB, SM⊥OM. Так что SK = SM = SN – искомое расстояние.

Далее $S_{ABC} = p \cdot r$, $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2}$.

$p = \dfrac{5+6+5}{2}$ = 8(м); Так что S = 8r ($м^2$).

Далее $S = \dfrac{1}{2} BM \cdot AC$, но

$BM = \sqrt{BC^2 - MC^2} = \sqrt{25-9} = 4$ (м).

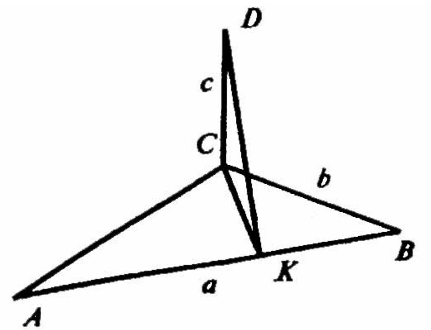
Так что S = $\dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4$ = 12 ($м^2$). То есть

8r = 12 и r = OK = 1,5 (м).

Далее из ΔSOK:

$SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \sqrt{4 + 2{,}25} = \sqrt{6{,}25}$ = 2,5 (м).

53. Из вершины прямого угла C треугольника ABC восставлен перпендикуляр CD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до гипотенузы треугольника, если AB= a, BC=b, CD= c.



Пусть CD – перпендикуляр к плоскости треугольника, а CK ⊥ AB (высота треугольника).

Тогда по теореме о трех перпендикулярах DK ⊥ AB. То есть DK – искомое расстояние. Далее $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$;

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot CK = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC$.

Так что $\text{CK} = \dfrac{\text{AC} \cdot \text{CB}}{\text{AB}} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot b}{a}$.

Далее в ΔCDK:

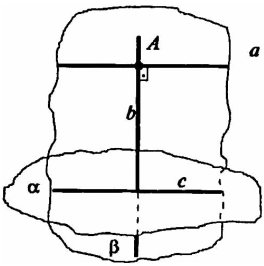
$$\text{DK} = \sqrt{\text{CD}^2 + \text{CK}^2} = \sqrt{c^2 + \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot b}{a}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{c^2 + \frac{a^2 b^2 - b^4}{a^2}} = \sqrt{c^2 + b^2 - \frac{b^4}{a^2}}.$$

54. Даны прямая a и плоскость α. Проведите через прямую a плоскость, перпендикулярную плоскости α.

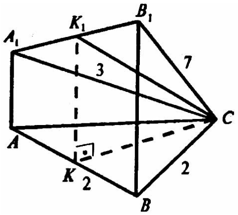
Задача решена в учебнике п. 154 стр. 31.

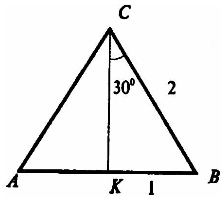
55. Даны прямая a и плоскость α. Докажите, что все прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости, перпендикулярной плоскости α.



Возьмем любую точку A на прямой a, и проведем через нее прямую $b \perp \alpha$. Плоскость β, образованная прямыми a и b, пересекает α по прямой c и $b \perp c$. Плоскости α и β перпендикулярны. Так как $b \perp \alpha$ и β содержит b. Любая прямая перпендикулярная α – должна быть параллельна b. А так как она пересекает a, то лежит в β. Что и требовалось доказать.

56. Из вершин A и B равностороннего треугольника ABC восстановлены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к плоскости треугольника. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка A_1B_1, если $AB = 2$ м, $CA_1 = 3$ м; $CB_1 = 7$ м и отрезок A_1B_1 не пересекает плоскость треугольника.





Проведем $CK \perp AB$ и K_1K параллельно AA_1 и BB_1. Тогда искомое расстояние — CK_1.

$AA_1 \parallel KK_1 \parallel BB$ и лежат в одной плоскости. Значит BB_1A_1A — трапеция, а KK_1 — средняя линия трапеции, так как CK – медиана и высота. Тогда

$$KK_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2}.$$

В ΔAA_1C : $AA_1 = \sqrt{A_1C^2 - AC^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ (м).

В ΔB_1BC : $BB_1 = \sqrt{B_1C^2 - BC^2} = \sqrt{49-4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ (м).

Так что $KK_1 = \dfrac{AA_1 + BB_1}{2} = \dfrac{\sqrt{5} + 3\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$ (м).

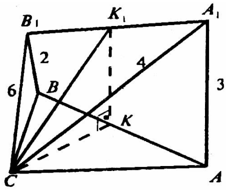
В ΔK_1KC : $CK_1 = \sqrt{KK_1^{\,2} + KC^2}$, но

$KC = BC \cdot \cos 30° = BC \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (м).

Так что $CK_1 = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{20+3} = \sqrt{23}$ (м).

57. Из вершин A и B острых углов прямоугольного треугольника ABC восставлены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к плоскости треугольника. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка A_1B_1, если A_1C=4 м, A_1A=3 м, $B_1C = 6$ м, $B_1B = 2$ м и отрезок A_1B_1 не пересекает плоскости треугольника.

Пусть CK_1 – искомое расстояние. Тогда $CK_1 = \sqrt{KK_1^2 + CK^2}$ (по теореме Пифагора), так как треугольник K_1KC прямоугольный ($KK_1 \perp AB$).



Далее $AA_1 \parallel KK_1 \parallel BB_1$ и лежат в одной плоскости, значит, AA_1B_1B — трапеция. Но тогда KK_1 — средняя линия, так как K_1 – середина A_1B_1.

Так что $KK_1 = \dfrac{AA_1 + BB_1}{2} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$ (м);

Далее по теореме Пифагора в ΔB_1BC:

$$BC = \sqrt{B_1C^2 - BB_1^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} \text{ (м)};$$

в ΔA_1AC:

$$AC = \sqrt{A_1C^2 - AA_1^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7} \text{ (м)};$$

тогда в ÄABC :

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = = \sqrt{(\sqrt{32})^2 + (\sqrt{7})^2} = \sqrt{32+7} = \sqrt{39} \text{ (м)};$$

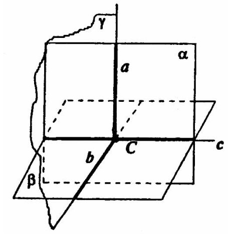
$CK = \dfrac{1}{2}AB$ (радиус вписанной окружности), то есть

$CK = \dfrac{1}{2}\sqrt{39}$ (м);

далее, $CK_1 = \sqrt{(2{,}5)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{39}}{2}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$ (м).

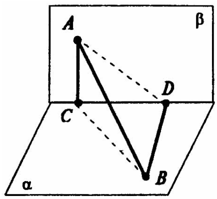
58. Докажите, что если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости.

Пусть $\alpha \perp \beta$, пересекаются по прямой c, $a \subset \alpha$, $a \perp c$.



Тогда проведем в плоскости β через точку С пересечения прямых a и c прямую b перпендикулярно c. Тогда плоскость γ образованная прямыми a и b, перпендикулярна прямой c. Так как $\alpha \perp \beta$ (по условию), то $a \perp b$; $a \perp c$. Так что $a \perp \beta$. Что и требовалось доказать.

59. Из точек А и В, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры АС и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка АВ, если:
1) АС = 6 м, BD = 7 м, CD = 6 м;
2) АС = 3 м, BD = 4 м, CD = 12 м;
3) AD = 4 м, ВС = 7 м, CD = 1 м;
4) AD = ВС = 5 м, CD = 1 м;
5) АС = a, CD = c, BD = b;
6) AD = a, ВС = b, CD = c.



Решим сначала пункт 5:

5) Пусть плоскости α и β перпендикулярны, CD — прямая пересечения плоскостей, тогда AC⊥CB и BD⊥AD. Тогда

В ΔАСВ:

$AB^2 = AC^2 + BC^2$, но из ÄCDB следует, что:

$BC^2 = CD^2 + BD^2 = c^2 + b^2$.

Так что $AB^2 = AC^2 + CD^2 + BD^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

То есть $AB = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Подставляя числа, получим решения пунктов 1 и 2:

1) $AB^2 = 6^2 + 7^2 + 6^2 = 36 + 49 + 36 = 121$ (м^2);

AB = 11 (м).

2) $AB^2 = 3^2 + 12^2 + 4^2 = 9 + 144 + 16 = 169$ (м^2);

AB = 13 (м).

Решим пункт 6:

6) $AB^2 = AC^2 + BC^2$, но

$AC^2 = AD^2 - CD^2$ (из ÄACD), так что

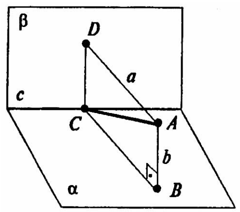
$AB = \sqrt{AD^2 - CD^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

4) AD = BC = 5 м, CD = 1 м; подставляя числа получим:

$AB = \sqrt{AD^2 - CD^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 - 1^2 + 5^2} = 7$ (м).

3) $AB = \sqrt{16 + 49 - 1} = \sqrt{64} = 8$ (м).

60. Точка находится на расстоянии a и b от двух перпендикулярных плоскостей. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей.

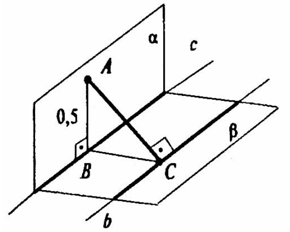


Пусть перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой c. Проведем перпендикуляры AB, AD, AC. Тогда четырехугольник ABCD — прямоугольник. $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$. AC — искомое расстояние. Осталось доказать, что точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

BC — проекция AC на плоскость α, поэтому по теореме о трех перпендикулярах $BC \perp c$, $BC \perp \beta$ (задача 58). Так как $AD \perp \beta$, то по теореме 18.4 прямые AD||BC, а, значит, AD и BC лежат в одной плоскости. Что и требовалось доказать.

Так что $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$.

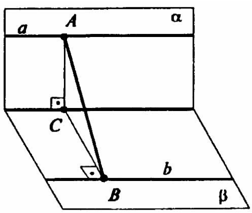
61. Плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости α взята точка A, расстояние от которой до прямой c (линия пересечения плоскостей) равно 0,5 м. В плоскости β проведена прямая b, параллельная прямой c и отстоящая от нее на 1,2 м. Найдите расстояние от точки A до прямой b.



Пусть α и β перпендикулярные плоскости. $b \parallel c$; BC = 1,2 м, AB = 0,5 м, где $AB \perp c$ и $BC \perp b$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $AC \perp b$. Так что AC – искомое расстояние и

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{1{,}69} = 1{,}3 \text{ (м)}.$$

62. Перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой c. В плоскости α проведена прямая $a \parallel c$, в плоскости β — прямая $b \parallel c$. Найдите расстояние между прямыми a и b, если расстояние между прямыми a и c равно 1,5 м, а между прямыми b и c — 0,8 м.



Возьмем в плоскости α точку A на прямой a. По теореме о трех параллельных прямых получаем, что $a \parallel в$ (так как $a \parallel c$, $в \parallel c$. Проведем $AC \perp c$ и $CB \perp b$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $AB \perp b$. Так что AB – искомое расстояние и $AB \perp CB$, так как $\alpha \perp \beta$ (по условию); из прямоугольного треугольника ABC по теореме Пифагора имеем:

$$AB = \sqrt{CB^2 + AC^2} = \sqrt{1{,}5^2 + 0{,}8^2} = \sqrt{2{,}89} = 1{,}7 \text{ (м)}.$$

§18. Декартовы координаты и векторы в пространстве

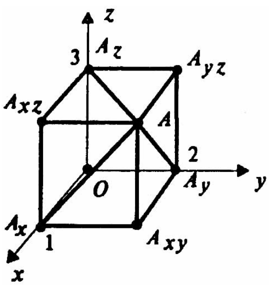
1. Где лежат те точки пространства, для которых координаты x и y равны нулю?

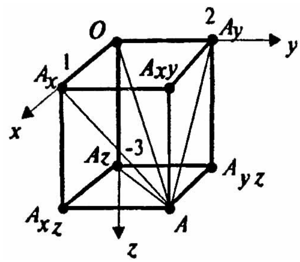
Такие точки имеют координаты: A(0;0;z), т.е. точка A лежит на оси z.

2. Даны точки A(1;2;3), B(0;1;2), C(0;0;3), D(1;2;0). Какие из этих точек лежат:
1) в плоскости xy;
2) на оси z;
3) в плоскости yz?

Задача решена в учебнике п. 157 стр. 40.

3. Дана точка A(1;2;3). Найдите основание перпендикуляров, опущенных из этой точки на координатные оси и координатные плоскости.





Построим координатный параллелепипед точки A. Отметим на оси x — $A_x(1;0;0)$; y — $A_y(0;2;0)$; z — A_z (0;0;3).

Затем из точки A_x проведем две прямые, параллельную оси y и оси z, из точки A_y — прямые параллельные оси x и оси z; из A_z — параллельные оси x и оси y.

При пересечении прямых получаются точки A_{xy}, A_{yz}, A_{xz} Тогда

$A_xA_{xy} = 2$; $A_xA_{xz} = 3$; $A_yA_{xy} = 1$;

$A_yA_{yz} = 3$; $A_zA_{xz} = 1$; $A_zA_{yz} = 2$.

Перпендикулярами на координатные оси будут отрезки AA_z, AA_y; AA_x на координатные плоскости A_{xy}, A_{yz}, A_{xz} Получаем что основания перпендикуляров: $A_{xy}(1;2;0)$, $A_{yz}(0;2;3)$, $A_{xz}(1;0;3)$.

4. Найдите расстояния от точки (1;2;–3) до:
1) координатных плоскостей;
2) осей координат;
3) начала координат.

Строим координатный параллелепипед как в задаче 3 и находим расстояния:

1) $AA_{xy} = |z| = 3$; $AA_{xz} = |y| = 2$; $A_{yz} = |x| = 1$, где (x; y; z) – координаты данной точки, то есть (x; y; z) = (1; 2; -3).

2) Далее по теореме Пифагора имеем:

$AA_x = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$;

$AA_y = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$;

$AA_z = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

3) $AO^2 = AA_z{}^2 + A_zO^2$ – по теореме Пифагора. Так что
$AO^2 = 5 + 9 = 14$;
$AO = \sqrt{14}$.

Так что расстояние до плоскостей: *xy* равно 3, *yz* равно 2, *yz* равно 1; расстояние до осей координат равно соответственно $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$; расстояние до начала координат равно $\sqrt{14}$.

5. В плоскости *x*у найдите точку D(*x*;*y*;0), равноудаленную от трех данных точек: A(0;1;–1), B(–1;0;1), C(0;–1;0).

Задача решена в учебнике п. 158 стр. 41.

6. Найдите точки, равноотстоящие от точек (0;0;1), (0;1;0), (1;0;0) и отстоящие от плоскости *yz* на расстояние 2.

Пусть искомая точка К(*x*;*y*;*z*). Тогда расстояние от точки К до плоскости *yz* равно $|x|$ (задача 4). То есть $|x| = 2$, значит $x=-2$ или $x=2$. В каждом случае приравниваем квадраты расстояний от точки К до точек A, B, C, имеющих координаты A(0;0;1), B(0;1;0), C(1;0;0) равны, то есть

$AK^2 = BK^2 = CK^2;$

$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = x^2 + (y-1)^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2.$

Так что $y^2 + (z-1)^2 = (y-1)^2 + z^2$, откуда $y = z$ и

$x^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + z^2$, откуда $x = z$. Так что $x = y = z = \pm 2$.

Имеем точки: $K_1(2;\ 2;\ 2)$ и $K_2(-2;\ -2;\ -2)$.

7. На оси x найдите точку $C(x;0;0)$, равноудаленную от двух точек $A(1;2;3)$, $B(-2;1;3)$.

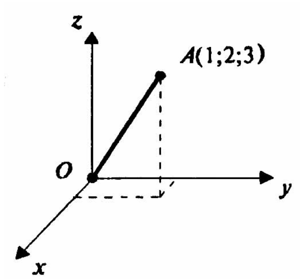
$AC^2 = (1-x)^2 + 2^2 + 3^2 = BC^2 = (-2-x)^2 + 1^2 + 3^2$, то есть

$1 - 2x + x^2 + 4 + 9 = 4 + 4x + 4 + 1 + 9 + x^2;$

$-6x = 0;$

$x = 0$. Так что $C\ (0;\ 0;\ 0)$.

8. Составьте уравнение геометрического места точек пространства, равноудаленных от точки $A(1;2;3)$ и начала координат.



Пусть $M(x,\ y,\ z)$ – точка с данным свойством. Тогда

$OM^2 = AM^2$, то есть

$x^2 + y^2 + z^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2;$

$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9;$

$2x + 4y + 6z - 14 = 0;$

$x + 2y + 3z - 7 = 0$ — это уравнение плоскости.

9. Докажите, что четырехугольник ABCD с вершинами в точках $A(1;3;2)$, $B(0;2;4)$, $c(1;1;4)$, $D(2;2;2)$ является параллелограммом.

Задача решена в учебнике п. 159 стр. 42.

10. Докажите, что четырехугольник ABCD является параллелограммом, если:
1) A(0;2;–3), B(–1;1;1), C(2;–2;–1), D(3;–1;–5);
2) A(2;1; 3), B(1;0;7), C(–2;1;5), D(–1;2;1).

Если диагонали четырехугольника пересекаются в одной точке и пересечения делятся в ней пополам, то четырехугольник – параллелограмм.

1) O_1: $x = \dfrac{0+2}{2} = 1$, $y = \dfrac{2-2}{2} = 0$, $z = \dfrac{-3-1}{2} =$
$= -2$ — середина AC;
$O_1(1;0;-2)$.
O_2: $x = \dfrac{-1+3}{2} = 1$, $y = \dfrac{1-1}{2} = 0$, $z = \dfrac{1-5}{2} = -2$ — середина BC;
O_2: (1;0;–2). Так что $O_1 = O_2$ и
ABCD — параллелограмм.
2) O_1: $x = \dfrac{2-2}{2} = 1$, $y = \dfrac{1+1}{2} = 1$, $z = \dfrac{3+5}{2} = 4$;
$O_1(0;1;4)$.
O_2: $x = \dfrac{1-1}{2} = 0$, $y = \dfrac{0+2}{2} = 1$, $z = \dfrac{7+1}{2} = 4$;
O_2: (0;1;4); $O_1 = O_2$, так что ABCD — параллелограмм.

11. Докажите, что четырехугольник ABCD является ромбом, если:
1) A(6;7;8), B(8;2;6), C(4;3;2), D(2;8;4);
2) A(0;2;0), B(1;0;0), C(2;0;2), D(1;2;2).

1) Сначала докажем, что четырехугольник ABCD параллелограмм:
O_1: $x = \dfrac{6+4}{2} = 5$, $y = \dfrac{7+3}{2} = 5$, $z = \dfrac{8+2}{2} = 5$; — середина AC;
$O_1(5;5;5)$.
O_2: $x = \dfrac{8+2}{2} = 5$, $y = \dfrac{2+8}{2} = 5$, $z = \dfrac{6+4}{2} = 5$; — середина BD;
O_2: (5;5;5). $O_1 = O_2$, так что
четырехугольник ABCD — параллелограмм.
Теперь докажем равенство двух соседних сторон:
$AB^2 = (8-6)^2 + (2-7)^2 + (6-8)^2 = 2^2 + 5^2 + 2^2 = 33$;

$AD^2 = (2 - 6)^2 + (8 - 7)^2 + (4-8)^2 = 4^2 + 1^2 + 4^2 = 33$, так что AB = AD и ABCD — параллелограмм с равными сторонами, т.е. ромб.

2) O_1: $x = \dfrac{0+2}{2} = 1$, $y = \dfrac{2+0}{2} = 1$, $z = \dfrac{0+2}{2} = 1$ — середина AC;

$O_1(1;1;1)$.

O_2: $x = \dfrac{1+1}{2} = 1$, $y = \dfrac{0+2}{2} = 1$, $z = \dfrac{0+2}{2} = 1$ — середина BD;

O_2: (1;1;1). $O_1 = O_2$, так что

четырехугольник ABCD — параллелограмм.

$AB^2 = (0 - 1)^2 + (2 - 0)^2 + (0 - 0)^2 = 1^2 + 2^2 = 5$;

$AD^2 = (0 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + (2 - 0)^2 = 1^2 + 2^2 = 5$.

AB = AD, так что

ABCD — параллелограмм с равными сторонами, т.е. ромб.

12. Даны один конец отрезка A(2;3;–1) и его середина C(1;1;1). Найдите второй конец отрезка $B(x;y;z)$.

Так как C – середина AB, то

$C(1;1;1) = C\left(\dfrac{2+x}{2}; \dfrac{3+y}{2}; \dfrac{-1+z}{2}\right)$, так что

$\dfrac{2+x}{2} = 1$; $\dfrac{3+y}{2} = 1$; $\dfrac{-1+z}{2} = 1$;

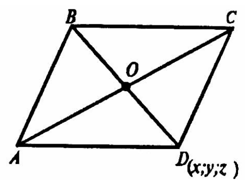
$x = 0$; $y = -1$; $z = 3$; и B(0;–1;3).

13. Найдите координаты вершины D параллелограмма ABCD, если координаты трех других вершин известны:

1) A(2;3;2), B(0;2;4), C(4;1;0);

2) A(1;–1;0), B(0;1;–1), C(–1;0;1);

3) A(4;2;–1), B(1;–3;2), C(–4;2;1).



Диагонали параллелограмма пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

1) $O_1 = O_2$, где O_1 – середина AC, а O_2 – середина BD.

O_1: $x = \dfrac{2+4}{2} = 3$, $y = \dfrac{3+1}{2} = 2$, $z = \dfrac{2+0}{2} = 1$;

$O_1(3;2;1)$. Поскольку $O_1 = O_2$, то

$\dfrac{x}{2} = 3$, $x = 6$; $\dfrac{2+y}{2} = 2$, $y = 2$; $\dfrac{4+z}{2} = 1$, $z = –2$,

так что D(6;2;–2).

2) $O_1 = O_2$;

$O_1 \left(\dfrac{1-1}{2}; \dfrac{-1+0}{2}; \dfrac{0+1}{2}\right)$;

$O_2 \left(\dfrac{0+x}{2}; \dfrac{1+y}{2}; \dfrac{-1+z}{2}\right)$, поэтому

$0 = \dfrac{x}{2}$; $x = 0$; $-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1+y}{2}$; $y = –2$; $\dfrac{1}{2} = \dfrac{-1+z}{2}$; $z = 2$.

так что D(0;–2;2).

3) $O_1 = O_2$;

$O_1 \left(\dfrac{4-4}{2}; \dfrac{2+2}{2}; \dfrac{-1+1}{2}\right)$;

$O_2 \left(\dfrac{1+x}{2}; \dfrac{-3+y}{2}; \dfrac{2+z}{2}\right)$, поэтому

$0 = \dfrac{1+x}{2}$; $x = –1$; $2 = \dfrac{-3+y}{2}$; $y = 7$; $0 = \dfrac{2+z}{2}$; $z = –2$, так что D(–1;7;–2).

14. Докажите, что середина отрезка с концами в точках $A(a;c;–b)$ и $B(–a;d;b)$ лежит на оси y.

Пусть M – середина AB, тогда

$M\left(\dfrac{a-a}{2}; \dfrac{c+d}{2}; \dfrac{-b+b}{2}\right)$, то есть

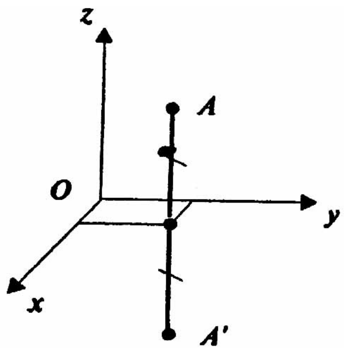
$M\left(0; \dfrac{c+d}{2}; 0\right)$, так что M принадлежит оси y. Что и требовалось доказать.

15. Докажите, что середина отрезка с концами в точках $C(a;b;c)$ и $D(p;q;–c)$ лежит в плоскости xy.

Пусть O – середина CD. Тогда

O ($\frac{a+p}{2}$; $\frac{b+q}{2}$; $\frac{c-c}{2}$); O ($\frac{a+p}{2}$; $\frac{b+q}{2}$; 0) $\in xy$, так как третья координата равна нулю. Что и требовалось доказать.

16. Докажите, что преобразование симметрии относительно координатной плоскости xy задается формулами $x' = x$, $y' = y$, $z' = -z$.



Пусть точка A симметрична точке A′.

Значит эти точки лежат на прямой, перпендикулярной плоскости xy, находятся по разные стороны от плоскости xy и расстояния от A и A′ до xy равны. Поэтому координаты $x = x'$; $y = y'$ и $|z|= = |z'|$. А так как A и A′ по разные стороны относительно xy, то $z' = =-z$. Следовательно, $x' = x$, $y' = y$, $z' = -z$. Что и требовалось доказать.

17. Даны точки (1;2;3), (0;–1;2), (1;0;–3). Найдите точки, симметричные данным относительно координатных плоскостей.

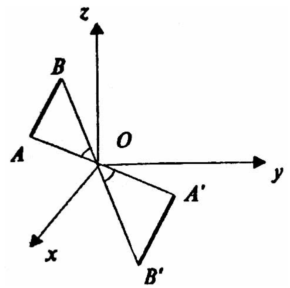
Задача решена в учебнике п. 160 стр. 43.

18. Даны точки (1;2;3), (0;–1;2), (1;0;–3). Найдите точки, симметричные им относительно начала координат.

Точкой симметричной точке A(x;y;z) относительно начала координат является точка A′($-x$;$-y$;$-z$). Так что:

1) (–1; –2; –3); 2) (0;1; –2); 3) (–1;0;3).

19. Докажите, что преобразование симметрии относительно точки есть движение.



Движение — преобразование, при котором сохраняются расстояние между точками.

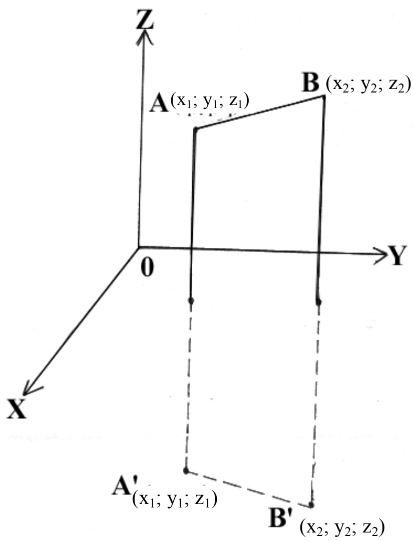
Пусть A и B произвольные точки. A симметричные им относительно точки O, A′ и B′. Тогда

OB = OB′ и OA = OA′ так как O – точка симметрии и

∠BOA = ∠B′OA′ — вертикальные углы. Так что

ΔAOB = ΔA′OB′ (по 1-му признаку), значит, AB = A′B′. Что и требовалось доказать.

20. Докажите, что преобразование симметрии относительно плоскости есть движение.



Возьмем произвольный отрезок AB и рассмотрим преобразование симметрии этого отрезка относительно произвольной плоскости α. Введем декартову систему координат так, чтобы оси x и y лежали в плоскости α. Тогда во введенной системе координат концы отрезка AB имеют координаты $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$, а значит, при симметрии они перейдут в точки $A'(x_1;y_1;-z_1)$ и $B'(x_2;y_2;-z_2)$ (согласно задаче 16).

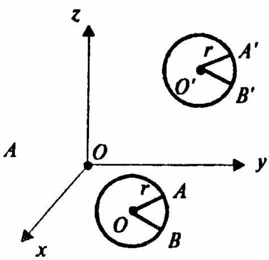
Далее:

$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$;

$(A'B')^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (-z_1 + z_2)^2$;

$(z_1 - z_2)^2 = (z_2 - z_1)^2$, так что AB = A′B′, следовательно, это преобразование есть движение.

21. Докажите, что при движении в пространстве круг переходит в круг того же радиуса.



Возьмем окружность произвольного радиуса: OA = r.

При движении отрезок переходит в отрезок: OA→O′A′ (радиус передвигаем и образуется круг). Каждая точка окружности перейдет в другую точку (A→A′; O→O′; B→B′).

Радиус не изменяется, следовательно, круг переходит в круг (точка O удалена на одно и то же расстояние от любой точки).

22. Докажите, что при движении в пространстве три точки, лежащие на прямой, переходят в три точки, также лежащие на одной прямой.

Возьмем произвольные три точки A, B, C, лежащие на одной прямой.

Если B лежит между A и C, то AB + BC = AC, по определению движения получаем, что A′B′ + B′C′ = A′C′. Это означает, что B′ лежит на прямой A′C′, и B′ лежит между A′и C′.

Так как прямая, отрезок определяются двумя точками, то движение в пространстве переводит прямые в прямые.

23. Найдите значения a, b, c в формулах параллельного переноса $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, если при этом параллельном переносе точка A(1;0;2) переходит в точку A′(2;1;0).

Задача решена в учебнике п. 163 стр. 45.

24. При параллельном переносе точка A(2;1;–1) переходит в точку A′(1;–1;0). В какую точку переходит начало координат?

Формулы параллельного переноса:

$x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$. Так что $A(x_0;y_0;z_0) \to A(x_0';y_0';z_0')$, то $a = x_0' - x_0$; $b = y_0' - y_0$; $c = z_0' - z_0$. В нашем случае

A(2;1;–1)→A′(1;–1;0); поэтому

$a = 1 - 2 = -1$; $b = (-1) - 1 = -2$; $c = 0 - (-1) = 1$. Так что начало координат O(0;0;0) переходит в точку:

$O'(0 + a;\ 0 + b;\ 0 + c) = O'(-1;-2;1)$.

25. Существует ли параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B, а точка C — в точку D, если:

1) A(2;1;0), B(1;0;1), C(3; –2;1), D(2;–3;0);
2) A(–2;3;5), B(1;2;4), C(4;–3;6), D(7;–2;5);
3) A(0;1;2), B(–1;0;1), C(3;–2;2), D(2;–3;1);
4) A(1;1;0), B(0;0;0), C(–2; 2;1), D(1;1;1)?

Если такой параллельный перенос существует, то разности соответствующих координат этих пар точек должны быть равны. То есть

$a = x_B - x_A = x_D - x_C$; $b = y_B - y_A = y_D - y_C$.

$c = z_B - z_A = z_D - z_C$. Имеем:

1) $1 - 2 = 2 - 3 = -1$;

$0 - 1 = -3 - (-2) = -1$; но $1 - 0 \neq 0 - 1$.

Значит, параллельного переноса не существует.

2) $1 - (-2) = 7 - 4 = 3$; $2 - 3 \neq -2 - (-3)$.

Значит параллельного переноса не существует.

3) $-1 - 0 = 2 - 3 = -1$; $0 - 1 = -3 - (-2) = -1$;

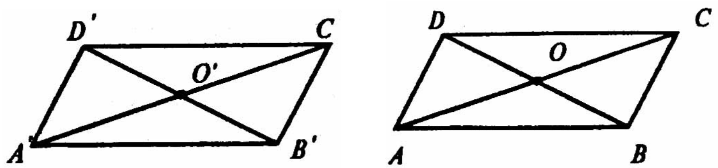
1 – 2 = 1 – 2 = –1.

Так что такой параллельный перенос существует.

4) 0 – 1 ≠ 1 – (–2);

Значит, параллельного переноса не существует.

26. Докажите, что при параллельном переносе параллелограмм переходит в равный ему параллелограмм.



Пусть ABCD – данный параллелограмм, а A', B', C', D' – точки, в которые переходят A, B, C, D. Т.к. при параллельном переносе плоскость переходит в параллельную ей плоскость (или в себя), то плоскость A′B′C′D′ параллельна плоскости ABCD.

Т к. при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние, то AA' || BB' || CC' || DD' и AA' = BB' = CC' = DD'.

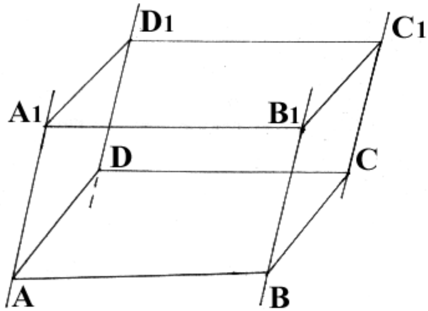
Так что в четырехугольнике AA'D'D противолежащие стороны параллельны и равны, а, значит, AA'D'D — параллелограмм. Тогда A'D' = AD и A'D' || AD.

Аналогично A'B' = AB и A'B' || AB; C'D' = CD и C'D' || CD; B'C' = BC и B'C' || BC.

Т к. две прямые, параллельные третьей, параллельны, то получаем, что A'D' || B'C', A'B' || C'D'.

А, значит, A'B'C'D' — параллелограмм, равный параллелограмму ABCD (т.к. соответствующие стороны равны). Что и требовалось доказать.

27. Четыре параллельные прямые пересекают параллельные плоскости в вершинах параллелограммов ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно. Докажите, что параллелограммы ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ совмещаются параллельным переносом.

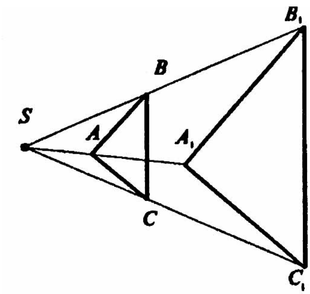


Т к. отрезки параллельных прямых заключенных между параллельными плоскостями, равны, то $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = x$.

Вершины параллелограмма ABCD переходят в вершины параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ по параллельным прямым на одно и то же расстояние x, а, значит, они смещаются на один и тот же вектор $\bar{x}$, а это и есть параллельный перенос.

Таким образом, параллелограммы ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ совмещаются параллельным переносом. Что и требовалось доказать.

28. Докажите, что преобразование гомотетии в пространстве является преобразованием подобия.



Пусть S – центр гомотетии, тогда $\frac{SA}{SA`} = \frac{SB}{SB`}$ и $\angle B_1SA_1 = \angle BSA_1$,

так что $\Delta SAB \sim \Delta SA_1B_1$, значит

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SA_1}{SA} = K\text{, аналогично, } \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{SB_1}{SB} = K.$$

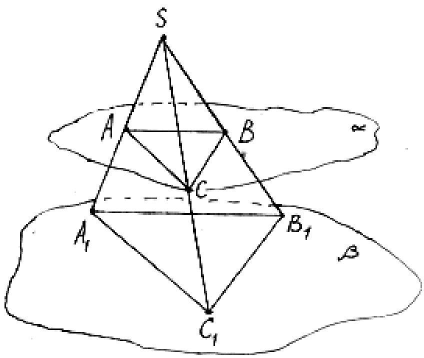
$$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{SA_1}{SA} = K\text{, где K – коэффициент гомотетии.}$$

Следовательно, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$ = K, и по третьему признаку $\Delta ABC \sim A_1B_1C_1$, то есть преобразование гомотетии в пространстве является преобразованием подобия. Что и требовалось доказать.

29. Три прямые, проходящие через точку S, пересекают данную плоскость в точках A, B, C, а параллельную ей плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны.

Имеем $AB \parallel A_1B_1$; $AC \parallel A_1C_1$; $BC \parallel B_1C_1$, т к. эти прямые лежат в плоскостях SA_1B_1, SA_1C_1, SB_1C_1 соответственно, и в параллельных плоскостях α и β. Так что $\angle SAC = \angle SA_1C_1$, $\angle SCA = \angle SC_1A_1$, как соответственные.

И значит, $\Delta SAC \sim \Delta SA_1C_1$ (по двум углам). Аналогично, $\Delta SAB \sim \Delta SA_1B_1$, $\Delta SBC \sim \Delta SB_1C_1$.



Из подобия треугольников следует:

$\frac{SA}{SA_1} = \frac{SC}{SC_1}$ ($\Delta SAC \sim \Delta SA_1C_1$), $\frac{SA}{SA_1} = \frac{SB}{SB_1}$ ($\Delta SAB \sim \Delta SA_1B_1$).

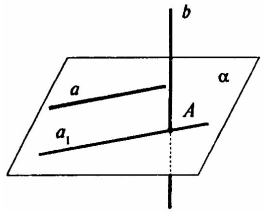
Так что $\frac{SA}{SA_1} = \frac{SC}{SC_1} = \frac{SB}{SB_1} = k$,

т.е. $SA_1 = \frac{1}{K}SA$, $SB_1 = \frac{1}{K}SB$, $SC_1 = \frac{1}{K}SC$, где К — коэффициент подобия.

A, значит, ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ гомотетичны. Что и требовалось доказать.

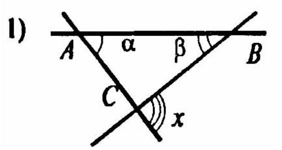
30. Прямая *a* лежит в плоскости α, а прямая *b* перпендикулярна этой плоскости. Чему равен угол между прямыми *a* и *b*?

Через точку пересечения *b* и *a* в плоскости α проведем прямую a_1 параллельно *a*. Тогда $b \perp a_1$, а, значит, $b \perp a$ (теорема 18.3), т.е. угол между прямыми *a* и *b* равен 90°.

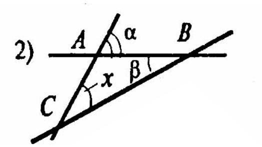


31. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Чему равен угол между прямыми CA и CB, Если эти прямые образуют углы α и β с прямой AB и $\alpha + \beta < 90°$?

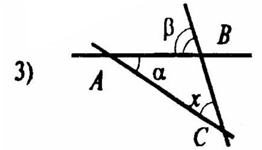
Рассмотрим три случая:



1) Искомый угол *x* – внешний угол треугольника ABC. Но тогда он равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним, то есть $x = \alpha + \beta$.

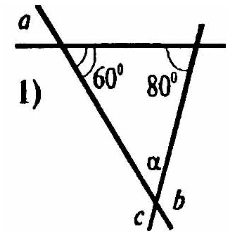


2) Внешний угол $\alpha = \beta + x$, тогда $x = \alpha - \beta$.



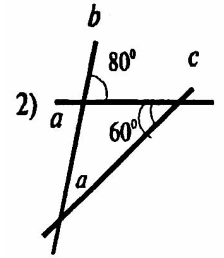
3) Внешний угол $\beta = \alpha + x$, тогда $x = \beta - \alpha$.
Так что $x = \alpha + \beta$ или $x = |\alpha - \beta|$.

32. Прямые a, b, c параллельны одной и той же плоскости. Чему равен угол между прямыми b и c, если углы этих прямых с прямой a равны 60° и 80°?



Существуют прямые a', b' и c', параллельные прямым a, b и c, лежащие в одной плоскости. Углы между a', b', c' равны углам между a, b и c.

1) $\alpha + 60° + 80° = 180°$; $\alpha = 40°$.

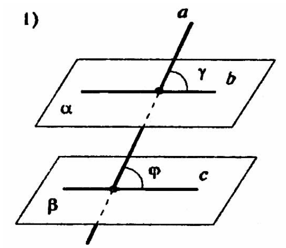


2) $\alpha + 60° = 80°$; $\alpha = 20°$.

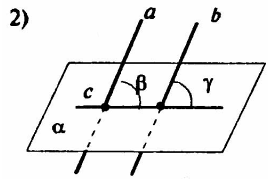
33. Докажите, что любая прямая на плоскости, перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и наклонной. И обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

Задача решена в учебнике п. 165 стр. 47.

34. 1) Докажите, что прямая, пересекающая параллельные плоскости, пересекает их под равными углами.
2) Докажите, что плоскость, пересекающая параллельные прямые, пересекает их под равными углами.



1) В параллельных плоскостях α и β, через точки пересечения их с данной прямой a проведем прямые b и c, параллельные между собой. Углы γ и φ равны (соответственные углы при параллельных прямых b и c, секущей a). Что и требовалось доказать.



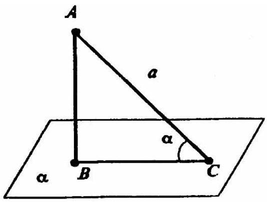
2) В плоскости α проведем прямую c, через точки пересечения ее с прямыми a и b.

Тогда угол β равен углу γ (соответственные углы при параллельных прямых a и b, секущей c). Что и требовалось доказать.

35. Точка А отстоит от плоскости на расстояние h. Найдите длины наклонных, проведенных из этой точки под следующими углами к плоскости: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

Задача решена в учебнике п. 166 стр. 48.

36. Наклонная равна a. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если наклонная составляет с плоскостью угол, равный: 1) 45°; 2) 60°; 3) 30°?



Пусть AC – данная наклонная. Тогда опустим перпендикуляр AB на плоскость α.

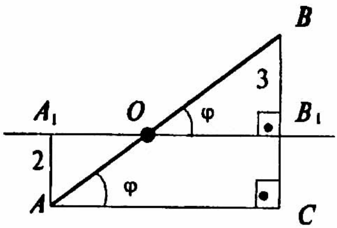
Значит треугольник ABC — прямоугольный. Так как ∠B = =90°. ∠C = ∠D – по условию. BC — проекция наклонной AC на плоскость α. Тогда BC = AC · cos α = a · cos α. Так что:

1) $\alpha = 45°$; $BC = a \cdot \cos 45° = a\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$;

2) $\alpha = 60°$; $BC = a \cdot \cos 60° = a \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{2}$;

3) $\alpha = 30°$; $BC = a \cdot \cos 30° = a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

37. Отрезок длиной 10 м пересекает плоскость, концы его находятся на расстояниях 2 м и 3 м от плоскости. Найдите угол между данным отрезком и плоскостью.



Из концов A и B, данного отрезка опустим перпендикуляры AA_1 и BB_1 на плоскость. Тогда $AA_1 = 2$ м, $BB_1 = 3$ м, $AB = 10$ м. $\angle BOB_1$ - искомый.

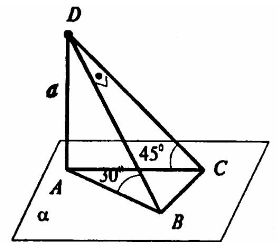
Проведем $AC \perp BB_1$, тогда $OB_1 \| AC$ и $\angle BAC = \angle BOB_1 = \varphi$.

В прямоугольном треугольнике ACB:

$AB = 10$м, $BC = BB_1 + B_1C = BB_1 + AA_1 = 5$ (м).

$\sin\varphi = \dfrac{BC}{AB}$; $\sin\varphi = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$; так что $\varphi = 30°$.

38. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние a, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы 45° и 30°, а между собой прямой угол. Найдите расстояние между концами наклонных.



Пусть DC и DB данные наклонные.

Проведем AD — перпендикуляр к плоскости α. AB и AC — проекции наклонных DB и DC на плоскость α. Треугольники DAB и DAC — прямоугольные. Так что

$DC = a : \sin 45° = a\sqrt{2}$;

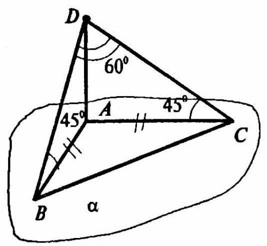
$DB = a : \sin 30° = 2a$.

Далее, ΔBDC — прямоугольный (по условию).

Тогда по теореме Пифагора:

$BC = \sqrt{DB^2 + DC^2} = \sqrt{2a^2 + 4a^2} = \sqrt{6a^2} = a\sqrt{6}$.

39. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние a, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы 45°, а между собой угол 60°. Найдите расстояние между концами наклонных.



Пусть D – данная точка. DB и DC – наклонные. Проведем AD — перпендикуляр к плоскости α.

Тогда AB и AC — проекции наклонных на плоскость α.

Тогда ÄABD и ÄACD — прямоугольные, равнобедренные. Так что AB = AC = AD = *a*.

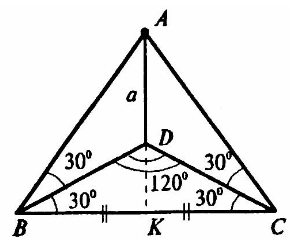
Из этих же треугольников находим:

$DC = DB = a : \sin 45° = a\sqrt{2}$.

Так что ΔBDC — равнобедренный, а поскольку ∠BDC = 60°, то значит треугольник BDC — равносторонний, т.е.

$DB = DC = BC = a\sqrt{2}$.

40. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние *a*, проведены две наклонные под углом 30° к плоскости, причем их проекции образуют угол 120°. Найдите расстояние между концами наклонных.



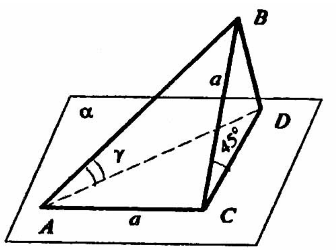
Пусть A – данная точка, AB и AC – наклонные. Проведем AD — перпендикуляр к плоскости α, BD и DC — проекции наклонных на плоскость α.

Тогда $BD = DC = a : \mathrm{tg}30° = a \cdot \mathrm{ctg}30° = a\sqrt{3}$.

Далее, $BK = a\sqrt{3} \cdot \cos 30° = \dfrac{a\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a}{2}$ (где K–середина BC)

Так что BC = 2BK = $2 \cdot \dfrac{3a}{2} = 3a$.

41. Через катет равнобедренного прямоугольного треугольника проведена плоскость под углом 45° ко второму катету. Найдите угол между гипотенузой и плоскостью.



Пусть ABC – данный треугольник.
AC = BC = a (по условию).
Тогда AB = a : cos45° = $a\sqrt{2}$.
Опустим перпендикуляр BD на плоскость α.
∠BCD = 45° (по условию). Поэтому

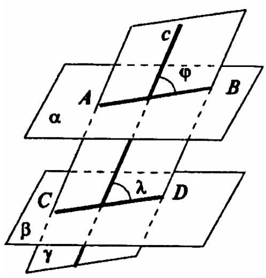
BD = BC·cos45° = $\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$;

ΔABD — прямоугольный, ∠γ = ∠BAD;

AB = $a\sqrt{2}$; BD = $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Так что $\sin\gamma = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} : a\sqrt{2} = \dfrac{1}{2}$; $\gamma = 30°$.

42. Докажите, что плоскость, пересекающая параллельные плоскости, пересекает их под равными углами.



Пусть даны плоскости $\alpha \parallel \beta$ и γ пересекает их по прямым AB и CD соответственно.

Тогда AB || CD (по свойствам параллельных плоскостей).

Из рисунка заметим, что углы φ и λ — искомы. Это линейные углы двугранных углов, образованных плоскостями α, β и γ.

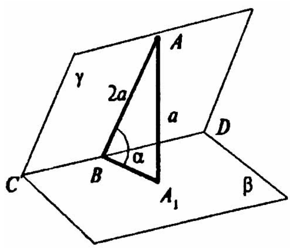
$\angle\varphi = \angle\lambda$, так как это соответственные углы при параллельных прямых AB и CD, и секущей c. Что и требовалось доказать.

43. Две плоскости пересекаются под углом 30°. Точка А, лежащая в одной из этих плоскостей, отстоит от второй плоскости на расстояние a. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей.

Задача решена в учебнике п. 167 стр. 49.

44. Найдите угол между плоскостями, если точка, взятая на одной из них, отстоит от прямой пересечения плоскостей вдвое дальше, чем от второй плоскости.

Пусть β и γ пересекаются по прямой CD. $A \in \gamma$. Проведем $AB \perp CD$ и $AA_1 \perp \beta$. Тогда искомый угол ABA_1 равен α. Пусть $AA_1 = a$, тогда $AB = 2a$.



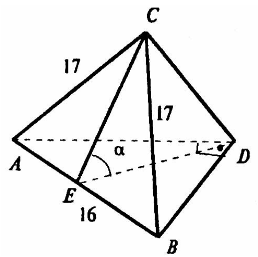
Треугольник ABA_1 прямоугольный, поэтому

$\sin\alpha = \frac{AA_1}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, так что $\alpha = 30°$.

45. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а их плоскости образуют угол 60°. Общее основание равно 16 м, боковая сторона одного треугольника 17 м, а боковые стороны другого перпендикулярны. Найдите расстояние между вершинами треугольников.

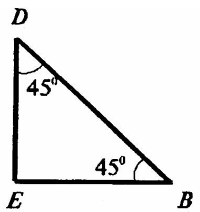
Пусть ABC и ABD данные треугольники. E – середина AB (основание). Тогда возможны 2 случая:

1)



1) $\angle CED = 60°$ (так как DE и CE – медианы и высоты).

Тогда $CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (м).



Рассмотрим прямоугольный ΔDEB: $DE = \frac{1}{2}AB = 8$ м

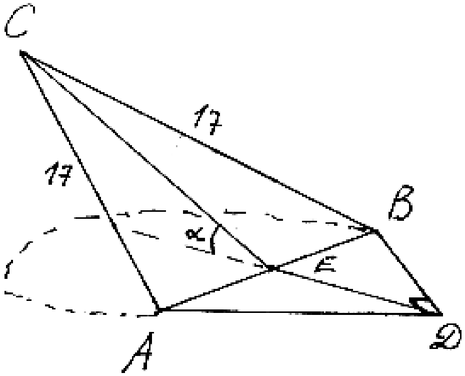
(так как $\angle EAD = \angle EDA = 45°$).

Далее, по теореме косинусов:

$CD^2 = CE^2 + DE^2 - 2 \cdot CE \cdot DE \cdot \cos\alpha = 15^2 + 8^2 - 2 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 0{,}5$; то есть

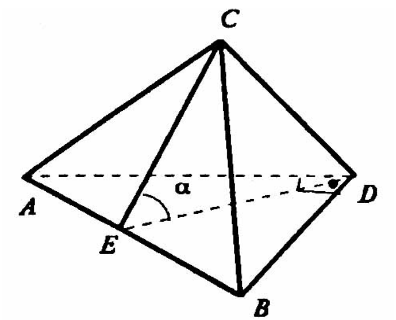
$CD^2 = 169$ (м^2), и

$CD = 13$ м.

2) 

2) $\angle CED = 180° - \angle\alpha = 120°$.
Тогда $CD^2 = CE^2 + DE^2 - 2 \cdot CE \cdot DE \cdot \cos(120°) =$
$= 15^2 + 8^2 + 2 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 0{,}5 = 409$ (м^2) и $CD = \sqrt{409}$ м.

46. Равнобедренные треугольники ABC и ABD с общим основанием AB лежат в различных плоскостях, угол между которыми равен α. Найдите cosα, если:
1) AB = 24 см, AC = 13 см, AD = 37 см, CD = 35 см;
2) AB = 32 см, AC = 65 см, AD = 20 см, CD = 63 см.



Как и в предыдущей задаче $\angle CED$ - искомый.

1) $AE = \frac{1}{2} AB = 12$ см (CE — медиана).

В ΔAEC:

$CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ (см).

В ΔAED:

$DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1369 - 144} = 35$ (см).

В ΔCED:

$$\cos\alpha = \frac{CE^2 + ED^2 - CD^2}{2 \cdot CE \cdot ED} = \frac{5^2 + 35^2 - 35^2}{2 \cdot 5 \cdot 35} = \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{14}.$$

2) $AE = \frac{1}{2} AB = 16$ см.

В ΔAEC:

$CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{65^2 - 16^2} = \sqrt{1225 - 256} = 63$ (м).

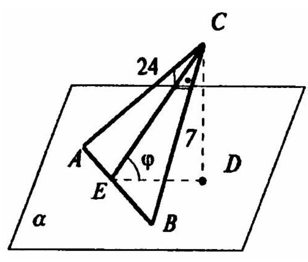
в ΔAED:

$DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{400 - 256} = 12$ (м).

В ΔCED по теореме косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{CE^2 + ED^2 - CD^2}{2 \cdot CE \cdot ED} = \frac{63^2 + 12^2 - 63^2}{2 \cdot 12 \cdot 63} = \frac{12}{2 \cdot 63} = \frac{2}{21}.$$

47. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 м и 24 м. Найдите расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол 30° с плоскостью треугольника.



Пусть ACB – данный треугольник. Проведем $CD \perp \alpha$, где плоскость α проходит через гипотенузу AB и образует $\angle\varphi = 30°$. Проведем $CE \perp AB$. Тогда $\angle CED = \angle\varphi = 30°$.

Далее, $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{576 + 49} = \sqrt{625} = 25$ (м).

Далее, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot AB$, с другой стороны:

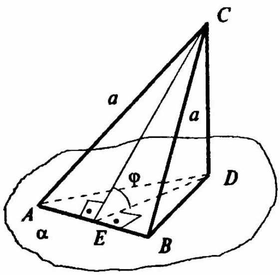
$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$, так что $\frac{1}{2} CE \cdot AB = \frac{1}{2} AC \cdot BC$;

$CE = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{24 \cdot 7}{25} = 6{,}72$ (м).

Из ΔCDE найдем искомое расстояние:

$CD = CE \cdot \sin\varphi = 6{,}72 \cdot \sin 30° = 6{,}72 \cdot \frac{1}{2} = 3{,}36$ (м).

48. Дан равносторонний треугольник со стороной a. Найдите площадь его ортогональной проекции на плоскость, которая образует с плоскостью треугольника угол, равный: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.



Пусть ΔABC - данный, равносторонний.

Проведем высоту CE, и CD – перпендикуляр к плоскости α.

Тогда по теореме о трех перпендикулярах ее проекция ED будет высотой треугольника ADB, угол CED — угол между плоскостями ACD и α, т.е. $\angle CED = \varphi$.

Из прямоугольного треугольника CED: $ED = CE \cdot \cos\varphi$.

ADB — ортогональная проекция треугольника ACB на плоскость α. Тогда

$S_{ADB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DE = \frac{1}{2} AB \cdot CE \cdot \cos\varphi = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$. Но $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, так как ÄABC — равносторонний.

Тогда $S_{ADB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cos\varphi$.

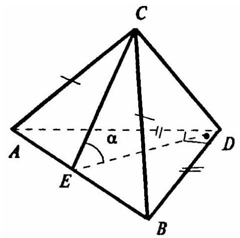
Так что:

1) $\varphi = 30°$; $S_{ADB} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^2}{8}$;

2) $\varphi = 45°$; $S_{ADB} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{8}$;

3) $\varphi = 60°$; $S_{ADB} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

49. 1) Найдите площадь треугольника ортогональной проекции треугольника ABC из задачи 46 на плоскость треугольника ABD.
2) Найдите площадь треугольника ортогональной проекции треугольника ABD из задачи 46 на плоскость треугольника ABC.



1) $S_{ABD}{'} = S_{ABC} \cdot \cos\alpha$, где ABD' – ортогональная проекция ÄABC на ÄABD.

Но $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} CE \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 24 = 60$ (см^2);

$S_{ABD'} = 60 \cdot \cos\alpha = 60 \cdot \dfrac{1}{14} = \dfrac{30}{7} = 4\dfrac{2}{7}$ (см^2) (смотри решение задачи 46).

2) $S_{ABC}{'} = S_{ABD} \cdot \cos\alpha$, где ÄABC' — ортогональная проекция ÄABD на ÄABC.

Но $S_{ABD} = \dfrac{1}{2} \cdot ED \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 32 = 192$ (см^2).

Так что $S_{ABC'} = 192 \cdot \dfrac{2}{21} = \dfrac{128}{7} = 18\dfrac{2}{7}$ (м^2) (смотри решение задачи 46).

50. Даны четыре точки A(2;7;–3), B(1;0;3), C(–3;–4;5), D(–2;3;–1). Найдите среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ равные векторы.

Задача решена в учебнике п. 169 стр. 51.

51. Даны три точки A(1;0;1), B(–1;1;2), C(0;2;–1). Найдите точку D(x;y;z), если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны.

$\overline{AB}$ = (–1 – 1;1 – 0;2 – 1) = (–2;1;1);
$\overline{CD}$ = (x – 0;y – 2;z + 1); так как $\overline{AB}$ = $\overline{CD}$, то получаем:
x – 0 = –2, x = –2; y – 2 = 1, y = 3;
z + 1 = 1, z = 0. Так что D(–2;3;0).

52. Найдите D(x;y;z), если сумма векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равна нулю. A(1;0;1), B(–1;1;2), C(0;2;–1).

$\overline{AB}$ = (–1 – 1;1 – 0;2 – 1) = (–2;1;1);
$\overline{CD}$ = (x – 0;y – 2;z + 1) = (x; y-2; z+1)

$\overline{AB}$ + $\overline{CD}$ =0, то есть $\begin{cases} -2+x=0 \\ 1+y-2=0 \\ 1+z+1=0 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} x=2 \\ y=1 \\ z=-2 \end{matrix}$. Так что D(2;1;–2).

53. Даны векторы $(\overline{2, n, 3})$ и $(\overline{3, 2, m})$. При каких m и n эти векторы коллинеарны?

Для того чтобы векторы были коллинеарны, их координаты должны быть пропорциональны то есть

$\frac{2}{3}=\frac{n}{2}=\frac{3}{m}$, то есть $\frac{2}{3}=\frac{n}{2}$; $n=\frac{4}{3}$; $\frac{2}{3}=\frac{3}{m}$; $m=\frac{9}{2}$.

54. Дан вектор $\bar{a}$ (1;2;3), найдите коллинеарный ему вектор с началом в точке A(1;1;1) и B на плоскости xy.

Задача решена в учебнике п. 170 стр. 52.

55. При каком значении n данные векторы перпендикулярны:

1) $\overline{a}$ (2;–1;3), $\overline{b}$ (1;3;n);
2) $\overline{a}$ (n;–2;1), $\overline{b}$ (n;–n;1);
3) $\overline{a}$ (n;–2;1), $\overline{b}$ (n;2n;4);
4) $\overline{a}$ (4;2n;–1), $\overline{b}$ (–1;1;n)?

Условие перпендикулярности записывается как:
$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = 2\cdot1 + 3\cdot(-1) + 3n = 0$; $2 - 3 + 3n = 0$;
$3n = 1$; $n = \dfrac{1}{3}$;

2) $\overline{a} \cdot \overline{b} = n\cdot n + (-2)\cdot(-n) + 1\cdot1 = 0$;
$n^2 + 2n + 1 = 0$; $(n + 1)^2 = 0$; $n + 1 = 0$; $n = -1$;

3) $\overline{a} \cdot \overline{b} = n\cdot n + 2n\cdot(-2) + 1\cdot4 = 0$;
$n^2 - 4n + 4 = 0$; $(n - 2)^2 = 0$; $n - 2 = 0$; $n = 2$;

4) $\overline{a} \cdot \overline{b} = 4\cdot(-1) + 2n\cdot1 + (-1)\cdot n = 0$; $-4 + 2n - n = 0$;
$n - 4 = 0$; $n = 4$.

56. Даны три точки A(1;0;1), B(–1;1;2), C(0;2;–1). Найдите на оси z такую точку D(0;0;c), чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были перпендикулярны.

Условие перпендикулярности записывается:
$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$. Далее $\overline{AB} = (-1 - 1;1 - 0;2 - 1) = (-2;1;1)$;
$\overline{CD} = (0 - 0;0 - 2;c + 1) = (0;-2;c + 1)$. Так что
$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = -2\cdot0 + (-2)\cdot1 + (c + 1)\cdot1 = 0$;
$-2 + c + 1 = 0$; $c - 1 = 0$; $c = 1$.

57. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол 60°, а вектор $\overline{c}$ им перпендикулярен. Найдите абсолютную величину вектора $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$.

По условию:
$\overline{a} \wedge \overline{b} = 60°$; $\overline{a} \wedge \overline{c} = 90°$; $\overline{b} \wedge \overline{c} = 90°$,
имеем: $|\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}| = \sqrt{(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})^2}$;

$((\overline{a}+\overline{b})+\overline{c})^2=(\overline{a}+\overline{b})^2+2\overline{c}(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}^{\,2}=$
$=\overline{a}^{\,2}+\overline{b}^{\,2}+2\overline{a}\cdot\overline{b}+2\overline{a}\cdot\overline{c}+2\overline{b}\cdot\overline{c}+\overline{c}^{\,2}=$
$=\overline{a}^{\,2}+\overline{b}^{\,2}+\overline{c}^{\,2}+2\overline{a}\cdot\overline{b}+2\overline{a}\cdot\overline{c}+2\overline{b}\cdot\overline{c}$;
$\overline{a}\cdot\overline{c}=0$, $\overline{b}\cdot\overline{c}=0$ (по условию, так как $\overline{a}\perp\overline{c}$ и $\overline{b}\perp\overline{c}$), то
$((\overline{a}+\overline{b})+\overline{c})^2=\overline{a}^{\,2}+\overline{b}^{\,2}+\overline{c}^{\,2}+2\overline{a}\cdot\overline{b}$, но также
$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$. Так что окончательно:
$|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}|=\sqrt{(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})^2}=\sqrt{|\overline{a}|^2+|\overline{b}|^2+|\overline{c}|^2+|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$.

58. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ единичной длины образуют попарно углы 60°. Найдите угол между векторами:
1) $\overline{a}$ и $\overline{b}+\overline{c}$; 2) $\overline{a}$ и $\overline{b}-\overline{c}$.

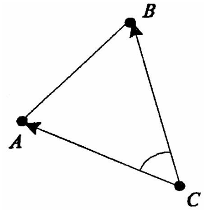
Имеем: $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot\overline{c}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$;
$\overline{a}^{\,2}=\overline{b}^{\,2}=\overline{c}^{\,2}=1$. Так что:
1) $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$;
$|\overline{b}+\overline{c}|=\sqrt{(\overline{b}+\overline{c})^2}=\sqrt{b^2+c^2+2\overline{b}\overline{c}}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$; поэтому
$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}+\overline{c}|}=\frac{1}{1\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, где φ – искомый угол.
Так что $\varphi\approx 54^\circ 44'$;
2) $\overline{a}\cdot(\overline{b}-\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}-\overline{a}\cdot\overline{c}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$, $\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot(\overline{b}-\overline{c})}{|\overline{a}||\overline{b}-\overline{c}|}=0$,

значит, $\varphi=\frac{\pi}{2}=90^\circ$.

59. Даны четыре точки A(0;1;–1), B(1;–1;2), C(3;1;0), D(2;–3;1). Найдите косинус угла φ между векторами AB и CD.

Задача решена в учебнике п. 170 стр. 53.

60. Даны три точки A(0;1;–1), B(1;–1;2), C(3;1;0). Найдите косинус угла C треугольника ABC.



$\angle C$ — угол между векторами $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$. Но

$\overline{CA} = (0-3;1-1;-1-0) = (-3;0;-1)$;

$\overline{CB} = (1-3;-1-1;2-0) = (-2;-2;2)$, далее

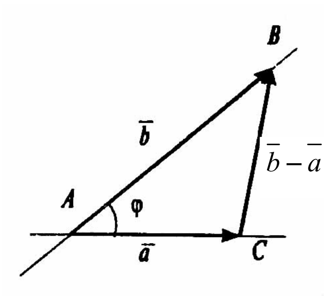
$|\overline{CA}| = \sqrt{9+0+1} = \sqrt{10}$; $|\overline{CB}| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;

$\overline{CA}\cdot\overline{CB} = (-3)(-2)+0\cdot(-2)+(-1)\cdot 2 = 6-2 = 4$.

Так что $\cos C = \dfrac{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}{|\overline{CA}|\cdot|\overline{CD}|} = \dfrac{4}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{3}\cdot 2} = \dfrac{2}{\sqrt{30}} = \sqrt{\dfrac{2}{15}}$.

61. Докажите, что угол φ между прямыми, содержащими векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, определяется из уравнения:

$\left|\overline{a}\overline{b}\right| = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi$.



Рассмотрим ΔACB, где $\overline{AC} = \overline{a}$, $\overline{AB} = \overline{b}$ и $\overline{CB} = \overline{b}-\overline{a}$. По теореме косинусов:

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\cdot AC\cdot AB\cdot\cos\varphi$, то есть

$(\overline{a} - \overline{b})^2 = \overline{a}^{\,2} + \overline{b}^{\,2} - 2\cdot|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi$.

$(\overline{a} - \overline{b})^2 = \overline{a}^{\,2} + \overline{b}^{\,2} - 2\cdot \overline{a} \cdot \overline{b}$, так что

$\overline{a}^{\,2} + \overline{b}^{\,2} - 2\cdot|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi = \overline{a}^{\,2} + \overline{b}^{\,2} - 2\cdot \overline{a} \cdot \overline{b}$, то есть

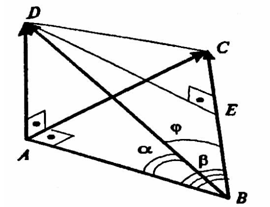
$\overline{a} \cdot \overline{b} = \cdot|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi$. Что и требовалось доказать.

62. Из вершины прямого угла A треугольника ABC восставлен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Найдите косинус угла φ между векторами BC и BD, если угол ABD равен α, а угол ABC равен β.

$\angle\varphi = \angle DBC$.

Проведем $DE \perp BC$.

По теореме о трех перпендикулярах $AE \perp BC$.



Так что треугольники BAD и BAE — прямоугольные

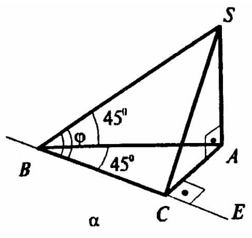
Так что $BA = BD\cdot\cos\alpha$;

$BE = BA\cdot\cos\beta = BD\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta$. Далее,

$\cos\varphi = \dfrac{BE}{BD} = \dfrac{BD\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta}{BD} =$

$=\cos\alpha\cdot\cos\beta$.

63. Наклонная образует угол 45° с плоскостью. Через основание наклонной проведена прямая в плоскости под углом 45° к проекции наклонной. Найдите угол φ между этой прямой и наклонной.



Пусть SB — данная наклонная, BA — ее проекция, то есть SA – перпендикуляр.

Тогда $\angle SBA = 45°$ (по условию).

$\angle SBE$ – искомый; $\angle SBA = \angle CBA = 45°$;

$AB = SB\cdot\cos SBA = SB\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{SB}{\sqrt{2}}$

(из ÄSBA , где $\angle A = 90°$).

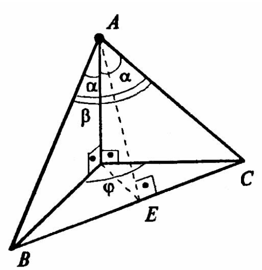
$CB = AB\cdot\cos CBA = \dfrac{CB}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{SB}{2}$ (по теореме о трех перпендикулярах $AC \perp BE$, и треугольник CBA — прямоугольный);

$\angle SBC = \varphi$ в прямоугольном ÄSBC .

Тогда $\cos\varphi = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{SB}{2} : SB = \dfrac{1}{2}$, так что

$\varphi = 60°$ — искомый угол.

64. Из точки вне плоскости проведены перпендикуляр и две равные наклонные, образующие углы α с перпендикуляром. найдите угол φ между проекциями наклонных, если угол между наклонными β.



Пусть AB и AC – данные наклонные, AO – перпендикуляр.
Тогда искомый угол $\varphi = \angle BOC$ – искомый.
$OB = OC = a$ (как равные проекции равные наклонные).
Рассмотрим ΔBOC:

$$\cos\varphi = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2\quad OB\quad OC} = \frac{2a^2 - BC^2}{2a^2}.$$

Далее, AB = AC.

Далее из ÄBAC : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\beta$.

Но $AB = AC = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ (из ΔAOB). Так что

$$BC^2 = \frac{a^2}{\sin^2\alpha} + \frac{a^2}{\sin^2\alpha} - 2\frac{a^2\cos\beta}{\sin^2\alpha}$$

и $$\cos\varphi = \frac{2a^2 - 2a^2\left(\dfrac{1-\cos\beta}{\sin^2\alpha}\right)}{2a^2} = 1 - \left(\frac{1-\cos\beta}{\sin^2\alpha}\right) = \frac{\cos\beta - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}.$$