

Домашняя работа по геометрии за 11 класс

к учебнику «Геометрия 10-11 класс:
Учебник для общеобразовательных учреждений
Л.С. Атанасян и др.
11-е изд. — М.: Просвещение, 2002 г.»

учебно-методическое пособие

Глава V. Метод координат в пространстве

400. а) ось абсцисс: точка С (2;0;0);

б) ось ординат: точка Е (0;-1;0);

в) ось аппликат: точка В (0;0;-7);

г) плоскость Оху: точки Н $(-\sqrt{5}; \sqrt{3}; 0)$, Е (0;-1;0), С (2;0;0), А(3;-1;0);

д) плоскость Оуz: точки В (0;0;-7), Е (0;-1;0), G(0;5;-7);

е) плоскость Охz: точки В (0;0;-7), С (2;0;0) и D (-4;0;3).

401. Координаты проекций точки А (2; -3; 5):

а) на плоскость Охz: $A_1(2; 0; 5)$, на Оху: $A_2(2; -3; 0)$; на Оуz: $A_3(0; -3; 5)$;

б) на ось Ох: $A_4(2; 0; 0)$, на Оу: $A_5(0; -3; 0)$, на Oz: $A_6(0;0;5)$.

Точка В $(3; -5; \frac{1}{2})$:

а) на плоскость Охz: $B_1(3; 0; \frac{1}{2})$, на Оху: $B_2(3; -5; 0)$, на Оуz: $B_3(0; -5; \frac{1}{2})$;

б) на ось Ох: $B_4(3; 0; 0)$, на Оу: $B_5(0; -5; 0)$, на Oz: $B_6(0;0; \frac{1}{2})$.

Точка С $(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{5}-\sqrt{3})$:

а) на плоскость Охz: $C_1(\sqrt{3}; 0; \sqrt{5}-\sqrt{3})$, на Оху: $C_2(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$, на

Оуz: $C_3(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{5}-\sqrt{3})$;

б) на ось Ох: $C_1(-\sqrt{3}; 0; 0)$, на Оу: $C_5(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$, на Oz: $C_6(0; 0; \sqrt{5}-\sqrt{3})$.

402. А (0; 0; 0), В (0; 0; 1), D (0; 1; 0) и $A_1(1; 0; 0)$, следовательно, стороны куба равны 1. Куб помещен в пространстве, как показано на рисунке.

Следовательно, по рисунку имеем:

$C(0;1;1)$, $B_1(1;0;1)$, $C_1(1;1;1)$, $D_1(1;1;0)$

403. $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$; $x=3$, $y=2$, $z=-5$; тогда координаты вектора \vec{a} : $\vec{a} \{3; 2; -5\}$.

Вектор $\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; $x=-5$, $y=3$, $z=-1$; $\vec{b} \{-5; 3; -1\}$.

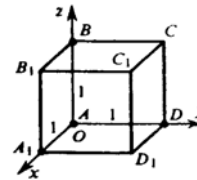
Вектор $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$; $x=1$, $y=-1$, $z=0$; $\vec{c} \{1; -1; 0\}$.

Вектор $\vec{d} = \vec{j} + \vec{k}$; $x=0$, $y=1$, $z=1$; $\vec{d} \{0; 1; 1\}$.

Вектор $\vec{m} = \vec{k} - \vec{i}$; $x=-1$, $y=0$, $z=1$; $\vec{m} \{-1; 0; 1\}$.

Вектор $\vec{n} = 0,7\vec{k}$; $x=0$, $y=0$, $z=0,7$; $\vec{n} \{0; 0; 0,7\}$.

404. Для $\vec{a} \{5; -1; 2\}$ по формуле $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ координаты вектора $x=5$,



$y=-1, z=2$; следовательно, $\vec{a}=5\vec{i}-1\vec{j}+2\vec{k}=5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.

Для $\vec{b} \{ -3; -1; 0 \}$ $x=-3, y=-1, z=0$; следовательно, $\vec{b}=-3\vec{i}-1\vec{j}+0\vec{k}=-3\vec{i}-\vec{j}$.

Для $\vec{c} \{ 0; -1; 0 \}$ $x=0, y=-1, z=0$; $\vec{c}=0\vec{i}-1\vec{j}+0\vec{k}=-\vec{j}$.

Для $\vec{d} \{ 0; 0; 0 \}$ $x=0, y=0, z=0$ и тогда разложение будет выглядеть так:

$$\vec{d}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=\vec{0}.$$

405. Координаты точки равны соответствующим координатам радиус-вектора (п.44). Соответственно, для радиус-вектора OA_1 рассмотрим точку A_1 . Ее координаты и будут координатами вектора OA_1 : $A_1 (2;0;2)$ $OA_1 \{ 2; 0; 2 \}$. $B_1 (0;3;2)$. Значит, $OB_1 \{ 0; 3; 2 \}$. $C_1 (0;0;2)$. Значит $OC_1 \{ 0; 0; 2 \}$.

$C (2;3;0)$. Значит, $OC \{ 2; 3; 0 \}$. $C_1 (2;3;2)$. Значит, $OC_1 \{ 2; 3; 2 \}$.

Вектор BC_1 это разность векторов OC_1 и OB . $BC_1=OC_1 - OB$; $OC_1 \{ 2; 3; 2 \}$, $OB \{ 0; 3; 0 \}$. Следовательно, $BC_1 \{ 2-0; 3-3; 2-0 \}$, $BC_1 \{ 2; 0; 2 \}$.

$AC_1=OC_1-OA$; $OC_1 \{ 2; 3; 2 \}$, $OA \{ 2; 0; 0 \}$.

$AC_1 \{ 2-2; 3-0; 2-0 \}$, $AC_1 \{ 0; 3; 2 \}$.

$O_1C=OC-OO_1$; $OC \{ 2; 3; 0 \}$, $OO_1 \{ 0; 0; 2 \}$.

$O_1C \{ 2-0; 3-0; 0-2 \}$, $O_1C \{ 2; 3; -2 \}$.

406. Рассмотрим общий случай. Рассмотрим два некомпланарных вектора AB и DC . Перенесем вектор DC параллельно так, чтобы точка D_1 его начала совпала с точкой B конца первого вектора. Получим вектор D_1C_1 или, что то же самое, вектор BC_1 , сонаправленный с вектором DC и равный ему по длине. Согласно правилу сложения векторов: $AB+DC=AB+BC_1=AC_1$.

Пусть $AB \{ x_1; y_1; z_1 \}$, $BC_1 \{ x_2; y_2; z_2 \}$. Докажем, что $AC_1 \{ x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2 \}$.

Для доказательства выразим координаты этих векторов через координаты их начала и конца. $AB (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$,

$BC_1 \{ x_{C_1} - x_B; y_{C_1} - y_B; z_{C_1} - z_B \}$, $AC_1 (x_{C_1} - x_A; y_{C_1} - y_A; z_{C_1} - z_A)$, из обозначения координат вектора AB как x_1, y_1 и z_1 и вектора BC_1 как x_2, y_2, z_2 , получим $x_1=x_B-x_A, y_1=y_B-y_A, z_1=z_B-z_A, x_2=x_{C_1}-x_B, y_2=y_{C_1}-y_B, z_2=z_{C_1}-z_B$.

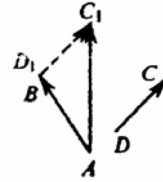
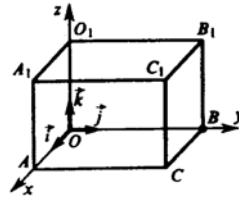
Вычислим суммы $x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2$: $x_1+x_2=x_B-x_A+x_{C_1}-x_B=x_{C_1}-x_A$;

$y_1+y_2=y_B-y_A+y_{C_1}-y_B=y_{C_1}-y_A$; $z_1+z_2=z_B-z_A+z_{C_1}-z_B=z_{C_1}-z_A$;

Суммы координат $x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2$ являются координатами вектора AC_1 , равного сумме исходных двух векторов AB и DC . Что и требовалось доказать.

407. а) Обозначим $\vec{a} + \vec{b} = \vec{p}$,

$$\begin{aligned} x_p &= x_a + x_b; x_a = 3; x_b = 0; & y_p &= y_a + y_b; y_a = -5; y_b = 7; & z_p &= z_a + z_b; z_a = 2; z_b = -1; \\ x_p &= 3+0=3; & y_p &= -5+7=2; & z_p &= 2-1=1; \end{aligned}$$



$$\vec{p} \{3; 2; 1\}.$$

б) Обозначим $\vec{a} + \vec{c} = \vec{e}$

$$x_e = x_a + x_c = 3 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}; \quad y_e = y_a + y_c = -5 + 0 = -5; \quad z_e = z_a + z_c = 2 + 0 = 2;$$

$$\vec{e} \{3\frac{2}{3}; -5; 2\}.$$

в) Обозначим $\vec{b} + \vec{c} = \vec{f}$,

$$x_f = x_b + x_c = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}; \quad y_f = y_b + y_c = 7 + 0 = 7; \quad z_f = z_b + z_c = -1 + 0 = -1;$$

$$\vec{f} \{\frac{2}{3}; 7; -1\}.$$

г) Обозначим $\vec{d} + \vec{b} = \vec{r}$,

$$x_r = x_d + x_b = -2,7 + 0 = -2,7; \quad y_r = y_d + y_b = 3,1 + 7 = 10,1; \quad z_r = z_d + z_b = 0,5 - 1 = -0,5;$$

$$\vec{r} \{-2,7; 10,1; -0,5\}.$$

д) Обозначим $\vec{d} + \vec{a} = \vec{s}$,

$$x_s = x_d + x_a = -2,7 + 3 = 0,3; \quad y_s = y_d + y_a = 3,1 - 5 = -1,9; \quad z_s = z_d + z_a = 0,5 + 2 = 2,5;$$

$$\vec{s} \{0,3; -1,9; 2,5\}.$$

е) Обозначим $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{q}$

$$x_q = x_a + x_b + x_c = 3 + 0 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3};$$

$$y_q = y_a + y_b + y_c = -5 + 7 + 0 = 2;$$

$$z_q = z_a + z_b + z_c = 2 - 1 + 0 = 1;$$

$$\vec{q} \{3\frac{2}{3}; 2; 1\}.$$

ж) Обозначим $\vec{b} + \vec{a} + \vec{d} = \vec{k}$,

$$x_k = x_b + x_a + x_d = 0 + 3 - 2,7 = 0,3;$$

$$y_k = y_b + y_a + y_d = 7 - 5 + 3,1 = 5,1;$$

$$z_k = z_b + z_a + z_d = -1 + 2 + 0,5 = 1,5;$$

$$\vec{k} \{0,3; 5,1; 1,5\}.$$

з) Обозначим $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{m}$,

$$x_m = x_a + x_b + x_c + x_d = 3 + 0 + \frac{2}{3} - 2,7 = 3 + \frac{20}{30} - \frac{27 \cdot 3}{30} = 3 + \frac{20 - 81}{30} = 3 - \frac{61}{30} = \frac{29}{30};$$

$$y_m = y_a + y_b + y_c + y_d = -5 + 7 + 0 + 3,1 = 5,1; \quad z_m = z_a + z_b + z_c + z_d = 2 - 1 + 0 + 0,5 = 1,5;$$

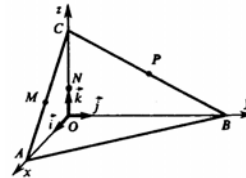
$$\vec{m} = \{\frac{29}{30}; 5,1; 1,5\}.$$

408. Согласно п.44 имеем: $AC \{x_c - x_a, y_c - y_a, z_c - z_a\}$

По рисунку имеем: $A(4; 0; 0); B(0; 9; 0); C(0; 0; 2)$.

$$AC: x_c - x_a = 0 - 4 = -4; y_c - y_a = 0 - 0 = 0;$$

$$\begin{aligned} z_C - z_A &= 2 - 0 = 2; \quad AC \{-4; 0; 2\}. \\ CB \{x_B - x_C, y_B - y_C; z_B - z_C\}. \\ x_B - x_C &= 0 - 0 = 0; \quad y_B - y_C = 9 - 0 = 9; \quad z_B - z_C = 0 - 2 = -2; \\ CB \{0; 9; -2\}. \\ AB \{x_B - x_A, y_B - y_A; z_B - z_A\}. \\ x_B - x_A &= 0 - 4 = -4; \quad y_B - y_A = 9 - 0 = 9; \\ z_B - z_A &= 0 - 0 = 0; \quad AB \{-4; 9; 0\}. \end{aligned}$$



MN $\{x_N - x_M, y_N - y_M; z_N - z_M\}$.
Координаты точек M, N и P являются координатами векторов OM, ON и OP соответственно. Тогда согласно п. 45:

$$ON = \frac{1}{2} OC. \text{ Тогда } ON \left\{ \frac{1}{2} x_C; \frac{1}{2} y_C; \frac{1}{2} z_C \right\}; \quad ON \left\{ \frac{1}{2} \cdot 0; \frac{1}{2} \cdot 0; \frac{1}{2} \cdot 2 \right\};$$

$$ON \{0; 0; 1\}; \quad N \{0; 0; 1\}.$$

Вектор OM: точка M — середина отрезка AC. Значит $OM = \frac{1}{2} (OA + OC)$,

$$x_M = \frac{1}{2} (x_A + x_C) = \frac{1}{2} (4 + 0) = 2; \quad y_M = \frac{1}{2} (y_A + y_C) = \frac{1}{2} (0 + 0) = 0$$

$$z_M = \frac{1}{2} (z_A + z_C) = \frac{1}{2} (0 + 2) = 1;$$

$$M \{2; 0; 1\}; \quad OM \{2; 0; 1\}.$$

$$MN: x_N - x_M = 0 - 2 = -2; \quad y_N - y_M = 0 - 0 = 0; \quad z_N - z_M = 1 - 1 = 0; \quad MN \{-2; 0; 0\}.$$

Точка P — середина отрезка BC. Значит:

$$OP = \frac{1}{2} (OB + OC), \quad x_P = \frac{1}{2} (x_B + x_C) = \frac{1}{2} (0 + 0) = 0; \quad y_P = \frac{1}{2} (y_B + y_C) = \frac{1}{2} (9 + 0) = 4 \frac{1}{2};$$

$$z_P = \frac{1}{2} (z_B + z_C) = \frac{1}{2} (0 + 2) = 1;$$

$$P = (0; 4 \frac{1}{2}; 1); \quad OP \{0; 4 \frac{1}{2}; 1\}$$

$$BM: \{x_M - x_B, y_M - y_B; z_M - z_B\};$$

$$x_M - x_B = 2 - 0 = 2; \quad y_M - y_B = 0 - 9 = -9; \quad z_M - z_B = 1 - 0 = 1;$$

$$BM \{2; -9; 1\}.$$

$$NP: \{x_P - x_N, y_P - y_N; z_P - z_N\};$$

$$x_P - x_N = 0 - 0 = 0; \quad y_P - y_N = 4 \frac{1}{2} - 0 = 4 \frac{1}{2}; \quad z_P - z_N = 1 - 1 = 0;$$

$$NP \{0; 3 \frac{1}{2}; 0\}.$$

409. Чтобы найти координаты вектора разности, нужно найти разности соответствующих координат этих векторов.

$$x_a = 5; \quad y_a = -1; \quad z_a = 1,$$

$$x_b = -2; \quad y_b = 1; \quad z_b = 0,$$

$$x_c = 0; \quad y_c = 0,2; \quad z_c = 0,$$

$$x_d = -\frac{1}{3}; \quad y_d = 2 \frac{2}{5}; \quad z_d = -\frac{1}{7}.$$

$$a) \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{p}$$

$$б) \quad \vec{b} - \vec{a} = \vec{r},$$

$$\begin{aligned}\vec{p} & \{x_a - x_b; y_a - y_b; z_a - z_b\}, & \vec{r} & \{x_b - x_a; y_b - y_a; z_b - z_a\}, \\ \vec{p} & \{5 - (-2); -1 - 1; 1 - 0\}, & \vec{r} & \{-2 - 5; 1 - (-1); 0 - 1\}, \\ \vec{p} & \{7; -2; 1\}. & \vec{r} & \{-7; 2; -1\}. \\ \text{в) } \vec{a} - \vec{c} & = \vec{q}, & \text{г) } \vec{d} - \vec{a} & = \vec{e}, \\ \vec{q} & \{5 - 0; -1 - 0, 2; 1 - 0\}, & \vec{e} & \{x_d - x_a; y_d - y_a; z_d - z_a\}, \\ \vec{q} & \{5; -1, 2; 1\}. & \vec{e} & \{-\frac{1}{3} - 5; 2\frac{2}{5} - (-1); -\frac{1}{7} - 1\}, \\ & & \vec{e} & \{-5\frac{1}{3}; 3\frac{2}{5}; -1\frac{1}{7}\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{д) } \vec{c} - \vec{d} & = \vec{f}, \\ \vec{f} & \{x_c - x_d; y_c - y_d; z_c - z_d\}, & \vec{f} & \{0 - (-\frac{1}{3}); 0, 2 - 2\frac{2}{5}; 0 - (-\frac{1}{7})\}, \\ \vec{f} & \{\frac{1}{3}; -2, 2, \frac{1}{7}\}.\end{aligned}$$

е) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$: пусть $\vec{a} - \vec{b} = \vec{m}$, $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{m} + \vec{c} = \vec{n}$, следовательно
 $\vec{m} \{x_a - x_b; y_a - y_b; z_a - z_b\}$. $\vec{n} \{(x_a - x_b) + x_c; (y_a - y_b) + y_c; (z_a - z_b) + z_c\}$
 $\vec{n} \{5 - (-2) + 0; -1 - 1 + 0, 2; 1 - 0 + 0\}$, $\vec{n} \{7; -1, 8; 1\}$.

ж) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{l}$, $\vec{l} \{x_a - x_b - x_c; y_a - y_b - y_c; z_a - z_b - z_c\}$,
 $\vec{l} \{5 + 2 - 0; -1 - 1 - 0, 2; 1 - 0 - 0\}$, $\vec{l} \{7; -2, 2; 1\}$.

з) Вектор $2\vec{a}$ будет иметь координаты $\{2x_a; 2y_a; 2z_a\}$, или $\{10; -2; 2\}$.

и) Вектор $-3\vec{b}$ будет иметь координаты: $\{-3x_b; -3y_b; -3z_b\}$, или $\{6; -3; 0\}$.

к) $-6\vec{c} \{-6x_c; -6y_c; -6z_c\}$, или $\{-6 \cdot 0; -6 \cdot 0, 2; -6 \cdot 0\}$, $-6\vec{c} \{0; -1, 2; 0\}$.

л) $-\frac{1}{3}\vec{d} \{-\frac{1}{3}x_d; -\frac{1}{3}y_d; -\frac{1}{3}z_d\}$, $-\frac{1}{3}\vec{d} \{-\frac{1}{3} \cdot (-\frac{1}{3}); -\frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{5}; -\frac{1}{3} \cdot (-\frac{1}{7})\}$,
 $-\frac{1}{3}\vec{d} \{\frac{1}{9}; -\frac{12}{15}; \frac{1}{21}\}$, или $-\frac{1}{3}\vec{d} \{\frac{1}{9}; -\frac{4}{5}; \frac{1}{21}\}$.

м) $0,2\vec{b} \{0,2x_b; 0,2y_b; 0,2z_b\}$, $0,2\vec{b} \{0,2 \cdot (-2); 0,2 \cdot 1; 0,2 \cdot 0\}$,
 $0,2\vec{b} \{-0,4; 0,2; 0\}$.

410. Согласно условиям

$\vec{a} : x_a = -1, y_a = 2, z_a = 0$; $\vec{b} : x_b = 0, y_b = -5, z_b = -2$; $\vec{c} : x_c = 2, y_c = 1, z_c = -3$.

Для вектора \vec{p} вычислим отдельно каждое слагаемое:

$3\vec{b} \{3x_b; 3y_b; 3z_b\}$, $3\vec{b} \{3 \cdot 0; 3 \cdot (-5); 3 \cdot (-2)\}$,

$3\vec{b} \{0; -15; -6\}$, обозначим $3\vec{b} = \vec{m}$.

$-2\vec{a} \{-2x_a; -2y_a; -2z_a\}$, $-2\vec{a} \{-2 \cdot (-1); -2 \cdot 2; -2 \cdot 0\}$,

$-2\vec{a} \{2; -4; 0\}$, обозначим $-2\vec{a} = \vec{n}$.

Следовательно $\vec{p} = 3\vec{b} - 2\vec{a} + \vec{c} = \vec{m} + \vec{n} + \vec{c}$ будет иметь координаты:

$$\vec{p} \{x_m + x_n + x_c; y_m + y_n + y_c; z_m + z_n + z_c\}, \quad \vec{p} \{0+2+2; -15-4+1; -6+0-3\}, \\ \vec{p} \{4; -18; -9\}.$$

Для вектора \vec{q} аналогично вычислим: $3\vec{c} \{3x_c; 3y_c; 3z_c\},$

$$3\vec{c} \{3 \cdot 2; 3 \cdot 1; 3 \cdot (-3)\}, \quad 3\vec{c} \{6; 3; -9\}, \quad \text{обозначим } 3\vec{c} = \vec{r}.$$

$$-2\vec{b} \{-2x_b; -2y_b; -2z_b\}, \quad -2\vec{b} \{-2 \cdot 0; -2 \cdot (-5); -2 \cdot (-2)\},$$

$$-2\vec{b} \{0; 10; 4\}, \quad \text{обозначим } -2\vec{b} = \vec{e}.$$

Следовательно $\vec{q} = 3\vec{c} - 2\vec{b} + \vec{a} = \vec{r} + \vec{e} + \vec{a},$

$$\vec{q} \{x_r + x_e + x_a; y_r + y_e + y_a; z_r + z_e + z_a\}, \quad \vec{q} \{6+0+(-1); 3+10+2; -9+4+0\}, \\ \vec{q} \{5; 15; -5\}.$$

411. По правилам суммы, разности, произведения векторов (п. 43) имеем:

$$a) \quad 3\vec{a} \{3 \cdot (-1); 3 \cdot 1; 3 \cdot 1\}, \quad 3\vec{a} \{-3; 3; 3\}, \quad 2\vec{b} \{2 \cdot 0; 2 \cdot 2; 2 \cdot (-2)\}, \quad 2\vec{b} \{0; 4; -4\}.$$

$$\text{Обозначим: } 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (3\vec{a} + 2\vec{b}) - \vec{c} = \vec{s} - \vec{c};$$

$$\vec{s} = 3\vec{a} + 2\vec{b}; \quad \vec{s} \{-3; 7; -1\}; \quad \vec{c} \{-3; 2; 0\}; \quad \vec{s} - \vec{c} = \vec{r};$$

$$\vec{r} \{-3 - (-3); 7 - 2; -1 - 0\}; \quad \vec{r} \{0; 5; -1\}.$$

$$b) \quad 2\vec{c} \{2 \cdot (-3); 2 \cdot 2; 2 \cdot 0\}; \quad 2\vec{c} \{-6; 4; 0\}; \quad \vec{a} \{-1; 1; 1\};$$

$$-\vec{a} + 2\vec{c} - \vec{d} = (-\vec{a} + 2\vec{c}) - \vec{d} = \vec{p} - \vec{d};$$

$$\vec{p} = 2\vec{c} - \vec{a}; \quad \vec{p} \{-6 - (-1); 4 - 1; 0 - 1\}; \quad \vec{p} \{-5; 3; -1\}; \quad \vec{d} \{-2; 1; -2\};$$

$$\vec{p} - \vec{d} = \vec{q}; \quad \vec{q} \{-5 - (-2); 3 - 1; -1 - (-2)\}; \quad \vec{q} \{-3; 2; 1\}.$$

$$в) \quad 0,1\vec{a} \{0,1 \cdot (-1); 0,1 \cdot 1; 0,1 \cdot 1\}, \quad 0,1\vec{a} \{-0,1; 0,1; 0,1\}.$$

$$3\vec{b} \{3 \cdot 0; 3 \cdot 2; 3 \cdot (-2)\}, \quad 3\vec{b} \{0; 6; -6\}.$$

$$0,7\vec{c} \{0,7 \cdot (-3); 0,7 \cdot 2; 0,7 \cdot 0\}, \quad 0,7\vec{c} \{-2,1; 1,4; 0\}.$$

$$5\vec{d} \{5 \cdot (-2); 5 \cdot 1; 5 \cdot (-2)\}, \quad 5\vec{d} \{-10; 5; -10\}.$$

Все сложим, тогда в выражении $0,1\vec{a} + 3\vec{b} + 0,7\vec{c} - 5\vec{d}$ введем обозначение:

$$0,1\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{n}, \quad \vec{n} + 0,7\vec{c} = \vec{m}, \quad \vec{m} - 5\vec{d} = \vec{l}.$$

$$\vec{n} \{-0,1+0; 0,1+6; 0,1+(-6)\}, \quad \vec{n} \{-0,1; 6,1; -5,9\}.$$

$$\vec{m} \{-0,1+(-2,1); 6,1+1,4; -5,9+0\}, \quad \vec{m} \{-2,2; 7,5; -5,9\}.$$

$$\vec{l} \{-2,2 - (-10); 7,5 - 5; -5,9 - (-10)\}, \quad \vec{l} \{7,8; 2,5; 4,1\}.$$

$$г) \quad 2\vec{a} \{2 \cdot (-1); 2 \cdot 1; 2 \cdot 1\}, \quad 2\vec{a} \{-2; 2; 2\}, \quad 3\vec{b} \{0; 6; -6\}.$$

$$2\vec{b} \{0; 4; -4\}, \quad \vec{a} - 2\vec{b} = \vec{f}, \quad \vec{f} \{-1-0; 1-4; 1-(-4)\}, \quad \vec{f} \{-1; -3; 5\}.$$

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{e}, \quad \vec{e} \{-2+0; 2+6; 2+(-6)\}, \quad \vec{e} \{-2; 8; -4\}.$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{g}, \quad \vec{g} \{-1-0; 1-2; 1-(-2)\}, \quad \vec{g} \{-1; -1; 3\}.$$

$$2(\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{g} = \{-2; -2; 6\}$$

Следовательно вектор $(2\vec{a} + 3\vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b})$ имеет координаты $\{-2-(-1); 8-(-3); -4-5\}$, или $\{-1; 11; -9\}$ и значит $(2\vec{a} + 3\vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b}) + 2(\vec{a} - \vec{b})$ имеет координаты $\{-1+(-2); 11+(-2); -9+6\}$, или $\{-3; 9; -3\}$.

412. Для вектора \vec{i} противоположным будет вектор с обратным знаком: $(-\vec{i})$, для \vec{j} - вектор $(-\vec{j})$ и т. д.

$\vec{i} \{1; 0; 0\}$; $-\vec{i} \{-1; 0; 0\}$, $\vec{j} \{0; 1; 0\}$; $-\vec{j} \{0; -1; 0\}$, $\vec{k} \{0; 0; 1\}$; $-\vec{k} \{0; 0; -1\}$,
 $\vec{a} \{2; 0; 0\}$; $-\vec{a} \{-2; 0; 0\}$, $\vec{b} \{-3; 5; -7\}$; $-\vec{b} \{3; -5; 7\}$, $\vec{c} \{-0,3; 0; 1,75\}$;
 $-\vec{c} \{0,3; 0; -1,75\}$.

413. а) Координаты вектора $\vec{a} \{3; 6; 8\}$ и вектора $\vec{b} \{6; 12; 16\}$ пропорциональны: $\frac{3}{6} = \frac{6}{12} = \frac{8}{16}$, где $k = \frac{1}{2}$.

Поэтому $\vec{a} = k\vec{b}$, и, следовательно, векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны.

б) Координаты вектора $\vec{c} \{1; -1; 3\}$ и вектора $\vec{d} \{2; 3; 15\}$ не пропорциональны, например $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$

Следовательно векторы \vec{c} и \vec{d} не коллинеарны.

в) Координаты вектора $\vec{i} \{1; 0; 0\}$ и вектора $\vec{j} \{0; 1; 0\}$ не пропорциональны, следовательно, векторы \vec{i} и \vec{j} не коллинеарны.

г) Координаты вектора $\vec{m} \{0; 0; 0\}$ и вектора $\vec{n} \{5; 7; -3\}$ пропорциональны при $k=0$, следовательно, векторы \vec{m} и \vec{n} коллинеарны. $\vec{m}=0$ коллинеарен любому вектору.

д) Координаты вектора $\vec{p} \{\frac{1}{3}; -1; 5\}$ и вектора $\vec{q} \{-1; -3; -15\}$ не пропорциональны, например $\frac{\frac{1}{3}}{-1} \neq \frac{-1}{-3}$

Поэтому векторы \vec{p} и \vec{q} не коллинеарны.

414. Для коллинеарных векторов существуют коэффициент k такой, что $\vec{a} = k\vec{b}$; $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = k$.

$$\text{а) } \frac{15}{18} = \frac{m}{12} = \frac{1}{n} = \frac{5}{6}, \quad \text{б) } \frac{m}{(-\frac{1}{2})} = \frac{0,4}{n} = \frac{1}{5},$$

$$m = \frac{5}{6} \cdot 12 = 5 \cdot 2 = 10, \quad m = -\frac{1}{5} \cdot (-\frac{1}{2}) = 0,1,$$

$$n = \frac{6}{5} = 1 \frac{1}{5} = 1,2; \quad n = -0,4 \cdot 5 = -2.$$

415. а) Векторы $\vec{a} \{-3; -3; 0\}$, $\vec{i} \{1; 0; 0\}$ и $\vec{j} \{0; 1; 0\}$ являются компланарными, т.к., записав равенство $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ через координаты, получим

$$\begin{cases} -3 = 1 \cdot x + 0 \cdot y, \\ -3 = 0 \cdot x + 1 \cdot y, \\ 0 = 0 \cdot x + 0 \cdot y, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3, \\ y = -3. \end{cases}$$

Вектор \vec{a} можно разложить по векторам \vec{i} и \vec{j} : $\vec{a} = -3\vec{i} - 3\vec{j}$. Значит векторы \vec{a} , \vec{i} и \vec{j} компланарны.

б) Запишем равенство $\vec{b} = x\vec{i} + y\vec{j}$ через координаты:

$$\begin{cases} 2 = 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 = 0 \cdot x + 1 \cdot y \\ -3 = 0 \cdot x + 0 \cdot y \end{cases}$$

Система не имеет решений, следовательно, \vec{b} , \vec{i} и \vec{j} не компланарны.

в) Запишем равенство $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{k}$ через координаты: $\vec{c} \{1; 0; -2\}$, $\vec{i} \{1; 0; 0\}$, $\vec{k} \{0; 0; 1\}$.

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot x + 0 \cdot y, \\ 0 = 0 \cdot x + 0 \cdot y, \\ -2 = 0 \cdot x + 1 \cdot y, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = x, \\ 0 = 0, \\ -2 = y. \end{cases} \Rightarrow \vec{c} = \vec{i} - 2\vec{k}$$

Значит, векторы \vec{c} , \vec{i} и \vec{k} компланарны.

г) Векторы $\vec{d} \{1; -1; 2\}$ и $\vec{e} \{-2; 0; 1\}$ не коллинеарны, т.к. координаты вектора \vec{d} не пропорциональны координатам вектора \vec{e} . Если вектор $\vec{f} \{5; -1; 0\}$ можно разложить по векторам \vec{d} и \vec{e} , то это значит, что векторы \vec{d} , \vec{e} и \vec{f} компланарны. В противном случае векторы \vec{d} , \vec{e} и \vec{f} не компланарны.

Запишем $\vec{f} = x\vec{d} + y\vec{e}$ в координатах, получим

$$\begin{cases} 5 = x - 2y \\ -1 = -x \\ 0 = 2x + y \end{cases}$$

Система имеет решение: $x=1$, $y=-2$. Поэтому вектор \vec{f} можно разложить по векторам \vec{d} и \vec{e} , и, следовательно, векторы \vec{d} , \vec{e} и \vec{f} компланарны.

д) Запишем равенство $\vec{m} = x\vec{n} + y\vec{p}$ в координатах:

$$2 = 1 \cdot x + 0 \cdot y,$$

Система не имеет решений. Поэтому векторы \vec{m} , \vec{n} и \vec{p} не компланарны.

е) Запишем равенство $\vec{q} = x\vec{r} + y\vec{s}$ в координатах:

$$\begin{cases} 0 = 3x + y, \\ 5 = 3x + y, \\ 3 = 3x + 4y, \end{cases} \quad \begin{cases} y = -3x \\ y = 5 - 3x \\ y = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x \end{cases}$$

Система не имеет решений. Поэтому векторы $\vec{q} = \vec{r} + \vec{s}$ не компланарны.

416. А (3, 2; 1); В (1; -3; 5); С $(-\frac{1}{3}; 0,75; -2\frac{3}{4})$, т.к. согласно п.44, координаты любой точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора.

417. ОА {2;-3;0}, ОВ {7; -12; 18} ОС {-8; 0; 5}, т.к. если О — начало координат, то ОА, ОВ и ОС — являются радиус-векторами для точек А, В и С и согласно п.44 имеют координаты.

418. а) АВ {2-3; -1+1; 4-2}, АВ {-1; 0; 2};

б) АВ {3+2; -1-6; 0+2}, АВ {5; -7; 2};

в) АВ $\{\frac{1}{2}-1; \frac{1}{3}-\frac{5}{6}; \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\}$, АВ $\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\}$

419. А (1; 6; 2) и В (2; 3; -1). Координатами вектора АВ будут:

АВ {x_В-x_А; y_В-y_А; z_В-z_А}, АВ {2-1; 3-6; -1-2}, АВ {1; -3; -3}.

Разложив по координатным векторам \vec{i} {1; 0; 0}, \vec{j} {0; 1; 0} и \vec{k} {0; 0; 1},

получим: АВ = $\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$.

Точки В (2; 3; -1) и С (-3; 4; 5) — концы вектора ВС.

ВС {-3-2; 4-3; 5+1}, ВС {-5; 1; 6}, ВС = $-5\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$.

Точки А (1; 6; 2) и С (-3; 4; 5) — концы вектора СА.

СА {1+3; 6-4; 2-5}, СА {4; 2; -3}, СА = $4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

420. Определим координаты: АВ {2-3; 3+1; -4-5}, АВ {-1; 4; -9},

DC {7-8; 0+4; -1-8}, DC {-1; 4; -9}.

Т.к. АВ и DC имеют одинаковые координаты, то

1) их длины равны;

2) если их отложить от начала координат, то эти векторы совпадут.

Значит, векторы АВ и DC равны, что и требовалось доказать.

Рассмотрим векторы ВС и AD.

ВС {7-2; 0-3; -1+4}, ВС {5; -3; 3}. AD {8-3; -4+1; 8-5}, AD {5; -3; 3}.

У векторов ВС и AD тоже совпадают координаты, а значит, рассуждая аналогично, получим, что векторы совпадают.

421. а) Если векторы АВ и АС коллинеарны, то точки А, В и С лежат на одной прямой, а если не коллинеарны, то точки А, В и С не лежат на одной прямой. Вычислим координаты этих векторов: АВ {-8; 11; -7},

АС {24; -33; 21}. Заметим, АС = -3АВ, следовательно, векторы АВ и АС коллинеарны, т.е. точки А, В и С лежат на одной прямой.

б) Найдем координаты векторов АВ и АС. АВ {9; -15; -9},

АС {18; -30; -18}. Очевидно, что АС=2·АВ, поэтому векторы АВ и АС коллинеарны, значит точки А, В, и С лежат на одной прямой.

в) Найдем координаты векторов АВ и АС. АВ {1; -9; 9}, АС {2; -18; -14}. Векторы АВ и АС не коллинеарны, значит, точки А, В и С не лежат на одной прямой.

422. Рассмотрим векторы DA, DB, DC.

а) Вычислим координаты векторов DA, DB и DC:

$$DA \{-2; -13; 3\} = \vec{a}, \quad DB \{1; 4; 1\} = \vec{b}, \quad DC \{-1; -1; -4\} = \vec{c}.$$

Запишем равенство $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ в координатах (условие компланарности):

$$\begin{cases} x_a = mx_b + nx_c, \\ y_a = my_b + ny_c, \\ z_a = mz_b + nz_c, \end{cases} \quad \begin{cases} -2 = m - n, \\ -13 = 4m - n, \\ 3 = m - 4n, \end{cases} \quad \begin{cases} m = n - 2, \\ 4m = n - 13, \\ m = 3 + 4n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = n - 2, \\ n - 2 = 3 + 4n, \\ 4m = n - 13, \end{cases} \quad \begin{cases} n = -\frac{5}{3}, \\ m = -\frac{11}{3}. \end{cases}$$

$$\text{Получаем равенство: } -\frac{44}{3} = -\frac{5}{3} - 13 = \frac{-5 - 39}{3}.$$

$$\text{Признак компланарности векторов выполняется } DA = -\frac{11}{3}DB - \frac{5}{3}DC.$$

По определению векторы DA, DB и DC компланарны. Следовательно, точки А, В, С и D лежат в одной плоскости.

б) Определим координаты предполагаемых векторов:

$$AD \{2; -1; 3\} = \vec{d}, \quad AB \{3; 3; -1\} = \vec{b}, \quad AC \{-2; -4; 0\} = \vec{c}.$$

Признак компланарности векторов в координатах:

$$\begin{cases} x_d = mx_b + nx_c, \\ y_d = my_b + ny_c, \\ z_d = mz_b + nz_c, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = 3m - 2n, \\ -1 = 3m - 4n, \\ 3 = -m - 0 \cdot n, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 + 2n = 3m, \\ 4n = 3m + 1, \\ m = -3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 2n = -9, \\ 4n = -8, \\ m = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} n = -5,5, \\ n = -2, \\ m = -3. \end{cases}$$

Система не имеет решений, следовательно, условие компланарности векторов не выполняется, точки А, В, С и D не лежат в одной плоскости.

в) Рассмотрим векторы:

$$AD \{-4; 2; -2\} = \vec{d}, \quad AB \{-7; 8; 1\} = \vec{b}, \quad AC \{7; -14; -7\} = \vec{c}.$$

Признак компланарности векторов $\vec{d} = m\vec{b} + n\vec{c}$ в координатах x, y, z:

$$\begin{cases} x_d = mx_b + nx_c \\ y_d = my_b + ny_c \\ z_d = mz_b + nz_c \end{cases} ; \quad \begin{cases} -4 = -7m + 7n \\ 2 = 8m - 14n \\ -2 = m - 7n \end{cases} ; \quad \begin{cases} 7m = 7n + 4 \\ 8m = 2 + 14n \\ m = 7n - 2 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 7n = m + 2, \\ 7m = (m + 2) + 4, \\ 8m = 2 + 14n, \end{cases} \quad \begin{cases} 6m = 6, \\ n = \frac{m}{7} + \frac{2}{7}, \\ 8m = 2 + 14n, \end{cases} \quad \begin{cases} m = 1, \\ n = \frac{3}{7}. \end{cases}$$

Подставляя эти значения в третье уравнение, получаем равенство:
 $8 = 2 + \frac{14 \cdot 3}{7}; 8 = 8.$

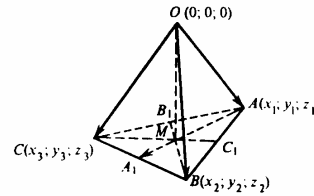
Следовательно, векторы компланарны при $m=1, n=\frac{3}{7}$. $AD=AB+\frac{3}{7}AC$.

При этом все три вектора отложены из одной точки, значит, точки А, В, С и D лежат в одной плоскости.

423. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC, а М — точка их пересечения. Докажем, что точка М имеет координаты

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right).$$

Координаты точки равны координатам ее радиус-вектора. Выберем произвольно начало координат и начертим радиус-векторы $\vec{OM}, \vec{OC}, \vec{OB}$, и \vec{OA} . Их координаты будут соответствовать координатам точек М, С, В, А соответственно. По теореме о точке пересечения медиан треугольника $\vec{AM} = 2\vec{MA_1}$.



Так как $\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$, $\vec{MA_1} = \vec{OA_1} - \vec{OM}$, то, подставив эти разности в наше равенство, получим:

$$\vec{OM} - \vec{OA} = 2(\vec{OA_1} - \vec{OM}), \text{ или } \vec{OM} + 2\vec{OM} = \vec{OA} + 2\vec{OA_1},$$

$$\text{или } 3\vec{OM} = \vec{OA} + 2 \cdot \frac{\vec{OC} + \vec{OB}}{2}, \text{ т.к. } \vec{OA_1} = \frac{\vec{OC} + \vec{OB}}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } \vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3} \text{ или,}$$

$$M \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right). \text{ Доказано.}$$

424. Координаты середины отрезка выражаются через координаты его начала и конца:

$$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B), y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B), z_M = \frac{1}{2}(z_A + z_B). \text{ Подставим координаты данных нам точек:}$$

$$\text{a) } x_M = \frac{1}{2}(0-2); x_M = -1, y_M = \frac{1}{2}(3+2), y_M = \frac{5}{2} = 2,5; z_M = \frac{1}{2}(-4+0), z_M = -2;$$

$$\text{б) } 3 = \frac{1}{2}(14+x_B), x_B = -8; -2 = \frac{1}{2}(-8+y_B), y_B = 4; -7 = \frac{1}{2}(5+z_B); -14 = 5+z_B, z_B = -19;$$

$$\text{в) } -12 = \frac{1}{2}(x_A+0), x_A = -24; 4 = \frac{1}{2}(y_A+0), y_A = 8, 15 = \frac{1}{2}(z_A+2), z_A = 28.$$

425. Пусть М — середина отрезка АВ. Тогда $x_M = \frac{1}{2}(x_A+x_B)$, $y_M = \frac{1}{2}(y_A+y_B)$,

$z_M = \frac{1}{2}(z_A+z_B)$. Т.к. точка лежит на Ох по условию, то справедливо:

$$x_M = \frac{1}{2}(x_A+x_B), \quad 0 = \frac{1}{2}(y_A+y_B), \quad 0 = \frac{1}{2}(z_A+z_B).$$

$$\text{a) } \begin{cases} x_M = \frac{1}{2}(-3+2) \\ 0 = \frac{1}{2}(m-2) \\ 0 = \frac{1}{2}(5+n) \end{cases}; \begin{cases} \frac{m}{2} = 1 \\ \frac{n}{2} = -\frac{5}{2} \\ x_M = -\frac{3}{2} + 1 \end{cases}; \begin{cases} m = 2 \\ n = -5 \\ x_M = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_M = \frac{1}{2}(1+1) \\ 0 = \frac{1}{2}(0,5+m) \\ 0 = \frac{1}{2}(-4+2n) \end{cases}; \begin{cases} \frac{m}{2} = -\frac{1}{4} \\ \frac{2n}{2} = 2 \\ x_M = 1 \end{cases}; \begin{cases} m = -\frac{1}{2} = -0,5 \\ n = 2 \\ x_M = 1 \end{cases}.$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_M = \frac{1}{2}(0+1) \\ 0 = \frac{1}{2}(m+n) \\ 0 = \frac{1}{2}(n+1-m+1) \end{cases}; \begin{cases} x_M = \frac{1}{2} \\ m = -n \\ \frac{n}{2} + 1 = \frac{m}{2} \end{cases}; \begin{cases} x_M = \frac{1}{2} \\ m = -n \\ m = n+2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x_M = \frac{1}{2} \\ m = -n \\ 2m = 2 \end{cases}; \begin{cases} x_M = \frac{1}{2} \\ m = 1 \\ n = -1 \end{cases}.$$

426. $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ по определению, тогда

$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, где А (x₁; y₁; z₁), В (x₂; y₂; z₂).

а) А (-1; 0; 2), В (1; -2; 3),

$|\overline{AB}| = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-0)^2 + (3-2)^2}$, $|\overline{AB}| = \sqrt{4+4+1} = 3;$

б) А (-35; -17; 20), В (-34; -5; 8),

$|\overline{AB}| = \sqrt{(-34+35)^2 + (-5+17)^2 + (8-20)^2}$,

$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + 12^2 + (-12)^2} = \sqrt{289} = 17.$

427. $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, тогда $|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 7^2} = \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$,
 $|\vec{b}| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-6)^2 + 1^2} = \sqrt{4 \cdot 3 + 36 + 1} = \sqrt{49} = 7$;
 $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ имеет координаты: $\vec{c} \{1; 1; 1\}$, $|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.
 $\vec{d} = -2\vec{k}$; $\vec{d} \{0; 0; -2\}$, $\Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2$
 $\vec{m} \{1; -2; 0\}$, $|\vec{m}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0} = \sqrt{5}$

428. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 + z_1)^2}$,
 т.к. если $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d}$, то $\vec{d} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$.
 а) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(3-2)^2 + (-2+3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$;
 б) $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$,
 $|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$, $|\vec{a}| + |\vec{b}| = \sqrt{14} + \sqrt{14} = 2\sqrt{14}$,
 в) $|\vec{a}| - |\vec{b}| = \sqrt{14} - \sqrt{14} = 0$;
 г) $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2}$,
 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-2-3)^2 + (3+2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{25+25+0} = 5\sqrt{2}$;
 д) $|\vec{c}| = \sqrt{(3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2}$, т.к. $3\vec{c} \{3x; 3y; 3z\}$,
 $|\vec{c}| = \sqrt{(-3 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 3)^2 + (1 \cdot 3)^2} = \sqrt{9^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{126} = \sqrt{9 \cdot 14} = 3\sqrt{14}$.
 е) $\sqrt{14} |\vec{c}| = \sqrt{14} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14} \cdot \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} = 14$;
 ж) $2\vec{a} \{6; -4; 2\}$, $3\vec{c} \{-9; 6; 3\}$, $2\vec{a} - 3\vec{c} = \vec{m}$,
 $\vec{m} \{6+9; -4-6; 2-3\}$, $\vec{m} \{15; -10; -1\}$, $|\vec{m}| = \sqrt{15^2 + (-10)^2 + (-1)^2} =$
 $= \sqrt{225 + 100 + 1} = \sqrt{326}$.

429. Пусть К середина отрезка MN, тогда:
 $K \left(\frac{x_M + x_N}{2}; \frac{y_M + y_N}{2}; \frac{z_M + z_N}{2} \right)$; $K \left(\frac{-4+0}{2}; \frac{7-1}{2}; \frac{0+2}{2} \right)$; $K(-2; 3; 1)$,
 значит, $OK \{-2; 3; 1\}$ и $|OK| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$.
430. а) Чтобы найти периметр $\triangle ABC$, необходимо вычислить длины векторов \vec{AB} , \vec{BC} и \vec{CA} . Периметр треугольника равен их сумме.

$$|\vec{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \vec{AB} \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\},$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + (2-1)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = 1\frac{1}{2}.$$

Аналогично $\vec{BC} \{2-2; 0-2; -1+3\}$, $\vec{BC} \{0; -2; 2\}$,

$$|\vec{BC}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2};$$

$$\vec{CA} \left\{ \frac{3}{2} - 2; 1 - 0; -2 + 1 \right\}, \vec{CA} \left\{ -\frac{1}{2}; 1; -1 \right\},$$

$$|\vec{CA}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

$$|\vec{AB}| + |\vec{BC}| + |\vec{CA}| = 1\frac{1}{2} + 2\sqrt{2} + 1\frac{1}{2} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

б) AA_1 , BB_1 и CC_1 — медианы.

$$\vec{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}), \quad \vec{BB_1} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC}),$$

$$\vec{CC_1} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB});$$

$$\vec{AB} \left\{ 2 - \frac{3}{2}; 2 - 1; -3 + 2 \right\}, \vec{AB} \left\{ \frac{1}{2}; 1; -1 \right\} \text{ и}$$

$$\vec{AC} \left\{ 2 - \frac{3}{2}; 0 - 1; -1 + 2 \right\}, \vec{AC} \left\{ \frac{1}{2}; -1; 1 \right\}, \text{ следовательно}$$

$$\vec{AA_1} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right); \frac{1}{2}(1-1); \frac{1}{2}(1-1) \right\}, \vec{AA_1} \left\{ \frac{1}{2}; 0; 0 \right\},$$

$$|\vec{AA_1}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 + 0} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0,5; \quad \vec{BA} = -\vec{AB}; \quad \vec{BA} \left\{ -\frac{1}{2}; -1; 1 \right\};$$

$$\vec{BC} \{2-2; 0-2; -1+3\}, \vec{BC} \{0; -2; 2\}, \text{ следовательно}$$

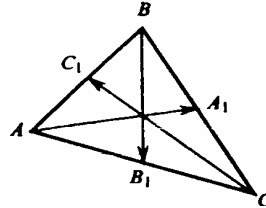
$$\vec{BB_1} \left\{ \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 0 \right); \frac{1}{2}(-1-2); \frac{1}{2}(1+2) \right\}, \vec{BB_1} \left\{ -\frac{1}{4}; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\},$$

$$|\vec{BB_1}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{73}{16}} = \frac{\sqrt{73}}{4}.$$

$$\vec{CA} = -\vec{AC}; \quad \vec{CA} \left\{ -\frac{1}{2}; 1; -1 \right\}; \quad \vec{CB} = -\vec{BC}; \quad \vec{CB} \{0; 2; -2\}, \text{ следовательно}$$

$$\vec{CC_1} \left\{ \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 0 \right); \frac{1}{2}(1+2); \frac{1}{2}(-1-2) \right\}, \vec{CC_1} \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2} \right\} \text{ и}$$

$$|\vec{CC_1}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{73}}{4} = |\vec{BB_1}|.$$



431. Сравним длины сторон треугольника. Для этого по формуле расстояния между двумя точками $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ найдем $|\vec{AB}|$, $|\vec{BC}|$, $|\vec{AC}|$. Если $a=b=c$, то треугольник ABC — равносторонний. Если:

$c \neq b \neq a$, то треугольник равнобедренный, если нет одинаковых сторон: $c \neq b \neq a$, то есть если $a > b \geq c$, то следует проверить, выполняется ли теорема Пифагора. Если да, то $\triangle ABC$ — прямоугольный.

$$a) AB = \sqrt{(9-2)^2 + (3-10)^2 + (-5+5)^2} = \sqrt{49+49+0} = \sqrt{2 \cdot 49} = 7\sqrt{2}.$$

$$BC = \sqrt{(2-2)^2 + (10-3)^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{0+49+49} = \sqrt{2 \cdot 49} = 7\sqrt{2}.$$

$$AC = \sqrt{(9-2)^2 + (3-3)^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{49+0+49} = 7\sqrt{2}.$$

$AB=BC=AC$, треугольник равносторонний.

$$б) AB = \sqrt{(3-5)^2 + (7+3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{4+100+36} = \sqrt{140},$$

$$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (-3-3)^2 + (2+10)^2} = \sqrt{16+36+144} = \sqrt{196},$$

$$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (7-3)^2 + (-4+10)^2} = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56},$$

$BC > AB > AC$.

Проверим, выполняется ли равенство:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2, (\sqrt{196})^2 = (\sqrt{56})^2 + (\sqrt{140})^2,$$

$196 = 56 + 140 = 196$ — верно. Следовательно, треугольник ABC — прямоугольный.

$$в) AB = \sqrt{(5-5)^2 + (3-5)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{0+4+0} = 2,$$

$$BC = \sqrt{(5-4)^2 + (-3+3)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2},$$

$$AC = \sqrt{(5-4)^2 + (-5+3)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6},$$

$AC > AB > BC$.

Проверим, выполняется ли равенство $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

$6 = 4 + 2$ — выполняется. Следовательно, треугольник ABC — прямоугольный разносторонний.

$$г) AB = \sqrt{(-5+4)^2 + (2-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2},$$

$$BC = \sqrt{(-4+5)^2 + (3-2)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6},$$

$$AC = \sqrt{(-5+5)^2 + (2-2)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{0+0+4} = 2.$$

$BC > AC > AB$.

Проверим: $BC^2 = AC^2 + AB^2$, $6 = 4 + 2$. Следовательно, треугольник ABC — прямоугольный равнобедренный.

432. Дано: $A(-3; 4; -4)$, Следовательно, точка A_1 — проекция точки A на Oxy — имеет координаты $A_1(-3; 4; 0)$,

A_2 — проекция точки A на Oyz — имеет координаты: $A_2(0; 4; -4)$, A_3 — проекция точки A на Oxz — имеет координаты: $A_3(-3; 0; -4)$. По формуле

расстояния между двумя точками $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$$\text{Найдем } AA_1 = \sqrt{0+0+4^2} = 4, \quad AA_2 = \sqrt{3^2+0+0} = 3, \quad AA_3 = \sqrt{0+4^2} = 4,$$

таким образом для $A(x; y; z)$ расстояниями до координатных плоскостей будут $|x|$, $|y|$ и $|z|$.

б) На ось Ox проекция A_1 точки A имеет координаты $A_1(-3; 0; 0)$, на Oy : $A_2(0; 4; 0)$, на Oz : $A_3(0; 0; -4)$.

$$AA_1 = \sqrt{0^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}; AA_2 = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5; AA_3 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

433. Искомая точка для каждой плоскости – это основание перпендикуляра, опущенного из данной точки A на соответствующую плоскость. Следовательно, искомые точки имеют координаты $(0; 2; -3)$, $(-1; 0; -3)$, $(-1; 2; 0)$.

434. Наименьшее расстояние — это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на ось координат, то есть расстояние между точкой и ее проекцией на ось координат. Координатами проекций точки на координатные оси будут абсцисса, ордината и аппликата этой точки. Следовательно, для $B(3; -4; \sqrt{7})$ проекция на ось Ox будет иметь координаты $B_1(3; 0; 0)$, на Oy : $B_2(0; -4; 0)$, на Oz : $B_3(0; 0; \sqrt{7})$.

435. Найдем длины сторон $\triangle ABC$ по формуле расстояния между двумя

$$\text{точками: } d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$|AB| = \sqrt{(1+1)^2 + (0-2)^2 + (k-3)^2} = \sqrt{4+4+(k-3)^2} = \sqrt{8+(k-3)^2},$$

$$|BC| = \sqrt{(0+1)^2 + (0-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3,$$

$$|AC| = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2 + (k-1)^2} = \sqrt{1+(k-1)^2}.$$

Треугольник будет равнобедренным, если будет выполнено одно из трех условий: 1) $AB=BC$, или 2) $AB=AC$, или 3) $AC=BC$.

$$1) \sqrt{8+(k-3)^2} = 3, \quad 2) \sqrt{8+(k-3)^2} = \sqrt{1+(k-1)^2},$$

$$8+(k-3)^2=9,$$

$$8+(k-3)^2=1+(k-1)^2,$$

$$(k-3)^2=1,$$

$$8+k^2+9-6k=1+k^2-2k+1,$$

$$\begin{cases} k-3=1, & k=4, \\ k-3=-1, & k=2. \end{cases}$$

$$17-2=4k$$

$$15=4k, \quad k=\frac{15}{4}=3,75.$$

$$3) \sqrt{1+(k-1)^2} = 3$$

$$1+(k-1)^2=9, (k-1)^2=8, k-1=2\sqrt{2}, k=2\sqrt{2}+1, k-1=-2\sqrt{2}, k=1-2\sqrt{2}.$$

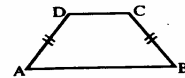
436. По формуле расстояния между двумя точками вычислим длины сторон трапеции $ABCD$:

$$AB = \sqrt{(4-0)^2 + (4-0)^2 + 0} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},$$

$$BC = \sqrt{0^2 + (3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5,$$

$$CD = \sqrt{(1-0)^2 + (4-3)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2},$$

$$DA = \sqrt{(4-0)^2 + (4-4)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+0+16} = 5.$$



$|AD|=|CB|=5$, следовательно, ABCD будет равнобедренной трапецией, если доказать, что $DC \parallel AB$, то есть, что DC и AB коллинеарны.

Если существует число k такое, что $\vec{b} = k\vec{a}$ и $\vec{a} \neq 0$, то \vec{a} и \vec{b} коллинеарны.

$AB \{-4; -4; 0\}$, $CD \{1; 1; 0\}$.

Очевидно, что $AB = -4CD$, т. е. AB и CD коллинеарны. значит, $AB \parallel CD$ и ABCD — равнобедренная трапеция.

437. Расстояние между двумя точками

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} :$$

а) Пусть $C(x; 0; 0)$ — точка на оси Ox , равноудаленная от точек A и B. Следовательно, $CA=CB$, или в координатах:

$$\sqrt{(-2-x)^2 + (3-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (2-0)^2 + (-3-0)^2} ,$$

$$\sqrt{4+4x+x^2+9+25} = \sqrt{9-6x+x^2+4+9} ,$$

$$\sqrt{x^2+4x+38} = \sqrt{x^2-6x+22}$$

$$x^2+4x+38=x^2-6x+22, \quad 10x=-16, x=-1,6; C(-1,6; 0; 0).$$

Равноудаленной от точек A и B будет точка C(-1,6; 0; 0).

б) Пусть $D(0; y; 0)$ — точка на оси Oy , равноудаленная от A и B. $AD=DB$.

$$\sqrt{(-2-0)^2 + (3-y)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (2-y)^2 + (-3-0)^2}$$

$$\sqrt{4+9-6y+y^2+25} = \sqrt{9+4-4y+y^2+9} ,$$

$$\sqrt{y^2-6y+38} = \sqrt{y^2-4y+22}$$

$$y^2-6y+38=y^2-4y+22, \quad 2y=16, \quad y=8; D(0; 8; 0).$$

в) Пусть $E(0; 0; z)$ — точка на оси Oz , равноудаленная от A и B.

$$\sqrt{(-2-0)^2 + (3-0)^2 + (5-z)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (2-0)^2 + (-3-z)^2}$$

$$\sqrt{4+9+25-10z+z^2} = \sqrt{9+4+9+6z+z^2} ,$$

$$\sqrt{z^2-10z+38} = \sqrt{z^2+6z+22}$$

$$z^2-10z+38=z^2+6z+22, \quad 16z=16, \quad z=1; E(0; 0; 1).$$

438. а) Пусть на плоскости Oxy точка $P(x; y; 0)$ равноудалена от A, B и C. Используя формулу

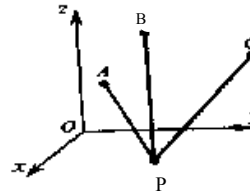
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} , \text{ со-}$$

ставим систему уравнений: $\begin{cases} AP = BP, \\ AP = CP \end{cases}$

$$AP = \sqrt{(-1-x)^2 + (2-y)^2 + (3-0)^2} =$$

$$= \sqrt{1+2x+x^2+4-4y+y^2+9} = \sqrt{x^2+y^2+2x-4y+14} ,$$

$$BP = \sqrt{(-2-x)^2 + (1-y)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+4x+x^2+1-2y+y^2+4} =$$



$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 2y + 9}, \\
 CP &= \sqrt{(0-x)^2 + (-1-y)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{x^2 + 1 + 2y + y^2 + 1} = \\
 &= \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 2}, \\
 &\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 14} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 2y + 9}, \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 14} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 2}, \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 14 = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 9, \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 14 = x^2 + y^2 + 2y + 2, \end{cases} \\
 &\begin{cases} 2x + 2y = 5; \\ 6y = 2x + 12; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 + \frac{1}{3}x; \\ 2x + 2(2 + \frac{1}{3}x) = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 2 + \frac{1}{3}x; \\ 2x + 4 + \frac{2}{3}x = 5 \end{cases}; \\
 &\begin{cases} y = 2 + \frac{1}{3}x; \\ 2\frac{2}{3}x = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{8}{3}x = 1; \\ y = 2 + \frac{1}{3}x \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{3}{8}; \\ y = 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{3}{8}; \\ y = 2\frac{1}{8} = \frac{17}{8} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Точка P ($\frac{3}{8}$; $\frac{17}{8}$; 0) лежит на плоскости Оху и равноудалена от точек А, В и С.

б) Пусть на координатной плоскости Оуz точка Q (0; y; z) равноудалена от А, В и С, следовательно

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} AQ = BQ, \\ AQ = CQ \end{cases} \text{ (очевидно, что и } BQ = CQ). \\
 AQ &= \sqrt{(-1-0)^2 + (2-y)^2 + (3-z)^2} = \sqrt{1 + 4 - 4y + y^2 + 9 - 6z + z^2} = \\
 &= \sqrt{y^2 + z^2 - 4y - 6z + 14}, \\
 BQ &= \sqrt{(-2-0)^2 + (1-y)^2 + (2-z)^2} = \sqrt{4 + 1 - 2y + y^2 + 4 - 4z + z^2} = \\
 &= \sqrt{y^2 + z^2 - 2y - 4z + 9}, \\
 CQ &= \sqrt{(0-0)^2 + (-1-y)^2 + (1-z)^2} = \sqrt{0 + 1 + 2y + y^2 + 4 - 4z + z^2} = \\
 &= \sqrt{y^2 + z^2 + 2y - 2z + 2}. \\
 &\begin{cases} \sqrt{y^2 + z^2 - 4y - 6z + 14} = \sqrt{y^2 + z^2 - 2y - 4z + 9}, \\ \sqrt{y^2 + z^2 - 4y - 6z + 14} = \sqrt{y^2 + z^2 + 2y - 2z + 2}, \\ y^2 + z^2 - 4y - 6z + 14 = y^2 + z^2 - 2y - 4z + 9, \\ y^2 + z^2 - 4y - 6z + 14 = y^2 + z^2 + 2y - 2z + 2, \end{cases} \\
 &\begin{cases} 2y + 2z = 5; \\ 6y + 4z = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{5}{2} - z; \\ \frac{6 \cdot 5}{2} - 6z + 4z = 12 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \frac{5}{2} - z; \\ 2z = 3 \end{cases}; \quad z = \frac{3}{2}; \quad y = 1.
 \end{aligned}$$

$$Q(0; 1; \frac{3}{2}).$$

в) Пусть на координатной плоскости Ozx точка R (x, 0; z) равноудалена от точек A, B и C, следовательно

$$\begin{cases} AR = BR, \\ AR = CR \end{cases}$$

$$\begin{aligned} AR &= \sqrt{(-1-x)^2 + (2-0)^2 + (3-z)^2} = \\ &= \sqrt{1+2x+x^2+4+9-6z+z^2} = \sqrt{x^2+z^2+2x-6z+14}, \\ BR &= \sqrt{(-2-x)^2 + (1-0)^2 + (2-z)^2} = \\ &= \sqrt{4+4x+x^2+1+4-4z+z^2} = \sqrt{x^2+z^2+4x-4z+9}, \\ CR &= \sqrt{(0-x)^2 + (-1-0)^2 + (1-z)^2} = \\ &= \sqrt{x^2+1+1-2z+z^2} = \sqrt{x^2+z^2-2z+2}, \\ &\begin{cases} \sqrt{x^2+z^2+2x-6z+14} = \sqrt{x^2+z^2+4x-4z+9}, \\ \sqrt{x^2+z^2+2x-6z+14} = \sqrt{x^2+z^2-2z+2}, \\ \begin{cases} x^2+z^2+2x-6z+14 = x^2+z^2+4x-4z+9, \\ x^2+z^2+2x-6z+14 = x^2+z^2-2z+2, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2z=5, \\ 2x=4z-12, \end{cases} & \begin{cases} x=2z-5, \\ 4z-12+2z=5, \end{cases} & \begin{cases} x=2z-6, \\ 6z=17, \end{cases} \end{cases} \\ &\begin{cases} z = \frac{17}{6}, \\ x = \frac{17}{3} - 6 = -\frac{1}{3}; \end{cases} & R(-\frac{1}{3}; 0; \frac{17}{6}). \end{aligned}$$

439. а) Пусть точка R — центр окружности, описанной около $\triangle AOB$, следовательно

$$\begin{cases} AR = BR = r, \\ AR = OR = r \end{cases} \text{ где } r \text{ — радиус окружности;}$$

Точки A, O, B и R лежат в одной плоскости.

Точка O (0; 0; 0) совпадает с началом координат, A (4; 0; 0) лежит на оси Ox; B (0; 6; 0) лежит на оси Oy, следовательно, $\triangle AOB$ лежит в координатной плоскости Oxy, тогда, центр описанной окружности лежит в той же плоскости. Следовательно, координаты центра: R (x; y; 0). По формуле расстояния между двумя точками:

$$\begin{aligned} AR &= \sqrt{(4-x)^2 + (0-y)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16-8x+x^2+y^2}, \\ BR &= \sqrt{(0-x)^2 + (6-y)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{x^2+36-12y+y^2}, \\ OR &= \sqrt{(0-x)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Можем записать систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{16+x^2+y^2}-8x=\sqrt{x^2+y^2}-12y+36 \\ \sqrt{16+x^2+y^2}-8x=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x+16=x^2+y^2-12y+36 \\ x^2+y^2-8x+16=x^2+y^2 \end{cases}; \begin{cases} 8x=12y-20 \\ 8x=16 \end{cases}; \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{36}{12}=3 \end{cases};$$

Координаты центра окружности, описанной около $\triangle AOB$: $R(2; 3; 0)$. Радиус описанной окружности равен $AR=BR=OR=r$,

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}.$$

б) Если точка $R(x; y; z)$ равноудалена от вершин тетраэдра $OABC$, то

$$\begin{cases} OR = AR \\ AR = BR \\ BR = CR \end{cases}$$

$$OR=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$AR=\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2-8x+16+y^2+z^2},$$

$$BR=\sqrt{(x-0)^2+(y-6)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2-12y+36+z^2},$$

$$CR=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z+2)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2+4z+4}.$$

Можем записать систему уравнений:

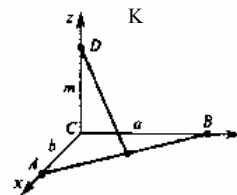
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2-8x+y^2+z^2+16} \\ \sqrt{x^2-8x+y^2+z^2+16}=\sqrt{x^2+y^2-12y+z^2+36} \\ \sqrt{x^2+y^2-12y+z^2+36}=\sqrt{x^2+y^2+z^2+4z+4} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=x^2-8x+y^2+z^2+16 \\ x^2-8x+y^2+z^2+16=x^2+y^2-12y+z^2+36 \\ x^2+y^2-12y+z^2+36=x^2+y^2+z^2+4z+4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 8x=16 \\ 12y=8x+20 \\ 12y+4z=32 \end{cases}; \begin{cases} x=2 \\ 12y=36 \\ 36+4z=32 \end{cases}; \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=-1 \end{cases}.$$

440. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке C и с осями: Ox — по отрезку CA , Oy — по отрезку CB , тогда точка D будет лежать на оси Oz . Пусть точка K — середина AB . Во введенной системе координат $A(b; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C(0; 0; 0)$, $D(0; 0; m)$.

$$\text{Точка } K\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right),$$



Подставляя координаты точек А и В, получим: $K(\frac{b}{2}; \frac{a}{2}; 0)$.

Следовательно:

$$|DK| = \sqrt{(\frac{b}{2} - 0)^2 + (\frac{a}{2} - 0)^2 + (0 - m)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} + m^2}.$$

441. Сделаем рисунок.

а) Векторы $\vec{BB_1}$ и $\vec{B_1C}$ совпадают с катетом и гипотенузой прямоугольного треугольника BB_1C , следовательно, $\angle BB_1C = 45^\circ$.

б) $\vec{BD} = \vec{B_1D_1}$, т.к. они сонаправлены и имеют одинаковую длину. $\vec{BD} = \vec{B_1D_1} = -\vec{DB}$.

Угол между \vec{DB} и \vec{DA} — угол между стороной и диагональю квадрата, т.е. $\alpha = 45^\circ$. Тогда угол между \vec{DA} и $\vec{B_1D_1}$ равен 135° .

$$\vec{DA} \wedge \vec{DB} = 135^\circ = \vec{DA} \wedge \vec{B_1D_1}.$$

в) $\vec{A_1C_1}$ и $\vec{A_1B}$ совпадают со сторонами равностороннего треугольника ABC и отложены из одной точки. Следовательно, угол 60° .

г) $\vec{BC} = \vec{AD}$; $\vec{BC} \wedge \vec{AC} = \vec{AC} \wedge \vec{AD} = 45^\circ$ (угол между стороной и диагональю квадрата).

д) $\vec{BB_1} = \vec{AA_1}$, $\vec{BB_1} \wedge \vec{AC} = \vec{AA_1} \wedge \vec{AC} = 90^\circ$.

е) $AD_1 \perp BC_1$. Пусть O — точка пересечения диагоналей B_1C и BC_1 , квадрата BB_1C_1C . $BC_1 = 2OC_1$; $B_1C = 2OC$, следовательно,

$$\vec{BC_1} \wedge \vec{B_1C} = \vec{OC_1} \wedge \vec{OC} = 90^\circ.$$

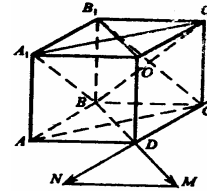
ж) $\vec{A_1D_1} = \vec{BC}$, следовательно, $\vec{A_1D_1} \wedge \vec{BC} = 0^\circ$.

з) $\vec{AA_1} = -\vec{C_1C}$, следовательно, угол между ними равен 180° .

442. Угол $\vec{AB} \wedge \vec{CD} = \varphi$, тогда угол между векторами (1) \vec{BA} и \vec{DC} равен φ , (2) \vec{BA} и \vec{CD} равен $180^\circ - \varphi$, (3) \vec{AB} и \vec{DC} равен $180^\circ - \varphi$.

Отложим вектора \vec{AB} и \vec{CD} от одной точки и построим векторы \vec{BA} , \vec{DC} .

Тогда в случае (1) углы между векторами \vec{AB} , \vec{CD} и \vec{BA} и \vec{DC} равны как вертикальные; в случаях (2) и (3) углы вычисляются как смежные.



443. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$.

а) $\vec{AD} \cdot \vec{B_1C_1} = |\vec{AD}| \cdot |\vec{B_1C_1}| \cdot \cos(\vec{AD} \wedge \vec{B_1C_1}) = a^2$,

т.к. $\cos(\vec{AD} \wedge \vec{B_1C_1}) = 1$ и $|\vec{AD}| = |\vec{B_1C_1}|$

б) $\vec{AC} = \vec{C_1A_1}$, $\cos(\vec{AC} \wedge \vec{C_1A_1}) = \cos 180^\circ = -1$,

$|\vec{AC}| = |\vec{C_1A_1}| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

$\vec{AC} \cdot \vec{C_1A_1} = \sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{2a^2} \cdot (-1) = -2a^2$.

в) $D_1B \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах),

$\cos(\vec{D_1B} \wedge \vec{AC}) = \cos 90^\circ = 0$, $\vec{D_1B} \cdot \vec{AC} = 0$.

г) $\vec{BA_1}$ совпадает с диагональю грани куба, как и $\vec{BC_1}$.

$|\vec{BA_1}| = |\vec{BC_1}| = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

$\triangle BA_1C_1$ — равносторонний, $\angle A_1BC_1 = 60^\circ = \vec{BA_1} \wedge \vec{BC_1}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,

$\vec{BA_1} \cdot \vec{BC_1} = |\vec{BA_1}| \cdot |\vec{BC_1}| \cdot \cos(\vec{BA_1} \wedge \vec{BC_1}) = \sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{2a^2} \cdot \frac{1}{2} = a^2$.

д) $\vec{A_1O_1} = \frac{1}{2} \vec{A_1C_1}$, $\cos(\vec{A_1O_1} \wedge \vec{A_1C_1}) = \cos 0^\circ = 1$,

$|\vec{A_1O_1}| = |\vec{A_1C_1}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2a^2}$, $\vec{A_1O_1} \cdot \vec{A_1C_1} = \sqrt{2a^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2a^2} \cdot 1 = a^2$.

е) $\vec{D_1O_1} = \frac{1}{2} \vec{D_1B_1}$, $\vec{B_1O_1} = \frac{1}{2} \vec{B_1D_1} = -\frac{1}{2} \vec{D_1B_1} = -\vec{D_1O_1}$.

$\vec{D_1O_1} \wedge \vec{B_1O_1} = 180^\circ$, $\cos 180^\circ = -1$, $|\vec{D_1O_1}| = |\vec{B_1O_1}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2a^2}$,

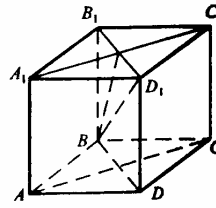
$\vec{D_1O_1} \cdot \vec{B_1O_1} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2a^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2a^2} \cdot (-1) = \frac{1}{4} \cdot 2a^2 \cdot (-1) = -\frac{1}{2} a^2$.

ж) $\vec{BO_1}$ совпадает с гипотенузой прямоугольного $\triangle BB_1O_1$, у которого ка-

теты: $|\vec{BB_1}| = a$, $|\vec{B_1O_1}| = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2}$,

$|\vec{BO_1}| = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} \cdot 2a^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} a$, $|\vec{C_1B}| = \sqrt{2a^2}$,

$\vec{BO_1} \wedge \vec{C_1B} = 180^\circ - (\vec{BO_1} \wedge \vec{BC_1}) = 180^\circ - \angle O_1BC_1$.



$$\angle O_1BC_1 = \frac{1}{2} \angle A_1BC_1 = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ, \text{ т.к. } \triangle BA_1C_1 \text{ — равносторонний}$$

$$\begin{aligned} \vec{BO}_1 \cdot \vec{C_1B} &= |\vec{BO}_1| \cdot |\vec{C_1B}| \cdot \cos 150^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a \cdot \sqrt{2a^2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \\ &= a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = a^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \sqrt{3} = -\frac{3}{2} a^2. \end{aligned}$$

444. Пусть $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$, тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$,
тогда $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 5 - 6 + 4 = 3$,
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 - 1 + 2 = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = -5 + 6 + 2 = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = 1 + 1 + 4 = 6$, $\sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$.

445. $\vec{a} \{3; -5; 1\}$, $\vec{b} \{0; 1; -5\}$.

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 0 - 5 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -10$;

б) $\vec{i} \{1; 0; 0\}$, $\vec{a} \cdot \vec{i} = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 3$;

в) $\vec{j} \{0; 1; 0\}$, $\vec{b} \cdot \vec{j} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 5 \cdot 0 = 1$;

г) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{k} = \vec{a} \cdot \vec{k} + \vec{b} \cdot \vec{k}$, $\vec{k} \{0; 0; 1\}$,

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{k} = 0 \cdot 3 + 0 \cdot (-5) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 5 \cdot 1 = 1 - 5 = -4$;

д) $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j}) = \vec{a} \cdot \vec{k} + \vec{a} \cdot \vec{i} - 2\vec{a} \cdot \vec{j} - \vec{b} \cdot \vec{k} - 2\vec{b} \cdot \vec{i} + 4\vec{b} \cdot \vec{j} = (3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 +$
 $+ 1 \cdot 1) + (3 \cdot 1 - 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0) - 2(3 \cdot 0 - 5 \cdot 1 + 1 \cdot 0) - 2(0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 5 \cdot 1) - 2(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 5 \cdot 0) + 4(0 \cdot 0 +$
 $+ 1 \cdot 1 - 5 \cdot 0) = 1 + 3 + 10 + 10 + 4 = 28$.

446. $\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$, далее если $0 < \alpha < 90^\circ$ (острый

угол), то $\cos \alpha > 0$, если $\cos \alpha = 0$, то $\alpha = 90^\circ$, если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, то $\cos \alpha < 0$.

$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} > 0$ для любых векторов, отличных от нуле-

вого. Тогда знак $\cos \alpha$ совпадает со знаком числителя.

а) $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) < 0$, т.к. $3 \cdot (-5) + (-1) \cdot 1 + (0 \cdot 1) = -15 - 1 = -16 < 0$, следовательно, угол тупой;

б) $\cos(\vec{b} \wedge \vec{c}) > 0$, т.к. $-5 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 5 - 2 = 3 > 0$, следовательно, угол острый;

в) $\cos(\vec{a} \wedge \vec{c}) = 0$, т.к. $3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + (1 \cdot 1) = -3 + 2 + 1 = 0$, следовательно, угол прямой

447. $\vec{i} \{1; 0; 0\}$; $\vec{j} \{0; 1; 0\}$; $\vec{k} \{0; 0; 1\}$.

$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ знак $\cos \alpha$ зависит от знака числителя.

а) Если $\cos(\vec{a} \wedge \vec{i}) > 0$, то $\vec{a} \cdot \vec{i} < 90^\circ$. Докажем это.

$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 3 + (-5) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 3$, $3 > 0$, следовательно, все выражение положительное. $\cos(\vec{a} \wedge \vec{i}) > 0$, $\vec{a} \wedge \vec{i} < 90^\circ$.

б) Если $\cos(\vec{a} \wedge \vec{j}) < 0$, то $\vec{a} \wedge \vec{j} > 90^\circ$. Докажем это.

$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 0 + (-5) \cdot 1 + (0 \cdot 0) = -5$, $-5 < 0$, следовательно, все выражение отрицательно. $\cos(\vec{a} \wedge \vec{j}) < 0$, $\vec{a} \wedge \vec{j} > 90^\circ$.

в) $\vec{a} \cdot \vec{k} = 90^\circ$, когда $\cos(\vec{a} \wedge \vec{k}) = 0$. $\cos \alpha = 0$, если числитель равен нулю.

$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 0 + (-5) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$, следовательно, $\cos(\vec{a} \wedge \vec{k}) = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{k} = 90^\circ$.

448. $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 5 + 2x - 3 \cdot 1 = 2x - 8$.

По условию задачи: $2x - 8 = 3$, $2x = 11$, $x = 5\frac{1}{2} = 5,5$;

б) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2x - 8 = -1$, $2x = 7$, $x = 3,5$;

в) $\vec{a} \perp \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, когда $\cos \vec{a} \wedge \vec{b} = 0$, тогда,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$, $-1 \cdot 5 + 2x - 3 \cdot 1 = 2x - 8 = 0$, $x = 4$.

449. $\vec{a} \in \{m; 3; 4\}$; $\vec{b} \in \{4; m; -7\}$,

Векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

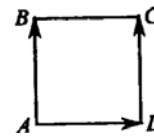
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4m + 3m - 28 = 0$, $7m = 28$, $m = 4$.

450. Докажем, что $|\vec{AB}| = |\vec{DC}|$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$, $|\vec{AB}| = |\vec{AD}|$:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(\sqrt{2} - 0)^2 + (1 - 1)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{DC}| = \sqrt{(\sqrt{2} - 0)^2 + (1 - 1)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2} \text{ аналогично. } \vec{AB} \cdot \vec{AD} = (2 - 1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 0$$



Таким образом, $\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{AD}$,

$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$, следовательно, ABCD — квадрат.

451. Применим формулу: $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

$$\text{а) } \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{2 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot (-3)}{\sqrt{4 + 4 + 0} \cdot \sqrt{9 + 0 + 9}} = \frac{6}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}} = \frac{6}{2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2},$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = 60^\circ;$$

$$\text{б) } \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\sqrt{2} \cdot (-3) + \sqrt{2} \cdot (-3) + 0 \cdot 2}{\sqrt{2+2+4} \cdot \sqrt{9+9+0}} = \frac{-6\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos \vec{a} \wedge \vec{b} < 0, \text{ значит, это тупой угол, } \vec{a} \wedge \vec{b} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ;$$

$$\text{в) } \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{0 \cdot 0 + 5 \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 1}{\sqrt{0+25+0} \cdot \sqrt{0+3+1}} = \frac{-5 \cdot \sqrt{3}}{5 \cdot 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) < 0, \text{ значит, угол тупой, } \vec{a} \wedge \vec{b} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ;$$

$$\text{г) аналогично, воспользовавшись формулой, получим } \vec{a} \wedge \vec{b} = 45^\circ$$

452. $\vec{i} \{1; 0; 0\}$, $\vec{j} \{0; 1; 0\}$, $\vec{k} \{0; 0; 1\}$. Воспользуемся формулой (см. 451):

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{i}) = \frac{2 \cdot 1 + 0 + 0}{\sqrt{4+4+1} \cdot \sqrt{1+0+0}} = \frac{2}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3}; \vec{a} \wedge \vec{i} = 50^\circ 46';$$

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{j}) = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{3}; \vec{a} \wedge \vec{j} = 63^\circ 26';$$

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{k}) = \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{1}} = \frac{2}{3}; \vec{a} \wedge \vec{k} = 50^\circ 46'.$$

$$\textbf{453. } \vec{CA} \{1-1; 3-2; 0+1\}, \vec{CA} \{0; 1; 1\};$$

$$\vec{CB} \{2-1; 3-2; -1+1\}, \vec{CB} \{1; 1; 0\};$$

$$\cos(\vec{CA} \wedge \vec{CB}) = \frac{0+1+0}{\sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \vec{CA} \wedge \vec{CB} = 60^\circ.$$

$$\textbf{454. } \cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\vec{AB} \{3-1; -1+1; 1-3\}, \vec{AB} \{2; 0; -2\}, \vec{BA} \{-2; 0; 2\};$$

$$\vec{AC} \{-1-1; 1+1; 3-3\}, \vec{AC} \{-2; 2; 0\}, \vec{CA} \{2; -2; 0\};$$

$$\vec{BC} \{-1-3; 1+1; 3-1\}, \vec{BC} \{-4; 2; 2\}, \vec{CB} \{4; -2; -2\}.$$

$$\cos(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = \frac{-4+0+0}{\sqrt{4+4} \cdot \sqrt{4+4}} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}; \vec{AB} \wedge \vec{AC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ;$$

$$\cos(\vec{BA} \wedge \vec{BC}) = \frac{-2(-4)+0 \cdot 2+2 \cdot 2}{\sqrt{4+0+4} \cdot \sqrt{16+4+4}} = \frac{8+4}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{12}{4 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\vec{BA} \wedge \vec{BC} = 30^\circ;$$

$$\cos(\vec{CA} \wedge \vec{CB}) = \frac{2 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{4+4} \cdot \sqrt{16+4+4}} = \frac{8+4}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

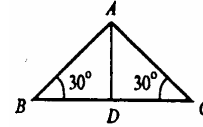
$\vec{CA} \wedge \vec{CB} = 30^\circ$, следовательно, углы при основании равны. $\triangle ABC$ — равнобедренный.

Вычислим $|\vec{BC}|$ и $|\vec{AB}|$ ($|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$): $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$|\vec{BC}| = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3},$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$P = |\vec{BC}| + 2|\vec{AB}| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} (2 + \sqrt{3}).$$



Вычислим площадь $\triangle ABC$: $S = \frac{1}{2} BC \cdot AD$, где $AD \perp BC$.

Точка D — середина отрезка BC, т.к. $\triangle ABC$ — равнобедренный. Тогда D (1;0;2).

$$|\vec{AD}| = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$$

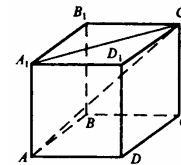
$$\text{Следовательно, } S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{3}.$$

455. Пусть сторона куба равна a, следовательно:

а) В прямоугольном треугольнике AA_1C_1 положим, $AA_1 = 0$, тогда $A_1C_1 = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ по теореме Пифагора.

$$|\vec{AC_1}| = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3},$$

$$\cos(\vec{AA_1} \wedge \vec{AC_1}) = \cos \angle A_1AC_1 = \frac{AA_1}{A_1C_1} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



б) Векторы $|\vec{BD_1}|$ и $|\vec{DB_1}|$ лежат в плоскости BB_1D_1 , сечение куба этой плоскостью — это прямоугольник BB_1D_1D со сторонами a и $a\sqrt{2}$.

$$\vec{BD_1} \wedge \vec{DB_1} = \angle B_1OD_1.$$

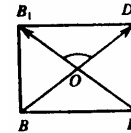
По теореме косинусов в $\triangle B_1OD_1$:

$$|\vec{B_1D_1}|^2 = |\vec{OB_1}|^2 + |\vec{OD_1}|^2 - 2|\vec{OB_1}| \cdot |\vec{OD_1}| \cos \angle B_1OD_1.$$

$$|\vec{OB_1}| = |\vec{OD_1}| = \frac{1}{2} |\vec{DB_1}| = \frac{1}{2} |\vec{AC_1}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, |\vec{B_1D_1}| = |\vec{A_1C_1}| = a\sqrt{2}, \text{ следовательно}$$

тельно

$$\cos \angle B_1OD_1 = \frac{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot (\frac{a\sqrt{3}}{2}) \cdot (\frac{a\sqrt{3}}{2})} = \frac{|\vec{OB_1}|^2 + |\vec{OD_1}|^2 - |\vec{B_1D_1}|^2}{2|\vec{OB_1}| \cdot |\vec{OD_1}|} =$$



$$= \frac{\frac{a^2 \cdot 3}{4} + \frac{a^2 \cdot 3}{4} - 2a^2}{\frac{3}{2}a^2} = \frac{\frac{3}{2}a^2 - 2a^2}{\frac{3}{2}a^2} = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}.$$

в) $C_1C \perp BD$, $AC \perp BD$ (по свойству диагонали квадрата).

Следовательно, BD перпендикулярно плоскости AC_1C , тогда, $BD \perp AC_1$,

$$\cos(\vec{BD} \wedge \vec{AC_1}) = \cos 90^\circ = 0.$$

456. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке D . Тогда, координаты вершин прямоугольного параллелепипеда:

$A(2;0;0)$; $A_1(2;0;2)$; $B(2;1;0)$; $B_1(2;1;2)$; $C(0;1;0)$; $C_1(0;1;2)$; $D(0;0;0)$; $D_1(0;0;2)$.

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

где $\vec{a} \wedge \vec{b} = \alpha$, $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$; $\vec{a} \neq 0$; $\vec{b} \neq 0$.

$\vec{DB} \{2; 1; 0\}$, а это координаты точки B_1 .

$\vec{BC_1} \{0-2; 1-1; 2-0\}$, $\vec{BC_1} \{-2; 0; 2\}$.

$$\cos(\vec{DB_1} \wedge \vec{BC_1}) = \frac{2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2}{\sqrt{4+1+0} \cdot \sqrt{4+0+4}} = \frac{-4+4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{8}} = 0$$

$$\vec{DB_1} \wedge \vec{BC_1} = 90^\circ.$$

457. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон);

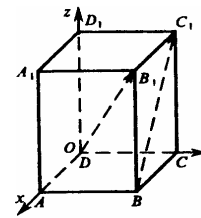
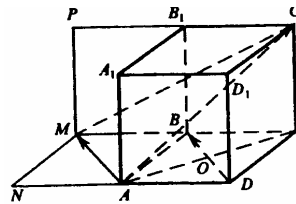
$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{c}) = 1 \cdot 2 \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1;$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos(\vec{b} \wedge \vec{c}) = 2 \cdot 2 \cos 60^\circ = 2;$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 1 + 2 = 3.$$

458. см. учебник.

$$\begin{aligned} \text{459. а) } (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (2\vec{b}) &= ((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}) \cdot (2\vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot 2\vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} = 2\vec{b} \cdot \vec{a} + \\ &+ 2\vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} = 2|\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cos 120^\circ + 2|\vec{b}| \cdot |\vec{b}| \cos 0^\circ + 2|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos 90^\circ = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-\frac{1}{2}) + \\ &+ 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 = -1 + 2 = 1; \\ (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{c} + \\ &+ \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^\circ - |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cos 120^\circ - |\vec{c}| \cdot |\vec{c}| \cos 0^\circ + |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{2}) - 1 + 0 = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$



б) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{p}|$, где по теореме косинусов

$$\sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)} = \sqrt{1+1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3}$$

$$|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = |\vec{d}|.$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(180^\circ - \vec{a} \wedge \vec{b}\right)} = \sqrt{1+1-1} = 1$$

$$|\vec{d}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2, \text{ следовательно, } |\vec{d}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

460. см.учебник.

461. Пусть $\vec{DA} = \vec{a}$; $\vec{DB} = \vec{b}$, $\vec{DC} = \vec{c}$;
 $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} = 60^\circ$.

Выразим \vec{MN} и \vec{BC} через \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} .

$$\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}, \vec{MN} = \vec{MD} + \vec{DB} + \vec{BN} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} +$$

$$+ \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}),$$

$$\vec{MN} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})(-\vec{a}) = -\frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{c} =$$

$$= -\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ + \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^\circ - \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{c}|\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

$$\vec{MN} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{c}^2 - \frac{1}{2}\vec{b}^2 + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{c}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0, \text{ т.к. } \vec{c}^2 = |\vec{c}| \cdot |\vec{c}| \cdot 1 = \vec{b}^2 = |\vec{b}| \cdot |\vec{b}| \cdot 1,$$

т.к. $|\vec{c}| = |\vec{b}|$ по условию; $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c}$, т.к. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ и $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c} = 60^\circ$.

462. Воспользуемся свойством параллелепипеда.

$$1) \vec{BA} \cdot \vec{D_1C_1} = (-\vec{AB}) \cdot \vec{D_1C_1} = -\vec{AB}^2 = -1 \text{ (т.к. } \vec{AB} = \vec{D_1C_1}, \vec{AB} \parallel \vec{D_1C_1},$$

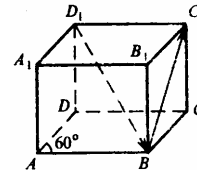
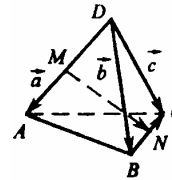
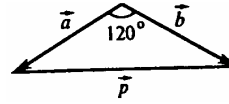
по свойству параллелепипеда, то $\vec{AB} = \vec{D_1C_1}$).

$$2) \vec{BC_1} = \vec{BC} + \vec{CC_1} = \vec{AD} + \vec{AA_1}$$

$$\vec{D_1B} = \vec{D_1C_1} + \vec{C_1C} + \vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AA_1} - \vec{AD},$$

$$\vec{BC_1} \cdot \vec{D_1B} = (\vec{AD} + \vec{AA_1})(\vec{AB} - \vec{AA_1} - \vec{AD}) =$$

$$= \vec{AD} \cdot \vec{AB} - \vec{AD} \cdot \vec{AA_1} - \vec{AD}^2 + \vec{AA_1} \cdot \vec{AB} - \vec{AA_1}^2 -$$



$$-\vec{AA_1} \cdot \vec{AD} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 0 = \frac{1}{2} - 1 - 1 = -1,5.$$

$$3) \vec{AC_1} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC_1} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1},$$

$$\begin{aligned} \vec{AC_1} \cdot \vec{AC_1} &= (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}) (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}) = \vec{AB}^2 + \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{AA_1} + \\ &+ \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AD}^2 + \vec{AD} \cdot \vec{AA_1} + \vec{AA_1} \cdot \vec{AB} + \vec{AA_1} \cdot \vec{AD} + \vec{AA_1}^2 = 1 + 1 \cdot \cos 60^\circ + \\ &+ 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 1 + 1 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 + 1 = 4. \end{aligned}$$

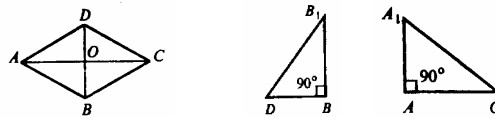
4) В основании параллелепипеда лежит ромб ABCD, у которого $\angle A = \angle C = 60^\circ$, $AD = 1$, $AB = 1$, откуда следует, что

а) $\angle ADB = \angle DBA = 60^\circ$,

б) $DB = 1$.

В $\triangle DBB_1$: $DB = 1$, $BB_1 = AA_1 = 1$, $\angle DBB_1 = 90^\circ$ ($BB_1 \perp$ плоскости основания, т.к. $AA_1 \perp$ плоскости основания и $BB_1 \parallel AA_1$)

$$|\vec{DB_1}| = \sqrt{|\vec{BB_1}|^2 + |\vec{DB}|^2} = \sqrt{2}.$$



5) Рассмотрим основание параллелепипеда. $AC = 2AO$, где O — точка пересечения диагоналей ромба. AO — высота в равностороннем $\triangle ADB$,

$$AO = AB \cdot \sin 60^\circ = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad AC = \sqrt{3}.$$

В прямоугольном $\triangle AA_1C$

$$|\vec{A_1C}| = \sqrt{|\vec{AA_1}|^2 + |\vec{AC}|^2} = \sqrt{1 + 3} = 2,$$

$$6) \vec{DA_1} = (-\vec{AD}) + \vec{AA_1}, \quad \vec{D_1B} = \vec{D_1D} + \vec{DA} + \vec{AB} = -\vec{AA_1} - \vec{AD} + \vec{AB},$$

$$\begin{aligned} \vec{DA_1} \cdot \vec{D_1B} &= (\vec{AA_1} - \vec{AD}) (\vec{AB} - \vec{AA_1} - \vec{AD}) = \vec{AA_1} \cdot \vec{AB} - \vec{AA_1}^2 - \vec{AA_1} \cdot \vec{AD} - \\ &- \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{AA_1} + \vec{AD}^2 = \vec{AD}^2 - \vec{AA_1}^2 + \vec{AA_1} \cdot \vec{AB} - \vec{AD} \cdot \vec{AB} = 1 - 1 + 0 - \\ &- 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\cos(\vec{DA_1} \wedge \vec{D_1B}) = \frac{\vec{DA_1} \cdot \vec{D_1B}}{|\vec{DA_1}| |\vec{D_1B}|}, \quad |\vec{DA_1}| = \sqrt{|\vec{AD}|^2 + |\vec{AA_1}|^2} = \sqrt{2},$$

$$|\vec{DB}| = |\vec{DB_1}| = \sqrt{2}, \quad \cos(\vec{DA_1} \wedge \vec{D_1B}) = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} 7) \quad \vec{AC_1} &= \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}, \quad \vec{DB_1} = -\vec{AD} + \vec{AB} + \vec{BB_1} = \vec{AB} - \vec{AD} + \vec{AA_1}, \\ \vec{AC_1} \cdot \vec{DB_1} &= (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}) \cdot (\vec{AB} - \vec{AD} + \vec{AA_1}) = \vec{AB}^2 + \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AA_1} \cdot \vec{AB} - \\ &- \vec{AD} \cdot \vec{AB} - \vec{AD}^2 - \vec{AD} \cdot \vec{AA_1} + \vec{AA_1} \cdot \vec{AB} + \vec{AA_1} \cdot \vec{AD} + \vec{AA_1}^2 = \vec{AB}^2 + 2\vec{AA_1} \cdot \vec{AB} - \\ &- \vec{AD}^2 + \vec{AA_1}^2 = 1 + 2 \cdot 0 - 1 + 1 = 1, \quad |\vec{AC_1}| = |\vec{A_1C}| = 2, \quad |\vec{DB_1}| = \sqrt{2}, \\ \cos(\vec{AC_1} \wedge \vec{DB_1}) &= \frac{\vec{AC_1} \cdot \vec{DB_1}}{|\vec{AC_1}| |\vec{DB_1}|} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

463. см.учебник.

$$464. \cos \varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

$$a) \quad \vec{AB} \{1; 1; -2\}; \quad \vec{CD} \{1; 0; -1\},$$

$$\cos \varphi = \frac{|1+0+2|}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{1+0+1}} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = 30^\circ.$$

$$б) \quad \vec{AB} \{1; 0; -1\}; \quad \vec{CD} \{0; -2; 2\},$$

$$\cos \varphi = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1+0+1} \cdot \sqrt{0+4+4}} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \arccos \frac{1}{2}, \quad \varphi = 60^\circ.$$

$$в) \quad \vec{AB} \{1; 1; -2\}; \quad \vec{CD} \{-2; -2; 4\},$$

$$\cos \varphi = \frac{|-2-2-8|}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{4+4+16}} = \frac{12}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}} = \frac{12}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot 2} = 1, \quad \varphi = \arccos(1) \quad \varphi = 0^\circ.$$

$$г) \quad \vec{AB} \{-1; 0; 1\}; \quad \vec{CD} \{0; 0; -2\}, \quad \cos \varphi = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{4}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi = 45^\circ.$$

465. см.учебник.

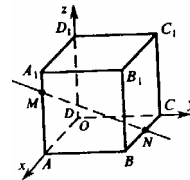
466. Обозначим стороны через а. Введем прямоугольную систему координат Охуз с началом в точке D. Тогда вершины куба имеют координаты:

A (а; 0; 0), B (а; а; 0), C (0; а; 0), D (0; 0; 0), A₁ (а; 0; а),

B₁ (а; а; а), C₁ (0; а; а), D₁ (0; 0; а); точки M и N:

$$M(a; 0; \frac{3}{4}a), \quad N(\frac{1}{2}a; a; 0).$$

$$a) \quad \vec{MN} \{-\frac{1}{2}a; a; -\frac{3}{4}a\}, \quad \vec{DD_1} \{0; 0; a\},$$



$$\cos \varphi = \frac{|0 + 0 - \frac{3}{4}a|}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2 + \frac{9}{16}a^2} \cdot \sqrt{0 + 0 + a^2}} = \frac{\frac{3}{4}a^2}{a\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{16}} \cdot a} = \frac{\frac{3}{4}a^2}{a\sqrt{\frac{29}{16}} \cdot a} = \frac{3}{\sqrt{29}};$$

б) $\vec{BD} \{-a; -a; 0\},$

$$\cos \varphi = \frac{|\frac{1}{2}a^2 - a^2 + 0|}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2 + \frac{9}{16}a^2} \cdot \sqrt{2a^2}} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{a\sqrt{\frac{29}{16}} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{16}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{58}};$$

в) $\vec{B_1D} \{-a; -a; -a\},$

$$\cos \varphi = \frac{|-\frac{1}{2}a(-a) - a^2 - a(-\frac{3}{4}a)|}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2 + \frac{9}{16}a^2} \cdot \sqrt{3a^2}} = \frac{|\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4}a^2|}{a\sqrt{\frac{29}{16}} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{a^2 \frac{\sqrt{29} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{16}}} = \frac{1}{\sqrt{87}};$$

г) $\vec{A_1C} \{-a; a; -a\},$

$$\cos \varphi = \frac{|-\frac{1}{2}a(-a) - a^2 - \frac{3}{4}a(-a)|}{a\sqrt{\frac{29}{16}} \cdot \sqrt{3a^2}} = \frac{|a^2(\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{4})|}{a^2 \sqrt{\frac{29}{16}} \cdot \sqrt{3}} = \frac{a^2 9\sqrt{16}}{a^2 4\sqrt{29} \cdot \sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}.$$

467. Обозначим $AB=a=BC$, тогда $AA_1=2a$.

Введем прямоугольную систему координат как показано на рисунке. Тогда вершины параллелепипеда имеют координаты:

$A(a; 0; 0), B(a; a; 0), C(0; a; 0), D(0; 0; 0), A_1(a; 0; 2a), B_1(a; a; 2a), C_1(0; a; 2a), D_1(0; 0; 2a).$

а) $\vec{BD} \{-a; -a; 0\}, \vec{CD_1} \{0; -a; 2a\},$

$$\cos \varphi = \frac{|0 + a^2 + 0|}{\sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{a^2}{a^2 \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \varphi \approx 71^\circ 34';$$

б) $\vec{AC} \{-a; a; 0\}, \vec{AC_1} \{-a; a; 2a\},$

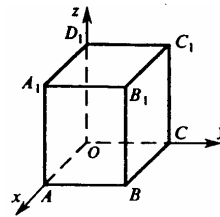
$$\cos \varphi = \frac{|a^2 + a^2 + 0|}{\sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{2a^2 + 4a^2}} = \frac{2a^2}{a^2 \sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \varphi \approx 54^\circ 44'.$$

468. Введем прямоугольную систему координат аналогично п. № 467.

Тогда $A(2; 0; 0), B(2; 1; 0), C(0; 1; 0), D(0; 0; 0), A_1(2; 0; 3), B_1(2; 1; 3), C_1(0; 1; 3), D_1(0; 0; 3).$

а) $\vec{AC} \{-2; 1; 0\}, \vec{D_1B} \{2; 1; -3\},$

$$\cos \varphi = \frac{|-4 + 1|}{\sqrt{4 + 1} \cdot \sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{70}},$$



$$\text{б) } \vec{AB}_1 \{0; 1; 3\}, \vec{BC}_1 \{-2; 0; 3\},$$

$$\cos \varphi = \frac{|9|}{\sqrt{1+9} \cdot \sqrt{4+9}} = \frac{9}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{130}},$$

$$\text{в) } \vec{A_1D} \{-2; 0; -3\}, \vec{AC_1} \{-2; 1; 3\},$$

$$\cos \varphi = \frac{|4-9|}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{4+1+9}} = \frac{5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{182}}.$$

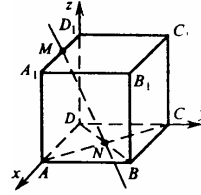
469. Обозначим стороны через a .

Введем прямоугольную систему координат, как

показано на рисунке. Тогда $\vec{DA} \{a; 0; 0\}$, $\vec{DC} \{0; a; 0\}$,

$\vec{DD_1} \{0; 0; a\}$, $M(\frac{4}{5}a; 0; a)$, $\vec{DD_1} \{0; 0; a\}$, $M(\frac{4}{5}a; 0; a)$,

$N(\frac{1}{2}a; \frac{1}{2}a; 0)$, $\vec{MN} \{-\frac{3}{10}a; \frac{1}{2}a; -a\}$. $\sin \varphi = |\cos \theta|$,



где φ — угол между прямой и плоскостью; θ — угол между прямой и ненулевым вектором, перпендикулярным плоскости.

а) $\vec{DD_1} \perp$ плоскости $ABCD$,

$$\sin \varphi = \left| \cos \left(\vec{MN} \wedge \vec{DD_1} \right) \right| = \frac{|0+0-a^2|}{\sqrt{\frac{9}{100}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + a^2} \cdot \sqrt{a^2}} = \frac{10}{\sqrt{134}};$$

б) $\vec{DA} \perp$ плоскости DD_1C_1C ,

$$\sin \varphi = \left| \cos \left(\vec{MN} \wedge \vec{DA} \right) \right| = \frac{|\frac{-3}{10}a^2|}{a\sqrt{\frac{134}{100}} \cdot \sqrt{a^2}} = \frac{3}{\sqrt{134}};$$

в) $\vec{DC} \perp$ плоскости AA_1D_1D ,

$$\sin \varphi = \left| \cos \left(\vec{DC} \wedge \vec{MN} \right) \right| = \frac{|\frac{1}{2}a \cdot a|}{a\sqrt{\frac{134}{100}} \cdot \sqrt{a^2}} = \frac{5}{\sqrt{134}}.$$

470. Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке.

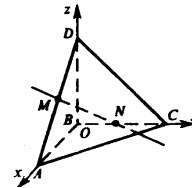
$A(2; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $D(0; 0; 2)$, $M(1; 0; 1)$, $N(0; \frac{1}{2}; 0)$.

$\sin \varphi = |\cos \theta|$, где φ — угол между прямой и плоскостью; θ — угол между прямой и ненулевым вектором, перпендикулярным к этой плоскости.

а) вектор $\vec{BC} \perp$ к плоскости ABD .

$\vec{BC} \{0; 1; 0\}$, $\vec{MN} \{-1; \frac{1}{2}; -1\}$,

$$\sin \varphi = \left| \cos \left(\vec{BC} \wedge \vec{MN} \right) \right| = \frac{|0 + \frac{1}{2} + 0|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{1}{3}.$$



б) вектор $\vec{BA} \perp$ к плоскости DBC.

$$\vec{BA} \{2; 0; 0\}, \sin \varphi = \left| \cos \left(\vec{BA} \wedge \vec{MN} \right) \right| = \frac{|-2|}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{2}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

в) вектор $\vec{BD} \perp$ к плоскости ABC.

$$\vec{BD} \{0; 0; 2\}, \sin \varphi = \left| \cos \left(\vec{BD} \wedge \vec{MN} \right) \right| = \frac{|-2|}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{2}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

471. Пусть дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $A_1 C$ — диагональ куба; DB — диагональ грани куба.

Введем прямоугольную систему координат. С началом координат в т. D и осями, направленными вдоль ребер OA, OB, OC. Обозначим сторону куба через a.

Тогда $A_1 (a; 0; a)$, $C (0; a; 0)$, $A_1 C \{-a; a; -a\}$, $D (0; 0; 0)$,

$B (a; a; 0)$, $DB \{a; a; 0\}$.

$$\cos (\vec{DB} \wedge \vec{A_1 C}) = \frac{|a^2 - a^2|}{\sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{3a^2}} = 0.$$

Следовательно, $\vec{DB} \wedge \vec{A_1 C} = 90^\circ$, соответственно угол между прямыми $A_1 C$ и DB равен 90° .

472. Введем прямоугольную систему координат. С началом координат в т. D и осями, направленными вдоль ребер OA, OB, OC. Обозначим сторону куба через a. Тогда:

1) $M_1 (a; 0; a)$, $P (0; a; 0)$, $PM_1 \{a; -a; a\}$; $M (a; 0; 0)$, $Q_1 (0; 0; a)$, $MQ_1 \{-a; 0; a\}$.

$\vec{PM_1}$ и $\vec{MQ_1}$ — направляющие векторы прямых PM_1 и MQ_1 , угол между ними равен углу между этими прямыми.

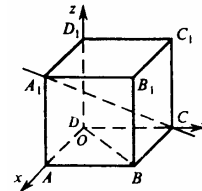
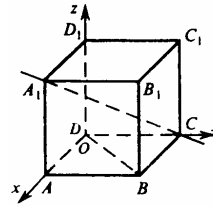
$$\cos (\vec{PM_1} \wedge \vec{MQ_1}) = \frac{|-a^2 + a^2|}{\sqrt{3a^2} \cdot \sqrt{2a^2}} = 0, \text{ следовательно, угол между прямыми}$$

PM_1 и MQ_1 равен 90° .

Докажем, что прямая MN_1 , пересекающая прямую MQ_1 в точке M и лежащая в плоскости $MN_1 Q_1$, перпендикулярна прямой PM_1 .

$N_1 (a; a; a)$; $\vec{MN_1}$ и $\vec{PM_1}$ — направляющие векторы этих прямых.

$$\vec{MN_1} \{0; a; a\}. \cos (\vec{PM_1} \wedge \vec{MN_1}) = \frac{|-a^2 + a^2|}{\sqrt{3a^2} \cdot \sqrt{2a^2}} = 0, \text{ } PM_1 \perp MN_1 = 90^\circ.$$



Доказали, что $PM_1 \perp MQ_1$; $PM_1 \perp MN_1$ лежит в плоскости MN_1Q_1 ; MN_1 лежит в плоскости MN_1Q_1 . Эти прямые пересекаются в точке M. Значит, $PM_1 \perp$ плоскости MN_1Q_1 .

2) Прямые QN и QP_1 лежат в плоскости QNP_1 и пересекаются в точке Q.

$$Q(0; 0; 0), N(a; a; 0), \vec{QN} \{a; a; 0\}, P_1(0; a; a), \vec{QP_1} \{0; a; a\}$$

$$\cos(\vec{PM_1} \wedge \vec{QN}) = \frac{|a^2 - a^2|}{\sqrt{3a^2} \cdot \sqrt{2a^2}} = 0, PM_1 \perp QN_1;$$

$$\cos(\vec{PM_1} \wedge \vec{QP_1}) = \frac{|-a^2 + a^2|}{\sqrt{3a^2} \cdot \sqrt{2a^2}} = 0, PM_1 \perp QP_1.$$

Таким образом, прямая $PA_1 \perp$ плоскости QNP_1 .

473. Введем прямоугольную систему координат так, что луч OA будет совпадать с осью Ox, OB с осью Oy, OC с осью Oz. Отложим на лучах отрезки: OA=OB=OC=1. Получим тетраэдр ABOS. OM и ON — биссектрисы углов $\angle AOC$ и $\angle AOB$.

$$AM=MC=\frac{1}{2} AC; AN=NB=\frac{1}{2} AB.$$

$$A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1), M(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}), N(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0);$$

$$\vec{OM} \{ \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2} \}, \vec{ON} \{ \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \}.$$

$$\cos(\vec{OM} \wedge \vec{ON}) = \frac{\frac{1}{4} + 0 + 0}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}; \vec{OM} \wedge \vec{ON} = 60^\circ.$$

\vec{OM} и \vec{ON} — направляющие векторы лучей OM и ON.
 $\angle MON = 60^\circ$.

474. см. учебник.

475. Пусть точка N — середина отрезка CB, M — точка пересечения медиан $\triangle DBC$, $\angle DAN = \varphi$.

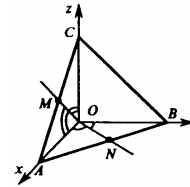
Введем прямоугольную систему координат Oxyz. Тогда C(0; 3; 0), B(4; 0; 0).

Точка N — середина отрезка CB; $N(2; \frac{3}{2}; 0)$.

$$D(5 \cos 60^\circ; 5 \cos 45^\circ; 5 \sin \varphi), \vec{AD} \{ \frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}; \sin \varphi \}.$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{AD} = |\vec{AD}|^2 = 25, 25 = (\frac{5}{2})^2 + (\frac{5\sqrt{2}}{2})^2 + (5 \sin \varphi)^2, 25 = \frac{25}{4} + \frac{25 \cdot 2}{4} + 25 \sin^2 \varphi,$$

$$\text{следовательно, } \sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \varphi = 30^\circ.$$



$$\vec{AD} \left\{ \frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{5}{2} \right\}, \angle DAN = 30^\circ, \vec{AN} \left\{ 2; \frac{3}{2}; 0 \right\}.$$

$$|\vec{AN}| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2};$$

$$\vec{AM} = \vec{AN} + \vec{NM} = \vec{AN} + \frac{1}{3} \vec{ND} = \vec{AN} + \frac{1}{3} (\vec{AD} - \vec{AN}) = \frac{1}{3} \vec{AD} + \frac{2}{3} \vec{AN},$$

$$\vec{AM} \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} + \frac{2}{3} \cdot 2; \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}; \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} \right\}, \text{ т.е. } \vec{AM} \left\{ \frac{13}{6}; \frac{5\sqrt{2}+6}{6}; \frac{5}{6} \right\},$$

$$|\vec{AM}| = \sqrt{\frac{169}{36} + \frac{(5\sqrt{2}+6)^2}{36} + \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{169 + 25 \cdot 2 + 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 6 + 36 + 25}{36}} =$$

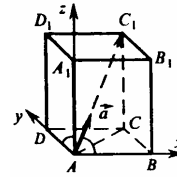
$$= \sqrt{\frac{280 + 60\sqrt{2}}{36}} = \sqrt{\frac{4(70 + 15\sqrt{2})}{36}} = \frac{2\sqrt{70 + 15\sqrt{2}}}{6} = \frac{1}{3} \sqrt{70 + 15\sqrt{2}}.$$

476. Пусть $\angle CAC_1 = \varphi$.

Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$, рассмотрим единичный вектор \vec{a} , сонаправленный с вектором

$$\vec{AC}_1. \vec{a} (\cos 60^\circ; \cos 60^\circ; \sin \varphi), \vec{a} \cdot \vec{a} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \sin^2 \varphi = 1;$$

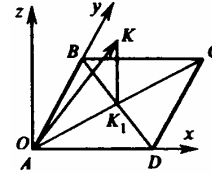
$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ следовательно, } \varphi = 45^\circ.$$



477. Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$. Обозначим сторону квадрата через a , $KK_1 = b$, где K_1 — точка пересечения диагоналей, или центр

квадрата. Тогда $\vec{AD} \{a; 0; 0\}$, $\vec{AB} \{0; a; 0\}$,

$$\vec{BD} \{a; -a; 0\}.$$



Точка K_1 — центр квадрата, следовательно, $K_1 \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0 \right)$, тогда $K \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; b \right)$;

$$\vec{AK} \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; b \right).$$

Используя формулу скалярного произведения векторов, найдем длины векторов \vec{BD} и \vec{AK} . Из прямоугольного треугольника BAD : $BD = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

Из прямоугольного треугольника AKK_1 , где $AK_1 = \frac{1}{2} BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$:

$$AK = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}; \quad \vec{AK} \cdot \vec{BD} = |\vec{AK}| \cdot |\vec{BD}| \cos(\angle \vec{AK} \vec{BD}).$$

$$\begin{aligned} \text{другой стороны} \quad \vec{AK} \cdot \vec{BD} &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + 0 = 0, \quad \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + 0 = \\ &= a\sqrt{2} \cdot \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}} \cos(\angle \vec{AK} \vec{AD}), \quad 0 = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}} \cos(\angle \vec{AK} \vec{BD}). \end{aligned}$$

Тогда, т. к. вектора ненулевые, то $\cos(\angle \vec{AK} \vec{BD}) = 0$. Следовательно, $\angle \vec{AK} \vec{BD} = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

478.

а)

Точка

A (0; 1; 2),

B (3; -1; 4),

C (1; 0; -2),

Симметричная ей точка

A₁ (0; -1; -2);

B₁ (-3; 1; -4);

C₁ (-1; 0; 2).

б)

Ось симметрии — ось Oх:

Точка

A (0; 1; 2),

B (3; -1; 4),

C (1; 0; -2),

Симметричная ей точка

A₁ (0; -1; -2);

B₁ (3; 1; -4);

C₁ (1; 0; 2).

Ось симметрии — ось Oy:

Точка

A (0; 1; 2),

B (3; -1; 4),

C (1; 0; -2),

Симметричная ей точка

A₁ (0; 1; -2);

B₁ (-3; -1; -4);

C₁ (-1; 0; 2).

Ось симметрии — ось Oz:

Точка

A (0; 1; 2),

B (3; -1; 4),

C (1; 0; -2),

Симметричная ей точка

A₁ (0; -1; 2);

B₁ (-3; 1; 4);

C₁ (-1; 0; -2).

в)

Если плоскость симметрии — плоскость Oxy, то:

Точка

A (0; 1; 2),

B (3; -1; 4),

C (1; 0; -2),

Симметричная ей точка

A₁ (0; 1; -2);

B₁ (3; -1; -4);

C₁ (1; 0; 2).

Плоскость симметрии — плоскость Oyz:

Точка

A (0; 1; 2),

B (3; -1; 4),

C (1; 0; -2),

Симметричная ей точка

A₁ (0; 1; 2);

B₁ (-3; -1; 4);

C₁ (-1; 0; -2).

Плоскость симметрии — плоскость Oxz :

Точка

Симметричная ей точка

$A(0; 1; 2),$

$A_1(0; -1; 2);$

$B(3; -1; 4),$

$B_1(3; 1; 4);$

$C(1; 0; -2),$

$C_1(1; 0; -2).$

479. а) По известной теореме через центр симметрии и данную прямую можно провести единственную плоскость.

Пусть O — центр симметрии, a — данная прямая, α — плоскость, проведенная через O и a .

Пусть $A \in a$, построим отрезок OA . Продолжим OA за точку O на расстояние $OA_1 = AO$. Получим точку A_1 , симметричную A .

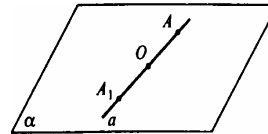
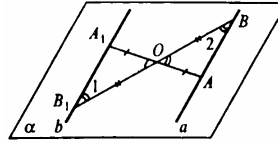
Пусть $B \in a$, построим отрезок OB . Продолжим OB за точку O на расстояние $OB_1 = OB$. Получим точку B_1 , симметричную точке B .

Через A_1 и B_1 проведем прямую b . Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle A_1OB_1$. $AO = A_1O$, $BO = OB_1$, $\angle AOB = \angle A_1OB_1$ как вертикальные, следовательно, $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$.

Тогда, $\angle 1 = \angle 2$ и $a \parallel b$.

б) Пусть $A \in a$. Симметричная ей точка A_1 тоже принадлежит прямой a ; $AO = OA_1$.

Точка A произвольна, следовательно, любая точка прямой, a также симметричная точка относительно центра O лежат на прямой a , следовательно, прямая a переходит сама в себя при условии, что проходит через центр симметрии.



480. а) Пусть O — центр симметрии, α — данная плоскость.

1. Пусть точку $C \in a$, построим отрезок CO и продолжим его за точку O на расстояние $OC_1 = OC$.

2. Пусть точка $A \in a$, построим отрезок AO и продолжим его за точку O на расстояние $OA_1 = OA$.

3. Пусть точка $B \in a$, построим отрезок BO и продолжим его за точку O на расстояние $OB_1 = OB$.

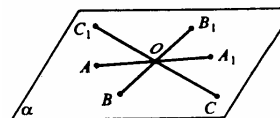
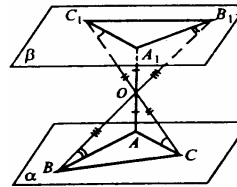
4. Через точки A_1, B_1, C_1 проведем плоскость β .

5. Соединим точки A, B, C, A_1, B_1 и C_1 отрезками. $\triangle OAC = \triangle OA_1C_1$, т.к. $OA_1 = OA$, $OC_1 = OC$ и $\angle AOC = \angle A_1OC_1$ как вертикальные. Отсюда $AC = A_1C_1$.

Тогда $\angle A_1C_1O = \angle ACO$, по признаку параллельности прямых $A_1C_1 \parallel AC$.

6. Для $\triangle OAB$ и $\triangle OA_1B_1$ проведем аналогичные рассуждения и получим, что $\triangle OAB = \triangle OA_1B_1$. Тогда $\angle A_1B_1O = \angle ABO$, по признаку параллельности прямых $A_1B_1 \parallel AB$.

7. Если две пересекающиеся прямые (AC и AB) в одной плоскости (α) соответственно



параллельны двум прямым (A_1C_1 и A_1B_1) другой плоскости (β), то эти плоскости параллельны. Итак, $\alpha \parallel \beta$, утверждение доказано.

б) Если точка $O \in \alpha$, то любая точка плоскости β имеет симметричную ей точку относительно O , тоже принадлежащую плоскости α .

Тогда для $A \in \alpha$ ей симметричная точка $A_1 \in \alpha$; для $B \in \alpha$ ей симметричная точка $B_1 \in \alpha$; для $C \in \alpha$ ей симметричная точка $C_1 \in \alpha$.

Через три точки A_1, B_1, C_1 , принадлежащие плоскости β , можно провести единственную плоскость, соответственно, она совпадает с плоскостью α .

481. а) Пусть a — ось симметрии, $\ell \parallel \alpha$. Из точки $L \in \ell$ проведем $LA \perp a$; продолжим LA за точку A на расстояние $AM = LA$.

Из точки $L_1 \in \ell$ проведем $L_1A_1 \perp a$; продолжим L_1A_1 за точку A_1 на расстояние $A_1M_1 = L_1A_1$.

Параллельные прямые a и ℓ лежат в одной плоскости, тогда, четырехугольник LMM_1L_1 — плоский четырехугольник.

$ML = M_1L_1$ — по построению, $ML \perp \ell$, $M_1L_1 \perp \ell$, следовательно, $ML \parallel M_1L_1$ поэтому четырехугольник LMM_1L_1 — прямоугольник. Т.е., $MM_1 \parallel L_1L$, или $\ell \parallel m$.

б) Если a не параллельна ℓ , то a пересекается с L в некоторой точке A .

Выберем некоторую точку $N \in \ell$, построим $NE \perp a$, продолжим отрезок NE за точку E на расстояние $EF = NE$. Через точку F проведем прямую FA (m).

В треугольниках $\triangle AEF$ и $\triangle AEN$. $NE = EF$, AE — общий катет, таким образом, $\triangle AEF = \triangle AEN$, следовательно, $\angle EAN = \angle EAF = \varphi$.

Таким образом, прямая m образует угол φ с осью симметрии.

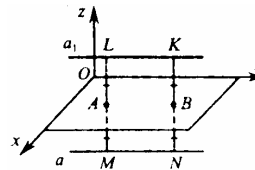
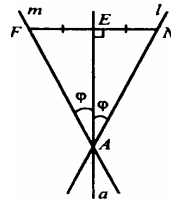
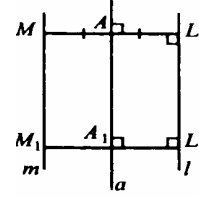
482. Выберем плоскость Oxy .

Пусть прямая a параллельна плоскости Oxy .

Точки M и L , N и K симметричны; $MA = AL$, $NB = BK$. Если a параллельна плоскости Oxy , то $NB = MA = BK = AL$, две прямые, перпендикулярные плоскости, между собой параллельны, тогда $ML \parallel NK$. Далее, $ML = NK$ и четырехугольник $MNKL$ — прямоугольник, поэтому $LK \parallel MN$ или $a_1 \parallel a$. А параллельные прямые лежат в одной плоскости.

Если a не параллельна Oxy , то она пересекает эту плоскость в точке — P . При симметрии точка P переходит в себя, т. к. лежит в плоскости Oxy . Таким образом, $P \in a_1$. Т.е. прямые a и a_1 имеют общую точку и лежат в одной плоскости.

483. а) Выберем три точки в плоскости A, B, C , не лежащие на одной прямой. Проведем $AA_2 \perp \alpha$, $BB_2 \perp \alpha$, $CC_2 \perp \alpha$. Продолжим эти отрезки за точки A_1, B_1, C_1 так, что $A_2A_1 = AA_2$, $B_2B_1 = BB_2$, $C_2C_1 = CC_2$. AA_1B_1B — прямо-



угольник, т.к. $AA_1=BB_1$ и $AA_1 \parallel BB_1$. Таким образом, $A_1B_1 \parallel AB$. BB_1C_1C — прямоугольник, т.к. $BB_1=CC_1$ и $BB_1 \parallel CC_1$. тогда, $B_1C_1 \parallel BC$.

Плоскость β_1 проходит через точки A_1, B_1 и C_1 , она — единственная.

Если две пересекающиеся прямые (BA и BC) одной плоскости (β) параллельны двум прямым (B_1A_1 и B_1C_1) другой плоскости (β_1), то эти плоскости параллельны: $\beta_1 \parallel \beta$.

б) Пусть $\alpha \perp \beta$. Возьмем произвольную точку $A \in \alpha$ и построим AO перпендикулярно плоскости α . Продолжим отрезок за точку O на расстояние $OA_1=AO$.

Две плоскости взаимно перпендикулярны и к одной из них проведен перпендикуляр, имеющий общую точку с другой плоскостью, тогда этот перпендикуляр весь лежит в этой плоскости, т.е. $AO \subset \beta$, следовательно, и $AA_1 \subset \beta$.

Таким образом, каждая точка плоскости β отображается в точку, ей симметричную, которая тоже принадлежит плоскости β . тогда, плоскость β отображается сама на себя, или β_1 совпадает с β .

484. а) Докажем, что $AB \parallel A_1B_1$ (см. пункт 52 учебника). Доказано, что $A_1B_1=AB$, а значит $A_1B_1 \parallel AB$.

б) Пусть $a \parallel \vec{p}$. Выберем точку $A \in a$, тогда точка A перейдет в точку A_1 , так, что $AA_1=\vec{p}$. Следовательно, они лежат в одной плоскости. В плоскости через точку A можно провести только одну прямую AA_1 , параллельную \vec{p} , тогда $A_1 \in a$.

Таким образом, точка $A \in a$ отображается в точку $A_1 \in a$.

Для любой другой точки $B \in a$ повторим рассуждения, тогда, каждая точка прямой a переходит в точку прямой a , то есть прямая отображается на себя.

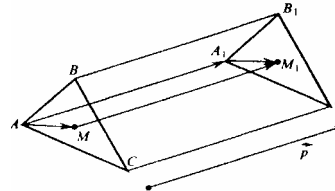
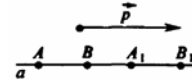
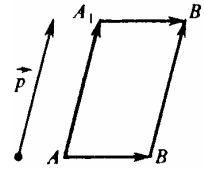
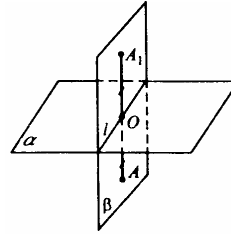
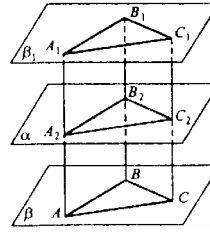
Пусть a содержит \vec{p} , тогда доказательство верно, просто векторы AA_1 и \vec{p} лежат на одной прямой a .

485. Параллельный перенос — это движение, тогда $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$. Отсюда $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$. Проведем отрезки AM и A_1M_1 . $AM=A_1M_1$.

Для плоского четырехугольника AMM_1A_1 имеем:

$AM \parallel A_1M_1$, $AM=A_1M_1$, следовательно,

AMM_1A_1 — параллелограмм, $\vec{AA_1} = \vec{MM_1} = \vec{p}$.



486. а) a — данная прямая.

Возьмем на прямой a точки A, B, C . При движении они перейдут в точки A_1, B_1, C_1 соответственно, причем $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$ и $AC=A_1C_1$. Необходимо доказать, что A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

$A_1C_1=A_1B_1+B_1C_1$. Такое равенство верно, если все три точки — лежат на одной прямой; иначе по неравенству треугольника $A_1C_1 < A_1B_1+B_1C_1$. В силу произвольного выбора точек A, B и C доказательство справедливо для любых других точек, таким образом, движение переводит прямую в прямую.

б) В плоскости α проведем прямую a и возьмем точку $O \notin a$. Проведем из точки O отрезки, пересекающие прямую a в точках A и B . При движении: $O \rightarrow O_1, A \rightarrow A_1$, так что $OA=O_1A_1$; $B \rightarrow B_1$, так что $OB=O_1B_1$.

По аксиоме: через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.

487. а) AC — заданный отрезок, $AC \subset a$.

При движении $A \rightarrow A_1, C \rightarrow C_1$. Докажем, что весь отрезок AC отображается на отрезок A_1C_1 .

Возьмем произвольную точку $B \in AC$. При движении $B \rightarrow B_1$. $AB+BC=AC$. Т.к. при движении расстояния между точками сохраняются, то $A_1B_1=AB, B_1C_1=BC, A_1C_1=AC$. Тогда $A_1C_1=A_1B_1+B_1C_1$. Равенство выполняется только когда точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, иначе по неравенству треугольника $A_1C_1 < A_1B_1+B_1C_1$, таким образом, точки отрезка AC отображаются в точки отрезка A_1C_1 .

б) $\angle AOB$ — лежит в плоскости α .

При движении $O \rightarrow O_1, A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1$, при этом $OA=O_1A_1$ и $OB=O_1B_1, AB=A_1B_1$ и $\triangle OAB = \triangle O_1A_1B_1$ по трем сторонам, тогда $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.

Если $\angle AOB = 180^\circ$, то $\angle A_1O_1B_1 = 180^\circ$.

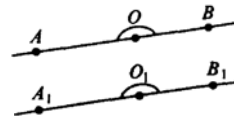
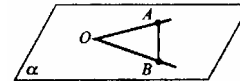
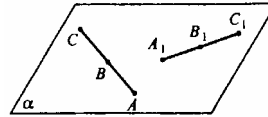
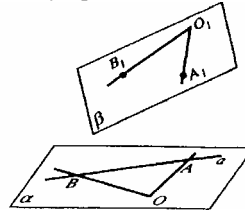
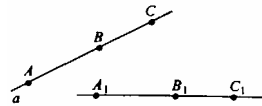
Доказательство:

На сторонах развернутого угла возьмем точки A и B . При движении $A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1$, так что $AB=A_1B_1$, так что $AB=A_1B_1$; $O \rightarrow O_1$ при движении $AO=A_1O_1$ и $O_1B_1=OB$. Итак, $AO_1+O_1B_1=A_1B_1$.

Точки A_1, O_1, B_1 лежат на одной прямой, точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны от точки O_1 , тогда, $\angle A_1O_1B_1$ — развернутый, т.е. $\angle A_1O_1B_1 = 180^\circ$, что и требовалось доказать.

488. а) Пусть $a \parallel b, a \subset \alpha, b \subset \alpha$. Пересечем a и b прямой c , следовательно $\angle 1 = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие при параллельных a, b и секущей c . Примем следующие обозначения (смотри рисунок):

M и N — произвольные точки, лежащие по разные стороны от секущей AB .



При движении $\angle MAB$ перейдет в равный $\angle M_1A_1B_1$, а $\angle ABN$ — в равный угол $\angle A_1B_1N_1$. Т.к. при движении плоскость α переводится в плоскость β , то прямые A_1M_1 и B_1N_1 лежат в одной плоскости β .

Отмеченные углы — $\angle 1$ и $\angle 2$, являются внутренними накрест лежащими, а если $\angle 1 = \angle 2$, то по признаку параллельности прямых $M_1A_1 \parallel B_1N_1$, или $a_1 \parallel b_1$. тогда, $a \rightarrow a_1$, $a \parallel a_1$ и $b \rightarrow b_1$, $b \parallel b_1$.

б) $\alpha \parallel \beta$. Пересечем α и β плоскостью C , получим две параллельные прямые $A_1B_1 \parallel AB$.

На линии пересечения плоскости C с плоскостью β через некоторую точку A_1 проведем плоскость Q , пересекающую α и β по параллельным прямым A_1C_1 и AC .

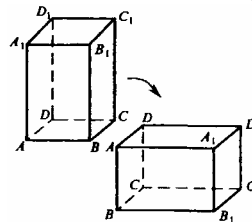
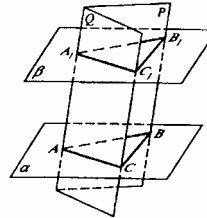
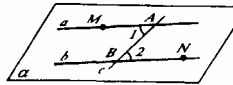
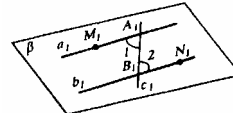
Построим отрезки B_1C_1 и BC . Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями равны, тогда $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

$ABCA_1B_1C_1$ — призма. При движении угол отображается на равный ему угол, расстояния между точками сохраняются. При этом, очевидно, основания призмы — $AA_1B_1C_1$ и $AABC$ остаются параллельными друг другу, и плоскости, которые можно провести через вершины A, B, C и A_1, B_1, C_1 , будут также параллельны друг другу.

489. а) Т.к. при движении отрезок отображается на отрезок той же длины, то исходный радиус OA переходит в отрезок O_1A_1 такой, что $OA = O_1A_1 = R$.

Окружность — геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от центра на расстояние R . Т.к. движение сохраняет расстояния, то фигура, полученная из окружности движением, также есть геометрическое место точек плоскости, удаленных от O_1 на расстояние R . Таким образом окружность отображается на окружность (O_1R) .

б) При движении ребра параллелепипеда не испытывают никаких сдвигов и поворотов относительно друг друга. Длины и углы не изменяются, т.к. отрезок и угол при движении переходит в отрезок и угол, имеющий такое же измерение.



Вопросы к главе V

1. а) Лежит в одной из координатных плоскостей;
б) Лежит на одной из координатных осей.
2. Через данную прямую проведем плоскость, перпендикулярную к оси Oz. Тогда плоскость будет параллельна плоскости Oxy. Любая точка на прямой лежит в нашей плоскости, тогда каждая точка этой прямой имеет одну и ту же аппликату.
3. А (2; 4; 5), В (3; x; y), С (0; 4; z) и D (5; t; u).
а) Если точки лежат в плоскости, параллельной плоскости Oxy, то их координаты по оси z равны: $y=5, z=5, u=5$; x, t – любые числа;
б) если точки лежат в плоскости, параллельной плоскости Oxz, то их координаты по оси y равны: $x=4, t=4$; y, z, u – любые числа;
в) если точки лежат на прямой, параллельной оси Ox, то у них одни и те же координаты y и z: $x=4, t=4$ и $y=z=u=5$.
4. $\vec{AB} \{x_1; y_1; z_1\}, \vec{BC} \{x_2; y_2; z_2\}, \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.
 $\vec{AC} \{x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2\}$. Тогда $\vec{CA} \{-x_1-x_2; -y_1-y_2; -z_1-z_2\}$.
5. а) сонаправлен с осью Oz;
б) перпендикулярен оси Ox;
в) перпендикулярен оси Oy.
6. Очевидно, что \vec{a} лежит в плоскости Oyz.
а) пересекает плоскость;
б) перпендикулярен Ox.
7. а) $\vec{a} \{-5; 3; -1\}$ и $\vec{b} \{6; -10; -2\}$. $\frac{-5}{6} \neq \frac{3}{-10} \neq \frac{-1}{-2}$, тогда, \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны;
б) $\vec{a} \{-2; 3; 7\}$; $\vec{b} \{-1; 1,5; 3,5\}$. $\frac{-2}{-1} = \frac{3}{1,5} = \frac{7}{3,5} = k$, векторы коллинеарны.
8. Пусть d — длина радиуса-вектора точки М. Тогда:
а) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = d = 1$,
 $\sqrt{1 + y^2 + z^2} = 1$, откуда $y=z=0$, точка М лежит на оси абсцисс, т.е. ответ Да.
б) $\sqrt{4 + y^2 + z^2} = 1$; $4 + y^2 + z^2 = 1$,
 $y^2 + z^2 = -3$ — невозможно, т.к. $y^2 + z^2 \geq 0$, т.е. ответ Нет.
9. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
а) $3 = \sqrt{9 + x^2 + y^2}$, $9 = 9 + x^2 + y^2$, $0 = x^2 + y^2$, $x=y=0$, следовательно, может
б) $3 = \sqrt{25 + x^2 + y^2}$, $9 = 25 + x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = -16$, что невозможно, следовательно, не может.

10. $M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, где $M_1(3; y_1; z_1)$, $M_2(6; y_2; z_2)$.
 а) $2 = \sqrt{9 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, $4 = 9 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$,
 $(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = -5$ — противоречие. Таким образом, равенство $M_1M_2 = 2$ невозможно.

б) $3 = \sqrt{9 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, $9 = 9 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$
 $(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 0$, откуда $y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$, и отрезок M_1M_2 параллелен оси Ox .

11. $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$.

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab$, б) $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos 180^\circ = -ab$;

в) $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos 90^\circ = 0$; г) $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos 60^\circ = \frac{1}{2} ab$;

д) $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos 120^\circ = ab \cos (180^\circ - 60^\circ) = -ab \cos 60^\circ = -\frac{1}{2} ab$.

12. а) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, если $\cos \alpha > 0$, т.е. $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$;

б) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, если $\cos \alpha < 0$, т.е. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

в) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если $\cos \alpha = 0$, т.е. $\alpha = 90^\circ$.

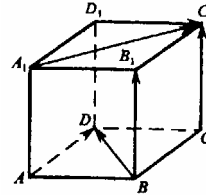
13. а) $AD \perp DC$, а $DC = D_1C_1$, таким образом $AD \perp D_1C_1$;

б) $BD \perp BB_1$, а $BB_1 = CC_1$, следовательно, $BD \perp CC_1$;

в) $A_1C_1 = AC$, AD не перпендикулярен AC , тогда, A_1C_1 и AD не перпендикулярны;

г) DB не перпендикулярен D_1C_1 ;

д) BB_1 не перпендикулярен AC .



14. а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Если $2 + y_1y_2 + z_1z_2 < 2$, то, $y_1y_2 + z_1z_2 < 0$, ответ: да может (например, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = -1$);

б) $2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 2$, т.е. $y_1y_2 + z_1z_2 = 0$, ответ: да может (например, $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$);

в) $2 + y_1y_2 + z_1z_2 > 2$, т.е. $y_1y_2 + z_1z_2 > 0$, ответ: да может (например, $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 1$).

15. $x = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$; $y = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$; $z = \frac{2+4}{2} = 3$; Ответ: $A\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 3\right)$

16. Плоскость проходит через точку $P\left(2; -\frac{1}{2}; 3\right)$.

17. При зеркальной симметрии — в левую,

При осевой — в правую,

При центральной — в правую.

Дополнительные задачи

490. а) Пусть $\vec{p} = 3\vec{b} - 3\vec{a} + 3\vec{c}$, где $\vec{p} \{x; y; z\}$.

Тогда $3\vec{b} \{-15; 15; 0\}$, $-3\vec{a} \{15; 0; -15\}$, $3\vec{c} \{3; -6; -9\}$.

Тогда вектор \vec{p} имеет координаты: $\vec{p} \{3; 9; -24\}$;

б) $\vec{p} = -0,1\vec{c} + 0,8\vec{a} - 0,5\vec{b}$,

$-0,1\vec{c} \{-0,1; 0,2; 0,3\}$, $0,8\vec{a} \{-4; 0; 4\}$, $-0,5\vec{b} \{2,5; -2,5; 0\}$.

Тогда $x = -0,1 - 4 + 2,5 = -1,6$, $y = 0,2 - 2,5 = -2,3$, $z = 0,3 + 4 = 4,3$; $\vec{p} \{-1,6; -2,3; 4,3\}$.

491. а) Координаты $\vec{a} \{-5; 3; -1\}$ не пропорциональны координатам

$\vec{b} \{6; -10; -2\}$, т.е. $\frac{-5}{6} \neq \frac{3}{-10}$. Таким образом, \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны.

б) Координаты $\vec{a} \{-2; 3; 7\}$ пропорциональны координатам вектора

$\vec{b} \{-1; 1,5; 3,5\}$: $\frac{-2}{-1} = \frac{3}{1,5} = \frac{7}{3,5}$. Таким образом, векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеар-

ны.

в) Координаты вектора $\vec{a} \{-\frac{2}{3}; \frac{5}{9}; -1\}$ и $\vec{b} \{6; -5; 9\}$ пропорциональны:

$\frac{-\frac{2}{3}}{6} = \frac{\frac{5}{9}}{-5} = \frac{-1}{9}$, $-\frac{1}{9} = -\frac{1}{9} = -\frac{1}{9}$, т.е. \vec{a} и \vec{b} коллинеарны.

г) Координаты вектора $\vec{a} \{0,7; -1,2; -5,2\}$ не пропорциональны координатам вектора $\vec{b} \{-2,8; 4,8; -20,8\}$:

$\frac{0,7}{-2,8} = -\frac{1}{4}$; $\frac{-1,2}{4,8} = -\frac{1}{4}$; $\frac{-5,2}{-20,8} = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} \neq -\frac{1}{4}$, т.е. \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны.

492. Пусть $E(x; y; z)$ – середина AB .

Тогда: $x = \frac{1}{2}(-5+3) = -1$, $y = \frac{7-11}{2} = -2$, $z = \frac{3+1}{2} = 2$, т.е. $E(-1; -2; 2)$.

Вычислим координаты точки, ближайшей к точке E на оси Ox : $E_1(-1; 0; 0)$; на оси Oy : $E_2(0; -2; 0)$; на оси Oz : $E_3(0; 0; 2)$.

493. Для решения задачи установим, можно ли вектор \vec{a} разложить по векторам \vec{b} и \vec{c} , т.е. существуют ли m и n , удовлетворяющие условию $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$.

а) $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{b} \{1; 1; 0\}$.

$\vec{c} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{c} \{1; 0; -1\}$, где $\vec{i} \{1; 0; 0\}$, $\vec{j} \{0; 1; 0\}$, $\vec{k} \{0; 0; 1\}$.

Запишем равенство $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ в координатах:

(1) $-1 = m \cdot 1 + n \cdot 1$, (2) $2 = m \cdot 1 + n \cdot 0$, (3) $3 = m \cdot 0 + n \cdot (-1)$.

Равенства (1), (2) и (3) выполняются при $m=2$, $n=-3$, т.е., векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны.

б) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{a} \{1; 1; 1\}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} \{1; -1; 0\}$. Запишем равенство $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ в координатах:

$$(1) 1 = m \cdot 2 + n \cdot 1, (2) 1 = m \cdot 1 + n \cdot (-1), (3) 1 = m \cdot 1 + n \cdot 0.$$

$$m = \frac{2}{3}, n = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}, 1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}.$$

Равенства (1), (2) и (3) выполняются при $m = \frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, т.е., векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны.

в) Запишем равенство $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ в координатах.

$$(1) 1 = m \cdot 1 + n \cdot 2, (2) 1 = m \cdot (-1) + n \cdot 3, 1 = m \cdot 2 + n \cdot (-1).$$

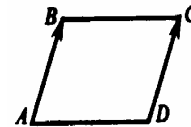
Система уравнений не имеет решений. Т.е. векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} не компланарны.

494. Рассмотрим векторы \vec{AB} и \vec{CD} : $\vec{AB} \{1; 1; 1\}$, $\vec{DC} \{1; 1; 1\}$. Векторы \vec{AB} и \vec{DC} коллинеарны, т.к. $\vec{AB} = k \cdot \vec{DC}$, $k=1$. тогда, $AB \parallel DC$.

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$|\vec{DC}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3},$$

$$|\vec{AB}| = |\vec{DC}|.$$

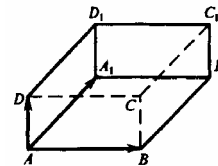


Противоположные стороны четырехугольника ABCD параллельны и длины их равны, таким образом, ABCD — параллелограмм.

495. Пусть точка O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$, тогда ее координаты: $O \left(\frac{2+3+2}{3}; \frac{0+2+3}{3}; \frac{1+2+6}{3} \right)$, $O \left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}; 3 \right)$.

496. Запишем $\vec{AD} \{4; 1; 0\}$, $\vec{AA_1} \{2; 3; -1\}$, $\vec{AB} \{-1; 4; 3\}$.

$\vec{AD_1} = \vec{AA_1} + \vec{AD}$. $\vec{AD_1} \{2+4; 3+1; 0-1\}$, $\vec{AD_1} \{6; 4; -1\}$.



Запишем координаты вектора $\vec{AD_1}$ через координаты его начала и конца:

$$6 = x_{D_1} - x_A, \quad 6 = x_{D_1} - 3, \quad x_{D_1} = 9.$$

$$4 = y_{D_1} - y_A, \quad 4 = y_{D_1} - 0, \quad y_{D_1} = 4,$$

$$-1 = z_{D_1} - z_A, \quad -1 = z_{D_1} - 2, \quad z_{D_1} = 1;$$

$$D_1(9; 4; 1).$$

$$2) \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}, \vec{AC} \{-1+4; 4+1; 3+0\}, \vec{AC} \{3; 5; 3\}.$$

Аналогично с (а)

$$\begin{aligned} 3 &= x_C - x_A, & 3 &= x_C - 3, & x_C &= 6, \\ 5 &= y_C - y_A, & 5 &= y_C - 0, & y_C &= 5, \\ 3 &= z_C - z_A, & 3 &= z_C - 2, & z_C &= 5; \end{aligned} \quad C(6; 5; 5).$$

$$3) \vec{AB_1} \{-1+2; 4+3; 3-1\}, \vec{AB_1} \{1; 7; 2\}.$$

Аналогично с (а)

$$\begin{aligned} 1 &= x_{B_1} - 3, & x_{B_1} &= 4, \\ 7 &= y_{B_1} - 0, & y_{B_1} &= 7, \\ 2 &= z_{B_1} - 2, & z_{B_1} &= 4, \end{aligned} \quad B_1(4; 7; 4).$$

$$4) \vec{AC_1} = \vec{AA_1} + \vec{AB} + \vec{AD}, \vec{AC_1} \{2+(-1)+4; 3+4+1; -1+3+0\}.$$

$$\vec{AC_1} \{5; 8; 2\}.$$

Аналогично с (а)

$$\begin{aligned} 5 &= x_{C_1} - 3, & x_{C_1} &= 8, \\ 8 &= y_{C_1} - 0, & y_{C_1} &= 8, \\ 2 &= z_{C_1} - 2, & z_{C_1} &= 4, \end{aligned} \quad C_1(8; 8; 4).$$

497. Пусть O — середина AB

$$a) x_o = \frac{1}{2}(2+5), \quad б) x_o = \frac{1}{2}(0+3), \quad в) x_o = \frac{1}{2}(5+3),$$

$$y_o = \frac{1}{2}(3+7), \quad y_o = \frac{1}{2}(4-8), \quad y_o = \frac{1}{2}(3-5),$$

$$0 = \frac{1}{2}(k-1), \quad 0 = \frac{1}{2}(k+2), \quad 0 = \frac{1}{2}(k+3k),$$

$$\text{т.е. } k=1; \quad \text{т.е. } k=-2; \quad \text{т.е. } k=0.$$

498. Пусть единичный вектор $\vec{e} \{x; y; z\}$ сонаправлен с вектором \vec{a} . То-

$$\text{гда } \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}, \text{ т.е. } y = \frac{x}{2}; z = -x.$$

$$\text{Т.к. } |\vec{e}| = 1, \text{ то } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

$$\sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4} + (-x)^2} = 1, \quad \sqrt{(2 + \frac{1}{4})x^2} = 1; \quad \frac{3}{2}|x| = 1,$$

$$x > 0, \text{ т.к. } \vec{e} \text{ и } \vec{a} \text{ сонаправлены; } x = \frac{2}{3}, \text{ т.е. } \vec{e} \left\{ \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3} \right\}.$$

Пусть \vec{e} сонаправлен с вектором \vec{b} . Тогда \vec{e} лежит в плоскости Oxy , т.к. вектор \vec{b} лежит в плоскости Oxy . $\vec{e} \{x; y; 0\}$.

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{3}, y=3x.$$

$$|\vec{e}|=1, \sqrt{x^2+y^2}=1, \quad x=\frac{1}{\sqrt{10}}, y=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Таким образом, $\vec{e} \left\{ \frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}}; 0 \right\}$.

$$499. \sqrt{x^2+y^2+z^2}=5,$$

$$x^2+y^2+z^2=25, \quad 4+y^2+5=25, \quad y^2=16, \quad y=\pm 4.$$

500. Пусть O — середина отрезка MN, S — середина отрезка PQ.

Тогда O $\left(\frac{2-4}{2}; \frac{1-1}{2}; \frac{3-1}{2} \right)$; O $(-1; 0; 1)$;

S $\left(\frac{1-3}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{2+0}{2} \right)$; S $(-1; 1; 1)$.

$$OS = \sqrt{(-1+1)^2 + (1-0)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

501. В прямоугольной системе координат построим прямоугольный параллелепипед так, чтобы оси координат совпали с его ребрами и точка B была одной из его вершин. Согласно рисунку

$$A_1D_1=BC=|x_B|=2, D_1C_1=AB=|y_B|=5,$$

$$D_1D=B_1B=|z_B|=\sqrt{3}.$$

Расстояния от точки B до осей координат — это диагонали: BA₁ — до оси Ox; BC₁ — до оси Oy; BD — до оси Oz.

$$BA_1 = \sqrt{A_1B_1^2 + BB_1^2} = \sqrt{25+3} = 2\sqrt{7},$$

$$BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7},$$

$$BD = \sqrt{BC^2 + DC^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}.$$

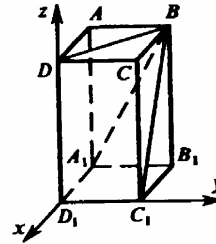
502. Пусть D лежит на оси Oy и равноудалена от точек A и B; имеет координаты D $(0; y_D; 0)$, AD=BD. Тогда:

$$AD = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2 + (z_A - z_D)^2}.$$

$$AD = \sqrt{(13-0)^2 + (2-y_D)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{169+4-2 \cdot 2 \cdot y_D + y_D^2+1} = \\ = \sqrt{4y_D^2 - 4y_D + 174},$$

$$BD = \sqrt{(-15-0)^2 + (7-y_D)^2 + (-18-0)^2} = \sqrt{225+49-2 \cdot 7 \cdot y_D + y_D^2+324} = \\ = \sqrt{y_D^2 - 14 \cdot y_D + 598},$$

$$\text{Запишем уравнение: } \sqrt{y^2 - 4y + 174} = \sqrt{y^2 - 14y + 598}.$$



$$y^2 - 4y + 174 = y^2 - 14y + 598, \quad 10y = 424, \quad y = 42,4; \quad \text{Тогда } D(0; 42,4; 0).$$

503*. Пусть O — центр описанной окружности; $O(x; y; z)$. Тогда $AO=BO=CO$. Направляющие векторы сторон треугольника: $\vec{AB} \{2; -1; -1\}$, $\vec{AC} \{2; 0; 0\}$, $\vec{BC} \{0; 1; 1\}$.

$$\cos \angle BAC = \frac{|4 - 0 - 0|}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{6}}; \quad \cos \angle ABC = \frac{|-1-1|}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos \angle ACB = \frac{|0|}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{1+1}} = 0, \text{ следовательно,}$$

$\angle ACB = 90^\circ$ и $\triangle ABC$ — прямоугольный. Тогда, точка O лежит на отрезке AB ; $AO=OB$. Вычислим координаты точки O : $x = \frac{1}{2}(0+2)=1$.

$$y = \frac{1}{2}(2+1)=1,5, \quad z = \frac{1}{2}(2+1)=1,5; \quad O(1; 1,5; 1,5)$$

504. Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ как показано на рисунке. Тогда $\triangle A_1B_1C_1$ — проекция $\triangle ABC$ на плоскость Oxy ; M_1 — проекция точки M . Следовательно, $A(x_A; y_A; 4)$, $B(x_B; y_B; 9)$, $C(x_C; y_C; 5)$.

M — точка пересечения медиан $\triangle ABC$, $M(x_M; y_M; z_M)$, (z_M — искомое расстояние от точки M до плоскости α).

Точка пересечения медиан M имеет координаты:

$$M\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right); \text{ т.е. } z_M = 6 \text{ дм.}$$

505*. Пусть E_1, E_2, E_3, E_4 — середины ребер BC, AD, AB и DC . Точка O — середина отрезка E_1E_2 ; E_2E_3 — средняя линия грани ABD .

$$E_2E_3 = \frac{1}{2}DB.$$

$$\text{Аналогично } E_1E_4 = \frac{1}{2}DB. \quad \text{Тогда } E_4O = E_4E_1 +$$

$$+ E_1O = \frac{1}{2}DB + E_1O, \quad OE_3 = OE_2 + E_2E_3 = OE_2 + \frac{1}{2}DB.$$

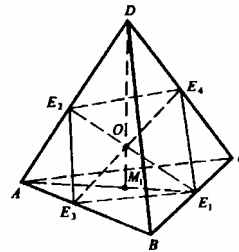
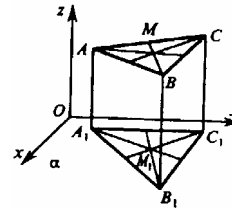
По условию $OE_2 = E_1O$, тогда $E_4O = OE_3$, таким образом O — середина отрезка E_3E_4 .

$$\vec{DO} = \vec{DE}_2 + \vec{E_2O} = \frac{1}{2}\vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{E_2E_1}, \quad \vec{E_2E_1} = \vec{E_2D} + \vec{DC} + \vec{CE_1},$$

$$\vec{E_2E_1} = \vec{E_2A} + \vec{AB} + \vec{BE_1}.$$

Сложим эти два равенства. Получим:

$$2\vec{E_2E_1} = \vec{E_2D} + \vec{E_2A} + \vec{CE_1} + \vec{BE_1} + \vec{DC} + \vec{AB} = \vec{DC} + \vec{AB},$$



$$\begin{aligned}\vec{E_2E_1} &= \frac{1}{2}(\vec{DC} + \vec{AB}), \\ \vec{DO} &= \frac{1}{2}\vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{E_2E_1} = \frac{1}{2}\vec{DA} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\vec{DC} + \vec{AB}) = \frac{1}{4}(\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC}); \\ \vec{DA} + \frac{1}{4}\vec{DC} + \frac{1}{4}\vec{AB} &= \frac{1}{2}\vec{DA} + \frac{1}{4}\vec{DC} + \frac{1}{4}(\vec{DB} - \vec{DA}) = \frac{1}{4}(\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC}); \\ (1) \vec{DM_1} &= \vec{DA} + \vec{AM_1} = \vec{DA} + \frac{2}{3}\vec{AE_1} = \vec{DA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \vec{DA} + \frac{1}{3}(\vec{DB} - \vec{DA} + \vec{DC} - \vec{DA}) = \vec{DA} + \frac{1}{3}(\vec{DB} + \vec{DC} - 2\vec{DA}) = \frac{1}{3}\vec{DB} + \frac{1}{3}\vec{DC} + \frac{1}{3}\vec{DA} = \\ &= \frac{1}{3}(\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC}), \quad \vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = 3\vec{DM_1}. \quad (2)\end{aligned}$$

Подставим (2) в (1):

$$\vec{DO} = \frac{3}{4}\vec{DM_1}, \text{ значит, } \vec{OM_1} = \frac{1}{4}\vec{DM_1}, \quad \frac{\vec{DO}}{\vec{OM_1}} = \frac{3}{1}.$$

Таким образом, точка $O \in DM_1$ и делит DM_1 в отношении 3:1, считая от вершины. Аналогично для других медиан.

506. а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 6 = 3;$

б) $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = -3,5;$

в) $\vec{d} \cdot \vec{d} = 2^2 + 1^2 + 0 = 5;$

г) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{c} \cdot \vec{d} = -1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 0 + 0 + \frac{2}{2} \cdot -3 + 0 = 7;$

д) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{c} - \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d} = \frac{1}{2} - 15 + 12 - \frac{3}{2} + 0 - 8 + 2 - 5 + 6 = -10.$

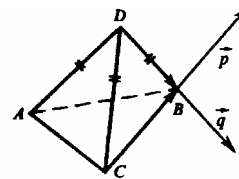
507. а) $\angle ADB = 45^\circ = \angle \vec{DA} \wedge \vec{DB}, \quad \vec{DB} = -\vec{BD},$
 $\angle \vec{DA} \wedge \vec{BD} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$

б) Отложим от точки В векторы $\vec{p} = \vec{CB}$ и $\vec{q} = \vec{DB}.$

$$\angle \vec{DB} \wedge \vec{CB} = \angle \vec{p} \wedge \vec{q} = \angle DBC.$$

Рассмотрим $\triangle DBC.$ $\angle BDC = 60^\circ, DC = DB,$ тогда, $\angle DCB = \angle CBD,$ т.к. треугольник равнобедренный.

$$\angle DCB + \angle DBC = 120^\circ, \text{ значит, } \angle DBC = \angle DCB = 60^\circ,$$



$$\begin{aligned} \text{в) } \vec{BD} \wedge \vec{BA} &= \angle DBA. \triangle DBA \text{ — равнобедренный, т.е.,} \\ \angle DAB &= \angle DBA = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67^\circ 30'. \end{aligned}$$

508. По определению проекции прямая DD_1 перпендикулярна плоскости ABC , т.е. она перпендикулярна всем прямым, лежащим в этой плоскости.

а) $D_1D \perp D_1B$.

$\vec{D_1D}$ — направляющий вектор прямой D_1D ;

$\vec{D_1B}$ — направляющий вектор прямой D_1B . Следовательно, $D_1B \perp D_1D$;

б) $\vec{DD_1}$ также направляющий вектор прямой D_1D , $DD_1 \perp (ABC)$, т.е. $DD_1 \perp BC$. \vec{BC} — направляющий вектор прямой BC . Тогда, $\vec{DD_1} \perp \vec{BC}$. Т.к. $D_1D = DD_1$, то угол φ_1 между DD_1 и плоскостью ABC равен: $\varphi_1 = 180^\circ - \varphi$, где $\varphi = 90^\circ$ — угол между D_1D и плоскостью ABC ;

в) \vec{DA} и \vec{BC} — направляющие векторы прямых DA и BC .

Если $\vec{DA} \perp \vec{BC}$, то $DA \perp BC$.

Т.к. тетраэдр $ABCD$ — правильный, то его вершина D проектируется в центр $\triangle ABC$. Если провести в $\triangle ABC$ высоту AM , то высота тетраэдра DD_1 пересечется с высотой $\triangle ABC$ в точке D_1 , тогда

1) $CB \perp AM$, т.к. AM — высота $\triangle ABC$;

2) $CB \perp DD_1$, $DD_1 \perp (ABC)$;

3) AM и $DD_1 \in (DD_1A)$, прямые AM и DD_1 пересекаются.

Из 1), 2) и 3) следует, что CB перпендикулярна плоскости DD_1C , значит, $CB \perp DA$, $BC \perp DA$.

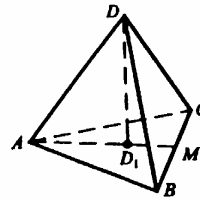
г) DC и D_1B не перпендикулярны, т.к. прямые DC и D_1B не перпендикулярны. Если бы $CD \perp D_1B$, то по теореме, обратной к т. о трех перпендикулярах, $CD_1 \perp D_1B$. Но это прямые, содержащие медианы правильного треугольника. Они не перпендикулярны.

$$\text{509. } \cos \varphi = |\cos \vec{AB} \wedge \vec{CD}|.$$

а) $\vec{AB} \{1; 1; -2\}$, $\vec{CD} \{-3; 3; -1\}$.

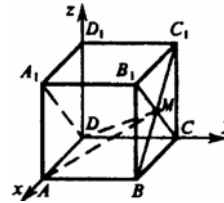
$$\cos \varphi = \frac{|-3 + 3 + 2|}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{9+9+1}} = \frac{2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{19}} = \frac{2}{\sqrt{114}};$$

б) $\vec{AB} \{-5; 1; 1\}$, $\vec{CD} \{2; 2; -2\}$.



$$\cos \varphi = \frac{|-10 + 2 - 2|}{\sqrt{25 + 1 + 1} \cdot \sqrt{4 + 4 + 4}} = \frac{10}{3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{5}{9}.$$

510. Обозначим ребро куба через a . Тогда вершины куба имеют координаты: $A(a; 0; 0)$, $B(a; a; 0)$, $C(0; a; 0)$, $D(0; 0; 0)$, $A_1(a; 0; a)$, $B_1(a; a; a)$, $C_1(0; a; a)$, $D_1(0; 0; a)$.



$$\cos \varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

a) $\vec{AD} = \{-a; 0; -a\}$, $M(\frac{a}{2}; a; \frac{a}{2})$, $\vec{AM} = \{\frac{a-2a}{2}; a; \frac{a-2a}{2}\}$,

$$\begin{aligned} \cos(\vec{A_1D} \wedge \vec{AM}) &= \frac{-\frac{a(a-2a)}{2} - \frac{a^2}{2}}{\sqrt{a^2 + a^2} \cdot \sqrt{\frac{(a-2a)^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \\ &= \frac{-a^2 + 2a^2 - a^2}{2\sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{\frac{(a-2a)^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4}}} = 0, \quad \vec{A_1D} \wedge \vec{AM} = 90^\circ \\ \vec{MD} &= \{\frac{a}{2}; -a; -\frac{a}{2}\}, \quad \vec{BB_1} = \{0; 0; a\}, \\ \cos(\vec{MD} \wedge \vec{BB_1}) &= \frac{-\frac{a^2}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{a^2}} = -\frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{6a^2}{4}} \cdot a} = -\frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{a^2 \sqrt{6}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

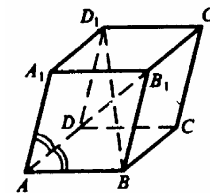
$$\vec{MD} \wedge \vec{BB_1} \approx 114^\circ 06'.$$

511. Найдем длины векторов $\vec{AC_1}$ и $\vec{BD_1}$.

$$\vec{AC_1} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC_1} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1},$$

$$\vec{AC_1} \cdot \vec{AC_1} = |\vec{AC_1}|^2 \cdot \cos 0^\circ,$$

$$\begin{aligned} (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}) \cdot (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}) &= \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{AD} + \vec{AA_1} \cdot \vec{AA_1} + \\ &+ 2(\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{AA_1} + \vec{AD} \cdot \vec{AA_1}) = 3a^2 + 6a^2 = 9a^2 \end{aligned}$$



$$+2\vec{AD} \cdot \vec{AB} + 2\vec{AA_1} \cdot \vec{AB} + \vec{AD}^2 + 2\vec{AA_1} \cdot \vec{AD} + \\ + \vec{AA_1}^2 = 1^2 + 2 \cdot 1^2 \cdot \cos 60^\circ + 2 \cdot 1^2 \cdot \cos 60^\circ + 1^2 + 2 \cdot 1^2 \cdot \cos 60^\circ + 1^2 = 3 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 6;$$

$$|\vec{AC_1}|^2 = 6; |\vec{AC_1}| = \sqrt{6};$$

$$\vec{BD_1} = \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DD_1} = \vec{AA_1} + \vec{AD} - \vec{AB}, \quad |\vec{BD_1}|^2 = |\vec{BD_1}|^2 \cdot \cos 0^\circ,$$

$$(\vec{AA_1} + \vec{AD} - \vec{AB})(\vec{AA_1} + \vec{AD} - \vec{AB}) = |\vec{BD_1}|^2,$$

$$\vec{AA_1}^2 + \vec{AD} \cdot \vec{AA_1} - \vec{AB} \cdot \vec{AA_1} + \vec{AA_1} \cdot \vec{AD} + \vec{AD}^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AA_1} \cdot \vec{AB} - \\ - \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AB}^2 = \vec{AA_1}^2 + 2\vec{AD} \cdot \vec{AA_1} - 2\vec{AB} \cdot \vec{AA_1} + \vec{AD}^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \\ + \vec{AB}^2 = 1^2 + 2 \cdot 1^2 \cdot \cos 60^\circ - 2 \cdot 1^2 \cdot \cos 60^\circ - 2 \cdot 1^2 \cdot \cos 60^\circ + 1^2 = 3 - \frac{2}{2} = 2 = |\vec{BD_1}|^2,$$

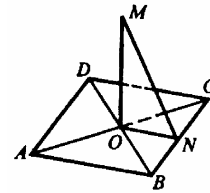
$$|\vec{BD_1}| = \sqrt{2}.$$

$$\mathbf{512.} \quad DB \perp AC; AO=OC=4, DO=OB=3.$$

$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,$$

$$BN=CN=2,5.$$

$$\cos \angle OBC = \frac{OB}{BC} = \frac{3}{5}, \quad \cos \angle OCB = \frac{OB}{BC} = \frac{4}{5}.$$



а) \vec{MN} и \vec{BC} — направляющие векторы прямых

MN и BC . Косинус угла между прямыми MN и BC равен $|\cos(\vec{MN} \wedge \vec{BC})|$.

$$1) \quad \vec{MN} = \vec{MO} + \vec{OB} + \vec{BN}, \quad \vec{BC} \cdot \vec{MN} = \vec{BC} \cdot (\vec{MO} + \vec{OB} + \vec{BN}) = \vec{BC} \cdot \vec{MO} + \\ + \vec{BC} \cdot \vec{OB} + \vec{BC} \cdot \vec{BN} = -9 + 12,5 = 3,5$$

$(\cos(\vec{BC} \wedge \vec{OB}) = -\cos \angle OBC = -\frac{3}{5}; \cos(\vec{BC} \wedge \vec{MO}) = 0$, т.к. $MO \perp$ плоскости ABC).

$$2) \quad \vec{BC} \cdot \vec{MN} = |\vec{BC}| \cdot |\vec{MN}| \cdot \cos(\vec{BC} \wedge \vec{MN}),$$

$$MN = \sqrt{MO^2 + ON^2} = \sqrt{36 + 6,25} = 6,5,$$

где $ON=BN=NC=2,5$, т.к. в прямоугольном треугольнике OBC точка N является центром описанной окружности.

$$\vec{BC} \cdot \vec{MN} = 5 \cdot 6,5 \cdot \cos(\vec{BC} \wedge \vec{MN}) = 32,5 \cdot \cos(\vec{BC} \wedge \vec{MN}),$$

$$32,5 \cdot \cos(\vec{BC} \wedge \vec{MN}) = 3,5, \cos(\vec{BC} \wedge \vec{MN}) = \frac{3,5}{32,5} = \frac{7}{65};$$

$$6) |\vec{DC}| = |\vec{BC}| = 5. \vec{MN} = \vec{MO} + \vec{OC} + \vec{CN},$$

$$\vec{DC} \cdot \vec{MN} = \vec{DC} \cdot (\vec{MO} + \vec{OC} + \vec{CN}) = \vec{DC} \cdot \vec{MO} + \vec{DC} \cdot \vec{OC} + \vec{DC} \cdot \vec{CN},$$

$$\vec{DC} \cdot \vec{MO} = 0, \text{ т.к. } \vec{MO} \perp \vec{DC}.$$

$$\vec{DC} \cdot \vec{OC} = 5 \cdot 4 \cdot \frac{4}{5} = 16, \text{ т.к. } \cos(\vec{DC} \wedge \vec{OC}) = \cos \angle DCO = \cos \angle OCB = \frac{4}{5};$$

$$\vec{DC} \cdot \vec{CN} = 5 \cdot 2,5 \cdot \cos(180^\circ - \angle DCN) = 12,5 (-\cos \angle DCN) = -12,5.$$

$$\cdot \cos(2 \cdot \angle OCB) = -12,5 (2 \cdot \cos^2 \angle OCB - 1) = -12,5 \cdot 2 \cdot \frac{16}{25} + 12,5 = 12,5 - 16 = -3,5,$$

$$\vec{DC} \cdot \vec{MN} = 0 + 16 - 3,5 = 12,5,$$

$$\vec{DC} \cdot \vec{MN} = |\vec{DC}| \cdot |\vec{MN}| \cdot \cos(\vec{DC} \wedge \vec{MN}),$$

$$\cos(\vec{DC} \wedge \vec{MN}) = \frac{12,5}{5 \cdot 6,5} = \frac{125}{325} = \frac{5}{13};$$

$$\text{в) } \vec{AC} \cdot \vec{MN} = (\vec{AB} + \vec{AD})(\vec{MO} + \vec{OB} + \vec{BN}) = \vec{AB} \cdot \vec{MO} + \vec{AB} \cdot \vec{OB} + \vec{AB} \cdot \vec{BN} + \\ + \vec{AD} \cdot \vec{MO} + \vec{AD} \cdot \vec{BN}, \vec{AB} \cdot \vec{MO} = 0, \text{ т.к. } \vec{AB} \perp \vec{MO},$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{OB} = 5 \cdot 3 \cdot \cos \angle OBA = 15 \cdot \cos \angle OBC = 15 \cdot \frac{3}{5} = 9,$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BN} = 5 \cdot 2,5 \cdot \cos(180^\circ - \angle ABN) = 12,5 (-\cos \angle ABN) = -12,5 \cos(2 \cdot \angle OBC) = \\ = -12,5 (2 \cdot \cos^2 \angle OBC - 1) = -25 \cdot \frac{9}{25} + 12,5 = 12,5 - 9 = 3,5,$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{OB} = \vec{BC} \cdot \vec{OB} = 5 \cdot 3 \cdot (-\frac{3}{5}) = -9, \vec{AD} \cdot \vec{MO} = 0.$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{BH} = \vec{BC} \cdot \vec{BN} = 5 \cdot 2,5 = 12,5, \vec{AC} \cdot \vec{MN} = 0 + 9 + 3,5 - 9 - 0 + 12,5 = 16,$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{MN} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{MN}| \cdot \cos(\vec{AC} \wedge \vec{MN}),$$

$$\cos(\vec{AC} \wedge \vec{MN}) = \frac{16}{8 \cdot 6,5} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13};$$

$$\text{г) } \vec{DB} \cdot \vec{MN} = (\vec{DC} + \vec{CB})(\vec{MO} + \vec{OC} + \vec{CN}) = \vec{DC} \cdot \vec{MO} + \vec{CB} \cdot \vec{MO} + \vec{DC} \cdot \vec{OC} + \\ + \vec{CB} \cdot \vec{OC} + \vec{DC} \cdot \vec{CN}, \vec{DC} \cdot \vec{MO} = 0.$$

$$\vec{CB} \cdot \vec{MO} = 0, \quad \vec{DC} \cdot \vec{OC} = 5 \cdot 4 \cdot \frac{4}{5} = 16,$$

$$\vec{CB} \cdot \vec{OC} = 5 \cdot 4 \cdot \cos(180^\circ - \angle OCB) = 5 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -16,$$

$$\vec{DC} \cdot \vec{CN} = 5 \cdot 2,5 \cdot \cos(180^\circ - 2\angle OCB) = -3,5,$$

$$\vec{CB} \cdot \vec{CN} = 5 \cdot 2,5 \cdot 1 = 12,5,$$

$$\vec{DB} \cdot \vec{MN} = 0 + 0 + 16 - 16 - 3,5 + 12,5 = -3,5 + 12,5 = 9,$$

$$\vec{DB} \cdot \vec{MN} = |\vec{DB}| \cdot |\vec{MN}| \cdot \cos(\vec{DB} \wedge \vec{MN}) = 6 \cdot 6,5 \cdot \cos(\vec{DB} \wedge \vec{MN}),$$

$$\cos(\vec{DB} \wedge \vec{MN}) = \frac{9}{39} = \frac{3}{13}.$$

513. Обозначим сторону куба через a . Введем прямоугольную систему координат как показано на рисунке.

Задача сводится к нахождению $\cos(\vec{NM} \wedge \vec{DA})$.

$$\text{а) } N\left(\frac{3}{5}a; 0; 0\right), A(a; 0; 0), A_1(a; a; a), B(a; a; 0),$$

$$B_1(a; a; a), M(a; a; \frac{3}{5}a), D(0; 0; 0); \quad \vec{NM} = \left\{\frac{2}{5}a; a; \frac{3}{5}a\right\}.$$

$$\vec{DA} = \{a; 0; 0\}.$$

$$|\cos(\vec{NM} \wedge \vec{DA})| = \frac{\left|\frac{2}{5}a^2 + 0 + 0\right|}{\sqrt{\frac{4}{25}a^2 + a^2 + \frac{9}{25}a^2} \cdot \sqrt{a^2}} = \frac{\frac{2}{5}a^2}{a^2 \sqrt{\frac{4+25+9}{25}}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{38}{25}}} = \frac{2}{\sqrt{38}}.$$

б) Синус угла между прямой MN и плоскостью $A_1B_1C_1D_1$ равен

$$|\cos(\vec{NM} \wedge \vec{AA_1})|.$$

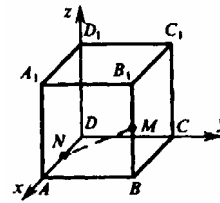
$$\vec{AA_1} = \{0; 0; a\}, |\cos(\vec{NM} \wedge \vec{AA_1})| = \frac{\left|0 + 0 + \frac{3}{5}a^2\right|}{a \sqrt{\frac{38}{25}} \cdot \sqrt{a^2}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{a^2}{a^2 \sqrt{\frac{38}{25}}} = \frac{3}{\sqrt{38}}.$$

514. $\vec{a} = \{|\vec{a}| \cos \varphi_1; |\vec{a}| \cos \varphi_2; |\vec{a}| \cos \varphi_3\}$, (смотри задачу 460)

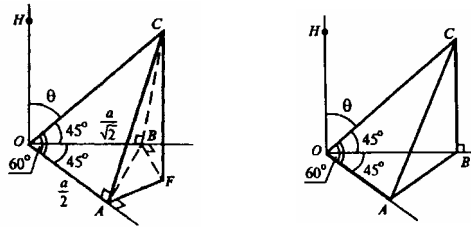
где φ_1, φ_2 и φ_3 — углы, которые \vec{a} составляет с осями координат Ox, Oy, Oz .

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{где } x, y, z \text{ — координаты } \vec{a}.$$

Тогда, $|\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = |\vec{a}|^2 \cos^2 \varphi_1 + |\vec{a}|^2 \cos^2 \varphi_2 + |\vec{a}|^2 \cos^2 \varphi_3 = |\vec{a}|^2 (\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3)$, $\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1$, что и требовалось доказать.



515.



Из точки С проведем прямую CF перпендикулярную плоскости AOB, в плоскости AOB проведем FA \perp OA, FB \perp OB. По теореме о трех перпендикулярах: CA \perp OA и CB \perp OB. Пусть OC=a, тогда из $\triangle COA$: OA=OC cos 60°=

$$= \frac{a}{2}; \text{ из } \triangle COB: OB=OC \cdot \cos 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Для $\triangle AOB$ по теореме косинусов:

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2 \cdot OB \cdot OA \cos 45^\circ;$$

$$AB^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}, AB = \frac{a}{2}.$$

Таким образом, $\triangle AOB$ — равнобедренный, OA=AB; $\angle ABO=45^\circ$, $\angle OAB=90^\circ$.

Тогда, FA совпадает с AB и С проектируется в точку В.

Прямые HO и CB перпендикулярны к плоскости ABO, т.е. они лежат в одной плоскости, $\angle HOB=90^\circ$, $\angle COB=45^\circ$, таким образом, искомый угол $\theta=45^\circ$.

516. CA \perp AB.

Из А проведем прямую OA \perp AB, $\angle CAO=\varphi$. Отложим AC=AO; построим отрезок CO, из точки О проведем луч, пересекающий луч AD в точке D, OD \parallel AB.

OD \parallel AB, а OA \perp AB, значит, OD \perp OA. По теореме о трех перпендикулярах: CO \perp OD.

Обозначим AD=a. Тогда в $\triangle AOD$:

$$AO=a \sin \theta, OD=a \cos \theta.$$

Из $\triangle OAC$ по теореме косинусов: $CO^2 = OA^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AO \cdot \cos \varphi$;

$$CO^2 = a^2 \sin^2 \varphi + a^2 \sin^2 \theta - 2a^2 \sin^2 \theta \cos \varphi = 2a^2 \sin^2 \theta (1 - \cos \varphi).$$

В прямоугольном $\triangle COD$

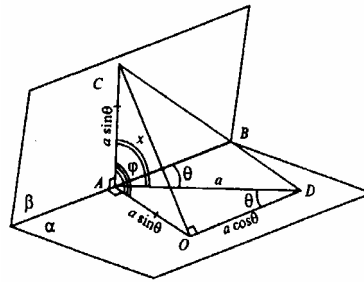
$$CD^2 = OC^2 + OD^2;$$

$$CD^2 = 2a^2 \sin^2 \theta (1 - \cos \varphi) + a^2 \cos^2 \theta.$$

В $\triangle CAD$ по теореме косинусов искомый $\angle CAD=x$;

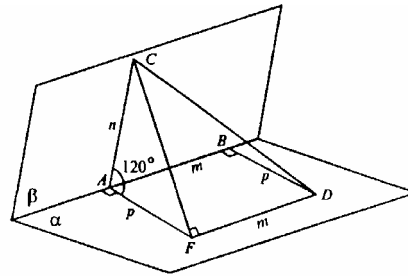
$$CD^2 = CA^2 + AD^2 - 2 \cdot CA \cdot AD \cdot \cos x.$$

$$2a^2 \sin^2 \theta (1 - \cos \varphi) + a^2 \cos^2 \theta = a^2 \sin^2 \theta + a^2 - 2a^2 \sin \theta \cos x,$$



$2 \sin^2 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \varphi + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta + 1 - 2 \sin \theta \cos x,$
 $1 - 2 \sin^2 \theta \cos \varphi - 1 = -2 \sin \theta \cos x,$
 $2 \sin^2 \theta \cos \varphi = 2 \sin \theta \cos x, \sin \theta \neq 0,$
 следовательно, $\sin \theta \cos \varphi = \cos x.$

517. Через D проведем прямую, параллельно ребру AB; через точку A проведем прямую, перпендикулярную ребру AB; эти прямые пересекаются в точке F. Тогда $AF \perp FD$. Проведем отрезок CF и отрезок CD. По теореме о трех перпендикулярах $CF \perp FD$, а значит $\triangle CFD$ — прямоугольный.



AFDB — прямоугольник, $AF=BD=p$, $AB=FD=m$.

Для $\triangle CAF$ по теореме косинусов:

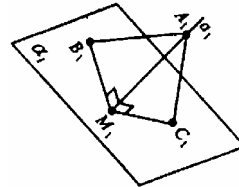
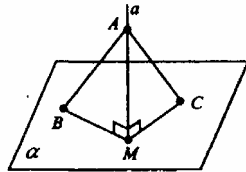
$$CF^2 = AC^2 + AF^2 - 2 \cdot AC \cdot AF \cdot \cos 120^\circ = n^2 + p^2 - 2 \cdot n \cdot p \cos (180^\circ - 60^\circ) = n^2 + p^2 + 2 \cdot n \cdot p \cdot \frac{1}{2} = n^2 + p^2 + np.$$

$$\text{В } \triangle CDF: CD^2 = CF^2 + FD^2, CD^2 = n^2 + p^2 + np + m^2; CD = \sqrt{n^2 + p^2 + m^2 + np}.$$

518. а) по условию $a \parallel \alpha$, тогда все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости α . Предположим, что при движении a_1 не параллельна α_1 , т.е. a_1 пересекает α_1 , тогда точки прямой a_1 находятся на различных расстояниях от плоскости α_1 , что противоречит тому, что при движении расстояние между точками сохраняется. Предположение неверно, т.е. $a_1 \parallel \alpha_1$.

б) Дано:

В результате движения:



Пусть M — точка плоскости α , в которой a пересечет α . Возьмем произвольные точки $A \in a$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$.

$\triangle AMB$ и $\triangle AMC$ — прямоугольные треугольники; $AM^2 = AB^2 - BM^2 = AC^2 - CM^2$.

При движении $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $AM=A_1M_1$ (по доказанному в предыдущих задачах).

$$A_1M_1^2 = A_1B_1^2 - B_1M_1^2, \text{ значит, } A_1M_1 \perp B_1M_1.$$

$$A_1M_1^2 = A_1C_1^2 - C_1M_1^2, \text{ значит, } A_1M_1 \perp C_1M_1.$$

Таким образом, A_1M_1 перпендикулярна плоскости α_1 по признаку перпендикулярности прямой к плоскости.

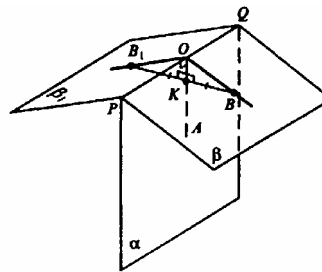
519. $PQ \perp AO$, $AO \subset \alpha$ (смотри рисунок).

Возьмем на ребре двугранного угла PQ точку O ; проведем прямую $OB \perp PQ$, $OB_1 \perp PQ$. $\angle BOA = \varphi$.

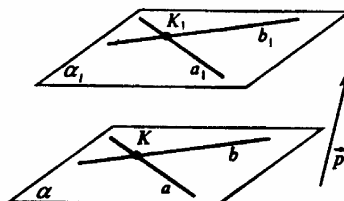
При зеркальной симметрии $B \in \beta \rightarrow B_1 \in \beta_1$, при этом $\alpha \perp B_1B$ и проходит через середину отрезка B_1B : $BK = B_1K$.

$\triangle B_1OK = \triangle BOK$, кроме того они прямоугольные ($OK \perp PQ$, OK — общий катет, $B_1K = BK$).

Тогда, $\angle BOK = \angle B_1OK = \varphi$, т.к. линейные меры двугранных углов равны, то и соответствующие двугранные углы между плоскостями α и β , α и β_1 тоже равны.



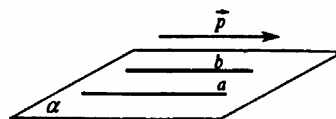
520. а) Возьмем в плоскости α точку K и проведем через нее две пересекающиеся прямые a и b . При параллельном переносе прямая b перейдет в параллельную ей прямую b_1 , а прямая a — в параллельную ей прямую a_1 . Т.к. a и b пересекаются, то a_1 и b_1 тоже пересекаются. Через a_1 и b_1 проведем плоскость α_1 . Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны. Тогда, $\alpha \parallel \alpha_1$, что и требовалось доказать.



б) проведем на плоскости α прямую

$\vec{a} \parallel \vec{p}$ и $\vec{b} \parallel \vec{p}$. Известно, что прямая, параллельная \vec{p} или содержащая \vec{p} , отображается на себя.

$b \rightarrow b$, $a \rightarrow a$. Через параллельные прямые a и b проходит единственная плоскость α , которая таким образом отображается сама на себя, что и требовалось доказать.



Глава VI. Цилиндр, конус и шар

521. Докажем, что осевое сечение цилиндра — это прямоугольник (ABCD). Одно основание цилиндра получено из другого параллельным переносом, таким образом, $BC=AD$, т.к. параллельный перенос сохраняет расстояния. AB и CD перпендикулярны основаниям. $AB=CD$, как отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, т.е. $ABCD$ — прямоугольник $R=1,5$ м, $P=4$ м.

$$AC=BD=\sqrt{H^2+(2R)^2}=\sqrt{H^2+D^2}=\sqrt{16+9}=5 \text{ (см)}$$

522. AA_1B_1B — прямоугольник (см.п.521).

Из $\triangle AB_1B$:

$$AB=2R=48 \cdot \sin 60^\circ = \frac{48\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \text{ см}; R=12\sqrt{3} \text{ (см)};$$

$$H=B_1B=48 \cdot \cos 60^\circ = \frac{48}{2} = 24 \text{ см};$$

$$S_{\text{осн}}=\pi R^2=\pi (12\sqrt{3})^2=\pi \cdot 144 \cdot 3=432 \pi \text{ см}^2.$$

523. AA_1B_1B — квадрат, $AB_1=20$ см. $AB=H$;

$$H\sqrt{2}=20 \Rightarrow H=\frac{20}{\sqrt{2}}=\frac{20\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2},$$

$$H=10\sqrt{2}, S_{\text{осн}}=\pi R^2, \text{ где } R=\frac{1}{2} AB=\frac{1}{2} H=5\sqrt{2},$$

$$S_{\text{осн}}=\pi (5\sqrt{2})^2=50\pi \text{ см}^2.$$

524. Нет.

Пример изображен на рисунке.

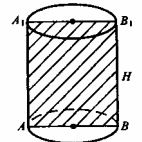
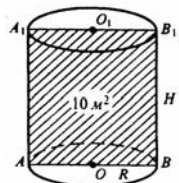
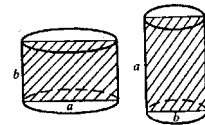
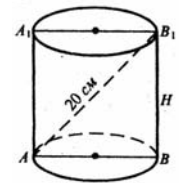
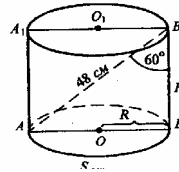
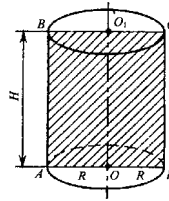
525.

$$\begin{cases} H \cdot 2R = 10 \\ \pi \cdot R^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow R = \frac{10}{2H} = \frac{5}{H}, \quad \pi \left(\frac{5}{H}\right)^2 = 5, \quad \frac{\pi \cdot 5}{H^2} = 1$$

$$H = \sqrt{\left(\frac{1}{5\pi}\right)^{-1}} = \sqrt{5\pi} \text{ м.}$$

$$\mathbf{526.} \quad S_{\text{осн}} = \pi R^2; \quad S_{\text{сеч}} = H \cdot 2R, \quad \frac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{сеч}}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{4},$$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{4} = \frac{\pi R^2}{2HR} \Rightarrow \frac{R}{H} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2R}{H} \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}, \alpha = 60^\circ.$$

$$\angle B_1AB = 30^\circ; \angle A_1BA = 30^\circ;$$

$$\angle \beta = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ; \angle ATA_1 = 60^\circ.$$

527. АВ и O_1O — скрещивающиеся прямые.

а) 1. Построим плоскость, содержащую АВ так, чтобы плоскость была параллельна O_1O . AA_1BB_1 — прямоугольник. $\rho(AB, OO_1) = \rho((AA_1B), OO_1)$.

Построим $OP \perp A_1B$, $\rho(AB, OO_1) = OP = d$. 2. $r = 10$ дм, $d = 8$ дм, $AB = 13$ дм, $h = ?$

$$A_1P = BP = \sqrt{r^2 - d^2}, \quad A_1B = \sqrt{r^2 - d^2},$$

$$A_1B = \sqrt{100 - 64} = 2 \cdot 6 = 12 \text{ (дм)},$$

$$H = \sqrt{AB^2 - A_1B^2} = \sqrt{169 - 144} = 5 \text{ дм}.$$

б) $h = 6$ см, $r = 5$ см, $AB = 10$ см, $d = ?$

$$A_1B = \sqrt{AB^2 - h^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ см}$$

$$A_1P = PB = 4 \text{ см. Из } \triangle A_1OP: d = \sqrt{r^2 - A_1P^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \text{ см}.$$

528. Пусть π — секущая плоскость, $\pi \parallel O_1O$.

$O_1O \perp$ плоскостям оснований, тогда прямые АВ и CD, по которым π пересечет боковую поверхность цилиндра, также перпендикулярны плоскостям оснований. Тогда ABCD — прямоугольник. Точка А переходит в точку В и точка D переходит в точку С.

529. AA_1B_1B — прямоугольник.

$$\frac{1}{2} AB = \sqrt{R^2 - d^2}, \text{ т.е. } AB = 2\sqrt{R^2 - d^2};$$

$$S = AB \cdot H = 2\sqrt{R^2 - d^2} \cdot H = \\ = 2\sqrt{25 - 9} \cdot 8 = 16 \cdot 4 = 64 \text{ см}^2.$$

530. Пусть $H = 12$ см, $R = 10$ см, AA_1B_1B — квадрат.

$AB = H = 12$ см,

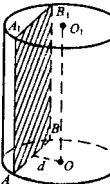
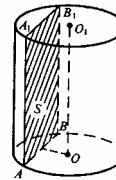
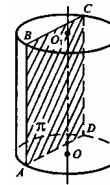
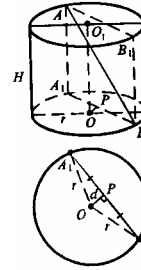
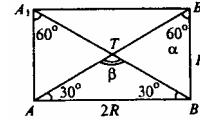
$$\frac{1}{2} AB = \sqrt{R^2 - d^2}, \text{ т.е. } \frac{12}{2} = \sqrt{100 - d^2}, \quad 6 = \sqrt{100 - d^2},$$

$$36 = 100 - d^2, \quad d^2 = 64, \quad d = 8 \text{ см}.$$

531. Пусть $H = 10$ дм, $S_{\text{сеч}} = 240$ дм², $d = 9$ дм.

$$S = H \cdot AB; \quad 240 = 10 \cdot AB, \text{ т.е. } AB = 24 \text{ дм}.$$

$$\frac{1}{2} AB = \sqrt{R^2 - d^2}, \text{ или } 12 = \sqrt{R^2 - 81}, \quad 144 = R^2 - 81, \quad 255 = R^2, \quad R = 15 \text{ дм}.$$



532. $\angle BAC = \varphi$ — линейный угол двугранного угла CA_1AB .

Пусть R — радиус основания цилиндра, H — высота цилиндра.

$$S_1 = S_{A_1C_1CA} = 2RH.$$

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - 2\varphi)} = \frac{R}{\sin \varphi}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{AB}{2 \sin \varphi \cos \varphi} = \frac{R}{\sin \varphi};$$

$$AB = 2R \cos \varphi; \quad S_2 = S_{A_1B_1BA} = AB \cdot H = 2R \cos \varphi H;$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2RH}{2RH \cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Ответ: $\frac{1}{\cos \varphi}$.

533. $S = 2RH$, или $R = \frac{S}{2H}$;

$$\frac{1}{2}AB = \sqrt{R^2 - d^2}, \quad \text{т.е.} \quad AB = \sqrt{\frac{S^2}{4H^2} - d^2};$$

$$S_{\text{сеч}} = AB \cdot H = 2H \sqrt{\frac{S^2}{4H^2} - d^2} = \sqrt{S^2 - 4H^2 d^2}.$$

534. Из $\triangle AOB$: $AO = OB = R$.

$$BM = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}d$$

тогда $\frac{BM}{d} = \tan 60^\circ = \sqrt{3};$

$$2BM = 2\sqrt{3}d; \quad AB = 2\sqrt{3}d;$$

$$S = 2\sqrt{3}dh.$$

535. По условию: $d = 2$ см, $\angle AOB = 60^\circ$.

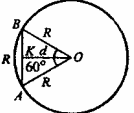
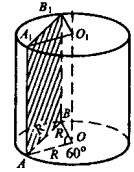
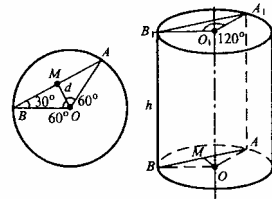
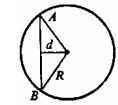
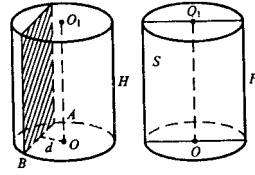
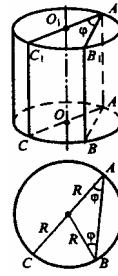
$$\frac{BK}{OK} = \frac{BK}{2} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{тогда} \quad BK = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$AB = 2 \cdot BK = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ см.}$$

$$AA_1B_1B \text{ — прямоугольник, } S = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot 10\sqrt{3} = 40 \text{ см}^2.$$

536. $\angle ACB$ — вписанный, т.к. $\angle ACB = 90^\circ$, то он опирается на диаметр.

Пусть h — образующая, равная высоте цилиндра, R — радиус цилиндра, далее $BC = x$, тогда $AC = \sqrt{4R^2 - x^2}$.



$$S_1 = S_{BB_1C_1C} = S = xh = S_2 = S_{ACC_1A_1} = h \cdot \sqrt{4R^2 - x^2},$$

$$xh = h \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}, \text{ или } x = \sqrt{4R^2 - x^2}, \quad x^2 = 4R^2 - x^2, \quad 2x^2 = 4R^2,$$

$$x^2 = 2R^2, \quad x = \sqrt{2}R, \quad R = \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Площадь осевого сечения

$$S_3 = 2Rh = \frac{2xh}{\sqrt{2}}. \quad S_3 = \sqrt{2} \cdot (xh) = \sqrt{2}S.$$

Ответ: $\sqrt{2}S$.

537. По условию $D=1\text{м}$; $H=\pi D$.

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rH, \quad r = \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}(\text{м}), \quad H = \pi \cdot 1 = \pi \text{ м}, \quad S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \pi^2 \text{ м}^2.$$

538. По условию $S_{\text{бок}} = S$,

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rh = S, \quad 2rh = \frac{S}{\pi}; \quad S_{AA_1B_1B} = AB \cdot h = 2rh = \frac{S}{\pi}.$$

539. $D=1,5\text{ м}$, $H=3\text{ м}$, на 1 м^2 — 200 г краски.

$$S_{\text{полн}} + S_{\text{осн}} = 2\pi rh + \pi r^2 = S_{\text{бака}},$$

$$S_{\text{повбака}} = \pi BP + \pi r^2 = \pi \cdot 1,5 \cdot 3 + \pi \left(\frac{1,5}{2}\right)^2 =$$

$$= \pi \cdot 4,5 + \pi \cdot \frac{2,25}{4} = 4,5\pi + 1,125\pi = 5,625\pi.$$

Тогда количество краски: $0,2 \cdot 5,625\pi = 1,125\pi \text{ кг}$.

540. По условию: $H - R = 12$,

$$S_{\text{полн}} = 2\pi R(R + H) = 288\pi \text{ см}^2. \text{ Запишем систему:}$$

$$\begin{cases} H - R = 12, \\ 2\pi R(R + H) = 288\pi, \end{cases} \quad \begin{cases} H - R = 12, \\ 2\pi R(R + H) = 144. \end{cases}$$

$$R^2 + R(12 + R) = 144; \quad R^2 + 6R - 72 = 0;$$

$$R_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 + 72} = -3 \pm 9.$$

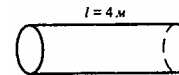
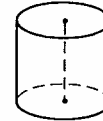
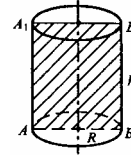
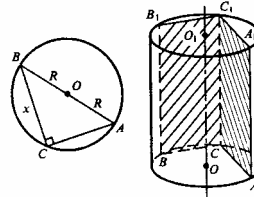
Очевидно, $R > 0$, т.е. $R = 6 \text{ см}$, $H = 12 + 6 = 18 \text{ см}$.

541. По условию: $d = 20 = 0,2 \text{ м}$,

$$S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot r \cdot l = \pi \cdot d \cdot l, \quad S_{\text{ув}} = \frac{2,5\pi d \cdot l}{100},$$

$$S_{\text{бок}} + S_{\text{бок}} = \pi \cdot 0,2 \cdot 4 + \frac{2,5\pi d \cdot 0,2 \cdot 4}{100} = 0,8\pi + \frac{0,8\pi d \cdot 2,5}{100} =$$

$$= 0,8\pi \left(1 + \frac{25}{100 \cdot 40}\right) = 0,8\pi(1 + 0,025) = 0,82\pi \text{ м}^2.$$



542. По условию: $S_{осн} = S$; $S = \pi R^2$.

Пусть высота цилиндра h . Из $\triangle AA_1B_1$.

$$\frac{2R}{h} = \operatorname{tg} \varphi, \quad R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}, \quad h = \frac{2R}{\operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{ctg} \varphi \cdot 2\sqrt{\frac{S}{\pi}},$$

$$S_{бок} = 2\pi Rh = 2\pi \sqrt{\frac{S}{\pi}} \cdot \operatorname{ctg} \varphi \cdot 2\pi \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 4\pi \operatorname{ctg} \varphi \frac{S}{\pi} = 4S \operatorname{ctg} \varphi.$$

Ответ: $4S \operatorname{ctg} \varphi$.

543. $S_{бок} = 2\pi Rh$, $S_{полн} = 2\pi R(h + R)$,

$$AB = 2\pi Rh, \quad R = \frac{AB}{2\pi} \cdot (1); \quad h = AA_1 \cdot (2)$$

Диагонали прямоугольника равны и в точке T делятся пополам (по свойствам прямоугольника).

Из $\triangle ATA_1$ по теореме косинусов имеем:

$$AA_1^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \cos \varphi = \frac{2d^2}{4} - \frac{2d^2}{4} \cos \varphi =$$

$$= \frac{d^2}{2} (1 - \cos \varphi) = \frac{d^2}{2} \cdot 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = d^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$AA_1 = \sqrt{d^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = d \sin \frac{\varphi}{2}, \quad AA_1 = h.$$

$$\text{Из } \triangle ATB \text{ по теореме косинусов: } AB^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \cos(180^\circ - \varphi) =$$

$$= \frac{2d^2}{4} + \frac{2d^2}{4} \cos \varphi = \frac{d^2}{2} (1 + \cos \varphi) = \frac{d^2}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = d^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$AB = \sqrt{d^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = d \cos \frac{\varphi}{2}; \quad R = \frac{AB}{2\pi} = \frac{d \cos \frac{\varphi}{2}}{2\pi};$$

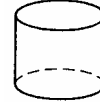
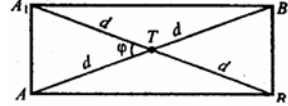
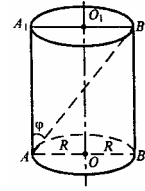
$$S_{бок} = 2\pi \frac{d \cos \frac{\varphi}{2}}{2\pi} \cdot d \sin \frac{\varphi}{2} = d^2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$= \frac{1}{2} d^2 \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi;$$

$$S_{осн} = \pi R^2 = \frac{\pi d^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{4\pi^2} = \frac{d^2}{4\pi} \cos^2 \frac{\varphi}{2}; \quad S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн};$$

$$S_{полн} = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi + 2 \frac{d^2}{4\pi} \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{d^2}{2} \sin \varphi + \frac{d^2}{4\pi} \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{d^2}{2} \left(\sin \varphi + \frac{1}{\pi} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right).$$

Если за основание принять AA_1 , а за высоту — AB , то $S_{бок}$ не изменится.

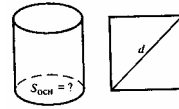


$$S_{осн} = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{d^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\pi^2} = \frac{d^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\pi};$$

$$\text{Ответ: } S_{полн} = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi + 2 \cdot \frac{d^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\pi} = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi + \frac{d^2}{2\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

$$544. S_{осн} = \pi R^2.$$

Очевидно, сторона квадрата равна $\frac{d}{\sqrt{2}}$.



$$\frac{d}{\sqrt{2}} = 2\pi R, \text{ т.е. } R = \frac{d}{2\sqrt{2} \cdot \pi}; \quad S_{осн} = \pi \frac{d^2}{8 \cdot \pi^2} = \frac{d^2}{8\pi}.$$

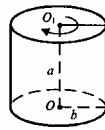
$$545. \text{ Пусть } R = OA = a, \quad H = AA_1 = a.$$

$$\text{а) } S_{осевого сеч} = 2RH = 2aa = 2a^2;$$

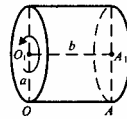
$$\text{б) } S_{бок} = 2\pi RH = 2\pi aa = 2\pi a^2;$$

$$\text{в) } S_{полн} = 2\pi a^2 = 2(\pi a^2) = 4\pi a^2.$$

$$546. \text{ а)}$$



$$S_{бок} = 2\pi ba$$



$$S_{бок} = 2\pi ab$$

$S_{бок}$ одинакова.

$$\text{б) } S_{полн} = 2\pi ba + 2\pi b^2 = S_1, \quad S_2 = S_{полн} = 2\pi ab + 2\pi a^2,$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi b(a+b)}{2\pi a(a+b)} = \frac{a}{b}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a}{b} = \frac{S_1}{S_2}.$$

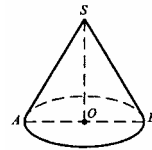
$$547. \text{ По условию } SO = h = 15 \text{ см}, \quad R = OA = 8 \text{ см},$$

$$AS = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = 17 \text{ см}.$$

$$548. \text{ а) } \alpha = 30^\circ \text{ по условию}$$

$$R = AO = AS \cos \alpha = AS \cos 30^\circ = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ см},$$

$$S_{осн} = \pi R^2 = \pi (6\sqrt{3})^2 = 36 \cdot 3 \cdot \pi = 108\pi \text{ см}^2;$$



б) $\alpha = 45^\circ$ по условию $R = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ см,

$$S_{\text{осн}} = \pi \cdot (6\sqrt{2})^2 = 72\pi \text{ см}^2;$$

в) $\alpha = 60^\circ$ по условию $R = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ см.

$$S_{\text{осн}} = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \text{ см}^2$$

549. По условию $PO = h = 8$ дм.

а) $S_1 = \frac{1}{2}S_{\text{осн}}$; б) $S_1 = \frac{1}{4}S_{\text{осн}}$,

Плоскость, параллельная основанию, пересекается с конусом по окружности и разбивает конус на две части.

$$\triangle PO_1A_1 \sim \triangle POA; \quad \frac{PO_1}{PO} = \frac{O_1A_1}{OA}, \quad \frac{PO_1}{8} = \frac{r_1}{r}.$$

$$S_{\text{кр}} = \pi r^2, \quad \frac{PO_1}{8} = \frac{\sqrt{\frac{S_1}{\pi}}}{\sqrt{\frac{S_{\text{осн}}}{\pi}}} = \sqrt{\frac{S_1}{S_{\text{осн}}}}.$$

а) $PO_1 = 8\sqrt{\frac{S_1}{S_{\text{осн}}}} = 8\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ дм; б) $PO_1 = 8\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{8}{2} = 4$ дм;

550. Пусть $\angle APB = 90^\circ$, $AO = OB = 5$ см, $S_{\triangle APB} = ?$

$$S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}AP \cdot PB = \frac{1}{2}AP^2,$$

$$2AP^2 = AB^2 \text{ (по теореме Пифагора), } AB = 10 \text{ см.}$$

$$AP^2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 4 = 50 \text{ см}^2, \text{ тогда } S_{\triangle APB} = \frac{50}{2} = 25 \text{ см}^2.$$

551. а) Обозначим $\angle BPC = 30^\circ$, $PC = PB = 2r$.

$$S_{BPC} = \frac{1}{2}PB \cdot PC \cdot \sin 30^\circ; \quad S_{BPC} = \frac{2r \cdot 2r}{2 \cdot 2} = r^2;$$

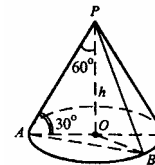
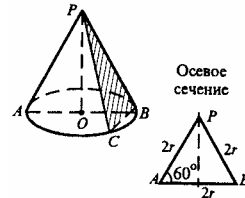
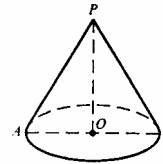
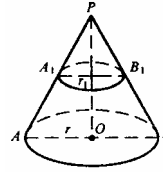
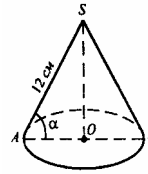
б) Дано $\angle BPC = 45^\circ$,

$$S_{BPC} = \frac{2r \cdot 2r \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2} = r^2 \sqrt{2};$$

в) Дано $\angle BPC = 60^\circ$, $S_{BPC} = \frac{2r \cdot 2r \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = r^2 \sqrt{3}$.

552. Дано $PO = h$, $\angle APO = 60^\circ$, $AP \perp PB$, PB — образующая.

1) $AP = 2h$, (PO — катет, лежащий против угла в 30°);



2) $AP = PB = 2h$ — как образующие конуса;

3) $\triangle APB$ прямоугольный.

$$S_{APB} = \frac{1}{2} AP \cdot PB, \quad S = \frac{2h \cdot 2h}{2} = 2h^2.$$

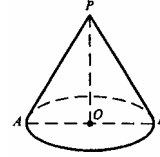
553. Дано: APB — осевое сечение. $S_{APB} = 6 \text{ дм}^2$, $S_{осн} = 8 \text{ дм}^2$.

$$1) S_{APB} = \frac{1}{2} PO \cdot AB, \quad AB = 2r.$$

$$S_{APB} = \frac{PO \cdot 2r}{2} = rh, \quad 6 = rh; \quad (1)$$

$$2) S_{осн} = \pi r^2, \quad 8 = \pi r^2; \quad (2)$$

$$3) \text{ из (2) } r = \sqrt{\frac{8}{\pi}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}; \text{ из (1) } h = \frac{6}{r} = \frac{6\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ дм.}$$



554. Дано BC — хорда, стягивает угол а) в 60° ; б) в 90° . $S_{сеч} = ?$

Проведем $OK \perp CB$ и соединим точки P и K . По теореме о трех перпендикулярах: $PK \perp CB$. PK — высота треугольника BPC .

$$S_{сеч} = S_{BPC} = \frac{1}{2} CB \cdot PK.$$

а) $BC = r$.

$$\text{Из } \triangle POK: PK = \sqrt{PO^2 + OK^2}, \text{ из } \triangle PKC: PK = \sqrt{CP^2 - CK^2}.$$

$$PK = \sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4l^2 - r^2}{4}\right)} = \frac{\sqrt{4l^2 - r^2}}{2},$$

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{4l^2 - r^2}}{2} = \frac{r}{4} \cdot \sqrt{4l^2 - r^2};$$

$$\text{б) } CB = r\sqrt{2}; \quad PK = \sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2l^2 - r^2}}{\sqrt{2}},$$

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{2l^2 - r^2}}{\sqrt{2}} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{2l^2 - r^2}.$$

555. Дано: $OP = h = 10 \text{ см}$, BC — хорда,

$\angle COB = 60^\circ$, двугранный угол между плоскостью основания и плоскостью BPC равен: а) 30° ; б) 45° ; в) 60° . $S_{BPC} = ?$

Построим линейный угол данного двугранного угла. Проведем $OA \perp BC$, строим отрезок PA . По теореме о трех перпендикулярах $PA \perp BC$.

$OA \perp BC$, поэтому $\angle PAO$ — линейный угол двугранного угла.
 $PO \perp PAO$

а) $\angle PAO = 30^\circ$. Из $\triangle POA$: $PA = \frac{h}{\sin 30^\circ} = 2h$, из

$\triangle COB$: $BC = r = 2CA$,

$$\frac{CA}{OA} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad CA = \frac{OA}{\sqrt{3}}.$$

Из $\triangle POA$: $\frac{h}{OA} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad OA = h\sqrt{3}$.

Итак, $CA = \frac{h\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = h$, $BC = 2h$. $S_{сеч} = \frac{1}{2} BC \cdot PA$, $S_{сеч} = \frac{1}{2} 2h \cdot 2h = 2h^2$,

$$S_{сеч} = 2 \cdot 100 = 200 \text{ см}^2.$$

б) $\angle PAO = 45^\circ$. $PA = h\sqrt{2}$ см $= 10\sqrt{2}$ см, $OA = h$, $CA = \frac{h}{\sqrt{3}}$,

$$BC = \frac{2h}{\sqrt{3}}; \quad S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2h}{\sqrt{3}} \cdot h\sqrt{2} = \frac{h^2}{3} \cdot \sqrt{6} = \frac{100}{3} \sqrt{6} \text{ см}^2.$$

в) $\angle PAO = 60^\circ$; $\frac{h}{OA} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$; $OA = \frac{h}{\sqrt{3}}$,

$$CA = \frac{OA}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(\sqrt{3})^2} = \frac{h}{3} \text{ см}, \quad CB = \frac{2h}{3} \text{ см}, \quad PA = \frac{h}{\sin 60^\circ} = \frac{h \cdot 2}{\sqrt{3}} \text{ см}.$$

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2h}{3} = \frac{2h^2}{3\sqrt{3}} = \frac{2h^2}{9} \text{ см}^2. \quad S_{сеч} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 100}{9} = \frac{200\sqrt{3}}{9} \text{ см}^2.$$

556. Дано: $\alpha \perp$ оси конуса PO .

Докажем, что

1) сечение конуса плоскостью α будет кругом с центром в точке O_1 ;

$$2) r_1 = \frac{PO_1}{PO} r.$$

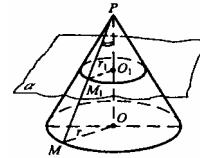
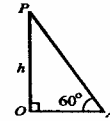
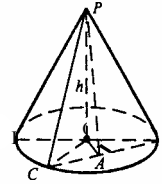
Возьмем некоторую точку $M_1 \in \alpha$ и точку $M_1 \in O_1(r_1)$. (на плоскости α строим окружность с центром в точке O_1 и радиуса r и на этой окружности выбираем произвольную точку M_1).

Через точку P и точку M_1 проводим прямую PM_1 , которая пересечет плоскость основания конуса в точке M . $\triangle PO_1M_1 \sim \triangle POM$ как прямоугольные, имеющие одинаковый острый угол.

$$\frac{PO_1}{PO} = \frac{O_1M_1}{PO} = \frac{PM_1}{PM}; \quad OM = \frac{PO \cdot O_1M_1}{PO_1} = \frac{PO}{PO_1} \cdot r_1 = r = \text{const при задан-}$$

ной точке P и окружности $O_1(r_1)$.

Тогда: точка M — произвольная, значит, все точки луча PM_1 , пересекающие плоскость основания конуса, лежат на окружности $O(r)$, т.е. равноуда-



лены от некоторой точки O на расстояние r , что видно из формулы. PM — образующая конуса по определению.

4) Образующие составляют коническую поверхность, поэтому докажем, что существует произвольная точка $M_1 \in \alpha$, $M_1 \in PM$ такая, что $M_1 \in O_1(r_1)$.

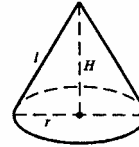
5) $\triangle PO_1M_1 \sim \triangle POM$ (PM — образующая).

$$O_1M_1 = \frac{PO_1}{PO} \cdot OM = \frac{PO_1}{PO} \cdot r = r_1 = \text{const} \text{ при заданной точке } P \text{ и } r.$$

Тогда: эта окружность будет сечением боковой поверхности, а круг, границей которого является $O_1(r_1)$, будет сечением конуса плоскостью α .

557. См. рисунок к задаче 556: $\frac{O_1M_1}{OM} = \frac{PO_1}{PO}$, или

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{PO_1}{PO}; \quad S_1 = \pi r_1^2; \quad S_2 = \pi r_2^2.$$

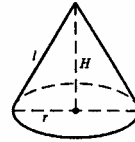


Запишем отношение: $\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{PO_1^2}{PO^2}; \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{PO_1^2}{PO^2}.$

558. 1) $S_{бок} = \frac{\pi l^2 \alpha}{360^\circ} = \pi r l;$

2) $l = \sqrt{r^2 + H^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ (см)};$

3) $\frac{\pi \cdot 25 \cdot \alpha}{360^\circ} = \pi \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5}{\pi \cdot 25} = 72^\circ \cdot 3 = 216^\circ.$



559. $r = l \cos 60^\circ = \frac{l}{2}, \quad r = \frac{l}{2}.$

$$S_{бок} = \frac{\pi l^2 \alpha}{360^\circ} = \pi \cdot r \cdot l.$$

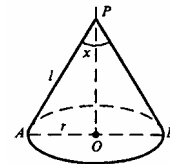
Вычислим градусную меру дуги α : $\alpha = \frac{360^\circ \cdot \pi \cdot l \cdot l}{\pi \cdot l^2 \cdot 2} = 180^\circ.$

560. Обозначим $\angle APO = x$.

$$\frac{\pi l^2 \alpha}{360^\circ} = \pi \cdot r \cdot l, \text{ где } l = AP, \quad r = OA.$$

$$r = \frac{\pi l^2 \alpha}{360^\circ \cdot \pi l} = \frac{\alpha l}{360^\circ}.$$

а) $r = \frac{180^\circ \cdot l}{360^\circ} = \frac{l}{2};$ б) $r = \frac{90^\circ \cdot l}{360^\circ} = \frac{l}{4};$ в) $r = \frac{60^\circ \cdot l}{360^\circ} = \frac{l}{6}.$



Из $\triangle APO$: $\sin x = \frac{AO}{PA} = \frac{r}{l}$.

а) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = 30^\circ$, $\angle APB = 2x = 60^\circ$;

б) $\sin x = \frac{1}{4}$, $x = \arcsin \frac{1}{4}$, $\angle APB = 2 \arcsin \frac{1}{4}$;

в) $\sin x = \frac{1}{6}$, $x = \arcsin \frac{1}{6}$, $\angle APB = 2 \arcsin \frac{1}{6}$.

561. По условию $r = 9$ см, $\varphi = 120^\circ$.

Пусть ℓ — длина дуги сектора, получающегося в результате развертки конуса.

$$\ell = \frac{2\pi r \varphi}{360^\circ} = \frac{2\pi \cdot 9 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = 6\pi.$$

С другой стороны ℓ — это длина окружности основания конуса, тогда радиус основания $R = \frac{\ell}{2\pi} = \frac{6\pi}{3\pi} = 3$ см.

Тогда $S_{осн} = \pi r^2 = 9\pi$ см².

$$H = \sqrt{r^2 - R^2} = \sqrt{81 - 9} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ см.}$$

562. $\triangle AOP$ — равнобедренный;

$$r = OA = l \sin 45^\circ = \frac{6,5 \cdot \sqrt{2}}{2}; \quad S_{бок} = \pi r l,$$

$$S_{бок} = \pi \cdot \frac{6,5 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot 6,5 = 169/8 \pi \sqrt{2} \text{ см}^2.$$

563. Дано: $H = 1,2$ см, $S_{сеч} = 0,6$ см².

1) $S_{полн} = \pi r(l + r)$;

2) $S_{APB} = \frac{1}{2} AB \cdot PO = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot H = r \cdot H$,

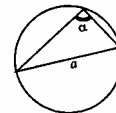
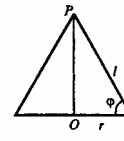
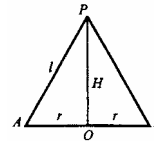
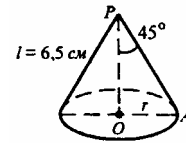
$$0,6 = r \cdot 1,2r = \frac{0,6}{1,2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ см};$$

$$l = \sqrt{H^2 + r^2}, \quad l = \sqrt{1,44 + 0,25} = \sqrt{1,69} = 1,3 \text{ см};$$

4) $S_{полн} = \pi \cdot 0,5(0,5 + 1,3) = \pi \cdot 0,5 \cdot 1,8 = 0,9\pi$ см².

564. По теореме синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = 2r$, следовательно, $r = \frac{a}{2 \sin \alpha}$

$$\frac{r}{l} = \cos \varphi, \text{ следовательно } l = \frac{r}{\cos \varphi},$$



$$l = \frac{a}{2 \sin \alpha \cos \varphi}; S_{\text{полн}} = \pi r(r+l), \text{ тогда}$$

$$S_{\text{полн}} = \pi \cdot \frac{a}{2 \sin \alpha} \left(\frac{a}{2 \sin \alpha} + \frac{a}{2 \sin \alpha \cos \varphi} \right) =$$

$$= \frac{\pi a}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{a^2}{2 \sin \alpha} \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos \varphi} \right) = \frac{\pi a^2 (1 + \cos \varphi)}{4 \sin^2 \alpha \cos \varphi}.$$

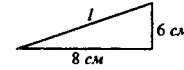
565. При вращении получим коническую поверхность.

$$S_{\text{бок}} = \pi r l, S_{\text{полн}} = \pi r(r+l).$$

$$l = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ (см)};$$

$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot 8 \cdot 10 = 80\pi \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_{\text{полн}} = \pi \cdot 8(10+8) = 18 \cdot 8 \cdot \pi = 144\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

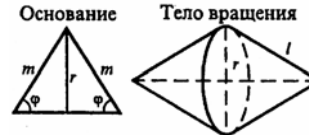


566. $S_{\text{бок}} = 2S_{\text{бок}} = \pi r l$.

$$r = m \sin \varphi, l = m;$$

$$S_{\text{бок}} = \pi m \sin \varphi \cdot m = \pi m^2 \sin \varphi;$$

$$S_{\text{пов}} = 2\pi m^2 \sin \varphi.$$

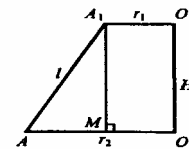


567. Дано: $r_1 = 3 \text{ см}$, $r_2 = 6 \text{ см}$, $H = 4 \text{ см}$.

Проведем $A_1M \perp OA$.

$$A_1M = H = 4 \text{ см}, AM = 3 \text{ см},$$

$$A_1A = \sqrt{H^2 + AM^2} = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ (см)}.$$



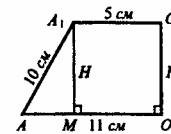
568. Проведем $A_1M \perp OA$.

$$A_1M = O_1O = H \text{ см}, AM = 6 \text{ см}.$$

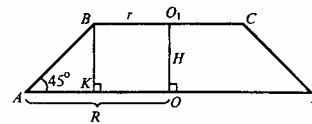
а) $H = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ см};$

б) $S_{\text{сеч}} = S_{\text{трапеции}} S_{AA_1O_1O} = \frac{5+11}{2} \cdot 8 = 16 \cdot 4 = 64 \text{ см}^2,$

$$S_{\text{сеч}} = 128 \text{ см}^2.$$



569. Осевое сечение усеченного конуса — равнобедренная трапеция с основаниями $2r$ и $2R$. Вычислим высоту трапеции $OO_1 = H$. $AK = R - r$, $\triangle ABK$ — прямоугольный равнобедренный, $BK = O_1O = H = R - r$.



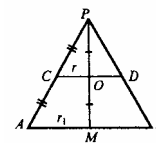
$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot H = \frac{2r + 2R}{2} \cdot (R - r) = (R + r)(R - r) = R^2 - r^2.$$

570. Дано $S_{\text{бок}} = 80 \text{ см}^2$, $PO = OM$, $CD \perp PM$.

$$S_{\text{бок}} = \pi(r + r_1)l, \text{ где } r = OC, r_1 = MA, l = CA. CO$$

— средняя линия в $\triangle APM$, $AC = CP$.

$$S_{\text{бок}} = \pi r_1 AP. \text{ Обозначим } AC = CP = l, \text{ тогда}$$



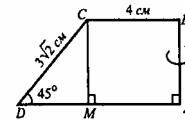
$$\pi r_1 \cdot 2l = 80, \text{ или } \pi r_1 l = 40 (*). \triangle POC \sim \triangle PMA.$$

$$\frac{PO}{PM} = \frac{OC}{MA} = \frac{PC}{PA}; \quad \frac{r}{r_1} = \frac{1}{2l} \Rightarrow \frac{r}{r_1} = \frac{1}{2}, \quad r = \frac{r_1}{2}.$$

$$\text{Из } (*) \quad l = \frac{40}{\pi r_1}; \quad S_{\text{бок}} = \pi \left(\frac{r_1}{2} + r_1 \right) \cdot \frac{40}{\pi r_1} = \frac{\pi \cdot 3r_1 \cdot 40}{2\pi r_1} = 60.$$

571. Пусть $CB = r_1$, $AD = r$, $l = DC$, $H = BA$.
Проведем $CM \perp DA$.

$$\text{Из } \triangle DCM: DM = 3\sqrt{2} \cos 45^\circ = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 3;$$



$$DA = r = 3 + 4 = 7 \text{ см.}$$

$$S_{\text{бок}} = \pi(r + r_1)l; \quad S_{\text{бок}} = \pi(4 + 7)3\sqrt{2} = \pi \cdot 11 \cdot 3\sqrt{2} = 33\sqrt{2}\pi \text{ см}^2;$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + \pi(r_1^2 + r^2),$$

$$S_{\text{полн}} = 33\sqrt{2}\pi + \pi(16 + 49) = 33\sqrt{2}\pi + 65\pi.$$

572. Дано: $1 \text{ м}^2 - 150 \text{ г}$, $N=100$ ведер.

$$S_{\text{бок}} = \pi(r + r_1)l,$$

$$S_{\text{осн}} = \pi r_1^2, \quad S_{\text{полн}} = [\pi(10 + 15)30 + \pi \cdot 10^2] \cdot 2 =$$

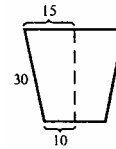
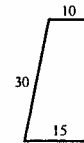
$$= 2[\pi \cdot 25 \cdot 30 + 100\pi] = 2\pi[750 + 100] = 850 \cdot 2\pi = 1700\pi \text{ см}^2;$$

$$1 \text{ м} - 100 \text{ см}, \quad 1 \text{ м}^2 - 10^4 \text{ см}^2, \quad x \text{ м}^2 - 1700\pi \text{ см}^2,$$

$$x = \frac{1700\pi}{100 \cdot 100} = 0,17\pi \text{ м}^2.$$

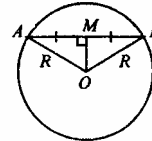
$$S = 0,17\pi \text{ м}^2; \quad 100S = 17\pi \text{ м}^2.$$

Расход краски составит: $0,15 \cdot 17\pi = 2,55\pi \text{ кг} \approx 8,012 \text{ кг}$.



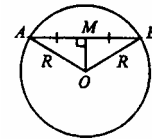
573. Через три точки проходит единственная плоскость, то есть через точки A, B и O. Сечение — это окружность, проходящая через центр сферы.

а) Проведем радиусы OA и OB. $\triangle AOB$ — равнобедренный, OM — медиана. Тогда, OM также и высота, то есть $OM \perp AB$.



б) Если $OM \perp AB$, то $\triangle OMA = \triangle OMB$. (OM — общий катет, $OA = OB = R$). тогда, $MA = MB$, точка M — середина AB.

574. Проведем секущую плоскость через точки A, B и O. Сечение сферы этой плоскостью будет окружностью радиуса R с центром в точке O. OM — медиана в равнобедренном $\triangle AOB$, поэтому $OM \perp AB$.



а) $R=50 \text{ см}$, $AB=40 \text{ см}$.

$$AM = \frac{1}{2} AB = 20 \text{ см.}$$

$$\text{Из } \triangle AOM: OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - AM^2} = \sqrt{50^2 - 20^2} =$$

$$= \sqrt{2500 - 400} = \sqrt{2100} = 10\sqrt{21} \text{ см};$$

$$\text{б) } R=15 \text{ мм, } AB=18 \text{ мм.}$$

$$OM = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ мм};$$

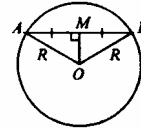
$$\text{в) } R=10 \text{ дм, } OM=60 \text{ см, найти } AB. OM=60 \text{ см}=6 \text{ дм.}$$

$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ дм, } AB = 2AM = 16 \text{ дм};$$

$$\text{г) } R=a, OM=b.$$

$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - OM^2} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

575. Проведем плоскость через точки А, В и точку О — центр сферы. В сечении получим окружность радиуса R, проходящая через центр сферы. В равнобедренном $\triangle OAB$ проведем $OM \perp AB$. OM — высота в равнобедренном треугольнике, таким образом, OM — медиана, $MA = MB = \frac{m}{2}$. OM — искомое расстояние.



$$OM = \sqrt{OA^2 - MA^2} = \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}} = \frac{\sqrt{4R^2 - m^2}}{2}.$$

$$\text{576. а) } A(2;-4;7), R=3.$$

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = R^2 \text{ имеем:}$$

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 7)^2 = 9;$$

$$\text{б) } A(0;0;0), R = \sqrt{2}, x^2 + y^2 + z^2 = 2; \text{ аналогично (а)}$$

$$\text{в) } A(2;0;0), R = 4, (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 16, \text{ аналогично (а).}$$

$$\text{577. а) } A(-2;2;0), N(5;0;-1).$$

Уравнение сферы с центром в точке $C(x_o; y_o; z_o)$ имеет вид:

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = R^2.$$

$$\text{В нашем случае оно имеет вид: } (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = R^2.$$

Т.к. точка N лежит на сфере, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению:

$$(5 + 2)^2 + (0 - 2)^2 + (-1)^2 = R^2, 49 + 4 + 1 = R^2, R^2 = 54,$$

$$\text{поэтому уравнение сферы имеет вид: } (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 54;$$

$$\text{а) } A(-2;2;0), N(0;0;0). (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = R^2$$

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = R^2.$$

$$(0 + 2)^2 + (0 - 2)^2 + 0^2 = R^2, 4 + 4 = R^2, R^2 = 8.$$

$$\text{Уравнение имеет вид: } (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 8;$$

б) $A(-2;2;0)$, $N(5;3;1)$.

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

$$5^2 + 3^2 + 1^2 = R^2, \quad 25 + 9 + 1 = 35, \quad R^2 = 35.$$

Уравнение имеет вид: $x^2 + y^2 + z^2 = 35$.

578. а) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$.

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2, \text{ где } R \text{ — радиус сферы, } (x_0; y_0; z_0)$$

— координаты точки C, центра сферы. В нашем случае

$$x-x_0 = x; \quad y-y_0 = y; \quad z-z_0 = z, \text{ поэтому } x_0 = 0; \quad y_0 = 0; \quad z_0 = 0,$$

а $R = \sqrt{49} = 7$. Координаты центра (0;0;0), радиус: 7.

б) $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 = 2$.

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2, \quad x-3 = x-x_0, \quad x_0 = 3;$$

$$y+2 = y-y_0, \quad y_0 = -2; \quad z-z_0 = z, \quad z_0 = 0; \quad 2 = R^2, \quad R = \sqrt{2}.$$

Координаты центра: (3;-2;0), радиус: $\sqrt{2}$.

579. а) $x^2 - 4x + y^2 + z^2 = 0$,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4 = (x^2 - 4x + 4) + y^2 + z^2 - 4 = 0,$$

$$(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2^2 \text{ — уравнение сферы.}$$

Координаты центра (2; 0; 0), радиус: 2;

б) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 24$, $x^2 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + z^2 = 24$,

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 = 5^2.$$

Координаты центра (0; 1; 0), радиус: 5;

в) $x^2 + 2x + y^2 + z^2 = 3$, $(x^2 + 2x + 1) - 1 + y^2 + z^2 = 3$,

$$(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 4 = 2^2 \text{ — уравнение сферы с центром } (01; 0; 0), \text{ радиус: } 2;$$

г) $x^2 - x + y^2 + 3y + z^2 - 2z = 2,5$,

$$(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} + (y^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}) - \frac{9}{4} + (z^2 - 2z + 1) - 1 = 2,5,$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = 2,5 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 1 = 2,5 + \frac{10}{4} + 1 =$$

$$= 2,5 + 2,5 + 1 = 5 + 1 = 6 = (\sqrt{6})^2,$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{6})^2 \text{ — уравнение сферы; в точке с ко-}$$

ординатами $\left(\frac{1}{2}; +\frac{3}{2}; 1\right)$ расположен ее центр, радиус равен $\sqrt{6}$.

580. Сечение шара плоскостью — это круг. $OB \perp$ плоскости сечения, $OB=9$ дм, $OA=R$.

Из прямоугольного треугольника OBA :

$$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{R^2 - OB^2} =$$

$$= \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1681 - 81} = \sqrt{1600} = 40 \text{ дм.}$$

Площадь круга в сечении:

$$S = \pi(AB)^2 = \pi \cdot 40^2 = 1600\pi \text{ дм}^2.$$

581. Плоскость треугольника ABC пересекает сферу с центром в точке O по окружности, которая описана около $\triangle ABC$. Из точки O проведем OK перпендикулярно плоскости ABC , OK — искомое расстояние, точка K — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности. Соединим точку K с одной из вершин $\triangle ABC$, например, с A , проведем радиус в точку A .

$\triangle OKA$ — прямоугольный, тогда по теореме Пифагора:

$$OK = \sqrt{OA^2 - KA^2} = \sqrt{13^2 - AK^2}.$$

Найдем длину AK .

$$AK = \frac{AB \cdot CB \cdot CA}{4 \cdot S_{\triangle ABC}}, \quad S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-CA)},$$

$$p = \frac{6+8+10}{2} = 12, \quad S = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt{6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24 \text{ см}^2,$$

$$AK = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot 24} = \frac{24 \cdot 2 \cdot 5}{24 \cdot 4} = 5 \text{ см}, \quad OK = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ см.}$$

582. Плоскость прямоугольника пересекает сферу по окружности, которая будет описанной около прямоугольника $ABCD$. Центр окружности находится в точке пересечения диагоналей прямоугольника. Пусть O — центр сферы, следовательно $OK \perp$ плоскости $ABCD$, OK — искомое расстояние.

Из прямоугольного $\triangle OKA$ вычислим OK :

$$OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{R^2 - AK^2}.$$

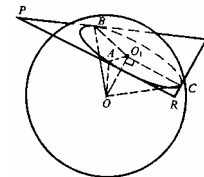
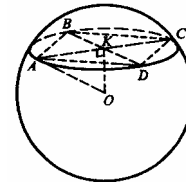
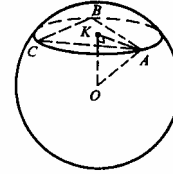
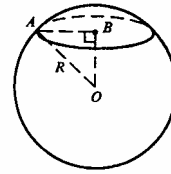
$$AK = \frac{16}{2} = 8 \text{ см}, \quad OK = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = 6 \text{ см.}$$

583. Равнобедренный $\triangle PQR$ «положили» на сферу, он касается сферы в точках A, B, C . Проведем из центра сферы O перпендикуляр OO_1 на плоскость PQR .

$O_1A \perp PR$, $O_1B \perp PQ$, $O_1C \perp RQ$. (По теореме о трех перпендикулярах O_1A, O_1B, O_1C перпендикулярны к сторонам треугольника PQR).

$\triangle OO_1A = \triangle OO_1B = \triangle OO_1C$ (прямоугольные, где O_1O — общий катет, $OA = OB = OC = R$).

Тогда: точка O_1 — центр вписанной окружности.



Вычислим радиус вписанной окружности:

$$r = \frac{S_{\Delta PQR}}{p}, \quad p = \frac{10+10+12}{2} = 16 \text{ см.}$$

По формуле Герона: $S_{\Delta PQR} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 4 \cdot 6 \cdot 2 = 48 \text{ см}^2$,

$$r = \frac{48}{16} = 3 \text{ см.}$$

По теореме Пифагора из ΔOO_1B найдем OO_1 :

$$OO_1 = \sqrt{OB^2 - O_1B^2} = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ см.}$$

584. см.538, за исключением: вместо ΔPQR будет ΔABC . Рассуждения повторяются; точка O_1 — центр вписанной в ΔABC окружности. Пусть ее радиус равен r .

$$r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p}, \quad p = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21 \text{ см.}$$

По формуле Герона: $S = \sqrt{p(p-13)(p-14)(p-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 84 \text{ см}^2$.

$$r = O_1F = \frac{84}{21} = 4 \text{ см.}$$

Из прямоугольного ΔOO_1F по теореме Пифагора:

$$OO_1 = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ см.}$$

585. Из центра сферы — O , опустим перпендикуляр OO_1 к плоскости $ABCD$. Проведем $O_1L \perp DC$, $O_1M \perp BC$, $O_1N \perp AB$, $O_1K \perp AD$. (По теореме о трех перпендикулярах OL, OM, ON, OK перпендикулярны к соответствующим сторонам ромба). $\Delta OO_1L = \Delta OO_1K = \Delta OO_1N = \Delta OO_1M$ (прямоугольные, O_1O — общий катет, $OK=OL=ON=OM=R$). Тогда, $O_1K=O_1L=O_1N=O_1M$, точка O_1 равноудалена от сторон ромба, таким образом O_1 — центр вписанной в ромб окружности. Пусть ее радиус равен r . Тогда из ΔOO_1L :

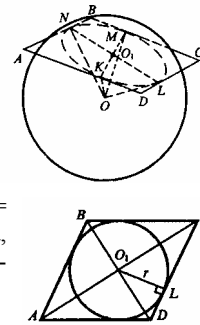
$$OO_1 = \sqrt{OL^2 - O_1L^2} = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{100 - r^2}.$$

Вычислим r . $BD=15$ см, $AC=20$ см.

$$CD = \sqrt{O_1C^2 + O_1D^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BD\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BD^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{225 + 400} = \frac{\sqrt{625}}{2} = \frac{25}{2} \text{ (см).}$$

$$S_{\Delta O_1CD} = \frac{1}{2}CD \cdot O_1L = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot r.$$



$$\text{С другой стороны } S_{\Delta O_1CD} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{8} \cdot 20 \cdot 15.$$

Запишем уравнение:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15, \quad R = \frac{20 \cdot 15}{2 \cdot 25} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3}{2 \cdot 25} = 6 \text{ см},$$

$$O_1O = \sqrt{100 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ см}.$$

586. Запишем уравнение:

$$x^2 + y^2 = R^2 - d^2,$$

где R — радиус сферы, d — расстояние от ее центра до плоскости α .

а) $R=6$ дм, $d=OH=60$ см $=6$ дм. OH — высота тетраэдра, тогда,

$OH \perp$ плоскости ABC и $OH=d$.

$R=d$. Сфера и плоскость имеют одну общую точку, т.е. касаются.

б) $R=3$ м, $OH=d=95$ см $=0,95$ м. $R > d$, $R^2 - d^2 > 0$.

$x^2 + y^2 = R^2 - d^2$ — это уравнение окружности на плоскости ABC . Зна-

чит, сфера и плоскость основания тетраэдра пересекаются по окружности.

в) $R=5$ дм, $d=OH=45$ см $=4,5$ дм.

$R > d$, $R^2 - d^2 > 0$.

Как и в б) — сфера и плоскость пересекаются.

г) $R=3,5$ дм, $OH=d=4$ дм. $R < d$, $R^2 - d^2 < 0$.

$x^2 + y^2 = R^2 - d^2$ не имеет решений, т.е. плоскость ABC и сфера не имеют общих точек.

587. Если $R > d$, то секущая плоскость и сфера пересекаются по окружности радиуса $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. В сечении будет окружность, площадь которой $S = \pi r^2 = \pi(R^2 - d^2)$ (круг, соответствующий окружности г).

а) $R=12$ см, $d=8$ см. $R > d$, секущая плоскость и сфера пересекаются.

$$r^2 = R^2 - d^2, \quad r^2 = 12^2 - 8^2 = 144 - 64 = 80, \quad S = \pi 80 = 80\pi \text{ см}^2.$$

б) $S=12$ см², $d=2$ см. $S = \pi R^2 - \pi d^2$; $\pi R^2 = S + \pi d^2$,

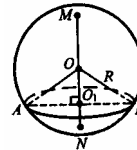
$$R = \sqrt{\frac{\pi d^2 + S}{\pi}} = \sqrt{d^2 + \frac{S}{\pi}}, \quad R = \sqrt{4 + \frac{12}{\pi}} \text{ см}.$$

588. $OO_1 = O_1N = \frac{R}{2}$. Пусть $AO_1 = O_1B = r$.

Тогда из прямоугольного ΔAOO_1 :

$$\text{а) } r = \sqrt{R^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

б) Площадь боковой поверхности прямого кругового конуса вычислим по формуле:

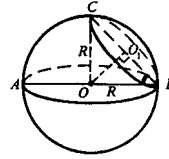


$$S_{бок} = \pi r l, \quad l = OA = R, \quad S_{бок} = \pi r R = \pi \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot R = \frac{\pi R^2 \sqrt{3}}{2}.$$

589. Опустим перпендикуляр OO_1 к плоскости сечения, соединим точку O_1 с точками B и C (точка C получается в результате продолжения отрезка BO_1 до пересечения со сферой).

$\triangle COB$ — равнобедренный, в нем $OO_1 \perp CB$, тогда, OO_1 тоже является медианой, $CO_1 = O_1B$.

Точка O_1 равноудалена от точек C и B , лежащих на окружности, по которой сечение пересекает сферу. Точка O_1 — центр окружности, $\angle BOO_1 = \alpha$. Пусть $O_1B = r$, тогда



а) $R = 2$ см, $\alpha = 30^\circ$.

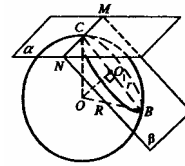
$$\text{Из } \triangle OO_1B: O_1B = r = R \cos 30^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}; L = 2\pi r, \quad L = \frac{2\pi R\sqrt{3}}{2} = \pi\sqrt{3}R = 2\sqrt{3}\pi \text{ см.}$$

$$\text{б) } R = 5 \text{ м, } \alpha = 45^\circ. \quad r = R \cos 45^\circ = \frac{R\sqrt{2}}{2};$$

$$L = 2\pi r = 2\pi \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} = \pi\sqrt{2}R = 5\sqrt{2}\pi \text{ м.}$$

590. C — точка, касания плоскости α со сферой; плоскость β — касательная к сфере; β образует с α угол φ ; β пересекается с шаром по окружности, диаметр которой CB .

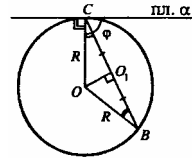
Построим $OO_1 \perp CB$, соединим точку O с точками C и B . $\triangle OO_1C = \triangle OO_1B$ (прямоугольные, OO_1 — общий катет, $OC = OB = R$). Тогда, $CO_1 = O_1B$, точка O_1 — центр окружности, по которой плоскость β пересекает шар.



Построим сечение шара плоскостью COB .

φ — угол между плоскостями α и β .

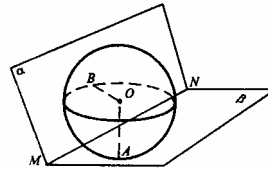
$\angle OCB = 90^\circ - \varphi$, поскольку $\triangle BOC$ — равнобедренный, то $\angle BOO_1 = 90^\circ - \varphi$.



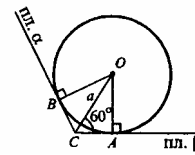
$$\text{Из } \triangle OO_1B: O_1B = r = R \cos(90^\circ - \varphi) = R \sin \varphi.$$

$$\text{Площадь сечения шара } S = \pi r^2, \quad S = \pi(R \sin \varphi)^2 = \pi R^2 \sin^2 \varphi.$$

591. Построим сечение плоскостью, проходящей через центр шара, (точку O), и перпендикулярной ребру двугранного угла MN . Тогда построенная плоскость перпендикулярна α и β . Проведем OB перпендикулярно к плоскости α и OA перпендикулярно к плоскости β . $OB = OA = R$.



$OA \perp \beta$, $AC \perp MN$ (по построению).
 $OC \perp MN$ — по теореме о трех перпендикулярах.
 OC — расстояние от центра сферы до ребра MN ,
 $OC = a$. $\triangle OBC = \triangle OAC$ ($OB = OA = R$, OC — общая),
 тогда OC — биссектриса угла $\angle ACB$, $\angle ACB = 120^\circ$,



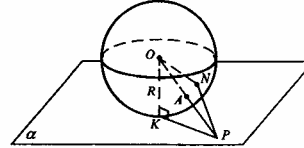
тогда, $\angle OCA = 60^\circ$. Из $\triangle OCA$ имеем: $OA = R = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

AB — расстояние между точками касания.

$\triangle AOB$ — равнобедренный, $\angle OCA = 60^\circ$, тогда, $\angle OBA = \angle OAB = 60^\circ$,

$\triangle AOB$ — равносторонний, $AB = OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

592. α — касательная плоскость к сфере,
 $P \in \alpha$, $KP = 15$ см, $OK = OA = R = 112$ см. Дока-
 жем, что точка $A \in OP$ будет ближайшей
 точкой к точке P .



Выберем произвольную точку N на
 сфере. Проведем отрезки NO и NP . По
 свойству сторон треугольника:

$$ON + NP > OP, \quad OP = OA + AP, \quad R + NP > R + AP, \quad NP > AP.$$

Итак, $AP < NP$, а далее так как точка N выбрана произвольно, то утвер-
 ждение доказано. Из прямоугольного $\triangle OKP$ имеем:

$$OP = \sqrt{OK^2 + KP^2} = \sqrt{R^2 + 15^2} = \sqrt{112^2 + 15^2} = \sqrt{12544 + 225} = \\ = \sqrt{12769} = 113 \text{ см}, \quad AP = OP - R = 113 - 112 = 1 \text{ см}.$$

$$\mathbf{593.} \quad S = 4\pi R^2.$$

$$\text{а) } S = 4\pi \cdot 6^2 = 4\pi \cdot 36 = 144\pi \text{ см}^2;$$

$$\text{б) } S = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi \text{ см}^2;$$

$$\text{в) } S = 4\pi \cdot (\sqrt{2})^2 = 8\pi \text{ м}^2;$$

$$\text{г) } S = 4\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 4\pi \cdot 12 = 48\pi \text{ см}^2.$$

$$\mathbf{594.} \quad S_{\text{сеч}} = 9 = \pi R^2, \quad R^2 = \frac{9}{\pi} \text{ м}^2; \quad S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{9}{\pi} = 36 \text{ м}^2.$$

$$\mathbf{595.} \quad S = 324 \text{ см}^2, \quad S = 4\pi R^2, \quad R = \sqrt{\frac{324}{4\pi}} = \sqrt{\frac{81}{\pi}} = \frac{9}{\sqrt{\pi}} \text{ см}.$$

$$\mathbf{596.} \quad \text{Первая сфера: } S_1 = 4\pi R_1^2. \quad \text{Вторая сфера: } S_2 = 4\pi R_2^2.$$

Множитель 4π одинаковый, тогда, S_1 пропорционально R_1^2 , S_2 про-
 порционально R_2^2 .

Доказано.

$$597. S_{сф} = 4\pi R^2, \quad R = 5 \text{ м}, \quad S_{сф} = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi \text{ м}^2;$$

$$S = \pi L^2, \quad L \text{ — радиус круга. } \pi L^2 = \pi \cdot 100, \quad L^2 = 100, \quad L = 10 \text{ см.}$$

598. Проведем диаметр сферы перпендикулярно к данным параллельным сечениям. Через диаметр проведем секущую плоскость. Она пересечет сферу по окружности, радиус которой равен радиусу сферы.

$$ND = r_1 = 9 \text{ см}, \quad MB = r_2 = 12 \text{ см}, \quad NM = 3 \text{ см}, \quad OD = OB = R.$$

Из прямоугольного $\triangle OBM$ по теореме Пифагора

$$OM = \sqrt{R^2 - 12^2} = \sqrt{R^2 - 144}.$$

$$\text{Из } \triangle ODN: ON = \sqrt{R^2 - 9^2} = \sqrt{R^2 - 81}.$$

$$MN = NO - MO = \sqrt{R^2 - 81} - \sqrt{R^2 - 144},$$

$$\sqrt{R^2 - 81} - \sqrt{R^2 - 144} = 3,$$

$$\sqrt{R^2 - 81} = 3 + \sqrt{R^2 - 144},$$

$$R^2 - 81 = 9 + 6\sqrt{R^2 - 144} + R^2 - 144; \quad 6\sqrt{R^2 - 144} = 54, \quad \sqrt{R^2 - 144} = 9,$$

$$R^2 - 144 = 81, \quad R = 15 \text{ см}$$

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 15^2 = 900\pi \text{ см}^2.$$

599. Рассмотрим сечение сферы плоскостью, проходящей через следующие три точки:

- 1) общую точку двух сечений, из которой под углом 90° выходят радиусы r_1 и r_2 ;
- 2) конец радиуса r_1 ;
- 3) конец радиуса r_2 ;

Угол $\angle ACB$ — вписанный, т.к. он равен 90° , то он опирается на диаметр сферы, то есть $AB=2R$.

$$(2R)^2 = (2r_1)^2 + (2r_2)^2; \quad 4R^2 = 2r_1^2 + 2r_2^2; \quad R^2 = r_1^2 + r_2^2. \quad \text{Площадь сферы } S = 4\pi R^2 = 4\pi(r_1^2 + r_2^2).$$

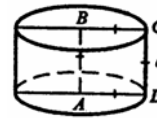
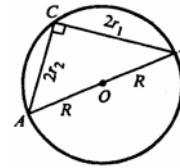
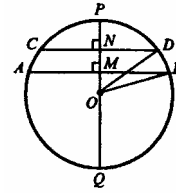
600. Цилиндр получен в результате вращения квадрата ABCD вокруг стороны AB; $AB=a$.

$$S_{сф} = 4\pi a^2; \quad S_{осн} = \pi a^2;$$

$$S_{бок} = 2\pi \cdot AD \cdot AB = 2\pi \cdot a \cdot a = 2\pi a^2;$$

$$S_{полн} = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\pi a^2 + 2\pi a^2 = 4\pi a^2.$$

Тогда: $S_{полн \text{ цикл}} = S_{сф}$. Доказано.



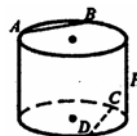
Вопросы к главе VI

1. 90° .

2. Сечение — прямоугольник.

3. АВ и CD лежат в параллельных плоскостях.

$\rho(AB, CD) = H$, H — высота цилиндра.



4. Первая деталь Вторая деталь

$2l$, l — высота (образующая),

$\frac{r}{2}$, r — радиус основания,

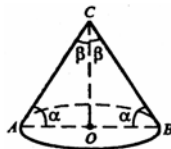
$$S_{бок} = 2\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot 2l = 2\pi l, \quad S_{бок} = 2\pi r l,$$

$$S_{осн} = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \pi \frac{r^2}{4}, \quad S_{осн} = \pi r^2,$$

$$2S_{осн} = \frac{\pi r^2}{2}. \quad 2S_{осн} = 2\pi r^2.$$

Боковые поверхности равны, но площадь двух оснований второй детали больше площади двух оснований первой детали.

5.



а) да; б) да.

6.

Равнобедренный треугольник.

7.

Да.

8. $R = \sqrt{5}$ см, $D = 2R = 2\sqrt{5} = \sqrt{20}$ см.

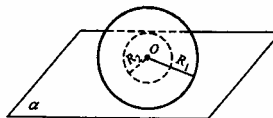
Вычислим гипотенузу прямоугольного треугольника:

$$C = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16 + 8} = \sqrt{24} \text{ см.}$$

$C > D$, т.к. $\sqrt{24} > \sqrt{20}$.

Гипотенуза не помещается внутри сферы, тогда, хотя бы одна вершина лежит вне сферы.

9. Одна сфера всегда будет внутри другой, поэтому общую касательную плоскость провести невозможно.



10. Это сфера, у которой данный отрезок является диаметром.

Дополнительные задачи

601. ABCD — осевое сечение цилиндра; OA=r; точка P — середина радиуса OA; плоскость MNKL \perp OA.

Осевое сечение ABCD и сечение MNKL являются прямоугольниками. Пусть образующая цилиндра LM=l, следовательно, $S = S_{ABCD} = AD \cdot LM = 2rl$.

Выразим длину отрезка MN.

$$ON = OM = r, \quad OP = \frac{r}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника ONP найдем:

$$PN = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}.$$

$\triangle OPN = \triangle OPM$, следовательно, NP=PM,

$$NM = 2PN = 2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}.$$

$$S_{MNKL} = MN \cdot LM = r\sqrt{3}l = rl\sqrt{3}.$$

Итак, $S = 2rl$, отсюда $rl = \frac{S}{2}$. Поэтому $S_{MNKL} = \frac{S}{2}\sqrt{3}$.

602. ABCD — прямоугольник.

Через центры оснований проведем диаметры, перпендикулярные к сторонам AB и DC. $O_1M \perp AB$, $ON \perp DC$.

Из планиметрии известно, что диаметр, перпендикулярный к хорде, делит хорду пополам, следовательно, точка N и точка M — середины DC и AB соответственно. Отрезок MN параллелен сторонам AD и BC, $\angle MNO = 60^\circ$ — угол между прямой BC (или ей параллельной MN) и плоскостью основания.

Пусть R — радиус основания цилиндра.

$DC=AB=x$; $DN = \frac{x}{2}$. Из $\triangle DNO$ получим:

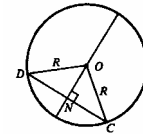
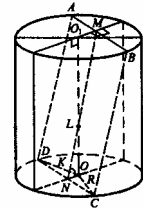
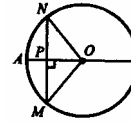
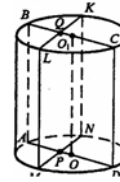
$$ON = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

Из прямоугольного треугольника LON:

$$\frac{LO}{ON} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \quad OL = \sqrt{3} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

Рассмотрим плоскость верхнего основания

$$O_1M = \sqrt{O_1B^2 - BM^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}; \quad \text{следовательно, } O_1M = ON.$$



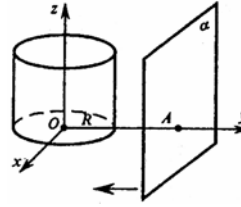
Значит $\Delta O_1LM = \Delta OLN$, отсюда $OL = O_1L$.

$O_1L + LO = O_1O = x$ (высота цилиндра равна его образующей).

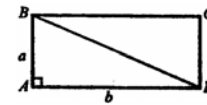
$$2\sqrt{3} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} = x, \quad 4 \cdot 3(R^2 - \frac{x^2}{4}) = x^2, \quad 12R^2 - 3x^2 = x^2, \quad 12R^2 = 4x^2,$$

$$R^2 = \frac{x^2}{3}, \quad R = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

603. Возьмем систему координат, как показано на рисунке. Ось ординат при этом перпендикулярна плоскости α , по оси аппликат направлена ось цилиндра. Будем приближать плоскость α к оси O_z параллельно плоскости O_{xz} . Когда расстояние станет равно R , то допустим, что через точку A можно провести две прямые, параллельные оси O_z (или, что то же самое, перпендикулярные плоскости O_{xy}). Но по теореме п. 4 через точку A может проходить только одна прямая, параллельная оси цилиндра. Следовательно, на поверхности цилиндра найдется только одна прямая, лежащая в плоскости α и параллельная оси цилиндра, она и есть образующая цилиндра.



604. Если вращать прямоугольник $ABCD$ вокруг стороны AB , получим цилиндр, у которого $r=b$, $l=a$.



$$S_{\text{полн}} = 2\pi ab + 2\pi b^2 = S_1.$$

При вращении вокруг стороны AD получим цилиндр, у которого $r=a$, $l=b$.

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rl = 2\pi ab, \quad S_{\text{осн}} = \pi a^2,$$

$$2S_{\text{осн}} = 2\pi a^2, \quad S_{\text{полн}} = 2\pi ab + 2\pi a^2 = S_2.$$

Согласно условию получили систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\pi ab + 2\pi b^2 = S_1, & \begin{cases} 2\pi b(a+b) = S_1, \\ 2\pi ab + 2\pi a^2 = S_2; \end{cases} \\ 2\pi ab + 2\pi a^2 = S_2; & \begin{cases} 2\pi b(a+b) = S_1, \\ 2\pi a(b+a) = S_2. \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{S_1}{S_2}. \quad \text{Подставим в первое уравнение системы:}$$

$$2\pi \cdot a \cdot a \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} + 2\pi \cdot a^2 \cdot \frac{S_1}{S_2} = S_1, \quad 2\pi \cdot a^2 \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_1^2}{S_2^2} \right) = S_1;$$

$$a^2 = \frac{S_1}{2\pi \cdot \frac{S_1 S_2 + S_2^2}{S_2^2}} = \frac{S_1 S_2^2}{2\pi \cdot S_1 (S_2 + S_1)} = \frac{S_2^2}{2\pi (S_2 + S_1)},$$

$$b^2 = a^2 \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{S_2^2}{2\pi (S_1 + S_2)} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{S_1^2}{2\pi (S_1 + S_2)}.$$

Диагональ BD вычислим из $\triangle ABD$.

$$BD = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{S_2^2}{2\pi(S_1 + S_2)} + \frac{S_1^2}{2\pi(S_1 + S_2)}} = \sqrt{\frac{S_2^2 + S_1^2}{2\pi(S_1 + S_2)}}; \quad BD = AC.$$

605. а) ABCD — квадрат, сторона которого равна a .

Следовательно, радиус основания $r = \frac{a}{2}$, высота цилиндра равна a .

$$S_{бок} = 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \pi a^2,$$

$$S_{осн} = \pi r^2 = \pi \frac{a^2}{4},$$

$$2S_{осн} = \pi \frac{a^2}{2},$$

$$S_{полн} = \pi a^2 + \pi \frac{a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2},$$

$$\frac{S_{полн}}{S_{бок}} = \frac{\frac{3}{2}\pi a^2}{\pi a^2} = \frac{3}{2}.$$

б) Пусть $AB=a$, следовательно, $AD=2a$. Рассмотрим два случая.

Первый: $AD = h$, $AB = 2r$, следовательно $r = \frac{a}{2}$.

$$S_{бок} = 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot 2a = 2\pi a^2, \quad S_{осн} = \pi r^2 = \pi \frac{a^2}{4}, \quad 2S_{осн} = \frac{\pi a^2}{2},$$

$$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 2\pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{5}{2} \cdot \pi a^2, \quad \frac{S_{полн}}{S_{бок}} = \frac{\frac{5}{2}\pi a^2}{2\pi a^2} = \frac{5}{4}.$$

Второй: $2AB = AD$. $AB = h$, $AD = 2r$, $r = a$

$$S_{бок} = 2\pi r h = 2\pi \cdot a \cdot a = 2\pi a^2, \quad S_{осн} = \pi r^2 = \pi \cdot a^2,$$

$$2S_{осн} = 2\pi \cdot a^2, \quad S_{полн} = S_{осн} + 2S_{осн} = 2\pi a^2 + 2\pi a^2 = 4\pi a^2$$

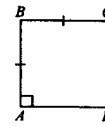
$$\frac{S_{полн}}{S_{бок}} = \frac{4\pi a^2}{2\pi a^2} = 2.$$

606. ABCD — прямоугольник, $AB = h$, $AD = 2r$. Примем $AD = x$, следовательно $r = \frac{x}{2}$.

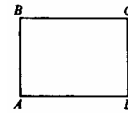
$$S_{бок} = 2\pi r h = 2\pi \frac{x}{2} h = \pi x h.$$

Площадь описанного около осевого сечения круга равна $\pi \cdot AO^2 = \pi \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot AC^2$.

Осевое
сечение
цилиндра



Осевое
сечение



Из $\triangle ACD$ найдем: $AC^2 = h^2 + x^2$. Площадь круга $S_{кр} = \frac{\pi}{4}(h^2 + x^2)$.

По условию $S_{бок} = S_{кр}$, или $\pi xh = \frac{\pi}{4}(h^2 + x^2)$.

Требуется найти отношение $\frac{r}{h} = \frac{x}{2h}$.

$$4xh = h^2 + x^2, \quad \frac{4xh}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} + \frac{x^2}{h^2}, \quad \left(\frac{x}{h}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{h}\right) + 1 = 0.$$

Обозначим $t = \frac{x}{h}$, следовательно $t^2 - 4t + 1 = 0$, $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$,

$t > 0$ — по смыслу задачи, оба корня уравнения удовлетворяют этому условию. Искомое отношение: $\frac{x}{2h} = \frac{t_{1,2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.



607. ABCD — осевое сечение; это — прямоугольник.

Примем $AB = h$, $AD = 2R$.

$S_{бок} = 2\pi Rh$; периметр равен $2(2R + h)$.

Из условий $2p = 2(h + 2R)$, $p = h + 2R$, $h = p - 2R$.

$$S_{бок} = 2\pi R(p - 2R) = 2\pi pR - 4\pi R^2.$$

Примем $f(R) = -4\pi R^2 + 2\pi pR$; $R > 0$.

Найдем ее наибольшее значение. Это экстремум функции $f(R)$.

$$f'(R) = -8\pi R + 2\pi p = 0 \quad R = p/4$$

$$f\left(\frac{p}{4}\right) = -4\pi\left(\frac{p}{4}\right)^2 + 2\pi\frac{p^2}{4} = \frac{-4\pi p^2}{16} + \frac{8\pi p^2}{16} = \frac{4\pi p^2}{16} = \frac{\pi p^2}{4}.$$

Наибольшая площадь боковой поверхности достигается при радиусе основания цилиндра $R = \frac{p}{4}$. $h = p - 2R = p - \frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$.

608. Если внутренний радиус равен 5 см, то внутренний диаметр $D=10$ см. Следовательно, внешний диаметр, учитывая толщину стенок, равен $D + 2 = 12$ (см).

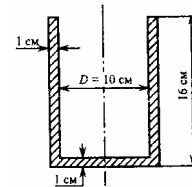
$$S_{осн} = \pi \frac{12^2}{4} = 36\pi \text{ (см}^2\text{)} \quad (S_{круга} = \pi \frac{d^2}{4}, \text{ где } d \text{ — диаметр круга}).$$

Высота стакана 16 см, поэтому

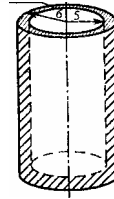
$$S_{бок} = 2\pi \cdot \frac{12}{2} \cdot 16 = 192\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Итак, площадь внешней поверхности стакана

$$S_{внеш} = S_{бок} + S_{осн} = 192\pi + 36\pi = 228\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$



Осевое сечение стакана



Вычислим полную площадь внутренней поверхности.

$$S_{бок} = \pi \cdot 5^2 = 25 (\text{см}^2). \text{ Высота внутренней части } 16 - 1 = 15 (\text{см}).$$

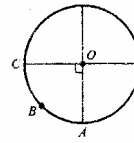
$$S_{бок} = 2\pi \cdot 5 \cdot 15 = 150\pi (\text{см}^2). \quad S_{полн} = S_{осн} + S_{бок} = 175\pi (\text{см}^2).$$

$$\text{Вычислим площадь кольца. } S_k = \pi(6^2 - 5^2) = \pi(36 - 25) = 11\pi (\text{см}^2).$$

$$\text{Площадь полной поверхности стакана равна } 228\pi + 175\pi + 11\pi = 414\pi (\text{см}^2).$$

609. Найдем длину дуги СВА. Если примем за R радиус окружности, то это будет четверть длины круга,

т.е. $(2\pi R)/4$ или $\frac{\pi R}{2}$. Но с другой стороны, когда уже



сложен конус дуга СВА становится окружностью, основанием конуса. Тогда, учитывая, что r — это радиус основания, мы получим, что длина ее будет $2\pi r$. Но это одна и та же дуга,

следовательно, $2\pi r = \frac{\pi R}{2}$ или $r = \frac{R}{4}$, что и требовалось доказать, т.к. R —

это также образующая этого конуса.

610. Образующие конуса равны. Пусть $DA=DB=DC=a$.

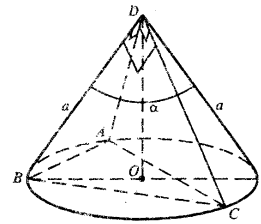
Прямоугольные треугольники DBC, DAB и DAC равны по двум катетам.

$$AB=AC=BC=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}.$$

$$\text{Найдем R по формуле } \frac{a\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

(теорема синусов для $\triangle ABC$)

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad BF = 2\sqrt{\frac{2}{3}}a.$$



Примем $\angle BDF = \alpha$, тогда из теоремы косинусов для $\triangle BDF$ имеем:

$$\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos \alpha, \quad 4 \cdot \frac{2}{3} = 1 + 1 - 2 \cos \alpha,$$

$$\frac{2}{3} = 2 \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

611. Пусть r — радиус основания конуса, h — высота конуса, тогда по условию $S_1 = \pi r^2$ и $S_0 = \pi r l$, l — образующая конуса.

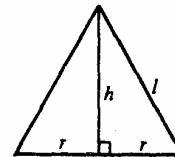
$$l = \sqrt{h^2 + r^2}, \quad S_0 = \pi r \sqrt{h^2 + r^2},$$

$$S_1 = \pi r^2 \quad S_0^2 = \pi^2 r^2 (h^2 + r^2) \quad (h^2 + r^2) = \pi^2 r^2 h^2 + \pi^2 r^4,$$

$$S_1^2 = \pi^2 r^4 \quad S_0^2 = \pi^2 r^2 h^2 + S_1^2$$

$$r^2 h^2 = \frac{S_0^2 - S_1^2}{\pi^2}, \quad rh = \sqrt{\frac{S_0^2 - S_1^2}{\pi^2}} = \frac{\sqrt{S_0^2 - S_1^2}}{\pi} \text{ — это и есть площадь осевого}$$

сечения.



612. Примем $CO=h$, $OB=r$, $l=\sqrt{h^2+r^2}$

$$S_{бок}=\pi r l=\pi r \sqrt{h^2+r^2}, S_{полн}=\pi r^2+S_{бок}=\pi r^2+\pi r$$

$$\sqrt{h^2+r^2}. \text{ По условию } \frac{S_{бок}}{S_{полн}}=\frac{7}{8},$$

$$\frac{\pi r \sqrt{h^2+r^2}}{\pi r^2+\pi r \sqrt{h^2+r^2}}=\frac{7}{8},$$

$$8 \sqrt{h^2+r^2}=7r+7 \sqrt{h^2+r^2}, \sqrt{h^2+r^2}=7r, h^2+r^2=49r^2, h^2=48r^2, \frac{h^2}{r^2}=48$$

$$\frac{h}{r}=\operatorname{tg} \alpha, \frac{h^2}{r^2}=\operatorname{tg}^2 \alpha \quad l+\operatorname{tg}^2 \alpha=\frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 49=\frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$\cos \alpha=\frac{1}{7}, \text{ или } \cos \alpha=-\frac{1}{7}. \text{ Так как } \triangle ABC \text{ равнобедренный, то } \alpha \text{ — это}$$

острый угол, $\cos \alpha > 0$. $\alpha=\arccos \frac{1}{7}$.

613. Построим $OC \perp DB$ и отрезок PC . По теореме о трех перпендикулярах $PC \perp DB$, PC — высота $\triangle DPB$.

Запишем теорему синусов для равнобедренного $\triangle DPB$.

$$\frac{DB}{\sin 120^\circ}=\frac{4}{\sin 30^\circ}, \sin 120^\circ=\sin 60^\circ$$

$$DB=\frac{4 \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}=4 \cdot 2 \frac{\sqrt{3}}{2}=4 \sqrt{3} \text{ (см)}, DC=\frac{1}{2} DB=2 \sqrt{3} \text{ (см)} \quad OC=\sqrt{DO^2-DC^2}= \\ =\sqrt{16-12}=2 \text{ (см)}$$

$$\angle PCO=45^\circ. \text{ Из } \triangle POC: PC=\frac{OC}{\cos 45^\circ}=2 \sqrt{2} \text{ (см).}$$

$$S_{\triangle DBP}=\frac{1}{2} \cdot DB \cdot PC=\frac{1}{2} \cdot 4 \sqrt{3} \cdot 2 \sqrt{2}=4 \sqrt{6} \text{ (см}^2\text{)}$$

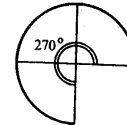
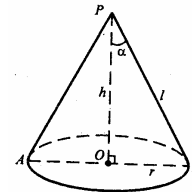
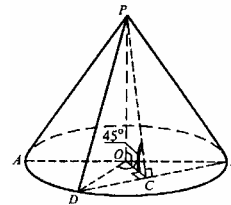
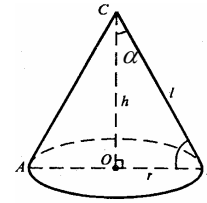
614. По формуле $\alpha=\frac{360^\circ \cdot r}{\ell}$

$$\frac{r}{\ell}=\frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{270^\circ}{360^\circ}=\frac{3}{4}.$$

Из прямоугольного треугольника POB :

$$\frac{r}{\ell}=\sin \alpha, \sin \alpha=\frac{3}{4}, \alpha=\arcsin \frac{3}{4} \text{ (так как } \alpha \text{ — острый угол).}$$

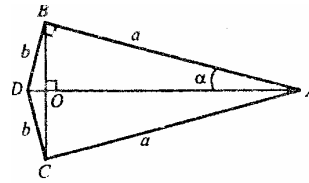
615. Если вращать $\triangle ABD$ вокруг гипотенузы получим два конуса с общим основанием.



$$S_{\text{бок}} = \pi r l, \text{ Из } \triangle ABD: DA: \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

Боковая поверхность конуса с образующей a : $S_{\text{бок}} = \pi \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot a$



Боковая поверхность конуса с образующей b : $S_{\text{бок}} = \pi \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot b$

Поверхность тела имеет площадь: $\frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{\pi a b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\pi a b (a + b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

616. При вращении трапеции ABD вокруг стороны AD получится тело вращения, состоящее из трех частей: центральной — прямого кругового цилиндра с радиусом BM и высотой BC и двух одинаковых конусов (трапеция равнобедренная по условию).

$$AM = ND = \frac{10 - 6}{2} = 2 \text{ (см)}.$$

$$AB = \frac{AM}{\cos 60^\circ} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ (см)}$$

$$BM = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Найдем боковую поверхность цилиндра:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r l = 2\pi \cdot BM \cdot BC = 2\pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 = 24\sqrt{3}\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Боковая поверхность одного конуса:

$$S_{\text{бок}} = \pi r l = \pi \cdot BM \cdot AB = \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 = 8\sqrt{3}\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Боковая поверхность всего тела вращения:

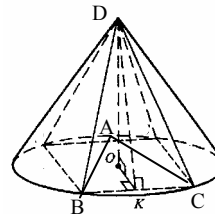
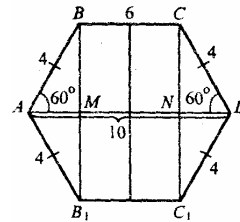
$$S = 24\sqrt{3}\pi + 2 \cdot 8\sqrt{3}\pi = 24\sqrt{3}\pi + 16\sqrt{3}\pi = 40\sqrt{3}\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

617. а). Построим $OK \perp BC$, отрезок DK. По теореме о трех перпендикулярах $DK \perp BC$. В правильном $\triangle ABC$, OK — радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Примем $OK = r$.

$$r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p}, \text{ где } p \text{ — полупериметр } \triangle ABC.$$

Из равенства $\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2R$ (теорема синусов для $\triangle ABC$) найдем a — сторону $\triangle ABC$

$$a = 2R \sin 60^\circ = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (см)}.$$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, p = \frac{3a}{2}; r = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cdot \frac{3a}{2}} = \frac{a \sqrt{3}}{2 \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{a}{2 \sqrt{3}} \text{ (см)}. r = \frac{3 \sqrt{3}}{2 \sqrt{3}} = \frac{3}{2} \text{ (см)}.$$

$$\text{Из прямоугольного } \triangle DOK: DK = \sqrt{DO^2 + OK^2} = \sqrt{16 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{73}}{2}.$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DK = \frac{1}{2} a \cdot DK = \frac{1}{2} \cdot 3 \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{73}}{2} = \frac{3}{4} \sqrt{219} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{\text{бок}} = 3 \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{9}{4} \sqrt{219} \text{ (см}^2\text{)}; S_{\triangle ABC} = \frac{(3 \sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{27 \sqrt{3}}{4};$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\triangle ABC} = \frac{27 \sqrt{3}}{4} + \frac{9}{4} \sqrt{219} = \frac{27 \sqrt{3}}{4} + \frac{9 \sqrt{3} \cdot \sqrt{73}}{4} = \frac{9 \sqrt{3}}{4} \cdot (3 + \sqrt{73}) \text{ (см}^2\text{)};$$

б) Построим $OK \perp AD$, отрезок PK . По теореме о трех перпендикулярах $PK \perp AD$.

В квадрате диагональ $BD = 2R$, R — радиус описанной окружности около квадрата, $BD = 2 \cdot 3$. Примем сторона квадрата равна a см, следовательно $a \sqrt{2} = BD$, $a \sqrt{2} = 6$, $a = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3 \sqrt{2}$ (см);

$$OK = \frac{a}{2} = \frac{3}{2} \sqrt{2}.$$

Из прямоугольного $\triangle POK$:

$$PK = \sqrt{PO^2 + OK^2} = \sqrt{16 + \frac{9}{4} \cdot 2} = \sqrt{16 + \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{32 + 9}{2}} = \sqrt{\frac{41}{2}}$$

$$S_{\triangle APD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot PK = \frac{3 \sqrt{2} \cdot \sqrt{41}}{2 \sqrt{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{41} \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_{\text{бок}} = 4 \cdot S_{\triangle APD} = 4 \cdot \frac{3 \sqrt{41}}{2} = 6 \sqrt{41} \text{ (см}^2\text{)}; \text{ (боковые грани являются равнобедренными треугольниками);}$$

$$S_{\triangle ABCD} = a^2 = (3 \sqrt{2})^2 = 18 \text{ (см}^2\text{)};$$

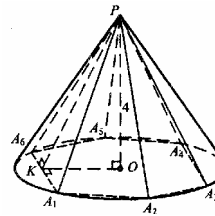
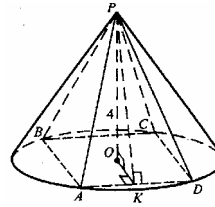
$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\triangle ABCD} = 6(\sqrt{41} + 3) \text{ (см}^2\text{)};$$

в) PO — высота конуса. Построим $OK \perp A_1 A_6$, отрезок PK . По теореме о трех перпендикулярах $PK \perp A_1 A_6$,

$A_1 A_2 \dots A_6$ — правильный 6-угольник. Сторона правильного 6-угольника равна радиусу описанной окружности.

$$a_6 = R, A_1 A_6 = a_6 = 3 \text{ (см)}$$

OK — радиус вписанной в правильный 6-угольник окружности.



По теореме из планиметрии, $OK=r=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (см)

Из прямоугольного ΔPOK :

$$PK=\sqrt{PO^2+OK^2}=\sqrt{16+\frac{9}{4}\cdot 2}=\sqrt{\frac{64+27}{4}}=\sqrt{\frac{91}{4}}=\frac{\sqrt{91}}{2} \text{ (см)}$$

$$S_{\Delta A_1PA_6}=\frac{1}{2}\cdot A_1A_6\cdot PK=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{91}}{2}=\frac{3}{4}\sqrt{91} \text{ (см}^2\text{)};$$

Все боковые грани — равные равнобедренные треугольники, поэтому

$$S_{бок}=6\cdot S_{\Delta A_1PA_6}=6\cdot \frac{3\sqrt{91}}{4}=\frac{9\cdot \sqrt{91}}{2} \text{ (см}^2\text{)}; S_{осн}=6\cdot S_{\Delta A_1OA_6};$$

A_1OA_6 — равносторонний, поэтому

$$S_{\Delta A_1OA_6}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ (см}^2\text{)}; S_{полн}=\frac{9}{2}(\sqrt{91}+6\sqrt{3}) \text{ (см}^2\text{)}$$

618. $S_{бок}=\pi(r+r_1)l$, где $r=\frac{1}{2}AD=20$ (см),

$$l=AB, r_1=\frac{1}{2}BC=BM.$$

По теореме из планиметрии известно, что если в равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то высота трапеции равна средней линии.

$$S_{ABCD}=36=\frac{BC+AD}{2}\cdot MN$$

Но $\frac{BC+AD}{2}$ =средней линии= MN , где MN — высота трапеции. Следова-

тельно, $36=(MN)^2$, MN — высота трапеции. $6 \text{ (дм)}=60 \text{ (см)}$

$$60=\frac{BC+AD}{2}, 60=\frac{2r_1+40}{2} \quad 120=2r_1+40.$$

$$2r_1=80, r_1=40 \text{ (см)} \quad BC=2\cdot 40=80 \text{ (см)}$$

Изменим рисунок.

Построим $AE \perp BC$.

$$BE=40-20=20 \text{ (см)}, AE=MN=60 \text{ (см)}$$

Из прямоугольного ΔABE

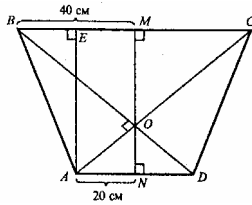
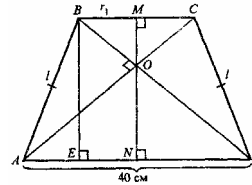
$$BA=\sqrt{BE^2+AE^2}=\sqrt{20^2+60^2}=\sqrt{4000}=20\sqrt{10} \text{ (см)}$$

$$S_{бок}=\pi(40+20)\cdot 20\sqrt{10}=1200\sqrt{10}\pi \text{ (см}^2\text{)}$$

Площадь верхнего основания равна: $\pi r_1^2=\pi 40^2=1600\pi \text{ (см}^2\text{)}=16\pi \text{ (дм}^2\text{)}$, а площадь нижнего основания равна $\pi 20^2=400\pi \text{ (см}^2\text{)}=4\pi \text{ (дм}^2\text{)}$.

$$S_{полн}=12\sqrt{10}+16\pi+4\pi=12\sqrt{10}+20\pi \text{ (дм}^2\text{)}.$$

619. Докажите, что: а) центр сферы является центром симметрии сферы; б) любая прямая, проходящая через центр сферы, является осью симметрии



сферы; в) любая плоскость, проходящая через центр сферы, является плоскостью симметрии сферы.

а) Проведем произвольную прямую через центр сферы. Прямая пересечет сферу в точках А и В. Отрезок АВ будет диаметром, $\frac{1}{2} АВ$ — радиус сферы. Расстояние от каждой из точек до центра сферы равно, значит, центр сферы будет центром симметрии двух данных точек. Т.к. прямая проводилась произвольно, то утверждение справедливо для любых двух точек, являющихся концами диаметра сферы.

б) Построим произвольную прямую а, которая проходит через центр сферы О. Докажем, что она является осью симметрии. Возьмем произвольную точку А на сфере. Построим точку симметричную ей относительно О. Для этого проведем $AK \perp a$ и продолжим за точку К на расстояние АК. Получим точку A_1 . (по 2-м катетам) $OA, OA=R$. Но сфера — геометрическое место точек удаленное от т. О на расстояние R. Значит A_1 лежит на сфере.

Значит, при симметрии произвольная точка сферы переходит в точку этой же сферы. Тогда прямая а — любая прямая, проходящая через центр сферы, является осью симметрии сферы.

в) Возьмем произвольную плоскость α , которая проходит через центр сферы. Докажем, что для любой точки А симметричная ей относительно α точка A_1 , также лежит на сфере.

Действительно, при построении симметричной точки мы проведем отрезок АК α (К α) и продолжим его за точку К так, чтобы $AK=KA_1$. $\triangle AKO = \triangle A_1KO$ ($OK=OK, AK=A_1K$ — по двум катетам). $\triangle A_1O=AO < R$, т.е. A_1 , удалена от точки О на расстояние R. Следовательно, что A_1 , лежит на сфере. Следовательно, для любой точки А симметричная ей точка также лежит на сфере, а значит α — плоскость симметрии.

620. а) Вычислим длину гипотенузы прямоугольного треугольника:

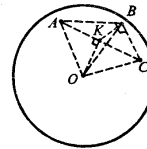
$$\sqrt{1,8^2 + 2,4^2} = \sqrt{3,24 + 5,76} = \sqrt{9} = 3 \text{ (см)}$$

Диаметр сферы равен $2 \cdot 1,5=3$ (см).

Вывод: диаметр сферы равен длине гипотенузы, следовательно, центр сферы находится на середине гипотенузы, и лежит в плоскости треугольника.

б) Плоскость ΔABC пересекает сферу по окружности.

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. Проведем из точки О отрезок $OK \perp$ плоскости ΔABC , отрезки КА, КВ, КС. Равные наклонные (радиусы ОА, ОВ, ОС) имеют равные проекции на плоскость ABC, тогда, $KA=KB=KC$, точка К равноудалена от вершин ΔABC , значит, она — центр описанной окружности. Таким образом, точка К — середина гипотенузы AC, ОК — искомое расстояние.



$AC=3$ см, $AK=1,5$ см. Из ΔABC по теореме Пифагора

$$OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{6,5^2 - 1,5^2} = \sqrt{42,25 - 2,25} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

621. Очевидно, что из точки О всегда можно провести прямую (отрезок), перпендикулярную l. Введем систему координат, как показано на рисунке.

Уравнение окружности: $x^2+y^2=R^2$

Уравнение прямой $l: x=d$

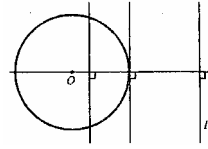
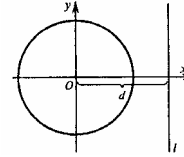
Исследуем систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = d \end{cases} \quad y^2 = R^2 - d^2 = (R+d)(R-d),$$

$$y = \pm \sqrt{(R+d)(R-d)} \quad (R+d > 0 \text{ всегда}).$$

а) Если $R - d > 0$, $R=d$ и $y=0$ — касание в точке $(d, 0)$ с окружностью, а значит, со сферой.

б) Если $R - d < 0$, то решений нет, значит, l не пересекается с окружностью; l не пересекается со сферой.



622. Найдите координаты точки пересечения сферы, заданной уравнением $(x-3)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 25$, с осями координат.

Если точка пересечения на оси абсцисс, ее координаты имеют вид $(x; 0; 0)$. Вычислим x .

$$(x-3)^2 + 0^2 + 5^2 = 25; (x-3)^2 = 0, x=3. \text{ Координаты точки } (3; 0; 0).$$

Если точка пересечения на оси ординат, то ее координаты имеют вид $(0; y; 0)$. Вычислим y .

$$(0-3)^2 + y^2 + (0+5)^2 = 25. \quad 9 + y^2 + 25 = 25, \quad y^2 + 9 = 0, \text{ уравнение не имеет решений, значит, сфера не имеет общих точек с осью ординат.}$$

Если есть точка пересечения с осью аппликата, то эта точка имеет координаты $(0; 0; z)$.

$$(0-3)^2 + 0^2 + (z+5)^2 = 25, \quad (z+5)^2 = 25 - 9 = 16, \quad z+5 = 4, \text{ или } z+5 = -4,$$

$$z_1 = -1, \text{ или } z_2 = -9. \text{ Сфера пересекает эту ось в двух точках с координатами } (0; 0; -1) \text{ и } (0; 0; -9).$$

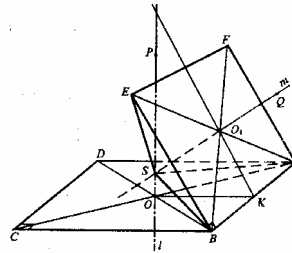
623. Найдите радиус сечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ плоскостью, проходящей через точку $M(2; 4; 5)$ и перпендикулярной к оси абсцисс.

Т.к. плоскость проходит через точку $M(2; 4; 5)$ перпендикулярно оси абсцисс, то все точки этой плоскости имеют координаты вида $(2; y; z)$, если они удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, то будут лежать на сфере.

$2^2 + y^2 + z^2 = 36, \quad y^2 + z^2 = 32$. В плоскости, перпендикулярной оси абсцисс, это уравнение окружности с радиусом $r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Следовательно, плоскость пересекает сферу по окружности с радиусом $4\sqrt{2}$.

624. Через точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ проведем прямую l , l перпендикулярна плоскости $ABCD$. Все точки на прямой l равноудалены от вершин A, B, C, D . (Если наклонные, проведенные из одной точки, имеют равные проекции, то сами наклонные равны $PA=PB=PC=PD, P \in l$.)

Построим отрезок $OK \perp AB$, через точку O_1 проведем луч KO_1 . $AB \perp$ плоскости POK . Прямая AB лежит в плоскости прямоугольника $ABEF$, значит плоскости POK и $ABEF$ взаимно перпендикулярны. Проведем через точку O_1 прямую $m \perp$ плоскости $ABEF$.



Если две плоскости перпендикулярны и к одной из них проведен перпендикуляр, который имеет общую точку с другой плоскостью, то этот перпендикуляр принадлежит в этой плоскости.

Таким образом, $m \subset$ плоскости POK ; m геометрическое место точек, равноудаленных от вершин прямоугольника $ABEF$: $QA=QB=QE=QF$ $Q \in m$. Прямые l и m пересекаются в точке S , которая равноудалена как от вершин прямоугольника $ABCD$, так и от вершин прямоугольника $ABEF$.

Докажем, что точка S равноудалена от вершин A, B, C, D и вершин E, F . Проведем отрезки SA, SE, SB .

$\triangle SAO_1 = \triangle SBO_1$ (они прямоугольные, SO — общий катет, $OA=OB$ по свойству диагоналей прямоугольника).

Отсюда $SA=SB$. Значит, $SA=SB=SE$

Доказано, что $SA=SB=SE=SC=SD$ и $SA=SB=SE=SF$, следовательно, точка S равноудалена от всех вершин, значит, она является центром сферы, проходящей через все данные вершины.

625. Введем систему координат, согласно рисунку.

Уравнение сферы с центром в точке O : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Уравнение сферы с центром в точке O_1 . $x^2 + (y-d)^2 + z^2 = R^2$.

Решение системы:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + (y-d)^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$$

дает ответ на вопрос задачи.

$$x^2 + y^2 + z^2 - x^2 - (y^2 - 2dy + d^2) - z^2 = 0. \quad 2dy - d^2 = 0, \quad d > 0, \quad \text{поэтому } 2y = d, \quad \frac{1}{2} d = y.$$

Согласно условию задачи $d < 2R$, тогда, $\frac{d}{2} < R, y < R$.

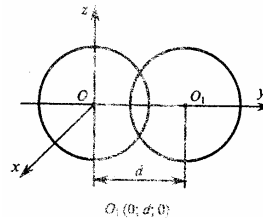
Значит, есть некоторая плоскость, которая перпендикулярна оси ординат (а значит, параллельная плоскости Oxz) и пересекает сферу, а при пересечении сферы плоскостью в сечении получим окружность. Утверждение а) доказано.

Подставим значение $y = \frac{d}{2}$ в уравнение сферы $x^2 + \frac{d^2}{4} + z^2 = R^2$,

$$x^2 + z^2 = R^2 - \frac{d^2}{4}.$$

$$\text{Если } d = 1,6R, \text{ то } x^2 + z^2 = R^2 - \frac{2,56 R^2}{4} = R^2 (1 - 0,64) = 0,36 R^2$$

Это уравнение окружности в плоскости, параллельной плоскости Oxz , ее радиус $r = \sqrt{0,36 R^2} = 0,6R$.

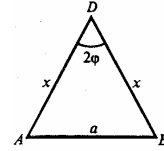
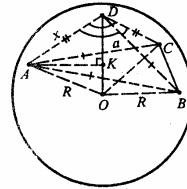


626. а) Построим $DK \perp$ плоскости ABC , проведем отрезки KB , KC . (Чтобы не загромождать рисунок, показан только KA).

$\triangle DKA = \triangle DKB = \triangle DKC$ (по катету и гипотенузе). Следовательно, $KA = KB = KC = r$, r — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$. Построим отрезок $OT \perp$ плоскости ABC и отрезки TA , TB , TC .

$\triangle OTA = \triangle OTB = \triangle OTC$ (они прямоугольные, OT — общий катет, $OA = OB = OC = R$, R — радиус сферы). тогда, $TA = TB = TC = r$, r — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$. Выше доказано, что $KA = KB = KC = r$. Значит, точки T и K совпадают и отрезок $OD \perp$ плоскости ABC .

$\triangle ADC = \triangle BDC = \triangle ADB$ (по двум сторонам и углу между ними), следовательно, $AB = CB = AC$, $\triangle ABC$ — равносторонний.



$$\text{Пусть } AD = x, AB = a. \angle A = \angle B = \frac{180^\circ - 2\varphi}{2} = 90^\circ - \varphi$$

Согласно теоремы синусов:

$$\frac{a}{\sin 2\varphi} = \frac{x}{\sin (90^\circ - \varphi)}, \quad \frac{a}{2 \sin \varphi \cos \varphi} = \frac{x}{\cos \varphi}, \quad a = 2 \sin \varphi x$$

Пусть $KA = KB = KC = r$, По теореме синусов для $\triangle ABC$.

$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2r, a = 2r \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}r. \quad 2 \sin \varphi \cdot x = \sqrt{3}r, \quad r = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}} \cdot x.$$

$$\text{В } \triangle ADK \quad DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{x^2 - r^2}.$$

$$\text{В } \triangle AOK \quad OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

$$DK + KO = R, \quad \sqrt{x^2 - r^2} + \sqrt{R^2 - r^2} = R, \quad (\sqrt{x^2 - r^2} + \sqrt{R^2 - r^2})^2 = R^2$$

$$x^2 - r^2 + R^2 - r^2 + 2\sqrt{(x^2 - r^2)(R^2 - r^2)} = R^2$$

$$2\sqrt{(x^2 - r^2)(R^2 - r^2)} = 2r^2 - x^2, \quad 4(x^2 - r^2)(R^2 - r^2) = 4r^4 + x^4 - 4r^2x^2,$$

$$4x^2R^2 - 4x^2r^2 - 4r^2R^2 + 4r^4 = 4r^4 + x^4 - 4r^2x^2,$$

$$x^4 - 4x^2R^2 + 4r^2R^2 = 0, \quad x^4 - 4x^2R^2 + 4R^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \sin^2 \varphi \cdot x^2 = 0,$$

$$x^2(x^2 - 4R^2 + \frac{16R^2}{3} \cdot \sin^2 \varphi) = 0, \quad x \neq 0, \text{ тогда, } x^2 = 4R^2 - 4R^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \sin^2 \varphi.$$

$$x = DA = \sqrt{4R^2(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \varphi)} = 2R \sqrt{\frac{3 - 4 \sin^2 \varphi}{3}}$$

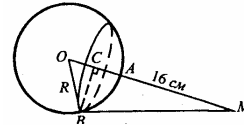
$$AB = a = 4R \sin \varphi \sqrt{\frac{3 - 4 \sin^2 \varphi}{3}}$$

б) Сечение сферы плоскостью ΔABC является окружность с радиусом

$$r = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}} \cdot 2R \cdot \frac{\sqrt{3 - 4 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3} \sqrt{3 - \sin^2 \varphi} \cdot \sin \varphi \cdot R$$

$$\text{Вычислим площадь сечения: } \pi r^2 = \pi \frac{16}{9} \sin^2 \varphi (3 - 4 \sin^2 \varphi) R^2.$$

627. Известно, что ближайшая точка (А), лежащая на сфере к точке (М), лежащей вне сферы, принадлежит отрезку СМ, где О — центр сферы.



Пусть СВ — r — радиус окружности, $AC=x$, $BM=24$ см. $OA=10$ см

Из прямоугольного ΔCBM : $CM^2 + CB^2 = MB^2$, или $(16+x)^2 + r^2 = 24^2$ см.

Из прямоугольного ΔCBO : $OB^2 = OC^2 + CB^2$, или $10^2 = (10-x)^2 + r^2$.

$$\text{Решим систему } \begin{cases} (16+x)^2 + r^2 = 576, \\ (10-x)^2 + r^2 = 100. \end{cases}$$

$$(16+x)^2 - (10-x)^2 = 476, \quad 256 + 32x + x^2 - 100 - x^2 + 20x = 476.$$

$$52x = 576 - 256, \quad 52x = 320, \quad x = \frac{320}{52} = \frac{80}{13} \text{ (см);}$$

$$r^2 = 100 - (10-x)^2 = 100 - 100 + 20x - x^2 = 20x - x^2$$

$$r^2 = \frac{20 \cdot 80}{13} - \frac{80 \cdot 80}{13 \cdot 13} = 100 \cdot \frac{16 \cdot 13 - 64}{169} = \frac{10^2 \cdot 12^2}{13^2};$$

$$r = \sqrt{\frac{10^2 \cdot 12^2}{13^2}} = \frac{10 \cdot 12}{13} = \frac{120}{13} \text{ (см).}$$

$$\text{Вычислим длину окружности } L = 2\pi r, \quad L = 2\pi \frac{120}{13} = \frac{240}{13} \pi \text{ (см)}$$

628. Пусть R — радиус внешней сферы; r — радиус внутренней сферы.

Сечение тела плоскостью, которая проходит через центры сфер, кольцо.

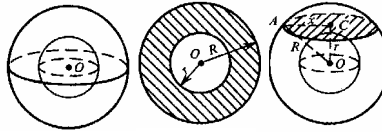
Площадь кольца равна $\pi (R^2 - r^2)$. (1)

Сечение, плоскостью касательной к внутренней сфере — окружность.

По теореме п. 61 $OC=r$ перпендикулярен к плоскости в сечении. Из прямоугольного ΔACO :

$$x = \sqrt{R^2 - r^2} \quad S_{\text{сеч}} = \pi x^2 = \pi (R^2 - r^2). \quad (2)$$

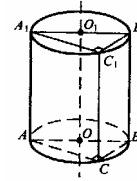
Сравнивая выражение (1) и (2) тождественны, убеждаемся в справедливости утверждения задачи.



Разные задачи на многогранник, цилиндр, конус и шар

629. AB — диаметр окружности основания $\angle ACB=90^\circ$, т.к. опирается на диаметр.

$BC \perp CC_1$, т.к. CC_1 образующая и перпендикулярна основанию; $BC \perp$ плоскости ACC_1 . По признаку перпендикулярности двух плоскостей (п.23) плоскость AA_1C_1C перпендикулярна плоскости BCC_1B_1 .



630. SO перпендикулярна ABCD, SO=h=12 см, AB=8см, BC=6см

OA=OB=r. Ребра пирамиды равны образующим конуса и лежат на поверхности конуса.

$$BD=2r, BD=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10 \text{ см}$$

$$r=5 \text{ см}$$

Вычислим площадь полной поверхности конуса.

$$S_{\text{осн}}=\pi r^2=\pi \cdot 25 \text{ (см}^2\text{)}$$

Из прямоугольного $\triangle SOA$

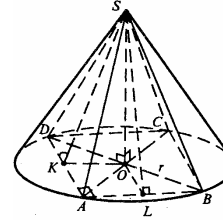
$$SA=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13 \text{ см}$$

$$S_{\text{бок}}=\pi r l, l=SA$$

$$S_{\text{бок}}=\pi \cdot 5 \cdot 13=65\pi \text{ см}^2.$$

$$S_{\text{полн}}=S_{\text{осн}}+S_{\text{бок}}=(25+65)\pi=90\pi \text{ см}^2$$

$$S_{ABCD}=AB \cdot BC=6 \cdot 8=48 \text{ см}^2$$



Боковые грани попарно равны. Построим $OK \perp DA$, $OL \perp AB$, отрезки SK и SL. По теореме о трех перпендикулярах $SK \perp DA$ и $SL \perp AB$.

$$OK=\frac{1}{2} AB=4 \text{ (см)}, OL=\frac{1}{2} BC=3 \text{ см.}$$

$$\text{Из } \triangle SOK: SK=\sqrt{h^2+OK^2}=\sqrt{144+16}=4\sqrt{10} \text{ см.}$$

$$S_{\triangle ASD}=\frac{1}{2} SK \cdot DA=\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{10} \cdot 6=12\sqrt{10} \text{ см}^2$$

$$\text{Из } \triangle SOL: SL=\sqrt{h^2+OL^2}=\sqrt{144+9}=3\sqrt{17} \text{ см.}$$

$$S_{\triangle ASB}=\frac{1}{2} \cdot SL \cdot AB=\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{17} \cdot 8=12\sqrt{17} \text{ см}^2.$$

$$S_{\text{бок}}=2(S_{\triangle ASD}+S_{\triangle ASB})=2 \cdot 12(\sqrt{10}+\sqrt{17})=24(\sqrt{10}+\sqrt{17}) \text{ см}^2$$

$$S_{\text{полн}}=S_{\text{бок}}+S_{\text{осн}}=24\sqrt{10}+24\sqrt{17}+48=24(\sqrt{10}+\sqrt{17}+2) \text{ см}^2$$

$$\frac{S_{\text{пирам}}}{S_{\text{кон}}}=\frac{24(\sqrt{10}+\sqrt{17}+2)}{90\pi}=\frac{4(\sqrt{10}+\sqrt{17}+2)}{15\pi}$$

631. а) $r=2$ см, $h=4$ см, $R=5$ см.

$$\text{Обозначим } AC=BC=AB=a, \text{ тогда } R=\frac{a}{\sqrt{3}}, a=R\sqrt{3}=5\sqrt{3} \text{ см.}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{4} \text{ см}^2.$$

Обозначим $A_1C_1=B_1C_1=A_1B_1=b$

$$\text{Тогда } r = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad b = r \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle A_1D_1C_1} = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{ см}^2$$

Боковые грани — равные равнобедренные трапеции. Построим $OK_1 \perp A_1B_1$, $OK \perp AB$, отрезок K_1K . По теореме о трех перпендикулярах $K_1K \perp AB$.

OK, O_1K_1 — радиусы вписанных окружностей в $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ соответственно.

$$OK = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2} \text{ см},$$

$$O_1K_1 = \frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1 \text{ см}.$$

$$\text{Проведем } K_1K_2 \perp OK. \quad K_2K_1 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} \text{ см}.$$

$$\text{Из } \triangle K_1K_2K: K_1K = \sqrt{h^2 + \frac{9}{4}} = \sqrt{16 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{73}{4}} = \frac{\sqrt{73}}{2} \text{ см}.$$

$$S_{\text{бок}} = 3 S_{\triangle ABB_1A_1} = \frac{21\sqrt{3} \cdot \sqrt{73}}{4} \text{ см}^2$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{21\sqrt{3} \cdot \sqrt{73}}{4} + \frac{75\sqrt{3}}{4} + \frac{12\sqrt{3}}{4} = \frac{21\sqrt{3} \cdot \sqrt{73}}{4} + \frac{87\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} (7\sqrt{73} + 29) \text{ см}^2$$

$$\text{б) Пусть } AB=a, \text{ тогда } R = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

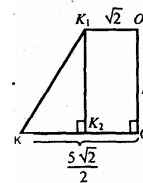
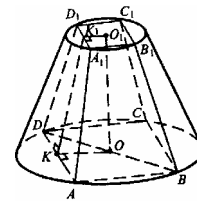
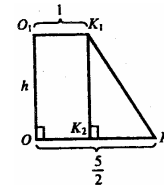
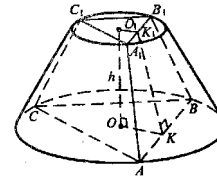
$$a = R \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ см}, \quad S_{ABCD} = a^2 = 50$$

$$\text{Обозначим } A_1B_1=b, \text{ тогда } V = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$b = r \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ см} \quad S_{\triangle A_1B_1C_1D_1} = b^2 = 8 \text{ см}^2$$

Боковые грани — равные равнобедренные трапеции. Построим $O_1K_1 \perp D_1A_1$, $OK \perp DA$, отрезок K_1K . По теореме о трех перпендикулярах $K_1K \perp AD$.

$$O_1K_1 = \frac{b}{2} = \sqrt{2} \text{ см}; \quad OK = \frac{a}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2};$$



$$KK_2 = \frac{5}{2}\sqrt{2} - \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ см}$$

Из $\Delta K_1 K_2 K$:

$$K_1 K = \sqrt{h^2 + K_2 K^2} = \sqrt{16 + \frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{82}{4}} = \frac{\sqrt{82}}{2} \text{ см.}$$

$$S_{\Delta A_1 D_1 D} = \frac{A_1 D_1 + AD}{2} \cdot K_1 K = \frac{a+b}{2} \cdot K_1 K = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{82}}{2} = \frac{7\sqrt{2} \cdot \sqrt{82}}{4} \text{ см}$$

$$S_{\text{бок}} = 4 \cdot S_{\Delta A_1 D_1 D} = 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{82} \text{ см}^2.$$

$$S_{\text{поли}} = S_{\text{бок}} + S_{ABCD} + S_{\Delta A_1 B_1 C_1 D_1} = 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{82} + 50 + 8 \cdot 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{82} + 58 =$$

$$= (14\sqrt{41} + 58) \text{ см}^2.$$

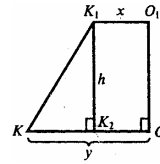
в) Обозначим сторону верхнего основания b , нижнего основания a , $a > b$; радиус верхнего основания — r , нижнего основания — R . Следовательно, $b=r$, $a=R$.

Правильный 6-угольник состоит из 6 равносторонних треугольников; высота которых равна радиусу вписанной в 6-угольник окружности равного x , а в нижний 6-угольник — y . Из планиметрии известно, что:

$$x = \frac{b\sqrt{3}}{2}, y = \frac{a\sqrt{3}}{2}, x = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ см. } y = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ см.}$$

Площадь нижнего основания пирамиды равна

$$6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot y \right) = 3 \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2} \text{ см}^2.$$



Площадь верхнего основания пирамиды равна

$$6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot x \right) = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Все 6 боковых граней являются равными равнобедренными трапециями. Вычислим высоту трапеции. В плоскости верхнего основания построим отрезок $O_1 K_1$ перпендикулярно к стороне 6-угольника; в нижней плоскости построим OK перпендикулярно одноименной стороне 6-угольника; проведем отрезок $K_1 K$.

$$OK = y, O_1 K_1 = x$$

$$KK_2 = y - x = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - b) = \frac{\sqrt{3}}{2}(R - r) = \frac{\sqrt{3}}{2}(5 - 2) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ см}$$

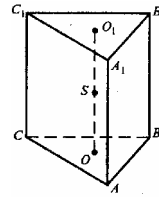
$$\text{Из } \Delta K_1 K_2 K : K_1 K = \sqrt{h^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \sqrt{16 + \frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{64 + 27}}{2} = \frac{\sqrt{91}}{2} \text{ см}^2.$$

$$S_{\text{бок}} = 6 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot KK_1 = 3 \cdot (R + r) \cdot \frac{\sqrt{91}}{2} = 3(2 + 5) \cdot \frac{\sqrt{91}}{2} = \frac{21\sqrt{91}}{2}.$$

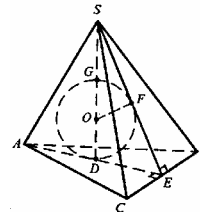
Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{верхн}} + S_{\text{нижн}} = \frac{21\sqrt{91}}{2} + 6\sqrt{3} + \frac{75\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{91}}{2} + \frac{87\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(7\sqrt{91} + 29\sqrt{3}) \text{ см}^2.$$

632. Очевидно, что центр сферы лежит в плоскости α , параллельной основаниям, и проходящей через середины боковых ребер, т.к. она касается всех граней. Кроме того, центр сферы будет совпадать с центром треугольника (т.С), полученным пересечением призмы и плоскости α , а он лежит на отрезке OO_1 , соединяющем центры оснований, что и требовалось доказать.



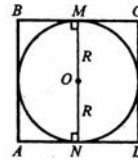
633. Рассмотрим для простоты треугольную правильную пирамиду. SD — высота пирамиды. Построим $AE \perp BC$, отрезок SE . По теореме о трех перпендикулярах $SE \perp CB$.



Впишем в $\triangle SDE$ полуокружность DFG . Центр O окружности лежит на катете SD , и касается сторон DE и SE . $\triangle SED$ вместе с полуокружностью DFG повернем вокруг SD . Тогда точка E опишет окружность, вписанную в $\triangle ABC$, то есть гипотенуза SE при вращении останется внутри пирамиды, кроме в трех положений, когда SE совпадает с высотой боковых граней.

Т.е. сфера, образованная вращением полуокружности DFG , имеет единственную общую точку с каждой из боковых граней. Эта сфера касается основания пирамиды в точке D .

Центр вписанной в пирамиду $\triangle ABC$ сферы лежит на высоте SD .

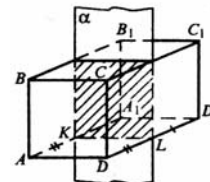


634. а) Рассмотрим сечение, проходящее через ось. Получим квадрат и вписанную в него окружность, ее радиус равен радиусу сферы. Обозначим ребро куба через x ; $x =$

$$= 2R. \text{ Площадь одной грани равна } x^2, \text{ или } 4R^2.$$

$$S_{\text{полн}} = 6 \cdot 4R^2 = 24R^2.$$

б) Высота призмы O_1O равна диаметру сферы; точки касания сферы с боковыми гранями лежат в сечении призмы плоскостью, которая проходит через середину высоты призмы (центр сферы) перпендикулярно к боковым ребрам.

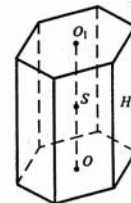


Пусть сторона правильного 6-угольника равна x ,

$$\text{тогда } x = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

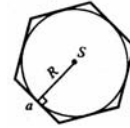
Боковая грань — прямоугольник, его площадь равна

$$H \cdot x \text{ или } 2R \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot R^2.$$



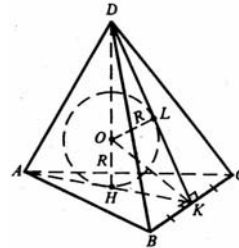
Вычислим площадь боковой поверхности:

$$6 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} R^2 = \frac{24}{\sqrt{3}} R^2 = \frac{24\sqrt{3}}{3} R^2 = 8\sqrt{3} R^2.$$



Площадь основания состоит из площадей 6-ти равно-
сторонних треугольников, площадь каждого из которых равна
 $\frac{1}{2} \cdot aR = \frac{1}{2} \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} \cdot R = \frac{R^2}{\sqrt{3}}$. Тогда площадь основания равна $\frac{6R^2}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} R^2 =$
 $= 2\sqrt{3} R^2$. $S_{\text{полн}} = 8\sqrt{3} R^2 + 2\sqrt{3} R^2 = 10\sqrt{3} R^2$.

в) Все ребра тетраэдра равны; пусть они равны
х. Построим $AK \perp BC$, отрезок DK . В правильном
 $\triangle ABC$ AK проходит через центр $\triangle ABC$. По теоре-
ме о трех перпендикулярах $DK \perp BC$. $\angle AKD$ —
линейный угол двугранного угла при основании
тетраэдра (все двугранные углы равны).



$\triangle OKL = \triangle OKH$, OK — биссектриса $\angle AKD$.

$$\text{Из } \triangle DBK: DK = \sqrt{DB^2 - BK^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

$$HK — \text{радиус вписанной окружности, } HK = \frac{x}{2\sqrt{3}}.$$

Пусть $\angle DKN = \varphi$

$$\text{В } \triangle DKN: \cos \varphi = \frac{HK}{DK} = \frac{\frac{x}{2\sqrt{3}}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a}{2\sqrt{3}\sqrt{3}a} = \frac{1}{3}.$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{из } \triangle OHK: \frac{R}{HK} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \text{ откуда } HK = \frac{R}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = 2\sqrt{R}.$$

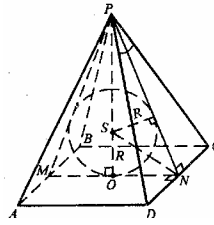
$$x = 2\sqrt{3}\sqrt{2} R = 2\sqrt{6} R.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}{4} R^2 = 6\sqrt{3} R^2$$

Грани правильного тетраэдра — это равные равносторонние треугольни-
ки, поэтому площадь полной поверхности $S = 4 \cdot S_{\triangle ABC} = 24\sqrt{3} R^2$.

635. PO — высота пирамиды. Проведем прямую MN параллельную AD
через точку O , отрезки PM и PN . По теореме о трех перпендикулярах

$PN \perp DC$, $PM \perp AB$. Центр сферы совпадает с точкой пересечения биссектрис двугранных углов при основании: также известно, что центр сферы, вписанной в правильную пирамиду, лежит на высоте пирамиды. Значит, SN — биссектриса $\angle PNO$ — линейный угол двугранного угла при основании пирамиды.



$$\text{Обозначим } AD=x, PN=\ell \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{x}{2\ell}, \ell = \frac{x}{2\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$$

$$\angle DPC = \varphi \quad \angle PNO = \Psi.$$

$$\text{В } \triangle PON: \cos \Psi = \frac{ON}{PN} = \frac{x}{2\ell} = \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

$$\sin \Psi = \sqrt{1 - \cos^2 \Psi} = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

$$\text{В } \triangle SON: \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{SO}{ON} = \frac{2R}{a}; \quad \frac{2R}{x} = \frac{\sin \Psi}{1 + \cos \Psi} = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}, \text{ откуда } x = \frac{2R(1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2})}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}},$$

$$x = \frac{2R(1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2})}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}} \cdot \frac{1}{2\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = \frac{R(1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2})}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}};$$

$$S_{\triangle DCP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R(1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2})}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}} \cdot \frac{R(1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2})}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}} = \frac{R^2(1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2})^2}{(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}) \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = \frac{R^2(1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2})}{(1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}) \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$$

$$S_{\text{бок}} = 4 \cdot S_{\triangle DCP} = \frac{4R^2(1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2})}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}(1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2})} = \frac{4R^2}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}};$$

$$\cos \varphi = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} = (\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2})(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2}),$$

$$\text{откуда } \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\cos \varphi}{\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

$$\text{Итак, } S_{\text{бок}} = \frac{4R^2}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2\sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{4R^2}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi}.$$

При $R=5$ см и $\varphi=60^\circ$ получим:

$$S_{бок} = \frac{4 \cdot 25}{\operatorname{tg} 30^\circ} \cdot \frac{\cos 60^\circ}{1 - \sin 60^\circ} = \frac{100}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 100 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{100(2 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{4 - 3} =$$

$$= 100\sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) \text{ см}^2$$

636. Боковые грани — это равнобедренные трапеции.

В правильной усеченной пирамиде, центр вписанной в нее сферы лежит на середине отрезка OO_1 , где O и O_1 — центры оснований. Это следует из теоремы о центре сферы вписанной в правильную пирамиду. (см. задачу № 633).

В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

$$ML + KN = LK + MN$$

$$2KN = LK + MN$$

$$KN = \frac{LK + MN}{2} = \frac{B_1C_1 + BC}{2} \quad (\text{в основаниях —}$$

квадраты, $LK = A_1B_1 = B_1C_1$ и $MN = AB = BC$).

Доказано.

637. а) В основаниях призмы лежат равнобедренные треугольники. Пусть A и B — центры оснований.

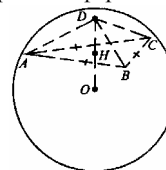
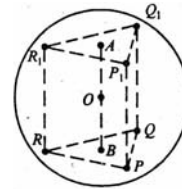
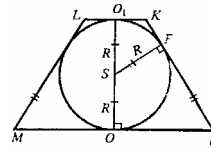
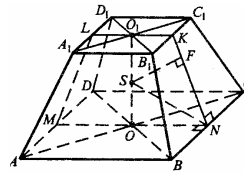
Все точки, которые лежат на перпендикуляре, проведенному через точку B к верхнему основанию призмы равноудалены от вершин треугольника PQR . Все точки, которые лежат на перпендикуляре, проведенному через т. A , к верхнему основанию призмы, равноудалены от вершин $\Delta P_1Q_1R_1$. Т.к. призма правильная, то треугольники $P_1Q_1R_1$ и PQR проектируются один на другой, следовательно, точка B проектируется в точку A и обратно. Поэтому, $AB \perp$ плоскости PQR . Тогда, отрезок AB является геометрическим местом точек, равноудаленных от вершин каждого из треугольников. А его середина — точка O — равноудалена от вершин $\Delta P_1Q_1R_1$ и от вершин ΔPQR на расстояние R , равное радиусу описанной около призмы сферы.

б) Построим из вершины D пирамиды высоту $DH \perp$ плоскости ABC . Проведем отрезки HA , HB , HC .

$\Delta DNA = \Delta DNB = \Delta DNC$ (они прямоугольные, DH — общий катет, $AD = BD = DC$ — по условию).

$HA = HB = HC = r$ — радиус описанной около ΔABC окружности.

Проведем отрезок $OG \perp$ плоскости ABC (точка G на рисунке не показана). Проведем отрезки GA , GB , GC , OA , OB , OC , $\Delta DCA = \Delta OGB = \Delta OGC$ (катет OG — общий, $OA = OB = OC = R$, R — радиус сферы). Значит, $GA = GB = GC = r$ — радиус окружности, описанной около ΔABC . Следовательно, вокруг ΔABC можно описать единственную окружность.



Точки Н и G совпадают, и точки D, H, O лежат на одной прямой. Следовательно, центр сферы O лежит на высоте пирамиды DH или на продолжении за точку H, что и показано на рисунке.

638. Тетраэдр — это пространственный четырехугольник.

а) Докажем, что через любые 4 точки, не лежащие в одной плоскости, можно провести сферу и притом только одну. (см.ниже).

Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от концов отрезка, является плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проведенная через его середину. Следовательно, центр сферы, описанной около тетраэдра, принадлежит каждой из плоскостей, проведенных через середины ребер тетраэдра перпендикулярно к этим ребрам.

Пусть O — центр окружности, описанной около грани ABC тетраэдра, d — прямая, которая проходит через точку O, $d \perp$ плоскости ABC. Все точки прямой d равноудалены от точек A, B и C. ($OA=OB=OC=r$ — радиус описанной окружности). Если точка $S \in d$, то прямоугольные треугольники SOA, SOB, SOC равны двум катетам. Следовательно, $SA=SB=SC$.

Пусть плоскость α проходит через середину ребра DA и плоскость $\alpha \perp DA$. Докажем, что d и α пересекаются. Предположим, что $\alpha \parallel d$.

Если $\alpha \perp AD$ и $d \parallel \alpha$, то $AD \perp d$. Кроме того, $d \perp AB$ (поскольку $d \perp$ плоскости ABC), и, значит $d \perp ABD$ — по признаку перпендикулярности прямой плоскости.

Таким образом, через точку A проведены две различные плоскости ABC и ABD, перпендикулярные к одной прямой, что невозможно. Значит предположение, что $d \parallel \alpha$ неверно.

Значит, пусть точка S точка пересечения d и α . Тогда $SD=SA$, т.к. S принадлежит каждой плоскости, проходящей через середину ребра тетраэдра и перпендикулярна к этому ребру.

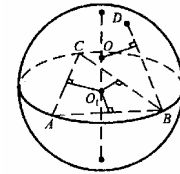
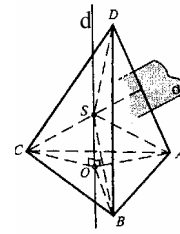
$O_1 \in$ плоскости ABC.

Пусть точка O равноудаленна от всех вершин тетраэдра.

Расстояние от точки O до одной из вершин тетраэдра обозначим R. Сфера с центром O и радиусом R проходит через все данные точки. Из этого доказательства следует, что такая сфера может быть только одна.

Что и требовалось доказать.

б) Рассмотрим двугранный угол. Геометрическое место точек, равноудаленных от обеих граней двугранного угла, это плоскость, которая делит двугранный угол пополам. Значит центр сферы, вписанной в тетраэдр, равноудален от всех граней пирамиды, и он должен принадлежать каждой из биссекторных плоскостей, то есть это точка пересечения биссекторных плоскостей всех двугранных углов тетраэдра. Т.к. все точки биссекторной плоскости лежат между гранями двугранного угла, то центр сферы, вписанной в тетраэдр, всегда находится внутри тетраэдра.



Центр у вписанной сферы может быть только один. Сфера с радиусом, равным расстоянию от этой точки до плоскости какой-либо грани тетраэдра, касается всех граней тетраэдра. Следовательно, в любой тетраэдр можно вписать сферу и притом только одну.

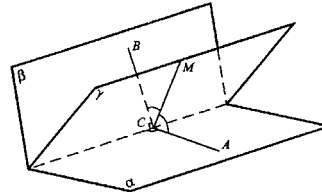
Теперь докажем 2 факта, которые использовались в доказательстве.

- 1) В любой трехгранный угол можно вписать сферу.
- 2) Биссекторные плоскости двугранных углов тетраэдра пересекаются в одной точке.

1. $M \in \gamma$

$\angle ACB$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями α и β .

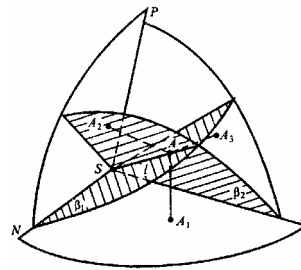
Пусть γ делит этот двугранный угол так, что $\angle BCM = \angle ACM$. Таким образом, γ биссекторная плоскость данного двугранного угла.



Докажем, что биссекторные плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одному лучу.

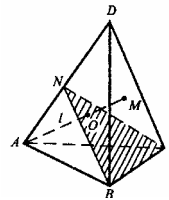
β_1 и β_2 — биссекторные плоскости, их пересечение — луч, с началом в точке S — вершине тетраэдра. Луч обозначим l . Пусть точка $A \in l$, A — произвольная точка луча. Проведем перпендикуляры AA_1 , AA_2 , AA_3 на грани трехгранного угла. $A \in \beta_1$, таким образом, $AA_2 = AA_1$; $A \in \beta_2$, поэтому $AA_3 = AA_1$.

Тогда, $AA_1 = AA_2 = AA_3$, то есть точка A равноудалена от плоскостей граней NSB и MSB . Значит, точка A находится на биссекторной плоскости двугранного угла с ребром SP . А т.к. точка A произвольная точка, то и весь луч находится в биссекторной плоскости.



Значит, все три биссекторные плоскости пересекаются по одному лучу, любая точка которых равноудалена.

2. Пусть l — луч, по которому пересекаются биссекторные плоскости трехгранного угла при вершине A , M — точка пересечения луча l и грани BDC . Концы отрезка AM принадлежат разным граням двугранного угла при ребре BC , поэтому биссекторная плоскость этого двугранного угла пересечет отрезок AM в точке $O \in l$, поэтому она равноудалена от плоскостей ABC и ABD и ACD . Расстояние от точки O до плоскостей ABC и BCD равны, т.к. точка O принадлежит биссекторной плоскости двугранного угла при ребре BC . Таким образом, точка O равноудалена от всех граней тетраэдра, то есть принадлежит всем биссекторным плоскостям двугранных углов тетраэдра. Таким образом, биссекторные плоскости двугранных углов тетраэдра пересекаются в одной точке.



Оба утверждения доказаны.

639. а) Центр сферы совпадает с центром куба — точкой пересечения диагоналей куба. Пусть сторона основания и (его ребро) равно x . Тогда диагональ куба $d = \sqrt{3}x$. С другой стороны, $d = 2R$.

$2R = \sqrt{3}x$, $x = \frac{2}{\sqrt{3}}R$. Площади поверхностей одной грани равна x^2 , а полная поверхность куба равна $6x^2$.

$$6x^2 = 6 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 R^2 = \frac{6 \cdot 4}{3} R^2 = 8R^2$$

б) H_1 и H_2 — центры оснований призмы; H_1H_2 — высота призмы.

Рассмотрим сечение призмы плоскостью, проходящей через диаметр оснований призмы. Сечение является прямоугольником AA_1B_1B .

$$\text{Из прямоугольного } \triangle OA_1H_1: A_1H_1 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

A_1H_1 является радиусом описанной окружности около основания призмы, а в правильном 6-угольнике его сторона равна радиусу описанной окружности.

Пусть сторона основания равна x , следовательно, $x = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

$$S_{\text{бок}} = 6xR = 3\sqrt{3}R^2. \quad S_{\text{полн}} = 3\sqrt{3}R^2 + 2S_{\text{осн}} = 3\sqrt{3}R^2 + 3\sqrt{3}x^2 = 3\sqrt{3}(R^2 + \frac{R^2 \cdot 3}{4}) = 3\sqrt{3}R^2 \frac{7}{4} = \frac{21\sqrt{3}}{4}R^2$$

в) Пусть ребро тетраэдра равно x . Центр описанной сферы лежит на высоте DH , точка H — центр $\triangle ABC$, поэтому $HA = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

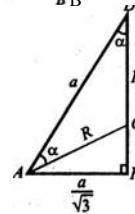
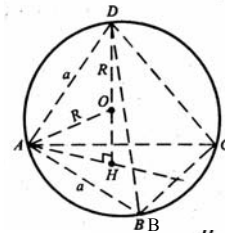
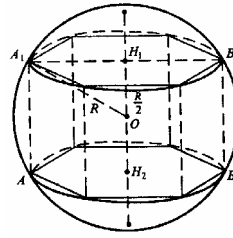
Из прямоугольного $\triangle ADH$:

$$DH = \sqrt{x^2 - HA^2} = x\sqrt{\frac{2}{3}}. \quad \angle ADH = \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{DH}{AD} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Из $\triangle AOD$ по теореме косинусов:

$$x^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos(180^\circ - 2\varphi) = 2R^2 + 2R^2 \cos 2\varphi = 2R^2(1 + 2\cos^2 \varphi - 1) = 4R^2 \cos^2 \varphi = \frac{8}{3}R^2.$$



Площадь грани тетраэдра равна $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$; равны и их H ,

значит

$$S_{\text{полн}} = 4 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = x^2\sqrt{3} = \frac{8}{3} R^2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} R^2.$$

640. SO — высота пирамиды; $SO=h$.

Пусть O — центр основания пирамиды, M — середина BC , AM — высота в $\triangle ABC$.

$$AO = \frac{x\sqrt{3}}{3}, OM = \frac{x\sqrt{3}}{6}.$$

Центры обеих сфер лежат на прямой SO , $SO \perp$ плоскости AB .

Обозначим R — радиус описанной сферы. Продолжим SO до пересечения с описанной сферой в точке D . SD — диаметр шара, $\angle SAD=90^\circ$. Из подобия треугольников OAS и ODA :

$$OD = \frac{AO^2}{OS} = \frac{x^2}{3h} \left(AO = \frac{x}{\sqrt{3}} \right)$$

$$2R = SD = SO + OD = h + \frac{x^2}{3h} = \frac{3h^2 + x^2}{3h},$$

$$R = \frac{3h^2 + x^2}{2 \cdot 3h} = \frac{3h^2 + x^2}{6h}. \text{ Проведем апофему } SM.$$

$$\text{Из } \triangle SMC: SM = \sqrt{SC^2 - CM^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{x\sqrt{15}}{2}.$$

$$OM = \frac{x}{2\sqrt{3}}, \text{ поэтому из } \triangle SOM:$$

$$h = SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{\frac{15x^2}{4} - \frac{x^2}{12}} = \sqrt{\frac{44x^2}{12}} = x\sqrt{\frac{11}{3}}$$

$$R = \frac{3x^2 \cdot \frac{11}{3} + x^2}{6x\sqrt{\frac{11}{3}}} = \frac{12x}{6\sqrt{\frac{11}{3}}} = \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{11}} = \frac{2x\sqrt{33}}{11} = \frac{2\sqrt{33}}{11}x$$

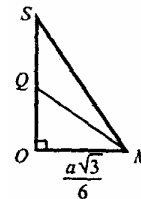
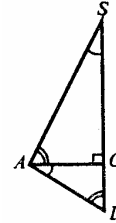
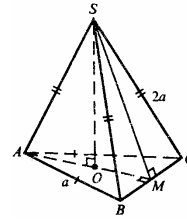
Вычислим радиус r вписанной сферы.

Примем Q — центр вписанного шара, следовательно в

$$\triangle SOM; QM — биссектриса $\angle SMO$; $QO=r$; $SM = \frac{x\sqrt{15}}{2}.$$$

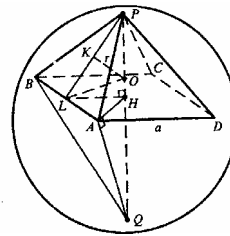
По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника:

$$\frac{OQ}{SQ} = \frac{OM}{SM}; \quad \frac{r}{h-r} = \frac{x\sqrt{3} \cdot 2}{6x\sqrt{15}} = \frac{1}{3\sqrt{5}}; \quad h = x \cdot \sqrt{\frac{11}{3}}.$$



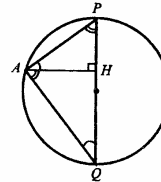
$$r(3\sqrt{5}+1)=h \quad r = \frac{x \cdot \sqrt{11}}{\sqrt{3} \cdot (3\sqrt{5}+1)} = \frac{(3\sqrt{5}-1)}{4\sqrt{33}}x$$

641. Продолжим высоту пирамиды PH до пересечения со сферой в точке Q. PQ — диаметр и центр описанной сферы лежит на высоте HP, или на ее продолжении за точку H. Соединим отрезком точку A с точкой H. Рассмотрим сечение плоскостью APQ.



$\angle QAP=90^\circ$ так как опирается на диаметр, Из подобия $\triangle HPA$ и $\triangle HQA$, $\frac{AH}{PH} = \frac{HQ}{AH}$, $AH^2=HQ \cdot PH$, $PQ=10$, $PH=h$.

Примем x — сторона основания, следовательно, $AH = \frac{1}{2}x\sqrt{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.



$$\text{Следовательно, } \frac{x^2}{2} = h(10-h). \quad (1)$$

Построим $HL \perp AB$, отрезок PL. $LH = \frac{x}{2}$, плоскость PLH \perp плоскость ABP. Пусть O — центр вписанной сферы, $OK \perp PL$. $OH=OK=r$, OL — биссектриса $\angle HLP$.

$$PL = \sqrt{h^2 + LH^2} = \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}}.$$

Обозначим $\angle HLP = \varphi$.

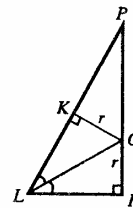
$$\sin \varphi = \frac{PH}{LP} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}}} = \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + x^2}}.$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{4h^2 + x^2}}$$

$$\text{Из } \triangle OLH: \frac{OH}{LH} = \frac{r}{\frac{x}{2}} = 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad r = \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{4h^2 + x^2}}}{\frac{2h}{\sqrt{4h^2 + x^2}}} = \frac{\sqrt{4h^2 + x^2} - x}{2h},$$

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4h^2 + x^2} - x}{2h} = 2, \quad (2)$$



Решим систему:

$$x\sqrt{4h^2 + x^2} = x^2 + 8h$$

$$\begin{cases} x\sqrt{4h^2 + x^2} = x^2 + 8h \\ x^2 = 2h(10 - h). \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x^2(4h^2 + x^2) &= x^4 + 64h^2 + 16x^2h, \\ 4h^2x^2 + x^4 &= x^4 + 64h^2 + 16x^2h \end{aligned}$$

Разделим все на $4h$, $h \neq 0$

$$x^2(4 - h) + 16h = 0,$$

Подставим x^2 из (4)

$$2(10h - h^2)(4 - h) + 16h = 0$$

Разделим обе части на $2h$, $h \neq 0$

$$(10 - h)(4 - h) + 8 = 0$$

$$h^2 - 14h + 48 = 0$$

$$h_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 - 48} = 7 \pm 1$$

$$h_1 = 8 \text{ или } h_2 = 6; \quad x_1^2 = 20 \cdot 8 - 2 \cdot 64 = 160 - 128 = 32,$$

$$x_1 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},$$

$$x_2^2 = 20 \cdot 6 - 2 \cdot 36 = 120 - 72 = 48, \quad x_2 = 4\sqrt{3}.$$

642. Рассмотрим осевое сечение плоскостью ABCD. R — радиус сферы. Очевидно, ABCD — квадрат, $\triangle OBF = \triangle OBN_1$.

$BN_1 = ON_1 = R$, BN_1 — радиус основания цилиндра,

$NN_1 = 2R$ — высота цилиндра.

Вычислим площадь полной поверхности цилиндра.

$$\begin{aligned} S_{\text{полн}} &= S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}; \quad S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot BN_1 \cdot NN_1 = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2, \\ S_{\text{осн}} &= \pi \cdot BN_1^2 = \pi R^2; \quad S_{\text{полн}} = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2. \end{aligned}$$

$$\text{Площадь поверхности сферы } 4\pi R^2. \quad \frac{S_{\text{сф}}}{S_{\text{полн}}} = \frac{4\pi R^2}{6\pi R^2} = \frac{2}{3}.$$

643. Рассмотрим осевое сечение.

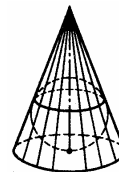
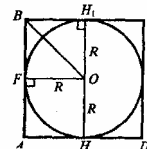
а) Высота SH делит $\triangle ASB$ на два равных треугольника: SH — биссектриса угла φ .

$$\text{В } \triangle HBS: \angle HBS = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

$$\text{OB — биссектриса } \angle HBS; \text{ следовательно, } \angle HBO = \frac{\angle HBS}{2}.$$

$$\text{Из прямоугольного } \triangle OHB: \frac{R}{r} = \operatorname{tg} \angle HBO = \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{4} \right),$$

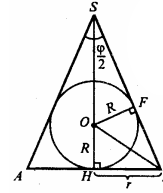
$$r = \frac{R}{\operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{4} \right)} = \frac{R}{\operatorname{ctg} \left(90^\circ - \left(45^\circ - \frac{\varphi}{4} \right) \right)} = \frac{R}{\operatorname{ctg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{4} \right)} = R \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{4} \right).$$



$$6) \frac{R}{r} = \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\varphi}{4}), \quad R = r \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\varphi}{4}) \quad (\frac{\varphi}{4} \text{ — острый угол}),$$

$$в) \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\varphi}{4}) = \frac{R}{r} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}30^\circ$$

$$45^\circ - \frac{\varphi}{4} = 30^\circ \Rightarrow \varphi = 60^\circ \quad (\varphi \text{ — острый угол})$$



644. Рассмотрим осевое сечение. SH — высота конуса;

OB — биссектриса $\angle HBS$, $\angle OBH = \frac{\alpha}{2}$.

В $\triangle OBH$: $\frac{r}{BH} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Найдем площадь основания конуса, обозначив

$$HB = a: \quad S_{\text{осн}} = \pi a^2 = \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

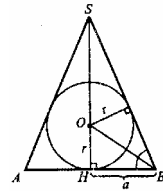
Обозначим $SB = d$. Из $\triangle SHB$: $\frac{a}{d} = \cos \alpha$, $d = \frac{a}{\cos \alpha} = \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha}$

Вычислим площадь боковой поверхности конуса:

$$S_{\text{бок}} = \pi a d = \frac{\pi r}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha} = \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha}$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha} + \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha} \right) =$$

$$= \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} = \frac{2 \pi r^2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha}$$



645. Рассмотрим осевое сечение.

Высота цилиндра равна образующей, а т.к. образующая равна диаметру основания, то ABCD — квадрат.

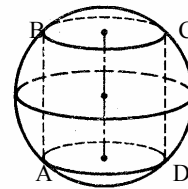
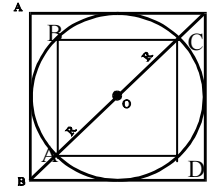
Обозначим $AD = x$, радиус сферы равен R .

$$\text{Из } \triangle ADC: AC^2 = (2R)^2 = x^2 + x^2; \quad 2R = x\sqrt{2}, \quad R = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Вычислим площадь сферы } 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{x^2}{2} = 2\pi x^2$$

$$\text{Радиус основания цилиндра } \frac{x}{2}.$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot \frac{x}{2} \cdot x = \pi x^2 \quad S_{\text{осн}} = \pi \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{\pi x^2}{4};$$



$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = \pi x^2 + \frac{\pi x^2}{4} \cdot 2 = \pi x^2 + \frac{\pi x^2}{2} = \frac{3\pi x^2}{2};$$

$$\frac{S_{\text{полн}}}{S_{\text{сф}}} = \frac{\frac{3\pi x^2}{2}}{2\pi x^2} = \frac{3}{4}.$$

646. Рассмотрим осевое сечение конуса и сферы. SH — высота конуса

SO=OB=OA=R. Тогда из равнобедренного ΔSOB : $\angle OSB = \angle SBO = \frac{\varphi}{2}$.

Из прямоугольного треугольника ΔSHB :

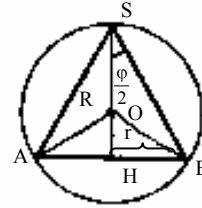
$$\angle OBH = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \text{ и}$$

$$\frac{r}{R} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \cos \varphi$$

а) $r = R \cdot \cos \varphi$

б) $R = \frac{r}{\cos \varphi}$

в) $\cos \varphi = \frac{r}{R} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \quad \varphi = 60^\circ$

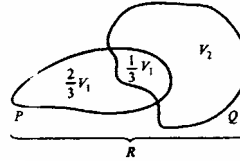
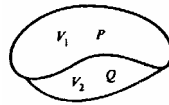


Глава VII. Объемы тел

647. Вычислим искомый объем

a) $R' = V_1 + V_2$.

б) $R = V_1 - \frac{1}{3} V_1 + V_2 = \frac{2}{3} V_1 + V_2$.



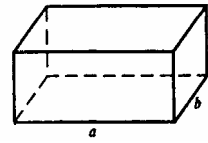
648. Вычислим объем по теореме п. 63 $V = abh$.

a) $V = 11 \cdot 12 \cdot 15 = 11 \cdot 180 = 1980$;

б) $V = 3 \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 10 \sqrt{10} = 30 \sqrt{10} \sqrt{10} = 300$;

в) $V = 18 \cdot 5 \sqrt{3} \cdot 13 = 90 \cdot 13 \sqrt{3} = 1170 \sqrt{3}$;

г) $V = 3 \frac{1}{3} \cdot \sqrt{5} \cdot 0,96 = \frac{10 \cdot 0,96}{3} \cdot \sqrt{5} = 3,2 \sqrt{5}$.



649. а) $AC = 12$ см. Обозначим ребро куба x , следовательно из $\triangle ACD$:

$$x \sqrt{2} = 12; \quad x = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6 \sqrt{2}; \quad V = x^3 = (6 \sqrt{2})^3 = 432 \sqrt{2} \text{ (см}^3\text{)};$$

б) $AC_1 = 3 \sqrt{2}$ (м). Обозначим сторону куба за x .

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 = (x^2 + x^2) + x^2 = 3x^2,$$

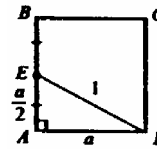
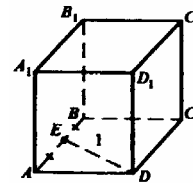
$$AC_1 = x \sqrt{3}, \quad 3 \sqrt{2} = x \sqrt{3}, \quad x = \frac{3 \sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

$$V = x^3 = \left(\frac{3 \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^3 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \sqrt{2}}{3 \sqrt{3}} = 6 \sqrt{6} \text{ (м}^3\text{)};$$

в) $DE = 1$ см. Обозначим ребро куба за x .

$$\text{Из } \triangle EAD: 1 = x^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{5}{4} x^2; \quad x^2 = \frac{4}{5}; \quad x = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$V = x^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^3 = \frac{8}{5 \sqrt{5}} = \frac{8 \sqrt{5}}{25} = 0,32 \sqrt{5} \text{ (см}^3\text{)}.$$



650. Вычислим объем параллелепипеда: $V_{\text{пар}} = 8 \cdot 12 \cdot 18 = 96 \cdot 18 = 1728 \text{ (см}^3\text{)}.$

Обозначим ребро куба за x , следовательно, $V_{\text{куба}} = x^3$.

Откуда: $x^3 = 1728$, следовательно, $a = \sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{12 \cdot 144} = \sqrt[3]{12 \cdot 12 \cdot 12} = 12 \text{ (см)}.$

651. $m = \rho V$. $V = 25 \cdot 12 \cdot 6,5 = 1950 \text{ (см}^3\text{)}.$ $m = 1,8 \cdot 1950 = 3510 \text{ (г)} = 3,51 \text{ (кг)}.$

652. Обозначим стороны $AB = a$, $BC = b$ и $CC_1 = c$. Тогда условия выглядят так:

$$a^2 + b^2 = 12^2 = 144; \quad (1)$$

$$b^2 + c^2 = 11^2 = 121; \quad (2)$$

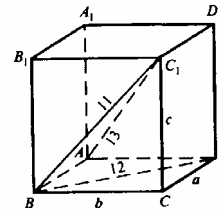
$$a^2 + b^2 + c^2 = 13^2 = 169 \quad (3)$$

$$(a^2 + b^2 = AC^2, AC^2 + C_1C^2 = AC_1^2).$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 144, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 169, \\ b^2 + c^2 = 121. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= 169 - (a^2 + b^2) = 169 - 144 = 25; & c &= 5 \text{ (см)}; \\ b^2 &= 121 - c^2 = 121 - 25 = 96; & b &= \sqrt{96} = \sqrt{16 \cdot 6} = 4\sqrt{6} \text{ (см)}; \\ a^2 &= 144 - b^2 = 144 - 96 = 48; & a &= \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}. \end{aligned}$$

$$V = abc = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 5 = 80\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 2} = 240\sqrt{2} \text{ (см}^3\text{)}.$$



653. BC_1 — проекция D_1B на плоскость боковой грани BB_1C_1 , поэтому $\angle D_1BC_1 = 30^\circ$, $\angle DBB_1 = 45^\circ$.

Вычислим — из прямоугольного $\triangle D_1C_1B$:

$D_1C_1 = 9$ см как катет лежащий против угла в 30° .

Из прямоугольного

$$\triangle D_1B_1B: B_1B = 18 \sin 45^\circ = 18 \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

$$D_1B^2 = d^2 = a^2 + b^2 + c^2. \text{ Значит, } 18^2 = 9^2 + (9\sqrt{2})^2 + B_1C_1^2.$$

$$B_1C_1^2 = 18^2 - 9^2 - (9\sqrt{2})^2 = 9^2(4 - 2 - 1) = 9^2, \text{ откуда } B_1C_1 = 9 \text{ (см)}.$$

$$V = 9 \cdot 9\sqrt{2} \cdot 9 = 729\sqrt{2} \text{ (см}^3\text{)}.$$

654. Заметим, что DB — проекция диагонали на плоскость основания, $\angle D_1BD = \beta$; BC_1 — проекция диагонали на плоскость боковой грани, $\angle D_1BC_1 = \alpha$, $DD_1 = AA_1 = h$.

$$\text{Из треугольника } \triangle D_1DB: \frac{DD_1}{DB} = \tan \beta,$$

$$\frac{h}{DB} = \tan \beta, \quad DB = \frac{h}{\tan \beta}; \quad D_1B = \frac{DD_1}{\sin \beta} = \frac{h}{\sin \beta}.$$

Обозначим $AB = x$, $AD = y$.

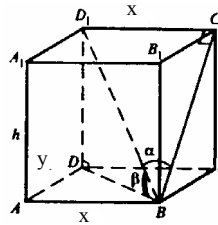
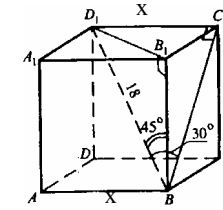
$$\text{Из треугольника } \triangle ADB: x^2 + y^2 = DB^2 = \frac{h^2}{\tan^2 \beta}.$$

$$\text{Из треугольника } \triangle D_1BC_1: D_1C_1 = D_1B \sin \alpha; \quad x = \frac{h}{\sin \beta} \cdot \sin \alpha = \frac{h \sin \alpha}{\sin \beta},$$

$$y^2 = \frac{h^2}{\tan^2 \beta} - x^2 = \frac{h^2}{\tan^2 \beta} - \frac{h^2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta},$$

$$y = \sqrt{h^2 \left(\frac{1}{\tan^2 \beta} - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} \right)} = h \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta}} = \frac{h}{\sin \beta} \cdot \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}.$$

$$\text{Вычислим объем } V = xyh; \quad V = \frac{h \sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{h}{\sin \beta} \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha} \cdot h = \frac{h^3 \sin \alpha \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}}{\sin^2 \beta}.$$



655. C_1B — проекция диагонали D_1B на плоскость боковой грани BB_1C_1C . Введем обозначение $AB=a$, $BC=b$, $D_1B=d$ и $C_1C=c$.

$$\text{Из } \triangle D_1BC_1: a = \frac{1}{2}, \quad d = 2a, \quad BC_1 = d \cos 30^\circ = 2a \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Из треугольника } \triangle BC_1C: b^2 + c^2 = BC_1^2 = 3a^2.$$

$$c^2 = 3a^2 - b^2, \quad c = \sqrt{3a^2 - b^2}.$$

$$V = S_{ABCD} \cdot CC_1; \quad V = ab \sqrt{3a^2 - b^2}.$$

656. Диагонали в прямоугольнике равны, $AC=BD=12$ см. $A_1B_1 \parallel AB$, $AB \perp B_1B$ и $BD \perp B_1B$, $\angle ABD=60^\circ$ — линейный угол двугранного угла A_1B_1BD .

$$\text{Из } \triangle B_1BD: B_1B=BD=12 \text{ см.}$$

$$\text{Из } \triangle ABD: AB = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ см, } AD = 12 \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ см } V = 6 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 12 = 432\sqrt{3} \text{ см}^3.$$

657. а) Заметим, что $\triangle C_1CA$ — равнобедренный прямоугольный, $CA=CC_1=1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ м,

$$C_1B \perp AB, \quad \triangle ABC_1 \text{ — прямоугольный. } AB = \frac{1}{2} \text{ м.}$$

$$\text{Из } \triangle ABC: BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \text{ м.}$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{8} \sqrt{2} \text{ м}^3.$$

$$\text{б) Из } \triangle AA_1C_1: AA_1=AC_1=24 \sin 45^\circ = 24 \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2} \text{ см.}$$

$$\text{Из треугольника } \triangle A_1C_1D: AD = \frac{1}{2} AC_1 = 12 \text{ см,}$$

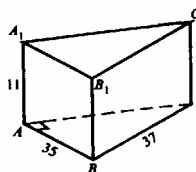
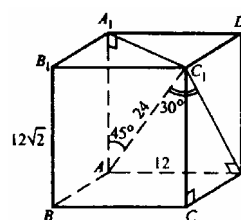
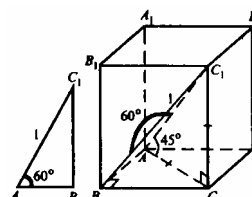
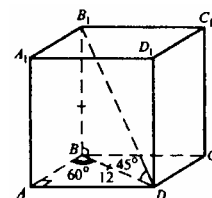
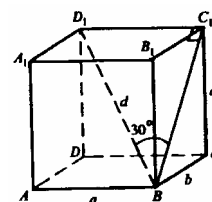
$$C_1D = 24 \cos 30^\circ = 24 \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \text{ см.}$$

$$\text{Из } \triangle C_1CD (\angle C_1CD=90^\circ): (12\sqrt{3})^2 = (12\sqrt{2})^2 + CD^2, \\ CD^2 = 3 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12^2 = 12^2; \quad CD = 12 \text{ см.}$$

$$V = B_1B \cdot AD \cdot CD; \quad V = 12\sqrt{2} \cdot 12 \cdot 12 = 1728\sqrt{2} \text{ см}^3.$$

$$\textbf{658. } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC.$$

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{37^2 - 35^2} = 12 \text{ см.}$$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 12 = 35 \cdot 6 = 210 \text{ см}^2. \quad V = S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = 210 \cdot 11 = 2310 \text{ см}^3.$$

659. а) Из треугольника $\triangle ABC$ по теореме косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ = 25 + 9 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 49;$$

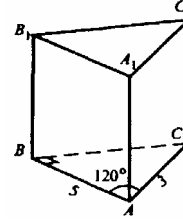
$$BC = 7 \text{ см.}$$

Т.к. $AA_1 = BB_1 = CC_1$, то максимальную площадь имеет та боковая грань, у которой вторая сторона наибольшая, то есть $BC = 7$ см.

$$S_{BB_1C_1C} = 35, 35 = BB_1 \cdot 7, BB_1 = 5 \text{ см.}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \text{ см}^2.$$

$$V = \frac{15\sqrt{3}}{4} \cdot 5 = \frac{75\sqrt{3}}{4} \text{ см}^3.$$



б) Т.к. призма прямая, то B_1B перпендикулярна плоскости ABC , $B_1B \perp BC$. $\angle ABC = 90^\circ$ — линейный угол двугранного угла с ребром B_1B .

Из $\triangle AB_1C$ по теореме косинусов:

$$AC^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 9 + 4 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 13 - 6 = 7, AC = \sqrt{7}.$$

Обозначим $AB = a$, $BC = b$, $BB_1 = c$.

$$\text{В треугольнике } \triangle ABC \text{ } a^2 + b^2 = 7. \quad (1)$$

$$\text{В треугольнике } \triangle AB_1B \text{ } a^2 + c^2 = 9 \quad (2)$$

$$\text{В треугольнике } \triangle CB_1B \text{ } b^2 + c^2 = 4. \quad (3)$$

Запишем систему:

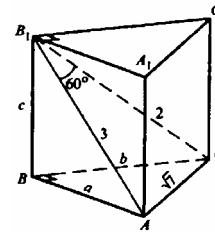
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7, \\ a^2 + c^2 = 9, \\ b^2 + c^2 = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = 7, \\ a^2 - b^2 = 5. \end{cases}$$

$$2a^2 = 12, a^2 = 6, \quad a = \sqrt{6} \text{ см;}$$

$$b^2 = 7 - a^2 = 7 - 6 = 1, \quad b = 1 \text{ см;}$$

$$c^2 = 4 - b^2 = 4 - 1 = 3, \quad c = \sqrt{3} \text{ см.}$$

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot BB_1; \quad V = \frac{1}{2} abc = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = 1,5 \sqrt{2}.$$



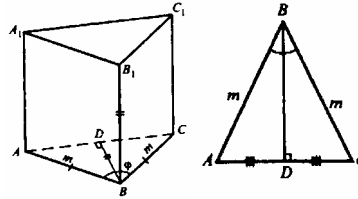
660. $\triangle ABC$ — равнобедренный. Из треугольника $\triangle ABD$: $BD = m \cos \frac{\varphi}{2}$,

$$BB_1 = m \cos \frac{\varphi}{2}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} m^2 \sin \varphi.$$

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot BB_1 = \frac{1}{2} m^2 \sin \varphi \cdot$$

$$m \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} m^3 \sin \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{2}.$$



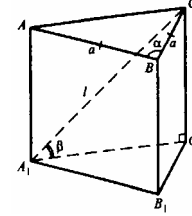
661. Обозначим $a=BA=BC$. Из прямоугольного $\triangle A_1B_1C$: $A_1C_1=l \cos \beta$, $CC_1=l \sin \beta$.

$$AC=A_1C_1=l \cos \beta.$$

По теореме косинусов в треугольнике $\triangle ABC$:

$$AC^2=l^2 \cos^2 \beta = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \alpha = 2a^2(1 - \cos \alpha),$$

$$a^2 = \frac{l^2 \cos^2 \beta}{(1 - \cos^2 \alpha) \cdot 2}.$$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2 \cos^2 \beta}{2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha)} \sin \alpha;$$

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot CC_1 = \frac{l^2 \cos^2 \beta \cdot \sin \alpha}{4 \cdot (1 - \cos^2 \alpha)} \cdot l \sin \beta = \frac{l^3 \sin \beta \cos^2 \beta \cdot \sin \alpha}{4(1 - \cos \alpha)} =$$

$$= \frac{l^3 \sin \beta \cos^2 \beta \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2}{4 \cdot 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{l^3 \sin \beta \cos^2 \beta}{4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

662. В сечении — параллелограмм A_1B_1CD . В плоскости сечения A_1B_1CD проведем A_1E перпендикулярно DC ; проведем отрезок EA . По теореме, обратной теореме о трех перпендикулярах, $AE \perp DC$.

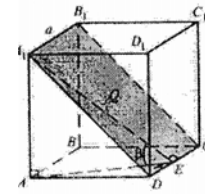
$$S_{A_1B_1CD} = Q = DC \cdot A_1E = a \cdot A_1E; \quad A_1E = \frac{Q}{a}.$$

Из прямоугольного треугольника $\triangle A_1AE$:

$$AE = A_1E \cos \beta = \frac{Q}{a} \cos \beta; \quad A_1A = \frac{Q}{a} \sin \beta.$$

$$S_{ABCD} = AE \cdot BC = \frac{Q}{a} \cos \beta \cdot a = Q \cos \beta.$$

$$V = S_{ABCD} \cdot AA_1 = Q \cdot \cos \beta \cdot \frac{Q}{a} \sin \beta = \frac{Q^2}{a} \sin \beta \cdot \cos \beta = \frac{Q^2}{2a} \sin 2\beta.$$



663. Имеем $OA=OB=R=\frac{a}{2 \sin \frac{180}{n}}$; $r=OK=\frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180}{n}}$; $OK \perp AB$.

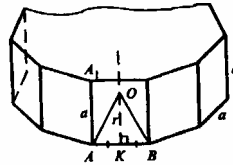
Правильный n -угольник состоит из n треугольников одинаковой площади.

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot OK \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}} \cdot a = \frac{a^2}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

$$S_{\text{осн}} = n S_{\Delta AOB} = \frac{na^2}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}. \quad V = S_{\text{осн}} \cdot AA_1 = \frac{na^3}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

Тогда: а) $n=3$. $V = \frac{3a^3}{4 \operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$; б) $n=4$. $V = \frac{4a^3}{4 \operatorname{tg} 45^\circ} = a^3$;

в) $n=6$. $V = \frac{6a^3}{4 \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{2} = 1,5\sqrt{3}a^3$; г) $n=8$. $V = \frac{8a^3}{4 \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2}} = \frac{2a^3}{\operatorname{tg} 22^\circ 30'}$.



664. Построим $CK \perp AB$, отрезок C_1K в плоскости сечения AC_1B . По теореме о трех перпендикулярах $C_1K \perp AB$; $\angle C_1KC = 60^\circ$.

Из ΔC_1KC : $\frac{C_1C}{CK} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, отсюда $C_1C = CK \sqrt{3}$.

Из треугольника ΔCKB : $CK = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$C_1C = \frac{a\sqrt{3}}{2} \sqrt{3} = \frac{3a}{2}. \quad S_{\Delta AOB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$V = S_{\Delta AOB} \cdot C_1C = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} a^3.$$

665. Очевидно, что наибольшая из диагоналей — диагональ A_1B_4 . Тогда A_1A_4 ее проекция на нижнее основание.

В правильном 6-угольнике $R=a$, R — радиус описанной окружности. $D=2R=2a=A_1A_4$.

Из треугольника $\Delta A_1A_4B_4$: $\frac{A_1A_4}{B_4A_4} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$B_4A_4 = 2\sqrt{3}a. \quad S_{A_1A_1A_6} = 6S_{\Delta A_1OA_2}.$$

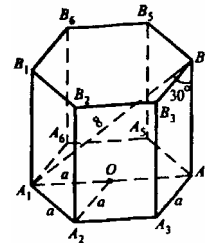
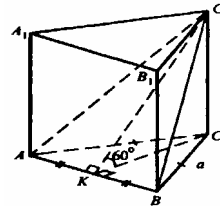
$$S_{\Delta A_1OA_2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad \text{поэтому } S_{A_1A_1A_6} = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$V = S_{A_1A_1A_6} \cdot B_4A_4 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot 2\sqrt{3}a = 9a^3.$$

Из треугольника $\Delta A_1B_4A_4$: $A_1A_4 = 2a = 8 \sin 30^\circ = 4$, $a = 2$ см.

Итак, $V = 9 \cdot 2^3 = 8 \cdot 9 = 72$ см³.

666. По теореме п.66 а) $V = \pi r^2 h$, $V = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot 3 = \pi \cdot 8 \cdot 3 = 24\pi$ см³;



$$б) r^2 = \frac{V}{\pi h}; r^2 = \frac{120}{\pi \cdot 3,6} = \frac{120 \cdot 10}{\pi \cdot 36} = \frac{100}{3\pi}; r = \sqrt{\frac{100}{3\pi}} = \frac{10}{\sqrt{3\pi}} \text{ см};$$

$$в) h = \frac{V}{\pi r^2}, h = \frac{8\pi}{\pi h^2} = \frac{8}{h^2}, h^3 = 8, h = 2 \text{ см}.$$

667. Провод в распрямленном положении — это цилиндр.

$V = \pi r^2 l$, r — радиус сечения; l — длина провода.

Из физики известно, что, $\rho = \frac{m}{V}$, где ρ

— плотность алюминия; m — масса алюминия; V — объем куска провода.

$$\text{Получаем уравнение: } \pi r^2 l = \frac{m}{\rho}, \text{ откуда } l = \frac{m}{\rho \pi r^2}.$$

$$r = 2 \text{ мм} = 0,2 \text{ см}, r^2 = 0,04 \text{ см}^2, \pi \approx 3,14, \rho = 2,6 \text{ г/см}^3,$$

$$l \approx \frac{6800}{2,6 \cdot 3,14 \cdot 0,04} = \frac{68 \cdot 100 \cdot 100}{2,6 \cdot 3,14 \cdot 4} \approx 2,08 \cdot 10^4 \text{ см} \approx 20800 \text{ см} = 208 \text{ м}.$$

$$\mathbf{668.} \text{ Вычислим объем цистерны } V = \pi r^2 h, r = \frac{18}{2} = 9 \text{ м}, V = \pi \cdot 81 \cdot 7 = 567\pi \text{ м}^3.$$

$$\rho = \frac{m}{V}; m = \rho V; m = 0,85 \cdot \frac{10^{-3}}{10^{-6}} \cdot 567 \cdot 3,14 = 0,85 \cdot 10^3 \cdot 567 \cdot 3,14 = 1513 \cdot 10^3 \text{ кг} = 1513 \text{ т}.$$

669. Обозначим радиус основания через r , а высота цилиндра равна h . Следовательно $S = 2rh$. (1) $Q = \pi r^2$. (2)

Тогда, $V = \pi r^2 h = Qh$.

$$\text{Из (1) } r = \frac{S}{2h}. \text{ Подставим в (2): } Q = \frac{\pi S^2}{4h^2},$$

$$h^2 = \frac{\pi S^2}{4Q}; h = \frac{S}{2} \sqrt{\frac{\pi}{Q}}. V = Q \frac{S}{2} \sqrt{\frac{\pi}{Q}} = \frac{1}{2} S \sqrt{\pi Q}.$$

$$\mathbf{670.} \rho = 11,4 \text{ г/см}^3 = 11,4 \cdot 1 \frac{10^{-3}}{10^{-6}} \text{ кг/м}^3 = 11,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

$$r_1 = \frac{13}{2} = 6,5 \text{ мм} = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}. r_2 = 6,5 + 4 = 10,5 \text{ мм} = 10,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

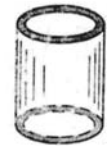
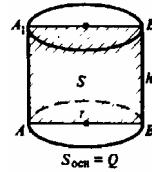
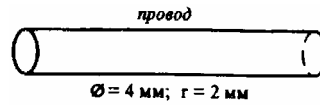
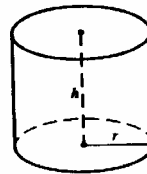
$$V_{\text{трубы}} = \pi r_2^2 l - \pi r_1^2 l = \pi l (r_2^2 - r_1^2) = 3,14 \cdot 25 (10,5^2 \cdot 10^{-6} - 6,5^2 \cdot 10^{-6}) =$$

$$= 3,14 \cdot 25 \cdot 10^{-6} (10,5^2 - 6,5^2) = 3,14 \cdot 25 \cdot 10^{-6} (110,25 - 42,25) =$$

$$= 3,14 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 68 = 5338 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

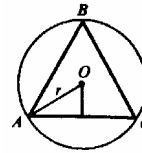
$$m = \rho V; m = 11,4 \cdot 10^3 \cdot 5338 \cdot 10^{-6} = 60853,2 \cdot 10^{-3} \approx 60,85 \text{ кг} \approx 61 \text{ кг}.$$

671. Очевидно, что высота призмы равна высоте цилиндра. Тогда отношение объемов равно отношению площадей оснований призмы и цилиндра.



Вид сверху

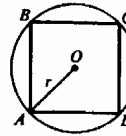
а) $n=3$, $\triangle ABC$ — правильный. Обозначим сторону $\triangle ABC$ равной x , следовательно, $r=AO=\frac{x}{\sqrt{3}}$ ($\frac{x}{\sin 60^\circ}=2r$, $r=\frac{x}{2\sqrt{3}}=\frac{x}{\sqrt{3}}$).



$$S_{\triangle AOB} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}; S_{кр} = \pi r^2 = \pi \cdot \frac{x^2}{3}; \quad \frac{V_{пр}}{V_{цил}} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{кр}} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{\pi x^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi};$$

б) $n=4$, $ABCD$ — квадрат. Обозначим сторону квадрата равной x .

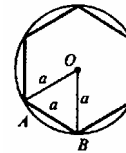
$$S_{ABCD} = x^2; \quad AC = x\sqrt{2}, \quad r = \frac{AC}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$



$$S_{кр} = \pi r^2 = \pi \cdot \frac{x^2 \cdot 2}{4} = \frac{\pi x^2}{2}; \quad \frac{V_{пр}}{V_{цил}} = \frac{S_{ABCD}}{S_{кр}} = x^2 \cdot \frac{\pi x^2}{2} = \frac{2}{\pi};$$

в) $n=6$. Обозначим сторону 6-угольника за x , следовательно, $r=x$.

$$S_{6-уг} = 6S_{\triangle AOB} = 6 \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2.$$



$$S_{кр} = \pi AO^2 = \pi x^2; \quad \frac{V_{пр}}{V_{цил}} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2} : \pi x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi};$$

г) обозначим сторону правильного вписанного n -угольника за x . Следовательно, радиус описанной окружности равен $\frac{x}{2\sin \frac{180^\circ}{n}}$.

$$S_{n-уг} = nS_{\triangle} = n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2\sin \frac{180^\circ}{n}} \right)^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

(Правильный n -угольник разбивается радиусами, проведенными из центра, на n одинаковых треугольников; все треугольники равновелики)

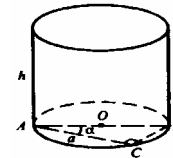
$$S_{кр} = \pi \cdot \left(\frac{x}{2\sin \frac{180^\circ}{n}} \right)^2; \quad \frac{V_{пр}}{V_{цил}} = \frac{S_{n-уг}}{S_{кр}} = \frac{n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2\sin \frac{180^\circ}{n}} \right)^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}}{\pi \cdot \left(\frac{x}{2\sin \frac{180^\circ}{n}} \right)^2} = \frac{n}{2\pi} \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

672. $\angle C=90^\circ$. $\angle ACB$ — вписанный и равен 90° ,

тогда, AB — диаметр. $AB=2r=\frac{a}{\cos \alpha}$, $r=\frac{a}{2\cos \alpha}$,

r — радиус основания цилиндра.

Высота призмы равна высоте цилиндра, значит,

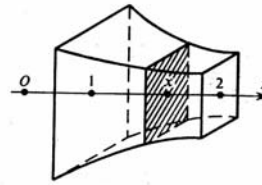


$$V_{\text{цил}} = \pi r^2 h = \pi \cdot \frac{a^2}{4 \cos^2 \alpha} \cdot h = \frac{\pi a^2 h}{4 \cos^2 \alpha}.$$

673. Имеем $V = \int_a^b S(x) dx$, где $a=1$; $b=2$.

$$S(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^{-2}.$$

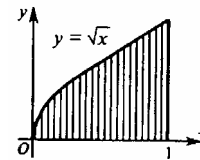
$$V = \int_1^2 x^{-2} dx = \left. \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right|_1^2 = \left. -\frac{1}{x} \right|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} = 0,5.$$



674. Имеем $V = \int_a^b S(x) dx$, где $a=0$; $b=1$.

$$\text{Площадь сечения: } S(x) = \pi (\sqrt{x})^2 = \pi x.$$

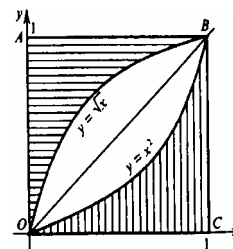
$$V = \int_0^1 \pi x dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \pi \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}.$$



675. Заштрихованные фигуры симметричны относительно биссектрисы ОВ. Следовательно, объем тела, которое получается вращением фигуры ОАВ вокруг оси Оу, и тела, полученного вращением равновеликой фигуры ОВС вокруг оси Ох равны.

Имеем $V = \int_a^b S(x) dx$, где $a=0$; $b=1$. $S(x) = (x^2)^2 \pi = x^4 \pi$.

$$V = \int_0^1 \pi x^4 dx = \pi \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$



676. Построим из точки A_1 перпендикуляр A_1M к плоскости $\triangle ABC$. Следовательно, $\angle A_1AM = 60^\circ$.

$$\text{Из } \triangle A_1AM: A_1M = h = 8 \sin 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ см.}$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-10)(p-10)(p-12)},$$

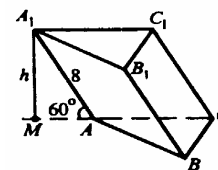
$$p = \frac{10+10+12}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ см, } S_{\triangle ABC} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 4 \cdot 6 \cdot 2 = 48 \text{ см}^2.$$

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot h = 48 \cdot 4\sqrt{3} = 192\sqrt{3} \text{ см}^3.$$

677. $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$. По условию задачи плоскость $ABB_1A_1 \perp$ плоскости

ABC . Построим $B_1K \perp AB$. $B_1K = h$ — высота призмы.

$$\text{Из } \triangle AB_1K: AK = \sqrt{b^2 - h^2}.$$



$$\text{Из } \triangle B_1KB: KB = \sqrt{a^2 - h^2}.$$

Получим уравнение: $AK + KB = AB = a$.

$$\sqrt{b^2 - h^2} + \sqrt{a^2 - h^2} = a; \quad b^2 - h^2 + a^2 - h^2 + 2\sqrt{(b^2 - h^2)(a^2 - h^2)} = a^2,$$

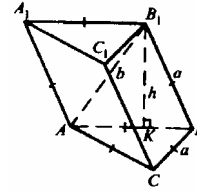
$$2\sqrt{(b^2 - h^2)(a^2 - h^2)} = 2h^2 - b^2.$$

$$2h^2 - b^2 \geq 0; \quad h^2 \geq \frac{b^2}{2}; \quad h \geq \frac{b}{\sqrt{2}},$$

$$4(b^2a^2 - b^2h^2 - a^2h^2 + h^4) = 4h^4 + b^4 - 4h^2b^2; \quad 4b^2a^2 - b^4 = 4a^2h^2,$$

$$h^2 = \frac{b^2(4a^2 - b^2)}{4a^2}; \quad h = \frac{b}{2a} \sqrt{4a^2 - b^2};$$

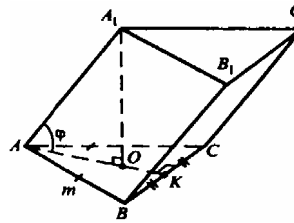
$$V = S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a} = \frac{ab}{8} \sqrt{12a^2 - 3b^2}.$$



678. Построим $A_1O \perp$ плоскости ABC , точка O — центр правильного $\triangle ABC$. Отрезок OA — радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности.

$$\text{По теореме синусов: } \frac{BC}{\sin \angle A} = 2R = 2AO,$$

$$\text{отсюда } AO = R = \frac{m}{2\sin 60^\circ} = \frac{m}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{m}{\sqrt{3}}.$$



Из прямоугольного $\triangle A_1OA$ найдем высоту призмы $A_1O = R \tan \varphi = \frac{m}{\sqrt{3}} \cdot \tan \varphi$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{m^2\sqrt{3}}{4}; \quad V = S_{\triangle ABC} \cdot A_1O = \frac{m^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{m \tan \varphi}{\sqrt{3}} = \frac{m^3 \tan \varphi}{4}.$$

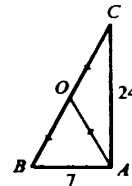
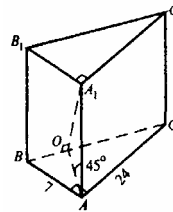
679. Наклонные A_1B , A_1A , A_1C равны по условию. Т.к. A_1 равноудалена от A , B и C , то проекция точки A_1 на плоскость ABC — это точка O , которая является центром описанной около $\triangle ABC$ окружности. Тогда, точка O — середина гипотенузы BC , $A_1O \perp BC$. A_1O — высота призмы. $\triangle A_1OA$ — равнобедренный прямоугольный, $A_1O = AO$.

$$BC = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25 \text{ см.}$$

$$OC = OB = OA = \frac{25}{2} \text{ см. Высота призмы } OA_1 = \frac{25}{2} \text{ см.}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{7 \cdot 24}{2} = 84 \text{ см}^2. \quad V = S_{\triangle ABC} \cdot OA_1 = 84 \cdot \frac{25}{2} = 1050 \text{ см}^3.$$

680. Построим $B_1M \perp BA$ и $B_1N \perp BC$. $\triangle B_1BM = \triangle B_1BN$



(по гипотенузе и острому углу). Значит, $B_1M=B_1N$.

Построим $B_1O \perp$ плоскости ABC , отрезки ON и OM . Из равенства наклонных B_1M и B_1N следует равенство их проекций, $OM=ON$, то есть точка O лежит на биссектрисе угла ABC .

Из $\triangle B_1BM$: $BM=c \cos \varphi$, $BO=BM \sqrt{2} = c \sqrt{2} \cos \varphi$.

Из прямоугольного $\triangle B_1BO$:

$$B_1O = \sqrt{BB_1^2 - BO^2} = \sqrt{c^2 - c^2 \cdot 2 \cdot \cos^2 \varphi} =$$

$$= c \sqrt{1 - 2 \cos^2 \varphi} = c \sqrt{-\cos 2\varphi}. \quad B_1O \text{ — высота параллелепипеда. } S_{ABCD} = ab;$$

$$V = S_{ABCD} \cdot B_1O = abc \sqrt{-\cos 2\varphi} \quad (2\varphi > 90^\circ, \cos 2\varphi < 0; \text{ — } \cos 2\varphi > 0).$$

$$681. S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ см}^2.$$

Вычислим высоту параллелепипеда. Боковое ребро BB_1 составляет со смежными сторонами основания равные углы; обозначим $\angle B_1BA = \angle B_1BC = \alpha$.

Проведем $B_1M \perp BA$ и $B_1N \perp BC$.

$\triangle B_1BM = \triangle B_1BN$ (по гипотенузе и острому углу).

Тогда, $B_1M=B_1N$. Проведем $B_1O \perp$ плоскости $ABCD$, отрезки ON и OM . $ON=OM$ (как проекции равных отрезков). Точка O равноудалена от сторон ромба BC и BA , то есть она лежит на биссектрисе угла ABC , а в ромбе биссектрисой угла служит диагональ ромба, значит, точка O лежит на диагонали ромба DB . B_1O — высота параллелепипеда.

По свойству диагоналей ромба $\angle ASB = 90^\circ$ и $B_1S=3$, $A_1S=4$. Следовательно, сторона ромба $B_1A_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ см.

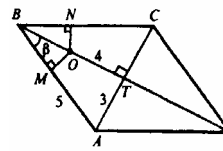
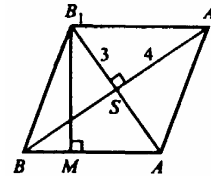
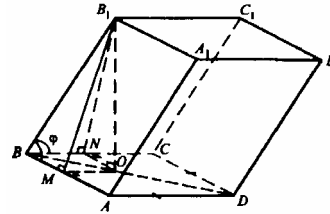
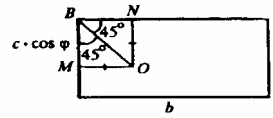
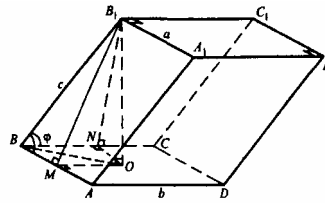
$$S_{BB_1A_1A} = BA \cdot B_1M = 24; \quad 5 \cdot B_1M = 24; \quad B_1M = \frac{24}{5} \text{ см.}$$

Из прямоугольного треугольника $\triangle B_1MB$:

$$BM = \sqrt{BB_1^2 - B_1M^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{625 - 576}{25}} = \frac{7}{5} \text{ см}$$

$$\text{Из } \triangle ABT: \cos \beta = \frac{4}{5}$$

$$\text{Из } \triangle MOB: BO = BM \cdot \frac{1}{\cos \beta} = \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{7}{4} \text{ см.}$$

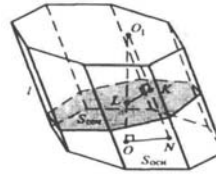


Из прямоугольного треугольника ΔB_1OB :

$$B_1O = \sqrt{BB_1^2 - BO^2} = \sqrt{5^2 - \frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 16 - 49}{16}} = \frac{\sqrt{351}}{4} = \frac{3}{4} \sqrt{39} \text{ см.}$$

$$V = S_{ABCD} \cdot B_1O = 24 \cdot \frac{3\sqrt{39}}{4} = 18\sqrt{39} \text{ см}^3.$$

n-угольная наклонная призма

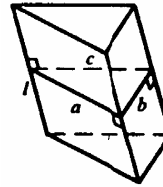


682. Пусть α и β — плоскости оснований призмы. Проведем плоскость γ , перпендикулярно боковым ребрам призмы. Далее, осуществим параллельный перенос фигуры, ограниченной плоскостями β , γ и боковыми ребрами призмы так, чтобы плоскость α совместилась с плоскостью β . Получим прямую призму, боковая сторона которой равна боковой стороне исходной призмы, а основание является сечением исходной призмы плоскостью, перпендикулярной боковым ребрам.

По свойствам аддитивности объема $V_1 = V_2$, где V_1 и V_2 соответственно объемы исходной и полученной призмы. $V_2 = S \cdot l$, где S — площадь основания, что и требовалось доказать.

683. Обозначим l — длина бокового ребра призмы, а расстояние между боковыми ребрами равны a , b , c .

По замечанию в п. 68 объем призмы можно вычислить по формуле $V = S_{\perp} \cdot l$, где S_{\perp} — площадь перпендикулярного (к боковым ребрам) сечения призмы. Треугольник, составленный из отрезков a , b и c , является перпендикулярным сечением.



$$S_{\perp} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{37+13+30}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ см.}$$

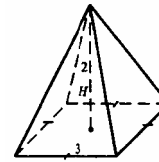
$$S_{\perp} = \sqrt{40(40-37)(40-13)(40-30)} = \sqrt{40 \cdot 3 \cdot 27 \cdot 10} = 20 \cdot 9 = 180 \text{ см}^2.$$

$$S_{\text{бок}} = l \cdot a + l \cdot b + l \cdot c = 480 \text{ см}^2$$

$$l(a+b+c) = 480$$

$$l = \frac{480}{a+b+c} = \frac{480}{80} = 6$$

$$V = S_{\perp} l = 180 \cdot 6 = 1080 \text{ см}^3.$$



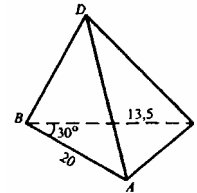
$$\mathbf{684. a)} S_{\text{осн}} = 3^2 = 9 \text{ м}^2; \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 2 = 6 \text{ м}^3;$$

$$\text{б)} h = 2,2 \text{ м} = 220 \text{ см.}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC \sin 30^\circ = \frac{1}{2} 20 \cdot 13,5 \cdot \frac{1}{2} = 67,5 \text{ см}^2,$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} \cdot 67,5 \cdot 220 = 22,5 \cdot 220 = 4950 \text{ см}^3.$$

$$\mathbf{685.} h = 12 \text{ см, } x = 13 \text{ см.}$$



$$S_{\text{осн}} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{13^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{169 \sqrt{3}}{4},$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{169 \sqrt{3}}{4} \cdot 12 = 169 \sqrt{3} \text{ см}^3.$$

686. а) DO — высота пирамиды.

Из прямоугольного треугольника $\triangle ADO$: $DO = H = l \sin \varphi$.

Точка O — центр $\triangle ABC$, OA — радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности.

По теореме синусов: $\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2OA$, $OA = l \cos \varphi$.

$$BC = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} l \cos \varphi.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3})^2 l^2 \cos^2 \varphi \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} l^2 \cos^2 \varphi.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3} l^2 \cos^2 \varphi}{4} \cdot l \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4} l^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi = \frac{\sqrt{3}}{8} l^3 \sin 2\varphi \cos \varphi.$$

б) $\triangle ADC$ — равнобедренный. $\angle D = 180^\circ - 2\alpha$.

По теореме косинусов имеем:

$$AC^2 = l^2 + l^2 - 2 \cdot l \cdot l \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) = 2l^2(1 + \cos 2\alpha) = 2l^2(1 + 2\cos^2 \alpha - 1) = 4l^2 \cos^2 \alpha,$$

$$AC = \sqrt{4l^2 \cos^2 \alpha} = 2l |\cos \alpha| = 2l \cos \alpha;$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(2l \cos \alpha)^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} l^2 \cos^2 \alpha.$$

Вычислим длину отрезка OA, $OA = R$, где R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

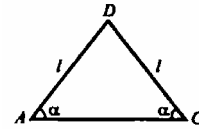
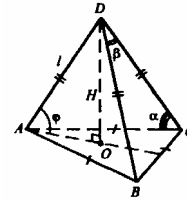
$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2AO; \quad OA = \frac{AC}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AC}{\sqrt{3}} = \frac{2l \cos \alpha}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Из } \triangle ADO: DO = H = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{l^2 - \frac{4l^2 \cos^2 \alpha}{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}} \sqrt{3 - 4\cos^2 \alpha}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} H = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} l^2 \cos^2 \alpha \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} \sqrt{3 - 4\cos^2 \alpha} = \frac{1}{3} l^3 \cos^2 \alpha \sqrt{3 - 4\cos^2 \alpha};$$

в) $\triangle BDC$ — равнобедренный. По теореме косинусов:

$$BC^2 = l^2 + l^2 - 2 \cdot l \cdot l \cdot \cos \beta = 2l^2(1 - \cos \beta) = 2l^2 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}; \quad BC = \sqrt{4l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}} = 2l \sin \frac{\beta}{2}.$$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}.$$

В треугольнике $\triangle ABC$: OA — радиус описанной окружности:

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2OA; OA = \frac{BC}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{2l \sin \frac{\beta}{2}}{\sqrt{3}}.$$

Из прямоугольного $\triangle AOD$:

$$H = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{l^2 - \frac{4l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{3}} = \sqrt{\frac{3l^2 - 4l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot H = \frac{1}{3} \sqrt{3} l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{1}{3} l^3 \sin^2 \frac{\beta}{2} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

687. Из треугольника $\triangle BCD$ найдем боковое ребро. Обозначим $DB=DC=DA=d$. По теореме косинусов: $a^2 = d^2 + d^2 - 2d^2 \cos \varphi = 2d^2(1 - \cos \varphi) = 2d^2 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$;

$$a = 2d \sin \frac{\varphi}{2}; d = \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Построим $DO \perp$ плоскости ABC .

$DO = H = \sqrt{d^2 - OA^2}$, OA — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

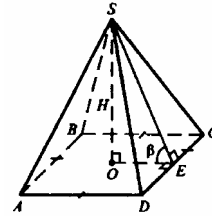
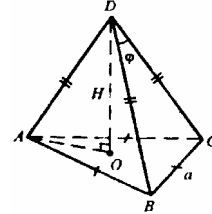
По теореме синусов имеем: $\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2OA; OA = \frac{a}{2 \sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

$$H = \sqrt{\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{a^2}{3}} = a \cdot \frac{\sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{3}}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} H. S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \text{ поэтому}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{2 \sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{a^3 \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{24 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

688. Пусть O — точка пересечения диагоналей. Построим $OE \perp DC$. По теореме о трех перпендикулярах $SE \perp DC$. Таким образом, $\angle OES = \beta$ — линейный угол двугранного угла при основании.



$$a) OE = \frac{H}{\operatorname{tg} \beta} = H \operatorname{ctg} \beta, AD = 2OE = 2H \operatorname{ctg} \beta.$$

$$S_{ABCD} = AD^2 = 4H^2 \operatorname{ctg}^2 \beta. V = \frac{1}{3} S_{ABCD} H = \frac{1}{3} \cdot 4H^2 \operatorname{ctg}^2 \beta \cdot H = \frac{4}{3} \cdot H^3 \operatorname{ctg}^2 \beta.$$

б) SO — высота пирамиды. Проведем OE перпендикулярно DC, отрезок SE. По теореме о трех перпендикулярах SE перпендикулярно DC.

В правильной пирамиде боковые ребра равны, $\triangle DSC$ — равнобедренный, высота SE — биссектриса и медиана.

$$\text{Из треугольника } \triangle DSE: \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{SE} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, SE = \frac{m}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Из треугольника $\triangle SOE$:

$$\begin{aligned} SO = H &= \sqrt{SE^2 - OE^2} = \sqrt{\frac{m^2}{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{m^2}{4}} = \sqrt{\frac{m^2}{4} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} - 1 \right)} = \\ &= \frac{m}{2} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{m}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos \alpha}. \end{aligned}$$

$$\text{Площадь } S_{ABCD} = m^2.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} H = \frac{1}{3} m^2 \frac{m}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos \alpha} = \frac{m^3}{6 \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos \alpha}.$$

689. SO перпендикулярна плоскости ABCD, SO — высота пирамиды. В правильной пирамиде все боковые ребра равны. OD — проекция SD на плоскость основания, $\angle SDO = \varphi$.

Из $\triangle SOD$: $SO = m \sin \varphi$; $OD = m \cos \varphi$; $BO = OD$, $BD = 2m \cos \varphi$.

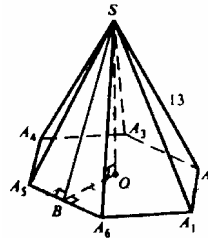
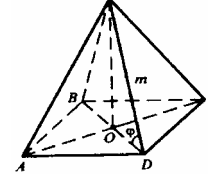
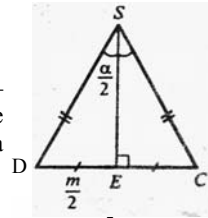
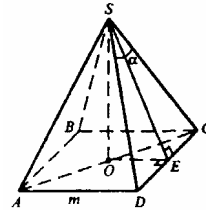
Обозначим сторону основания за x . Следовательно, $x \sqrt{2} = 2m \cos \varphi$; $x = \sqrt{2} m \cos \varphi$.

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} SO = \frac{1}{3} 2m^2 \cos^2 \varphi m \sin \varphi = \frac{2}{3} m^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi.$$

690. Построим $OB \perp A_5 A_6$. По теореме о трех перпендикулярах $SB \perp A_5 A_6$. $OB = r$, r — радиус вписанной в основание окружности; $r = 6:2 = 3$ (см). Обозначим x — сторона основания.

$$\text{Как известно, } r = \frac{x^2 \sqrt{3}}{2}, \text{ откуда } x = \frac{2 \cdot r}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ см.}$$

$$S_{\triangle A_5 O A_6} = \frac{1}{2} \cdot A_5 A_6 \cdot OB = \frac{1}{2} x r = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3} \text{ см}^2.$$



$$S_{\text{осн}} = 6 \cdot S_{\Delta A_5 O A_6} = 6 \cdot 3 \sqrt{3} = 18 \sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Вычислим высоту пирамиды из ΔSOB .

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{SB^2 - r^2} = \sqrt{SB^2 - 9^2}.$$

Из равнобедренного $\Delta SA_5 A_6$ найдем SB . (Т.к. SB — высота в равнобедренном треугольнике, то она является медианой, $A_5 B = BA_6 = \frac{1}{2} x = \sqrt{3}$ см.)

$$SB = \sqrt{SA_6^2 - BA_6^2} = \sqrt{13^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{169 - 3} = \sqrt{166} \text{ см}.$$

$$\text{Из } \Delta SBO: SO = \sqrt{SB^2 - 9^2} = \sqrt{157} \text{ см}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} SO = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot \frac{b}{2} \cdot \sqrt{157} = 6 \sqrt{471} \text{ см}^3.$$

Найдем площадь боковой поверхности. $S_{\text{бок}} = 6 \cdot S_{\Delta A_5 O A_6}$,

$$S_{\Delta A_5 O A_6} = \frac{1}{2} \cdot A_5 A_6 \cdot SB = \frac{1}{2} x \cdot SB = \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{3} \cdot \sqrt{166} = \sqrt{3 \cdot 166} = \sqrt{498} \text{ см}^2.$$

$$S_{\text{бок}} = 6 \sqrt{498} \text{ см}^2.$$

691. Построим SO перпендикулярно плоскости ABC ; SO — это высота пирамиды. $\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC$, они прямоугольные, SO — общий катет, они имеют равный острый угол. Тогда, $OB = OC = OA = R$, где R — радиус описанной окружности.

$$\frac{AC}{\sin \angle B} = 2R; \quad R = \frac{AC}{2 \sin \angle B} = \frac{10}{2 \sin \angle B} = \frac{5}{\sin \angle B}.$$

По теореме косинусов в треугольнике ΔABC :

$$10^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos \angle B,$$

$$100 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos \angle B; \quad 2 \cdot 169 \cdot \cos \angle B = 338 - 100; \quad \cos \angle B = \frac{238}{2 \cdot 169} = \frac{119}{169}.$$

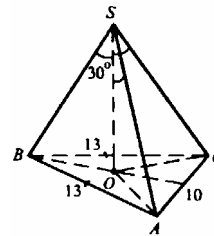
$$\sin \angle B = \sqrt{1 - \cos^2 \angle B} = \sqrt{1 - \frac{119^2}{169^2}} = \frac{1}{169} \sqrt{14400} = \frac{120}{169}.$$

$$\text{Значит, } R = OB = \frac{5 \cdot 169}{120} = \frac{169}{24}.$$

$$\text{Из треугольника } \Delta SOB \text{ найдем высоту } SO: SO = \frac{R}{\operatorname{tg} 30^\circ} = R \sqrt{3} = \frac{169}{24} \sqrt{3}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-10)(p-13)(p-13)}, \text{ где } p = \frac{10+13+13}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ см}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt{25 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 8} = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60 \text{ см}^2.$$



$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot \frac{169\sqrt{3}}{24} = \frac{169\sqrt{3} \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{845\sqrt{3}}{6} \text{ см}^3.$$

692. Построим высоту пирамиды DE. Т.к. все ребра одинаково наклонены к плоскости основания, то $\angle DEA = \angle DEB = \angle DEC$. Поэтому $EA = EB = EC = R$, R — радиус описанной окружности. Значит, точка E — это середина гипотенузы AB , плоскость $ADB \perp$ плоскости ABC .

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab; AB = \sqrt{a^2 + b^2}; BE = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\frac{DE}{BE} = \operatorname{tg} \varphi; \quad DE = BE \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi}{2}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot DE = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ab \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{ab}{12} \cdot \operatorname{tg} \varphi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

693. SO — высота пирамиды. $\angle SOA = \angle SOB = \angle SOC = \angle SOD$. Тогда $OA = OB = OC = OD$ и высота проектируется в точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$.

$OC = BO = OA = \frac{b}{2}$ (по свойству диагоналей прямоугольника).

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OA \cdot \sin \alpha.$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} OB \cdot OC \sin \alpha.$$

$$S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OA \cdot \sin \alpha = OB \cdot OA \cdot \sin \alpha = \frac{b^2}{4} \cdot \sin \alpha$$

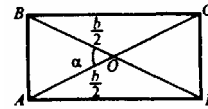
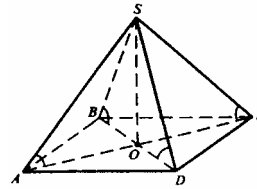
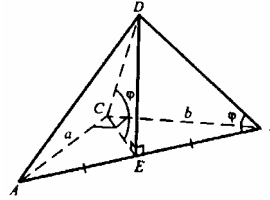
$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{b^2 \sin \alpha}{2}.$$

$$\text{Обозначим } \angle OAS = \beta, \text{ следовательно, } \operatorname{tg} \beta = \frac{SO}{AO} = \frac{SO}{\frac{b}{2}} = \frac{2}{b} SO.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} SO; \quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2 \sin \alpha}{2} \cdot SO, \quad SO = \frac{6V}{b^2 \sin \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{b} \cdot \frac{6V}{b^2 \sin \alpha} = \frac{12V}{b^3 \sin \alpha}; \quad \beta = \arctg \frac{12V}{b^3 \sin \alpha}.$$

694. Построим линейные углы двугранных углов при основании и высоту пирамиды SO ; $ON \perp DC$, $OK \perp BC$, $OL \perp AB$ и $OM \perp AD$.



По теореме о трех перпендикулярах $SN \perp DC$, $SK \perp BC$, $SL \perp AB$, $SM \perp AD$. $\Delta SOM = \Delta SON = \Delta SOK = \Delta SOL$ (по катету и острому углу). Следовательно, $OM = ON = OK = OL = r$, r — радиус вписанной в основание окружности.

Треугольник ΔSON — равнобедренный, $SO = ON = 1,5$ см.

$$S_{ABCD} = AD \cdot MK = 6 \cdot 1,5 \cdot 2 = 18 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} SO = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 1,5 = 9 \text{ (см}^3\text{)}.$$

695. а) Построим высоту DE , отрезки EA , EB , EC .

$\Delta DEA = \Delta DEB = \Delta DEC$. Тогда $EA = EB = EC = R$, R — радиус окружности, описанной около ΔABC . Значит, точка E является серединой BC , плоскость $CDB \perp$ плоскости ABC ; $CE = EB = \frac{c}{2}$.

$$\text{Из треугольника } DEB: \frac{DE}{EB} = \operatorname{tg} \theta, DE = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{tg} \theta.$$

В треугольнике ABC : $AC = c \sin \varphi$, $AB = c \cos \varphi$;

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB = \frac{1}{2} c^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} DE = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot c^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \frac{c}{2} \operatorname{tg} \theta = \frac{c^3 \operatorname{tg} \theta \sin 2\varphi}{24}.$$

б) Проведем $OL \perp AB$, $OK \perp CA$, $OM \perp CB$.

По теореме о трех перпендикулярах имеем $DL \perp AB$, $DM \perp CB$, $DK \perp CA$. $\Delta DOL = \Delta DOK = \Delta DOM$. Тогда, $OM = OK = OL = r$, r — радиус вписанной в ΔABC окружности. $r = \frac{S}{p}$, $p = \frac{10 + 10 + 12}{2} = 16$ см.

$$S = \sqrt{p(p-10)(p-10)(p-12)} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 48 \text{ см}^2.$$

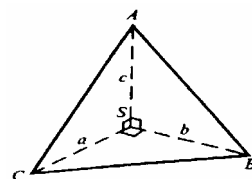
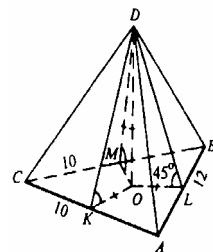
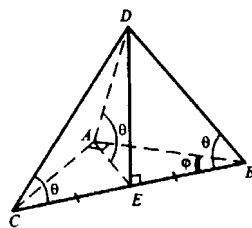
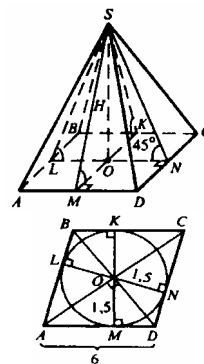
$$a = r = \frac{48}{16} = 3 \text{ (см)}. \text{ Из } \Delta DOL: DO = OL = 3 \text{ см. } V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 3 = 48 \text{ см}^3.$$

в) $AS \perp SC$, $AS \perp SB$

AS перпендикулярна плоскости BSC , AS — высота пирамиды.

$$S_{\Delta CSB} = \frac{1}{2} ab. V = \frac{1}{3} S_{\Delta CSB} AS = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ab \cdot c = \frac{abc}{6}.$$

696. DA — высота пирамиды.



Построим $AK \perp BC$, отрезок DK . По теореме о трех перпендикулярах $DK \perp BC$, $\angle AKD = 60^\circ$ — линейный угол двугранного угла $DBCA$.

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}$$

$\triangle ABC$ — прямоугольный по теореме Пифагора ($20^2 + 21^2 = 29^2$). Следовательно, $ABC = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 210 (\text{см}^2)$ и

точка K совпадает с B .

$$S \text{ другой стороны, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AK = 210, AK = \frac{1}{2} BC = 20 (\text{см}).$$

$$\text{Из } \triangle DAB: \frac{DA}{AB} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, DA = 20\sqrt{3} (\text{см}).$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} DA = \frac{1}{3} \cdot 210 \cdot 20\sqrt{3} = 70 \cdot 20\sqrt{3} = 1400\sqrt{3} (\text{см}^3).$$

$$697. V = \frac{1}{3} h(S + S_1 + \sqrt{SS_1}), \text{ где } h = O_1O, S = S_{\triangle ABC}, S_1 = S_{\triangle A_1B_1C_1}.$$

Проведем MT перпендикулярно AN . $TN = ON - O_1M$, $ON = \frac{BC}{2\sqrt{3}}$, $O_1M = \frac{B_1C_1}{2\sqrt{3}}$.

$$ON = \frac{a}{2\sqrt{3}}, O_1M = \frac{a}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{a}{4\sqrt{3}},$$

$$TN = \frac{a}{2\sqrt{3}} - \frac{a}{4\sqrt{3}} = \frac{a}{4\sqrt{3}}.$$

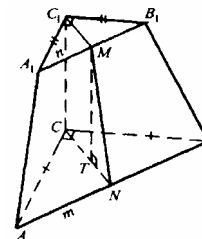
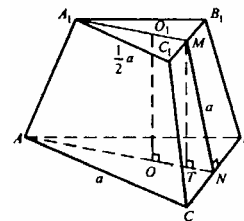
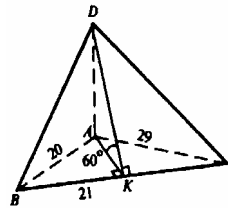
$$\text{Из } \triangle MTN: MT = O_1O = \sqrt{MN^2 - TN^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{48}} = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{47}{3}}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{(\frac{1}{2})^2 \sqrt{3}a^2}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{\sqrt{47}}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{16}} \right) = \frac{a^3\sqrt{47} \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{7\sqrt{47}a^3}{192}.$$

698. Построим $C_1M \perp A_1B_1$ и $CN \perp AB$, отрезок MN . Т.к. $AB \perp CN$ и $AB \perp C_1C$, то плоскость $C_1CNM \perp AB$, $MN \perp AB$, MN — апофема. Проведем $MT \perp CN$, MT — высота пирамиды. $\angle MNT = \varphi$ — линейный угол двугранного угла $MAVC$.

$$C_1M = MB_1 = \frac{n}{\sqrt{2}}; CN = NB = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$



$$TN = CN - C_1M = \frac{m}{\sqrt{2}} - \frac{n}{\sqrt{2}} = \frac{m-n}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{В } \triangle MTN: \frac{MT}{TN} = \operatorname{tg} \varphi, MT = TN \operatorname{tg} \varphi = \frac{m-n}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

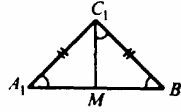
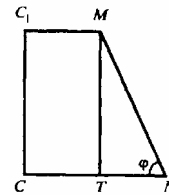
$$AB = AC \sqrt{2}, m = AC \sqrt{2}, AC = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{2} = \frac{m^2}{4}. S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{n^2}{4}.$$

$$V = \frac{1}{3} MT (S_{\triangle ABC} + S_{\triangle A_1B_1C_1} + \sqrt{S_{\triangle AAB} \cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}});$$

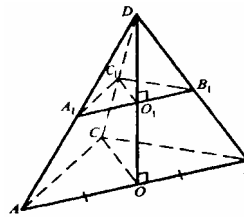
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{m-n}{2} \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} + \sqrt{\frac{m^2 \cdot n^2}{4 \cdot 4}} \right) = \frac{m-n}{6} \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{m^2 + n^2}{4} + \frac{mn}{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{24} \cdot \operatorname{tg} \varphi (m-n)(m^2 + mn + n^2) = \frac{(m^3 - n^3)}{24} \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$



699. Построим высоту пирамиды DO . $\triangle DOA = \triangle DOB = \triangle DOC$ (по гипотенузе и катету). Тогда, $OA = OB = OC$. Точка O равноудалена от вершин $\triangle ABC$, таким образом, является центром описанной около $\triangle ABC$ окружности. В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности — это середина гипотенузы.

$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ (т.к. плоскости $A_1B_1C_1$ и ABC параллельны по условию, таким образом, $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, $A_1C_1 \parallel AC$), поэтому $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$.



$\triangle DO_1B_1 \sim \triangle DOB$ — имеют общий острый угол при D , $\frac{DO_1}{DO} = \frac{O_1B_1}{OB} =$

$$= \frac{DB_1}{DB}. \triangle DA_1B_1 \sim \triangle DAB, \frac{DA_1}{DA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{DB_1}{DB} = \frac{\frac{1}{2} DB}{DB} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Таким образом, } \frac{DO_1}{DO} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Площади подобных фигур относятся как квадраты сходственных сторон,

$$\text{поэтому } \frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle AAB}} = \left(\frac{A_1B_1}{AB} \right)^2 = \frac{1}{4}. S_{\triangle AAB} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 18 = 216 \text{ дм}^2.$$

$$S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{4} S_{\triangle AAB} = \frac{216}{4} = 54 \text{ дм}^2$$

Вычислим высоту усеченной пирамиды O_1O .

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{24^2 + 18^2} = \sqrt{576 + 324} = \sqrt{900} = 30 \text{ дм}.$$

$\triangle ADB$ — равнобедренный, $DA=DB=25$ дм.

Из треугольника $\triangle DOB$: $DO = \sqrt{DB^2 - OB^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{400} = 20$ дм;

$$O_1O = \frac{1}{2} DO = 10 \text{ дм. } V = \frac{1}{3} O_1O (S_{\triangle ABC} + S_{\triangle A_1B_1C_1} + \sqrt{S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}});$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot (216 + 54 + \sqrt{216 \cdot 54}) = \frac{10}{3} (270 + \sqrt{27 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 27 \cdot 2}) = \frac{10}{3} (270 + 27 \cdot 4) =$$

$$= \frac{10}{3} (270 + 108) = 10 \cdot 126 = 1260 \text{ дм}^3$$

700. $A_1D_1=4$ см, $AD=6$ см, $S_{\triangle AA_1C_1C}=15$ см². $S_{ABCD}=AD^2=6^2=36$ (см²);
 $S_{\triangle AA_1B_1C_1D_1}=A_1D_1^2=4^2=16$ (см²). O_1O — высота пирамиды.

$A_1C_1 \parallel AC$, поэтому сечение AA_1C_1C — равнобедренная трапеция.

$$S_{\triangle AA_1C_1C} = 15 = \frac{A_1C_1 + AC}{2} O_1O, \text{ где } O_1O \text{ — высота пирамиды и высота}$$

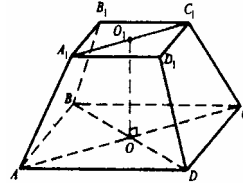
сечения.

$$A_1C_1 = 4\sqrt{2}; AC = 6\sqrt{2}.$$

$$15 = \frac{4\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{2} O_1O, O_1O = \frac{15}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

$$V = \frac{1}{3} O_1O (S_{ABCD} + S_{\triangle AA_1B_1C_1D_1} + \sqrt{S_{ABCD} \cdot S_{\triangle AA_1B_1C_1D_1}});$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} (36 + 16 + \sqrt{36 \cdot 16}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (52 + 24) = \frac{76}{\sqrt{2}} = \frac{76\sqrt{2}}{2} = 38\sqrt{2} \text{ см}^3.$$



701. а) Дано: $h=3$ см, $r=1,5$ см. $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 2,25 \cdot 3 = 2,25\pi$ (см³);

б) Дано: $r=4$ см, $V=48\pi$ см³. $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, $h = \frac{3V}{\pi r^2} = \frac{3 \cdot 48\pi}{\pi \cdot 16} = 9$ (см);

в) Дано: $h=m$, $V=p$. $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, $p = \frac{1}{3} \pi r^2 m$, $r^2 = \frac{3p}{\pi m}$, $r = \sqrt{\frac{3p}{\pi m}}.$

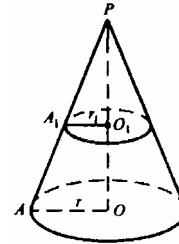
702. $PO=5$ см, $PO_1=2$ см; PO — высота конуса.

$\triangle PO_1A_1 \sim \triangle POA$, $O_1A_1=r_1$,

Тогда: $\frac{PO_1}{A_1O_1} = \frac{PO}{OA}$, $\frac{2}{r_1} = \frac{5}{r} = \frac{5}{r}.$

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi r_1^2 PO_1 = 24, \frac{1}{3} \pi r_1^2 \cdot 2 = 24, r_1^2 = \frac{36}{\pi},$$

$$r_1 = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \text{ см. } \frac{2}{\frac{6}{\sqrt{\pi}}} = \frac{5}{r}, \text{ откуда } r = \frac{6 \cdot 5}{\sqrt{\pi} \cdot 2} = \frac{15}{\sqrt{\pi}} \text{ см.}$$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 PO = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{225}{\pi} \cdot 5 = 75 \cdot 5 = 375 \text{ см}^3.$$

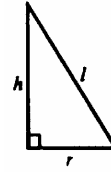
703. $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, где r — радиус основания, h — высота конуса.

$$\pi r^2 = Q, \text{ откуда } r^2 = \frac{Q}{\pi}. S_{\text{бок}} = P = \pi r l, \text{ где } l \text{ — образующая.}$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2}. P = \pi \sqrt{\frac{Q}{\pi}} \cdot l, l = \frac{P}{\sqrt{\pi Q}}.$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{P}{\sqrt{\pi Q}}\right)^2 - \frac{Q}{\pi}} = \sqrt{\frac{P^2}{\pi Q} - \frac{Q}{\pi}} = \sqrt{\frac{P^2 - Q^2}{\pi Q}}.$$

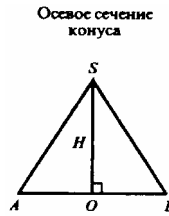
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} Q \cdot \frac{\sqrt{P^2 - Q^2}}{\sqrt{\pi Q}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{Q}{\pi}} (P^2 - Q^2) = \frac{\sqrt{\pi Q (P^2 - Q^2)}}{3\pi}.$$



$$\mathbf{704.} V = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{H^2}{4} \cdot H = \frac{\pi H^3}{12}.$$

705. Обозначим образующую $SB=d$, радиус основания $OB=r$.

$$\text{Из треугольника } \triangle SOB: SO=H=\sqrt{d^2 - r^2} = \sqrt{13^2 - r^2} = \sqrt{169 - r^2}, \text{ тогда } S_{\triangle ASB} = 60 = \frac{1}{2} H \cdot AB = \frac{Hr \cdot 2}{2} = H \cdot r.$$



$$\begin{cases} H = \sqrt{169 - r^2}, \\ Hr = 60. \end{cases}$$

$$H = 60 \cdot \frac{1}{r}, \frac{60}{r} = \sqrt{169 - r^2}, r^4 - 169r^2 + 3600 = 0.$$

$$(r^2)_{1,2} = \frac{169 \pm \sqrt{28561 - 14400}}{2} = \frac{169 \pm 119}{2},$$

$$r^2 = \frac{288}{2} = 144, r = 12 \text{ см,}$$

$$r^2 = \frac{169 - 119}{2} = 25, r = 5 \text{ см.}$$

$$\text{при } r_1 = 12 \text{ см } H_1 = \frac{60}{12} = 5 \text{ см,}$$

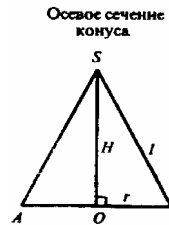
$$\text{при } r_2 = 5 \text{ см } H_2 = \frac{60}{5} = 12 \text{ см.}$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 5 = 240\pi \text{ см}^3,$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi \text{ см}^3.$$

706. Дано: $h=12 \text{ см}, V=324\pi \text{ см}^3$.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h, r^2 = \frac{3V}{\pi h} = \frac{3 \cdot 324\pi}{\pi \cdot 12} = 81,$$



$$r=9 \text{ (см)}. \alpha = \frac{360^\circ \cdot r}{l}$$

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = 15 \text{ (см)}. \alpha = \frac{360^\circ \cdot 9}{15} = 216^\circ.$$

707. Имеем $S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$, $S_{\text{осн}} = \pi r^2$, $S_{\text{бок}} = \pi r l$.

$45\pi = \pi r^2 + \pi r l$, отсюда $45 = r^2 + r l$, где r — радиус основания; а l — образующая конуса.

$$\alpha = \frac{360^\circ \cdot r}{l}. 60^\circ = \frac{360^\circ \cdot r}{l}, 60^\circ \cdot l = 360^\circ \cdot r, l = 6r.$$

Запишем систему: $\begin{cases} r^2 + r l = 45, \\ l = 6r. \end{cases} r^2 + 6r^2 = 45, r^2 = \frac{45}{7}.$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{(6r)^2 - r^2} = r \sqrt{35} = \frac{1}{\sqrt{7}} \sqrt{45 \cdot 35} = 15 \text{ дм}.$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{45}{7} \cdot 15 = \pi \cdot \frac{45 \cdot 5}{7} = \frac{225\pi}{7} \text{ дм}^3.$$

708. Имеем $V = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + r_1^2 + r r_1)$, где h — высота; r и r_1 — радиусы оснований конуса.

$$O_1 C = r_1, O B = r. \text{ Построим } CL \perp AB, CL = O_1 O = h.$$

$$LB = r - r_1 = 6 - 3 = 3 \text{ м}.$$

$$\text{Из треугольника } CBL: CL = \sqrt{CB^2 - BL^2} = \sqrt{l^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \text{ м},$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 4 (3^2 + 6^2 + 3 \cdot 6) = 84\pi \text{ м}^3.$$

709. Имеем $V = \frac{1}{3} \pi (r^2 + r_1^2 + r r_1) h$.

$S_{\text{бок}} = S = \pi (r + r_1) l$, где h — высота; а l — образующая; r и r_1 — радиусы оснований конуса.

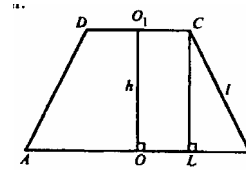
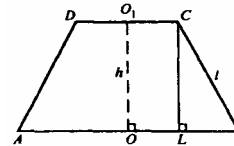
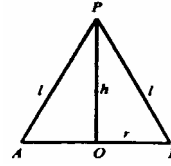
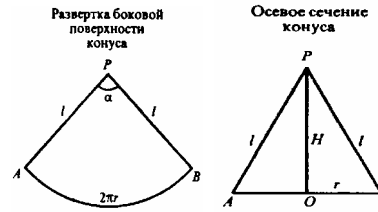
$$O_1 C = r_1, O B = r, LB = r - r_1.$$

$$\text{Из треугольника } CBL: h^2 + (r - r_1)^2 = l^2.$$

Запишем систему:

$$\begin{cases} S = \pi \cdot l (r + r_1), \\ (r - r_1)^2 = l^2 - h^2, \end{cases} \begin{cases} S = \pi \cdot l (r + r_1), \\ r - r_1 = \sqrt{l^2 - h^2}, \end{cases} \begin{cases} \frac{S}{\pi l} = r + r_1, \\ \sqrt{l^2 - h^2} = r - r_1, \end{cases}$$

$$\text{Тогда } 2r = \frac{S}{\pi l} + \sqrt{l^2 - h^2}, r = \frac{1}{2} \left(\frac{S}{\pi l} + \sqrt{l^2 - h^2} \right),$$



$$r_1 = \frac{S}{\pi l} - \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi l} - \frac{1}{2} \sqrt{l^2 - h^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{S}{\pi l} - \sqrt{l^2 - h^2} \right).$$

$$\begin{aligned} r^2 + r_1^2 + r r_1 &= (r + r_1)^2 - 2r r_1 + r r_1 = (r + r_1)^2 - r r_1 = \left(\frac{S}{2\pi l} + \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{2} + \frac{S}{2\pi l} - \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{2} \right)^2 - \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{S}{\pi l} + \sqrt{l^2 - h^2} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{S}{\pi l} - \sqrt{l^2 - h^2} \right) = \left(\frac{S}{\pi l} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\left(\frac{S}{\pi l} \right)^2 - (\sqrt{l^2 - h^2})^2 \right) = \frac{3}{4} \left(\frac{S}{\pi l} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{4} (l^2 - h^2) = \frac{1}{4} \left(\frac{3S^2}{\pi^2 l^2} + l^2 - h^2 \right). V = \frac{1}{3} \pi h \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{3S^2}{\pi^2 l^2} + l^2 - h^2 \right) = \frac{\pi h}{12} \left(l^2 - h^2 + \frac{3S^2}{\pi^2 l^2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{сеч}} = S_{ABCD} &= \frac{DC + AB}{2} h = \frac{2r_1 + 2r_2}{2} h = h(r_1 + r_2) = h \left(\frac{S}{2\pi l} + \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{2} + \frac{S}{2\pi l} - \right. \\ &- \left. \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{2} \right) = h \frac{S}{\pi l}. \end{aligned}$$

710. а) Дано: $R=4$ см. $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, $S = 4\pi R^2$.

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot 64 = \frac{256\pi}{3} \text{ см}^3, S = 4\pi \cdot 16 = 64\pi \text{ см}^2;$$

б) Дано: $V = 113,04 \text{ см}^3$, $V = \frac{4}{3} \pi R^3$,

$$R^3 = \frac{3V}{4\pi} = \frac{3 \cdot 113,04}{4\pi} = \frac{339,12}{4\pi} \approx 27, R = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ см}, S = 4\pi R^2 \approx 36\pi \text{ см}^2;$$

в) Дано: $S = 64\pi \text{ см}^2$. $S = 4\pi R^2$, $64\pi = 4\pi R^2$, $R^2 = 16$, $R = 4$ см,

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4\pi \cdot 4^3}{3} = \frac{256\pi}{3} \text{ см}^3.$$

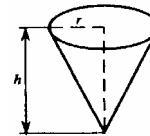
711. $V_3 = \frac{4}{3} \pi R_3^3$, $D_3 = 2R_3$, $V_3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{D_3^3}{8} = \frac{\pi D_3^3}{6}$; $V_{\text{л}} = \frac{4}{3} \pi R_{\text{л}}^3$, $D_{\text{л}} = 2R_{\text{л}}$,

$$V_{\text{л}} = \frac{\pi D_{\text{л}}^3}{6} \cdot \frac{V_3}{V_{\text{л}}} = \frac{D_3^3}{D_{\text{л}}^3}, \text{ если } D_3 = 4D_{\text{л}}, \text{ то } \frac{V_3}{V_{\text{л}}} = \frac{4^3 D_{\text{л}}^3}{D_{\text{л}}^3} = 64.$$

712. $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi R^3$, $V_{\text{ц}} = \pi r^2 h$, $D_{\text{ш}} = D_{\text{ц}}$, то есть $2R = 2r$, откуда $R = r$. По условию $V_{\text{ш}} = V_{\text{ц}}$. $\frac{4}{3} \pi R^3 = \pi R^2 h$, $\frac{4}{3} R = h$.

713. $h = 12$ см, $r = \frac{5}{2} = 2,5$ см. $V_{\text{к}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 6,25 \cdot 12 = 25\pi \text{ см}^3$.

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi R^3, R = \frac{D}{2}; V_{\text{ш}} = \frac{\pi D^3}{6}, D = 5 \text{ см}, V_{\text{ш}} = \frac{125\pi}{6} \text{ см}^3.$$



Надо сравнить объемы конуса и шара: 25π и $V \frac{125\pi}{6}$, 150 и 125. Т.к. $150 > 125$, то $25\pi > \frac{125\pi}{6}$, $V_K > V_{ш}$, то есть растаявшее мороженое уместится в стаканчике.

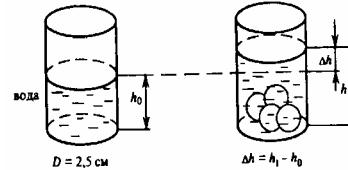


714. $V_{цил} = \pi r^2 h$, $V_{воды} = \pi r^2 h_0 = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot h_0 = \frac{\pi D^2}{4} h_0$. 4 опущенных шарика

занимают объем: $4 \left(\frac{4}{3} \pi r_{ш}^3\right) = \frac{16}{3} \pi \left(\frac{D_{ш}}{2}\right)^3 = \frac{2\pi D_{ш}^3}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ см}^3$.

Т.к. объем шариков равен объему вытесненной воды, то: $\pi \frac{D^2}{4} \Delta h = \frac{2\pi}{3}$;

$$\Delta h = \frac{8}{3D^2} = \frac{4}{3(2,5)^2} = \frac{32}{75}.$$



715. Пусть $AC=h$, $AB=r$, r — радиус клумбы; примем радиус шара равным $R_{мх}$. Рассмотрим центральное сечение шара. $CD=2R$, $\angle CBD=90^\circ$, т.к. он опирается на диаметр CD .

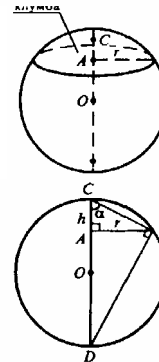
Из треугольника CDB : $CB=2R \cos \alpha$; из $\triangle ACB$:

$$\cos \alpha = \frac{AC}{CB} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}.$$

Получили уравнение: $2R \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \sqrt{h^2 + r^2}$, $2Rh = h^2 +$

$$+ r^2, R = \frac{h^2 + r^2}{2h} \quad (h=0,6 \text{ м}), R = \frac{0,36 + 25}{2 \cdot 0,6} = \frac{25,36}{1,2} = \frac{317}{15} \text{ м}.$$

$$V_{сегм} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h\right) (0,6)^2 \cdot \pi \left(\frac{317}{15} - \frac{1}{5}\right) = \frac{9}{25} \pi \cdot \frac{314}{15} = \frac{3 \cdot 314 \pi}{3 \cdot 25} = \frac{924 \pi}{125}$$

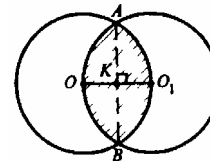


716. Сечение шаров проходит через их центры O и O_1 . Хорда $AB \perp OO_1$, $OO_1=r$, r — радиусы шаров. Общая часть заштрихована и состоит из двух одинаковых шаровых сегментов. Их объемы:

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h\right), \text{ где } h = KO_1 = \frac{1}{2} r, R=r.$$

$$V = \pi \frac{r^2}{4} \left(r - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} r\right) = \frac{\pi r^2}{4} \left(r - \frac{r}{6}\right) = \frac{5\pi r^3}{24}.$$

$$V_{общ} = 2V = \frac{5\pi r^3}{12}. \text{ Объем шара } V = \frac{4}{3} \pi r^3. \frac{V_{общ}}{V} = \frac{5\pi r^3}{12} : \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 12} = \frac{5}{16}.$$

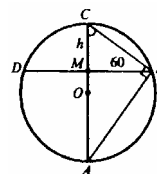


717. $MB=60 \text{ см}$. $CA=2R=2 \cdot 75=150 \text{ см}$.

Обозначим $CM=h$. Обозначим $\angle ACB=\varphi$,
следовательно, из $\triangle ACB$: $CB=CA \cos \varphi=2R \cos \varphi$.

С другой стороны, из треугольника CMB :

$$CB=\sqrt{h^2+60^2}, \cos \varphi=\frac{CM}{CB}=\frac{h}{\sqrt{h^2+60^2}}.$$



$$2R \frac{h}{\sqrt{h^2+60^2}}=\sqrt{h^2+60^2}, 2Rh=h^2+60^2, h^2-2Rh+3600=0,$$

$$h_{1,2}=R \pm \sqrt{R^2-3600}=75 \pm \sqrt{5625-3600}=75 \pm 45; h_1=120 \text{ см}, h_2=30 \text{ см}.$$

$$V_1=\pi h_1^2 \left(R-\frac{1}{3}h_1\right)=\pi \cdot 120^2 \left(75-\frac{1}{3} \cdot 120\right)=\pi \cdot 14400 \cdot 35=504000\pi \text{ см}^3;$$

$$V_2=\pi h_2^2 \left(R-\frac{1}{3}h_2\right)=\pi \cdot 30^2 \left(75-\frac{1}{3} \cdot 30\right)=\pi \cdot 900 \cdot 65=58500\pi \text{ см}^3.$$

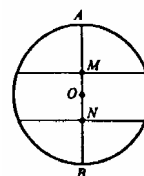
$$718. AB=2R, AM=MN=NB=\frac{1}{3}AB=\frac{2R}{3}.$$

Объем шарового слоя найдем как разность объемов шаровых сегментов, высоты которых NA и MA .

$$V_1=\pi \cdot NA^2 \left(R-\frac{1}{3}NA\right)=\pi \left(\frac{4R}{3}\right)^2 \cdot \left(R-\frac{1}{3} \cdot \frac{4R}{3}\right)=\frac{5 \cdot 16}{81} \pi R^3;$$

$$V_2=\pi \cdot MA^2 \left(R-\frac{1}{3}MA\right)=\pi \left(\frac{2R}{3}\right)^2 \cdot \left(R-\frac{1}{3} \cdot \frac{2R}{3}\right)=\frac{7 \cdot 4}{81} \pi R^3;$$

$$V_{\text{шар слоя}}=V_1-V_2=\left(\frac{80}{81}-\frac{28}{81}\right)\pi R^3=\frac{52}{81} \pi R^3.$$



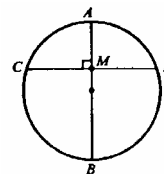
719. Имеем $CD \perp AB$, $AM=6$ см, $MB=12$ см.

Рассмотрим сечение шара плоскостью большого круга. AB — диаметр шара, $AB=6+12=18$ см, $R=9$ см. Полученные части — шаровые сегменты.

$$V_1=\pi \cdot AM^2 \left(R-\frac{1}{3}AM\right); V_2=\frac{4}{3} \pi R^3-V_1.$$

$$V_1=\pi \cdot 6^2 \left(9-\frac{1}{3} \cdot 6\right)=36\pi(9-2)=252\pi \text{ см}^3.$$

$$V_2=\frac{4}{3} \pi \cdot 9^3-252\pi=\frac{4\pi \cdot 81 \cdot 9}{3}-252\pi=972\pi-252\pi=720\pi \text{ см}^3.$$

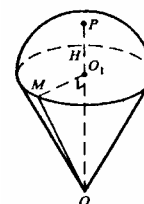


720. Пусть R — радиус шара, r — радиус основания сегмента. Вычислим высоту сегмента $H=PO_1$, $OP=R$.

Из прямоугольного треугольника $\triangle OO_1M$:

$$OO_1=\sqrt{OM^2-O_1M^2}=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{75^2-60^2}=45 \text{ см}$$

$$H=PO_1=OP-O_1O=75-45=30 \text{ см}.$$

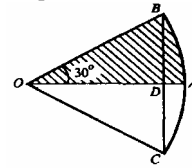


$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 H = \frac{2}{3} \pi \cdot 75^2 \cdot 30 = \pi \cdot 20 \cdot 5625 = 112500 \pi \text{ см}^3.$$

721. Имеем $\angle BOA = 30^\circ$. Тогда $\angle BOC = 60^\circ$, $OB = OC = R$, $\triangle BOC$ — равно-
сторонний, сторона BC отсекает от радиуса OA отрезок DA, равный высоте H
соответствующего шаровому сектору сегмента.

$$H = AD = AO - OD = R - R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \pi R^3 (2 - \sqrt{3}).$$



722. $S_{\text{шара}} = 4\pi R^2$. На сушу приходится $\frac{1}{4}$ часть поверхности шара, т.е.

$$S_{\text{суши}} = \pi \cdot 6375^2 \approx 1,28 \cdot 10^8 \text{ км}^2 = 128 \cdot 10^6 \text{ км}^2.$$

723. $S = 4\pi R^2$; $S = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi \text{ см}^2$. 1% составит $4\pi \text{ см}^2$, 8% — $32\pi \text{ см}^2$.
 $S = 400\pi + 32\pi = 432\pi \approx 1357 \text{ см}^2$.

$$\mathbf{724.} \text{ Имеем } S_{\text{сф}} = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 4\pi \frac{D^2}{4} = \pi D^2;$$

$$S_{\text{полн кон}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}.$$

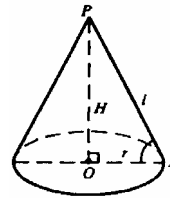
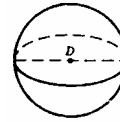
$$\text{Из треугольника AOP: } \cos \angle A = \frac{OA}{PA} = \frac{r}{l} = \frac{1}{2}, \angle A = 60^\circ.$$

$$OA = r = H \cdot \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{H}{\sqrt{3}}; S_{\text{осн}} = \pi r^2 = \pi \cdot \frac{H^2}{3}.$$

$$l = 2 \cdot \frac{H}{\sqrt{3}}. S_{\text{бок}} = \pi r l = \pi \cdot \frac{H}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2H}{\sqrt{3}} = \pi \cdot \frac{2H^2}{3},$$

$$S_{\text{полн кон}} = \frac{\pi H^2}{3} + \frac{2\pi H^2}{3} = \frac{3\pi H^2}{3} = \pi H^2.$$

По условию $H = D$, т.е. $S_{\text{сф}} = S_{\text{полн кон}}$.



Вопросы к главе VII

1. а) $V_2 > V_1$; б) $V_1 = V_2 = n$ (см³).

2. Заметим, что $\triangle AMN \sim \triangle ACB$.

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ACB}} = \left(\frac{MN}{CB}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{2}BC}{BC}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{\triangle ABC} \cdot AA_1, \quad V_{AMNA_1M_1N_1} = S_{\triangle AMN} \cdot AA_1,$$

$$\frac{V_{AMNA_1M_1N_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}} = \frac{S_{\triangle AMN} \cdot AA_1}{S_{\triangle ACB} \cdot AA_1} = \frac{1}{4}.$$

$$3. V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{4} D^2 \cdot h.$$

$$D_1 = 2D, h_1 = \frac{h}{4}. V_1 = \frac{\pi}{4} \cdot (2D)^2 h_1 = \frac{\pi}{4} \cdot 4D^2 \cdot \frac{h}{4} = \frac{\pi}{4} D^2 h. V_1 = V.$$

$$4. V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h, h_1 = nh.$$

В основании многоугольник, у которого: а) число сторон осталось без изменений; б) углы остались без изменений, т.е. полученный многоугольник подобен исходному, а площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон. Обозначим: x — сторона исходного многоугольника, $\frac{x}{n}$ — сторона полученного.

$$\frac{S_1}{S_{\text{осн}}} = \left(\frac{\frac{x}{n}}{x}\right)^2 = \frac{1}{n^2}, \text{ где } S_1 \text{ — площадь основания полученного многоугольника.}$$

$$V = \frac{1}{3} S_1 h_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_{\text{осн}}}{n^2} \cdot n \cdot h = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h \cdot \frac{1}{n} = \frac{V}{n}.$$

5. В качестве четырехугольников рассмотрим параллелограмм и прямоугольник. Обозначим их стороны a и b .

$$S_1 = ab \sin \alpha, \quad S_2 = ab, \quad V_1 = \frac{1}{3} S_1 h \quad \text{и}$$

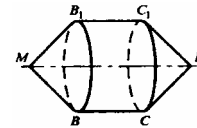
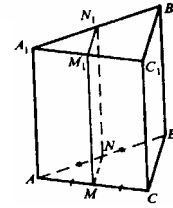
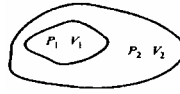
$ab \sin \alpha < ab$, т.е.

$$V_2 = \frac{1}{3} S_2 h \text{ связаны неравенством } V_1 < V_2, \text{ т.е. нет.}$$

$$6. r_1 = 2r_2; V_1 = \pi r_1^2 h; V_2 = \pi r_2^2 h. \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi h r_1^2}{\pi h r_2^2} = \frac{4r_2^2}{r_2^2} = 4.$$

7. Тело вращения будет состоять из трех тел: прямого цилиндра BCC_1B_1 и двух равных конусов.

8. Конус 1: обозначим радиус основания a ; высота b . Тогда объем равен: $V_1 = \pi a^2 b$.



Конус 2: радиус основания b ; высота a ; $V_2 = \pi b^2 a$.

Если $a \neq b$, то $V_1 \neq V_2$.

9. Шар 1: $D=2R_1$; шар 2: $D=R_2$, $2R_1=R_2$.

$$a) \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_1}{2R_1} = \frac{1}{2};$$

$$b) V_1 = \frac{4}{3} \pi R_1^3, V_2 = \frac{4}{3} \pi R_2^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 8R_1^3. \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3} \pi R_1^3}{\frac{4}{3} \pi R_1^3 \cdot 8} = \frac{1}{8}.$$

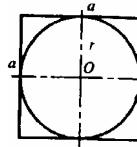
$$10. \text{ Имеем } R=6 \text{ см, } V = \frac{4}{3} \pi \cdot 6^3; r=2 \text{ см, } V_1 = \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3, n \cdot V_1 = \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 \cdot n.$$

$$\text{Тогда получили уравнение } \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 \cdot n = \frac{4}{3} \pi \cdot 6^3, 2^3 \cdot n = 6^3, n = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 3^3 = 27.$$

11. Обозначим ребро куба равное a . Вписанный шар касается всех граней куба в их центрах. Вершины куба, вписанного в шар, лежат на поверхности шара. Радиус описанного шара равен половине диагонали куба.

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; r = \frac{a}{2} \quad V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{6};$$

$$V_{\text{оп}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}. \frac{V_{\text{оп}}}{V_{\text{ш}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}}{\frac{\pi a^3}{6}} = 3\sqrt{3}.$$



$$12. S = 4\pi R^2,$$

$$a) R_1 = \frac{R}{2}; S = 4\pi R^2; S_1 = 4\pi R_1^2 = 4\pi \cdot \frac{R^2}{4} = \pi R^2. \frac{S}{S_1} = \frac{4\pi R^2}{\pi R^2} = 4; S_1 = \frac{1}{4} S$$

— уменьшится в 4 раза;

$$b) R_1 = 3R. S = 4\pi R^2; S_1 = 4\pi R_1^2 = 4\pi \cdot (3R)^2 = 4\pi \cdot 9R^2. \frac{S}{S_1} = \frac{4\pi \cdot R^2}{4\pi R^2 \cdot 9} = \frac{1}{9}; S_1 = 9S$$

— увеличится в 9 раз.

$$13. \text{ Для шара 1: } V_1 = \frac{4}{3} \pi R_1^3; \text{ Для шара 2: } V_2 = \frac{4}{3} \pi R_2^3,$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3} \pi R_1^3}{\frac{4}{3} \pi R_2^3} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = 8; \frac{R_1}{R_2} = 2; \frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 4.$$

$$14. \text{ Пусть } S_1:S_2 = m^2:n^2.$$

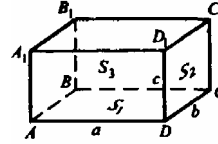
$$\text{Для шара 1: } S_1 = 4\pi R_1^2, V_1 = \frac{4\pi}{3} R_1^3; \text{ Для шара 2: } S_2 = 4\pi R_2^2, V_2 = \frac{4\pi}{3} \pi R_2^3$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}; \frac{R_1}{R_2} = \frac{m}{n}; \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3} \pi R_1^3}{\frac{4}{3} \pi R_2^3} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \left(\frac{m}{n}\right)^3.$$

Дополнительные задачи

725. Обозначим $S_{ABCD}=S_1$, $S_{DD_1C_1C}=S_2$, $S_{AA_1D_1D}=S_3$; $AD=a$, $DC=b$, $DD_1=c$.

$$\begin{cases} S_1 = ab, \\ S_2 = cb, \\ S_3 = ac, \end{cases} \begin{cases} S_1 = ab, \\ S_2 = \frac{b}{a}, \\ S_3 = \frac{b}{a}, \end{cases} \begin{cases} b = \frac{S_1}{a}, a^2 = \frac{S_1 S_3}{S_2}, \\ S_2 = \frac{S_1}{a^2}, a = \sqrt{\frac{S_1 S_3}{S_2}}, \\ S_3 = \frac{S_1}{a^2}, a = \sqrt{\frac{S_1 S_3}{S_2}}, \end{cases}$$

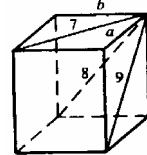


$$b = \frac{S_1 \sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1 S_3}} = \sqrt{\frac{S_1 S_2}{S_3}}; c = \frac{S_3 \sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1 S_3}} = \sqrt{\frac{S_3 S_2}{S_1}}.$$

$$V = abc; V = \sqrt{\frac{S_1 S_3}{S_2} \cdot \frac{S_1 S_2}{S_3} \cdot \frac{S_3 S_2}{S_1}} = \sqrt{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}; V = \sqrt{6 \cdot 12 \cdot 18} = 36 \text{ дм}^3.$$

726. Обозначим стороны параллелепипеда за a , b , c . Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 81, \\ b^2 + c^2 = 64, \\ a^2 + b^2 = 49. \end{cases} \begin{cases} a^2 - b^2 = 17, \\ a^2 + b^2 = 49. \end{cases}$$



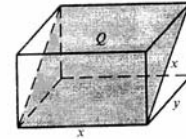
$$2a^2 = 66, a^2 = 33, a = \sqrt{33}; b^2 = 49 - 33 = 16, b = 4; c^2 = 64 - 16 = 48, c = 4\sqrt{3}.$$

$$V = abc; V = \sqrt{33} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16 \cdot \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 11} = 16 \cdot 3 \cdot \sqrt{11} = 48\sqrt{11} \text{ см}^3.$$

727. Сечение заштриховано, его сторона равна x . Сторона основания y .

$$x^2 = Q, x = \sqrt{Q}, y^2 + a^2 = x^2, y^2 + a^2 = Q, y = \sqrt{Q - a^2}, V = xya;$$

$$V = a\sqrt{Q} \sqrt{Q - a^2} = a\sqrt{Q^2 - a^2 Q}.$$



728. В основании параллелепипеда — параллелограмм, боковое ребро перпендикулярно к плоскости основания.

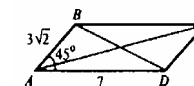
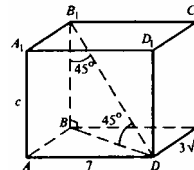
BD — меньшая диагональ, т.к. $\angle A = 45^\circ$, а $\angle B = 135^\circ$, поэтому $BD < AC$. $\triangle BB_1D$ — прямоугольный, $BB_1 = BD$. По теореме косинусов из треугольника ABD :

$$BD^2 = 49 + 18 - 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 49 + 18 - 42 = 7 + 18 = 25; BD = 5 \text{ см}.$$

$$S_{\text{осн}} = S_{ABCD} = 7 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 7 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 21 \text{ см}^2.$$

$$BD = BB_1 = 5 \text{ см } V_{\text{пар}} = S_{\text{осн}} \cdot BB_1 = 5 \cdot 21 = 105 \text{ см}^3$$

729. A_1BCD_1 — параллелограмм, в котором диагонали перпендикулярны. Значит, A_1BCD_1 — ромб. По свойству диагоналей ромба $A_1O = OC$ и



$BO=OD_1$. По теореме Пифагора из $\triangle A_1OB$ $A_1B=5$ см. Из прямоугольного $\triangle A_1AB$: $AA_1=\sqrt{25-9}=4$ см.

Вычислим площадь основания.

$$\text{Из } \triangle A_1AC: AC=\sqrt{A_1C^2-A_1A^2}=\sqrt{8^2-4^2}=\sqrt{48}=4\sqrt{3} \text{ см.}$$

По теореме косинусов в треугольнике ABC :

$$(4\sqrt{3})^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cos\angle B; \cos\angle B=-\frac{7}{15},$$

$$\sin\angle B=\sqrt{1-\cos^2\angle B}=\sqrt{1-\frac{49}{225}}=\frac{\sqrt{176}}{15}. S_{\text{осн}}=3\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{176}}{15}=\sqrt{176} \text{ см}^2.$$

$$V=S_{\text{осн}}\cdot AA_1=4\sqrt{176}=4\sqrt{16\cdot 11}=16\sqrt{11} \text{ см}^3.$$

730. Пусть $BC=B_1C_1=AC=A_1C_1=x$. Из прямоугольного треугольника ABC : $x^2+x^2=a^2$, $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

$$S_{\text{осн}}=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{a^2}{4}. V=S_{\text{осн}}\cdot AA_1=\frac{a^2}{4}a=\frac{a^3}{4}.$$

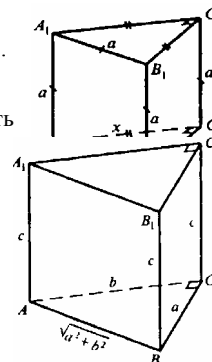
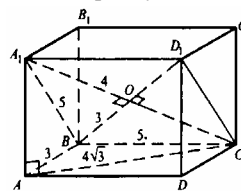
731. Пусть $AC=b$, $BC=a$, тогда, $AB=\sqrt{a^2+b^2}$. Пусть $AA_1=c$. Площади боковых граней, которые являются прямоугольниками, равны соответственно ac ; bc ; $\sqrt{a^2+b^2}c$. Т.к. $\sqrt{a^2+b^2}>b$ и $\sqrt{a^2+b^2}>a$, то наибольшую площадь имеет грань со сторонами $\sqrt{a^2+b^2}$ и c . $S_{\text{осн}}=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab$.

$$\text{Пусть } a < b, \begin{cases} \left(\frac{1}{2}ab\right)c = 3, & (1) \\ \sqrt{a^2+b^2} \cdot c = 3\sqrt{5}, & (2) \\ c = 3. & (3) \end{cases}$$

$$\text{Из (1) имеем: } ac \cdot \frac{1}{2}b=3, 3 \cdot \frac{1}{2}b=3, b=2.$$

$$\text{Из уравнений (3) и (2): } \begin{cases} ac = 3, \\ c\sqrt{a^2+4} = 3\sqrt{5}, \end{cases} \quad \begin{cases} a^2c^2 = 9, \\ a^2c^2 + 4c^2 = 45. \end{cases}$$

$$9+4c^2=45, 4c^2=36, c^2=9 \ (c>0), \text{ поэтому } c=3. a=\frac{3}{3}=1.$$



Итак, $a=1$, $b=2$, $c=3$. $AB=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$ м.

732. Обозначим $BC_1=d$, $CC_1=h$. Проведем BF перпендикулярно AC , отрезок C_1F , он является проекцией BC_1 на плоскость боковой грани AA_1C_1C , $\angle BC_1F=\varphi$.

Из прямоугольного треугольника FC_1B : $FB=d \sin \varphi$.

$$AB = \frac{FB}{\sin 60^\circ} = \frac{2d \sin \varphi}{\sqrt{3}}. \quad S_{\triangle ABC} = S_{\text{осн}} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} =$$

$$= \left(\frac{2d \sin \varphi}{\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4d^2 \sin^2 \varphi \sqrt{3}}{3 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{3} d^2 \sin^2 \varphi.$$

Найдем высоту призмы $C_1C=h$. $FC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} AB = \frac{d \sin \varphi}{\sqrt{3}}$.

Из прямоугольного $\triangle C_1FC$:

$$h = \sqrt{(d \cos \varphi)^2 - \left(\frac{d \sin \varphi}{\sqrt{3}} \right)^2} = \sqrt{d^2 \cos^2 \varphi - \frac{d^2 \sin^2 \varphi}{3}} = d \sqrt{\frac{3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{3}}.$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{3} d^2 \sin^2 \varphi \cdot d \sqrt{\frac{3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{3}} = \frac{d^3 \sin^2 \varphi}{3} \cdot \sqrt{3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}.$$

733. $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма, $B_1B \parallel$ плоскости AA_1C_1C . Построим $B_1F \perp$ плоскости AA_1C_1C . Отрезок B_1F есть расстояние от грани AA_1C_1C до параллельного ей ребра B_1B . Достроим данную призму до параллелепипеда $ABDCA_1B_1D_1C_1$. За основание параллелепипеда возьмем грань AA_1C_1C , следовательно, его высотой будет отрезок B_1F .

$$V_{\text{пар}} = S_{AA_1C_1C} \cdot B_1F.$$

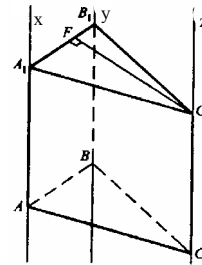
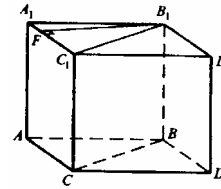
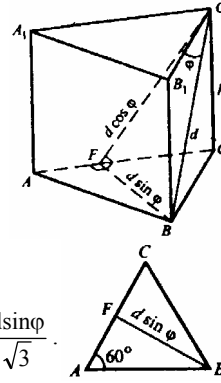
Плоскость C_1CBV_1 делит параллелепипед на две равновеликие призмы, тогда, объем каждой из них составляет $\frac{1}{2} V_{\text{пар}}$, или $V_{\text{призмы}} = \frac{1}{2} S_{AA_1C_1C} \cdot B_1F$,

что и требовалось доказать.

734. $x \parallel y \parallel z$, $AA_1=BB_1=CC_1$. Известно (см. задачу 733), что объем треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние от этой грани до параллельного ей ребра.

Возьмем за основание грань AA_1B_1B , из точки C_1 проведем отрезок $C_1F \perp$ плоскости AA_1B_1B . Отрезок C_1F — высота призмы.

$$V = S_{AA_1B_1B} \cdot C_1F \cdot \frac{1}{2}.$$



Длина C_1F — величина постоянная при заданном положении x, y, z . Расстояние между параллельными прямыми x и y , а значит, и между отрезками AA_1 и BB_1 не меняется, тогда, высота параллелограмма AA_1B_1B — величина постоянная. Тогда площадь $S_{AA_1B_1B} = \text{const}$, значит $V = \text{const}$.

735. Обозначим x — коэффициент пропорциональности, S_1, S_2, S_3 — площади боковых граней наклонной призмы. Следовательно

$$S_1 = x \cdot 20, S_2 = x \cdot 37, S_3 = x \cdot 51. S_{\text{бок}} = S_1 + S_2 + S_3 = 10,8 \text{ дм}^2.$$

$$10,8 = x \cdot 20 + x \cdot 37 + x \cdot 51 = 108x, x = \frac{10,8}{108} = \frac{1}{10}.$$

$$\text{Значит } S_1 = \frac{1}{10} \cdot 20 = 2 \text{ дм}^2; \quad S_2 = \frac{1}{10} \cdot 37 = 3,7 \text{ дм}^2; \quad S_3 = \frac{1}{10} \cdot 51 = 5,1 \text{ дм}^2.$$

Пусть боковые грани пересечены плоскостью, перпендикулярной к ним. Линии пересечения секущей плоскости с боковыми гранями будут высотами боковых граней, то есть высотами параллелограммов. Пусть y боковых граней с площадями S_1, S_2, S_3 , высоты равны h_1, h_2, h_3 .

$$\text{Значит, } 2 = h_1 \cdot 0,5, h_1 = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ дм}; \quad 3,7 = h_2 \cdot 0,5, h_2 = \frac{3,7}{0,5} \text{ дм}; \quad 5,1 = h_3 \cdot 0,5, h_3 = \frac{5,1}{0,5} \text{ дм}.$$

Полупериметр перпендикулярного сечения равен:

$$p = \frac{1}{2} \left(4 + \frac{37}{5} + \frac{51}{5} \right) = \frac{1}{2} \left(4 + \frac{88}{5} \right) = \frac{108}{2 \cdot 5} = \frac{54}{5} \text{ дм}.$$

Вычислим площадь перпендикулярного сечения:

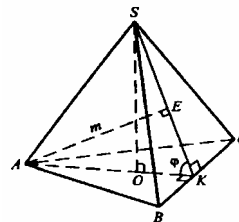
$$S = \sqrt{p(p-h_1)(p-h_2)(p-h_3)} = \sqrt{\frac{54}{5} \cdot \left(\frac{54}{5} - 4 \right) \cdot \left(\frac{54}{5} - \frac{37}{5} \right) \cdot \left(\frac{54}{5} - \frac{51}{5} \right)} = \sqrt{\frac{54}{5} \cdot \frac{34}{5} \cdot \frac{17}{5} \cdot \frac{3}{5}} =$$

$$= \frac{1}{25} \sqrt{54 \cdot 17^2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{17}{25} \cdot 6 \cdot 3 = \frac{17 \cdot 18}{25} \text{ дм}^2.$$

$$V = S \cdot 0,5 = \frac{17 \cdot 18}{25} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17 \cdot 9}{25} = \frac{153}{25} = 6,12 \text{ дм}^3.$$

736. Пусть SO — высота пирамиды, O — центр правильного $\triangle ABC$. Проведем AK перпендикулярно BC , отрезок SK . По теореме о трех перпендикулярах $SK \perp BC$, поэтому $\angle AKS = \varphi$ — линейный угол двугранного угла при основании.

Проведем AE перпендикулярно плоскости BSC . Поскольку плоскость ASK перпендикулярна плоскости BSC , то $AE \subset$ плоскости ASK .



Из прямоугольного $\triangle AEK$: $AK = \frac{m}{\sin \varphi}$. Обозначим сторону основания равной

$$x, \text{ тогда из треугольника } \triangle ABK: AK = x \sin 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2}. \text{ Тогда, } \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{m}{\sin \varphi},$$

$$x = \frac{m \cdot 2}{\sqrt{3} \sin \varphi} \cdot S_{\triangle ABC} = S_{\text{осн}} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4m^2}{3 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{m^2 \sqrt{3}}{3 \sin^2 \varphi}.$$

В $\triangle ABC$ OK — радиус вписанной окружности,

$$OK = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{2m}{\sqrt{3} \sin \varphi} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{m}{3 \sin \varphi}.$$

$$\text{В } \triangle SOK: \frac{SO}{OK} = \operatorname{tg} \varphi, SO = OK \operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{3 \sin \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{m}{3 \cos \varphi}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot SO; V = \frac{1}{3} \cdot \frac{m^2 \sqrt{3}}{3 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{m}{3 \cos \varphi} = \frac{m^2 \sqrt{3}}{\sin^2 \varphi \cos \varphi} : 27.$$

737. Имеем SO — высота пирамиды, O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Обозначим сторону основания равной x . K — середина ребра SC , $KL \perp$ плоскости $ABCD$, $KL = m$, т.к. плоскость SOC перпендикулярна плоскости $ABCD$ и $K \in$ плоскости SOC . KL — средняя линия в $\triangle SOC$, значит $SO = 2m$.

$$LC = \frac{m}{\operatorname{tg} \varphi}, OC = 2CL = \frac{2m}{\operatorname{tg} \varphi}, AC = 2OC = \frac{4m}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

$$\text{Из прямоугольного треугольника } ABC: x \sqrt{2} = \frac{4m}{\operatorname{tg} \varphi}, x = \frac{4m}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \varphi}.$$

$$S_{\text{осн}} = x^2 = \frac{16m^2}{2 \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{8m^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi}. V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{8m^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot 2m = \frac{16m^3}{3 \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

738. Имеем DO — высота пирамиды, плоскость $DOC \perp$ плоскости ABC . Проведем $OM \perp DC$, через точку O проведем KL параллельно AB , отрезки ML и MK . KL перпендикулярно плоскости DOC , значит, $KL \perp DC$.

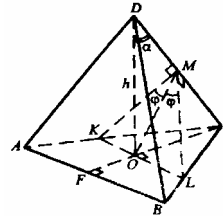
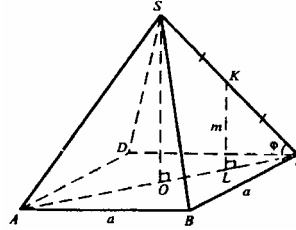
$OM \perp DC$ — по построению. Плоскость $KLM \perp DC$ и поэтому $LM \perp DC$ и $KM \perp DC$.

Тогда, $\angle KML = 2\varphi$, $\triangle KOM = \triangle LOM$, значит $\angle KMO = \angle LMO = \varphi$.

Пусть $\angle ODM = \alpha$, следовательно, из прямоугольного $\triangle ODM$: $OM = h \sin \alpha$.

$$\text{Примем } KO = OL = y. \text{ Из прямоугольного } \triangle LOM: \frac{y}{h \sin \alpha} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1)$$

Рассмотрим треугольник ABC . В нем OC — радиус описанной окружности, $OC = R$, а OF — радиус вписанной окружности. $OF = r$. Обозначим сторону основания x , следовательно, $AF = FB = \frac{x}{2}$.



Из подобия треугольников FCB и OLC имеем: $\frac{d}{R} = \frac{x}{2(R+r)}$, т.е. $d = \frac{xR}{2(R+r)} =$
 $= \frac{x \cdot x}{\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{3}$, т.к. $R = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $R+r=FC=x \cdot \sin 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Возвращаясь к (1), имеем: $\frac{1}{h \sin \alpha} \cdot \frac{x}{3} = \operatorname{tg} \varphi$ (2).

Из $\triangle DOC$: $\frac{R}{h} = \operatorname{tg} \alpha$, или $\frac{x}{\sqrt{3}h} = \operatorname{tg} \alpha$, поэтому $x = h\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$.

Подставим в (2): $\frac{h\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \alpha}{3h \cdot \sin \alpha} = \operatorname{tg} \varphi$; $h\sqrt{3} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \varphi \cdot 3h \cdot \sin \alpha$, т.е.

$3 \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3 \operatorname{tg} \varphi}$. $DC = \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{h \cdot 3 \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} h \operatorname{tg} \varphi$.

Вычислим сторону основания x : $\frac{x}{\sqrt{3}} = R$, с другой стороны, из $\triangle DOC$:

$R = \sqrt{DC^2 - h^2}$, $R = \sqrt{3h^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - h^2} = h\sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \varphi - 1}$, т.е. $\frac{x}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \varphi - 1}$,

$x = h\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \varphi - 1}$. $S_{\text{осн}} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$; $S_{\text{осн}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot h^2 \cdot 3(3 \operatorname{tg}^2 \varphi - 1)$.

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}h^2}{4} \cdot (3 \operatorname{tg}^2 \varphi - 1) \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot h^3 (3 \operatorname{tg}^2 \varphi - 1)$.

739. Имеем SO — высота пирамиды. В основании — правильный n -угольник, O — его центр.

$OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n = R$, где R — радиус описанной окружности.

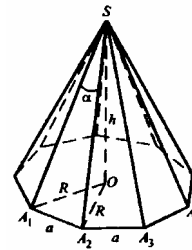
$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$.

Обозначим боковое ребро пирамиды через b . Тогда из $\triangle A_1SA_2$ по теореме синусов имеем:

$\frac{b}{\sin \frac{180^\circ - \alpha}{2}} = \frac{a}{\sin \alpha}$; $b = \frac{a \sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin \alpha} = \frac{a \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$.

Из прямоугольного треугольника $\triangle A_1OS$:

$h = SO = \sqrt{b^2 - R^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{180^\circ}{n}}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{180^\circ}{n}}}$.



Вычислим площадь основания.

Площадь правильного n-угольника:

$$S_{\text{осн}} = \frac{na^2}{4 \operatorname{tg} \frac{180}{n}} \cdot V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} \frac{na^2}{4 \operatorname{tg} \frac{180}{n}} \frac{a}{2} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{180}{n}}}.$$

740. $\triangle DOA = \triangle DOB = \triangle DOC$ (по катету и строму углу). Тогда, $DA = DB = DC$ и $OA = OB = OC = R$, R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

Из треугольника AOD : $\frac{h}{OA} = \operatorname{tg} \varphi_3$, $OA = R = \frac{h}{\operatorname{tg} \varphi_3}$.

Рассмотрим треугольник ABC . По теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin \varphi_2} = \frac{b}{\sin \varphi_1} = \frac{c}{\sin(\varphi_2 + \varphi_1)} = 2R = \frac{2h}{\operatorname{tg} \varphi_3}, \text{ т.е.}$$

$$a = \frac{2h}{\operatorname{tg} \varphi_3} \sin \varphi_2, \quad b = \frac{2h}{\operatorname{tg} \varphi_3} \sin \varphi_1.$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} ab \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{2h}{\operatorname{tg} \varphi_3} \right)^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4h^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi_3} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{2}{3} \frac{h^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi_3} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

$$\mathbf{741.} \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H.$$

Из прямоугольного треугольника POD :

$$\frac{PO}{OD} = \operatorname{tg} \gamma, \quad \frac{H}{OD} = \operatorname{tg} \gamma, \quad OD = \frac{H}{\operatorname{tg} \gamma}.$$

Из прямоугольного треугольника POC :

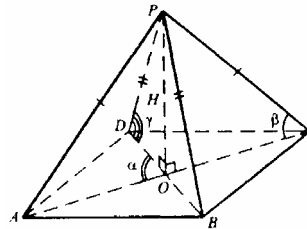
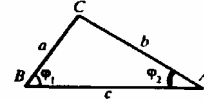
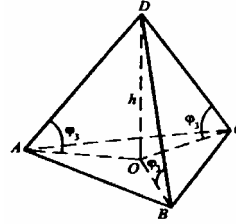
$$\frac{PO}{OC} = \operatorname{tg} \beta, \quad \frac{H}{OC} = \operatorname{tg} \beta, \quad OC = \frac{H}{\operatorname{tg} \beta}.$$

$OD = OB$ и $OA = OC$ — из свойства диагоналей параллелограмма.

$$DB = 2 \cdot OD = \frac{2H}{\operatorname{tg} \gamma}; \quad AC = 2 \cdot OC = \frac{2H}{\operatorname{tg} \beta}. \quad S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot DB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{2H}{\operatorname{tg} \gamma} \cdot \frac{2H}{\operatorname{tg} \beta} \cdot \sin \alpha =$$

$$= 2H^2 \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \sin \alpha. \quad V = \frac{1}{3} \cdot 2H^2 \cdot \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \sin \alpha \cdot H = \frac{2}{3} H^3 \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \sin \alpha.$$

742. Линия пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к третьей плоскости — перпендикуляр к этой плоскости; значит, PD перпендикулярна плоскости $ABCD$. PD — высота пирамиды, $PD = H$. $\angle ADC = \varphi$ — линейный угол двугранного угла при ребре PD . В основании $ABCD$ $\angle A = \angle C = 180^\circ - \varphi$. $S_{ABCD} = AD \cdot AB \sin \angle A = a^2 \sin(180^\circ - \varphi) = a^2 \sin \varphi$.



Построим $DM \perp AB$, $DN \perp CB$. По теореме о трех перпендикулярах отрезки $PM \perp AB$, $PN \perp BC$.

$\angle PMD = \angle PND = \theta$ — линейные углы двугранных углов, образованных боковыми гранями PAB и PBC с плоскостью основания.

$\triangle ADM = \triangle CDN$, $DM = DN = a \sin(180^\circ - \varphi) = a \sin \varphi$.

Из треугольника PDN : $\frac{H}{DN} = \operatorname{tg} \theta$, $DN \cdot \operatorname{tg} \theta = H$,

$$H = a \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \theta. V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H; V = \frac{1}{3} a^2 \sin \varphi \cdot a \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{3} a^3 \sin^2 \varphi \cdot \operatorname{tg} \theta.$$

743. а) Пусть $AC = AB = b$, а $DA = DB = DC = BC = a$. Построим высоту пирамиды DO , отрезки OA , OB , OC .

$\triangle DOA = \triangle DOB = \triangle DOC$.

Тогда, $OA = OB = OC = R$, где R — радиус окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$.

В равнобедренном треугольнике $\triangle ABC$ проведем из угла A высоту AK .

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot AK = \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} \quad (\text{в } \triangle ABK: AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}).$$

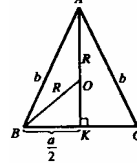
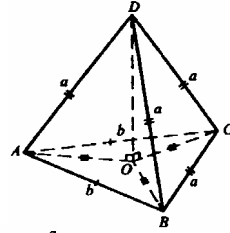
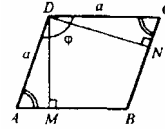
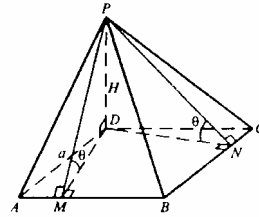
$OA = R$, по формуле $R = \frac{abc}{4S}$ (a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь) Вычислим площадь, вычислим R .

$$R = \frac{abb}{4 \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$

$$\text{Из } \triangle ADO: H = DO = \sqrt{a^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - R^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^4}{4b^2 - a^2}} = \sqrt{\frac{4a^2b^2 - a^4 - b^4}{4b^2 - a^2}}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{4a^2b^2 - a^4 - b^4}{4b^2 - a^2}} = \frac{a \sqrt{4a^2b^2 - a^4 - b^4}}{12};$$

б) в равнобедренном треугольнике ABC ($CA = CB = a$) построим высоту $CK \perp AB$; проведем отрезок DK .



В треугольнике ADB: DK — высота ($\triangle ADB$ — равнобедренный, $AK=KB$, значит, медиана DK является высотой).

$AB \perp DK$, $AB \perp KC$, $AB \perp (DKC)$.

Если плоскость проходит через перпендикуляра к другой плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости. Итак, плоскости ABC и DKC перпендикулярны. В плоскости DKC проведем высоту пирамиды DO; $DO \perp KC$.

Примем $DO=H$.

$$\text{В треугольнике ABC: } CK = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CK = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2} = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4}.$$

$$\text{Вычислим высоту пирамиды: } DK = KC = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}.$$

$$\text{Проведем } KE \perp DC. \quad DE = EC = \frac{b}{2}.$$

$$\text{Из треугольника KDE: } KE = \sqrt{KD^2 - DE^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{4} - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 - 2b^2}{4}}.$$

$$S_{\triangle KDE} = \frac{1}{2} \cdot KE \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot H \cdot KC;$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4} \cdot \frac{b\sqrt{4a^2 - 2b^2}}{\sqrt{4a^2 - b^2}} = \frac{b^2}{12} \sqrt{4a^2 - 2b^2}$$

$$\sqrt{\frac{4a^2 - 2b^2}{4}} \cdot b = H \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}, \quad H = \frac{b\sqrt{4a^2 - 2b^2}}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

744. Обозначим $O_1K=KO=h$, $A_1B_1=y$, $AB=x$.

$$\text{По условию } \frac{x}{y} = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{2}{5}x.$$

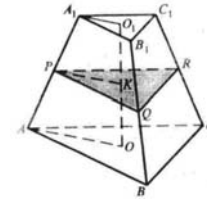
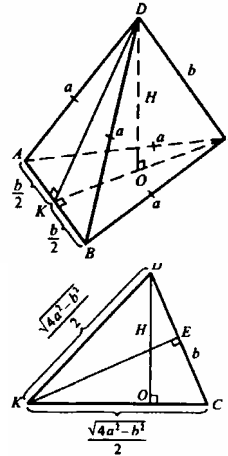
Рассмотрим трапецию AA_1O_1O . $PK \parallel AO$, отрезок PK — средняя линия трапеции, значит, $A_1P=PA$.

Рассмотрим грань AA_1B_1B . Это трапеция, через точку P проведен отрезок $PQ \parallel AB$, поэтому PQ является средней линией трапеции.

$$PQ = \frac{x+y}{2} = \frac{x + \frac{2}{5}x}{2} = \frac{7x}{10}.$$

$PQ \parallel AB \parallel A_1B_1$, $A_1C_1 \parallel PR \parallel AC$, $B_1C_1 \parallel QR \parallel BC$, тогда, $\triangle ABC \sim \triangle PQR \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Площади подобных фигур относятся как квадраты их сходственных сторон.



$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1 B_1 C_1}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}, S_{\Delta A_1 B_1 C_1} = \frac{4}{25} S_{\Delta ABC}.$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta PQR}} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{x}{\frac{7x}{10}}\right)^2 = \frac{100}{49}, S_{\Delta PQR} = \frac{49}{100} S_{\Delta ABC}.$$

Обозначим объем верхней усеченной пирамиды V_v , а объем нижней усеченной пирамиды V_H .

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{V_v}{V_H} &= \frac{\frac{1}{3}h(S_{\Delta PQR} + S_{\Delta A_1 B_1 C_1} + \sqrt{S_{\Delta PQR} \cdot S_{\Delta A_1 B_1 C_1}})}{\frac{1}{3}h(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta PQR} + \sqrt{S_{\Delta ABC} \cdot S_{\Delta PQR}})} = \frac{(\frac{49}{100} + \frac{4}{25} + \sqrt{\frac{49}{100} \cdot \frac{4}{25}})S_{\Delta ABC}}{(1 + \frac{49}{100} + \sqrt{1 \cdot \frac{49}{100}})S_{\Delta ABC}} = \\ &= \frac{\frac{49}{100} + \frac{4}{25} + \frac{7 \cdot 2}{10 \cdot 5}}{1 + \frac{49}{100} + \frac{7}{10}} = \frac{49 + 16 + 28}{170 + 49} = \frac{93}{219} = \frac{31}{73}. \end{aligned}$$

745. а) Обозначим r — радиус основания цилиндра, h — его высота.

$$\begin{cases} S = 2\pi rh, \\ \pi r^2 = Q, \end{cases} \begin{cases} r = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}, \\ h = \frac{S}{2\pi r} = \frac{S}{2\pi \sqrt{\frac{Q}{\pi}}} = \frac{S}{2\sqrt{\pi Q}} \end{cases} \quad V = \pi r^2 h = \pi \cdot \frac{Q}{\pi} \cdot \frac{S}{2\sqrt{\pi Q}} = \frac{S}{2} \cdot \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{\pi}};$$

б) обозначим r — радиус основания, т.к. осевое сечение — квадрат, то высота $h=2r$, тогда $r = \frac{h}{2}$. $V = \pi r^2 h = \pi \cdot \frac{h^2}{4} \cdot h = \frac{\pi h^3}{4}$;

в) обозначим r — радиус основания и высота равна диаметру основания, то есть $h=2r$.

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2.$$

$$r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}. \quad V = \pi r^2 h = \pi \cdot \frac{S}{6\pi} \cdot \sqrt{\frac{S}{6\pi}} = \frac{S}{6} \sqrt{\frac{4S}{6\pi}} = \frac{S}{6} \sqrt{\frac{2S}{3\pi}}.$$

746. Обозначим r_1, r_2 — радиусы оснований двух цилиндров, а h_1 и h_2 — их высоты. $S_1 = 2\pi r_1 h_1$; $S_2 = 2\pi r_2 h_2$.

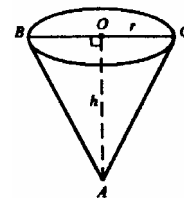
$$\text{По условию } S_1 = S_2; 2\pi r_1 h_1 = 2\pi r_2 h_2, r_1 h_1 = r_2 h_2. \quad V_1 = \pi r_1^2 h_1; \quad V_2 = \pi r_2^2 h_2.$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r_1^2 h_1}{\pi r_2^2 h_2} = \frac{(r_1 h_1) \cdot r_1}{(r_2 h_2) \cdot r_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

$$\textbf{747. } OA = h, OC = OB = r. \quad V = \frac{1}{3} \pi r^2 h;$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 1,5^2 \cdot 3 = 2,25 \cdot \pi \approx 2,25 \cdot 3,14 = 7,065 \text{ м}^3.$$

1 л = 1 дм³, а 1 м³ = 1000 дм³, поэтому $V = 7,065 \cdot 1000 = 7065$ литров.



Разные задачи на многогранники, цилиндр, конус и шар

748. Пусть PO — это высота конуса, $PO=H$, $AB < AD$. Построим $OK \perp AB$, отрезок PK . По теореме о трех перпендикулярах PK перпендикулярно AB .

$$\frac{PO}{OK} = \operatorname{tg} \varphi_2, \quad \frac{H}{OK} = \operatorname{tg} \varphi_2, \quad H = OK \cdot \operatorname{tg} \varphi_2.$$

В основании пирамиды.

$AB=a$, $BO=OD=AO=OC$ — по свойству диагоналей прямоугольника. $BO=R$.

В треугольнике ABO :

$$\angle ABO = \angle BAO = \frac{180^\circ - \varphi_1}{2} = 90^\circ - \frac{\varphi_1}{2}.$$

По теореме синусов запишем: $\frac{a}{\sin \varphi_1} = \frac{R}{\sin(90^\circ - \frac{\varphi_1}{2})};$

$$R = \frac{a \cdot \sin(90^\circ - \frac{\varphi_1}{2})}{\sin \varphi_1} = \frac{a \cdot \cos \frac{\varphi_1}{2}}{2 \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_1}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi_1}{2}}.$$

Из треугольника BKO : $OK = R \cdot \cos \frac{\varphi_1}{2} = \frac{a \cdot \cos \frac{\varphi_1}{2}}{2 \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2}}.$

$$H = OK \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{a \cdot \cos \frac{\varphi_1}{2}}{2 \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2}} \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \varphi_2}{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}}.$$

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}}.$$

$$\frac{a \cdot \operatorname{tg} \varphi_2}{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} = \frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \varphi_2}{24 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}}.$$

749. Пусть PO — высота пирамиды, обозначим $PO=H$. PK — образующая конуса, которая лежит в плоскости APB , $OK \perp AB$.

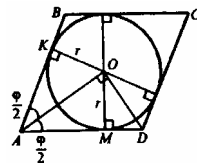
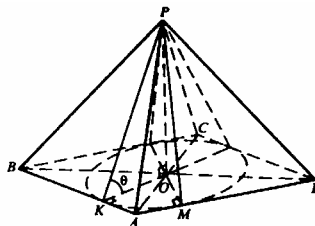
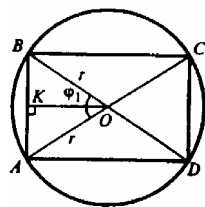
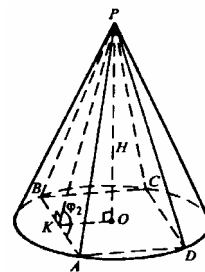
В основании пирамиды рассмотрим.

$ABCD$ — ромб. $AB=a$.

$$S_{ABCD} = 4S_{AOD} = 2S_{ABC}$$

$$S_{ABCD} = 2 \left(\frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin \varphi \right) = a^2 \sin \varphi.$$

$$S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot OM = \frac{1}{2} ar.$$



Пришли к уравнению: $a^2 \sin \varphi = 4 \cdot \frac{1}{2} a r$, откуда $r = \frac{1}{2} a \sin \varphi$.

Из прямоугольного треугольника ПОК: $\frac{PO}{OK} = \operatorname{tg} \theta$ ($\angle PKO$ — угол, который

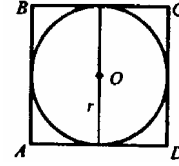
образующая конуса РК составляет с ее проекцией ОК). $\frac{H}{OK} = \operatorname{tg} \theta$, $H = r \cdot \operatorname{tg} \theta =$

$$= \frac{1}{2} a \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \theta. V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{4} \cdot \frac{1}{2} a \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \theta = \frac{\pi a^3}{24} \sin^3 \varphi \cdot \operatorname{tg} \theta.$$

750. Рассмотрим осевое сечение, основанием является квадрат.

Пусть сторона куба равна x , следовательно, радиус шара $r = \frac{x}{2}$.

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{4\pi x^3}{3 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{\pi x^3}{6}.$$



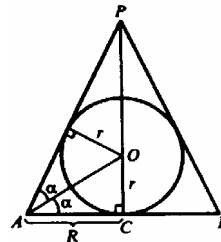
Радиус основания цилиндра равен $\frac{x}{2}$, высота цилиндра равна x , следова-

$$\text{тельно, } V_{\text{цил}} = \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot x = \frac{\pi x^3}{4}. \quad \frac{V_{\text{цил}}}{V_{\text{ш}}} = \frac{\frac{\pi x^3}{4}}{\frac{\pi x^3}{6}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

751. Рассмотрим осевое сечение конуса:

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H. \text{ Обозначим } PC = H.$$

$$\text{Из треугольника АОС: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{R} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$



ОА — биссектриса $\angle PAB$, следовательно, $\angle PAB = 2\alpha$.

Из прямоугольного треугольника PAC:

$$\frac{PC}{AC} = \operatorname{tg} 2\alpha, \text{ или } \frac{H}{R} = \operatorname{tg} 2\alpha$$

$$H = R \operatorname{tg} 2\alpha = 6 \operatorname{tg} 2\alpha. \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}. H = \frac{6 \cdot 4}{3} = 8 \text{ дм.}$$

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi \text{ дм}^3.$$

752. Рассмотрим сечение конуса.

$\triangle APB$ — осевое сечение конуса, $AN = r$, $AP = l$, PH — высота конуса.

Обозначим радиус сферы равен R . $OK = OH = OL = R$. Точки K и L — точки касания сферы поверхности конуса. Плоскость, в которой лежит окружность, в сечении изображена отрезком KL ; KL равен диаметру этой окружности. Обозначим $\angle PAB = 2\alpha$.

Из треугольника АОН: $\frac{OH}{HA} = \operatorname{tg} \alpha$; $\frac{R}{r} = \operatorname{tg} \alpha$, $R = r \operatorname{tg} \alpha$.

Из треугольника АРН: $\cos 2\alpha = \frac{AH}{AP} = \frac{r}{l}$,

$$2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{r}{l}, \cos^2 \alpha = \frac{1+r}{2l}, \cos \alpha = \sqrt{\frac{1+r}{2l}};$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{1+r}{2l} = \frac{1-r}{2l}, \sin \alpha = \sqrt{\frac{1-r}{2l}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1-r}{2l}} : \sqrt{\frac{1+r}{2l}} = \sqrt{\frac{1-r}{1+r}}. R = r \cdot \sqrt{\frac{1-r}{1+r}}.$$

$$\angle APH = \angle MKO = 90^\circ - 2\alpha.$$

В треугольнике МОК: $KM = OK \cdot \cos \angle MKO = R \cdot \cos(90^\circ - 2\alpha) = R \cdot \sin 2\alpha =$
 $= R \cdot 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha.$

$$KM = r \cdot \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1-r}{2l}} \cdot \sqrt{\frac{1+r}{2l}} = 2r \cdot \sqrt{\frac{(1-r)^2 \cdot (1+r)}{(1+r) \cdot (2l)^2}} = 2r \cdot \frac{1-r}{2l} = r \cdot \frac{1-r}{l}.$$

КМ — радиус окружности, по которой сфера касается боковой поверхности конуса. Ее длина равна

$$2\pi \cdot KM = 2\pi \cdot \frac{r(1-r)}{l}.$$

753. Рассмотрим осевое сечение конуса.

H_1, H_2 — центры оснований. ABCD — сечение, которое является равнобедренной трапецией.

$BH_1 = r_1$, $AH_2 = r$. Обозначим радиус вписанного шара a . $V_{ш} = \frac{4}{3} \pi a^3$.

Высота конуса есть диаметр шара, $H_1H_2 = 2a$.

$$V_{кон} = \frac{1}{3} \pi \cdot H_1H_2(r^2 + r_1^2 + rr_1) = \frac{1}{3} \pi 2a(r^2 + r_1^2 + rr_1).$$

$$\frac{V_{кон}}{V_{ш}} = \frac{\frac{2\pi a}{3}(r^2 + r_1^2 + rr_1)}{\frac{4}{3}\pi a^2} = \frac{r^2 + r_1^2 + rr_1}{2a^2}.$$

В описанном 4-угольнике суммы противоположных сторон равны.

$$BC + AD = AB + CD = 2AB.$$

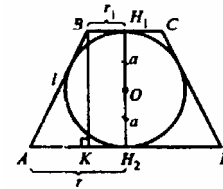
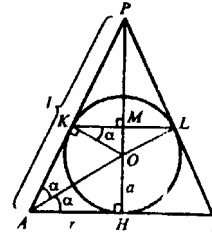
Обозначим $AB = l$, следовательно $2r_1 + 2r = 2l$, $l = r_1 + r$.

Построим ВК перпендикулярно AD. $AK = r - r_1$, $BK = H_1H_2 = 2a$.

Из прямоугольного треугольника АВК:

$$2a = \sqrt{l^2 - AK^2} = \sqrt{(r_1 + r)^2 - (r - r_1)^2} = \sqrt{r_1^2 + r^2 + 2r_1r - r^2 - r_1^2 + 2rr_1} =$$

$$= \sqrt{4r_1r} = 2\sqrt{r_1r}, a = \sqrt{r_1r}.$$



Подставляя выражение для a в формулу (1), получаем: $\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{ш}}} = \frac{r^2 + r_1^2 + rr_1}{2rr_1}$.

754. Через основание высоты DH построим $AK \perp BC$, отрезок DK . По теореме о трех перпендикулярах $DK \perp BC$.

Центр вписанного шара находится на высоте пирамиды в точке O ; OH и OF — радиусы, равные r . По условию задачи

$$\frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = V, \text{ поэтому } r = \sqrt{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Т.к. $AK \perp BC$ и $DK \perp BC$, то $\angle AKD$ — линейный угол двугранного угла при основании пирамиды.

$\angle AKD = \alpha$. OK — биссектриса $\angle DKA$. Из равенства $(\triangle OHK = \triangle OFK)$, $\angle HKO = \angle OKF = \frac{\alpha}{2}$.

Обозначим сторону основания пирамиды за a . В равностороннем треугольнике ABC — HK это радиус вписанной окружности и $HK = \frac{x}{2\sqrt{3}}$.

Из прямоугольного треугольника OHK : $\frac{r}{HK} = \tan \frac{\alpha}{2}$, $HK = \frac{r}{\tan \frac{\alpha}{2}}$.

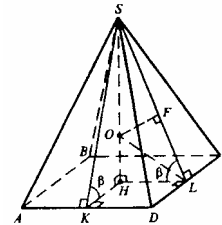
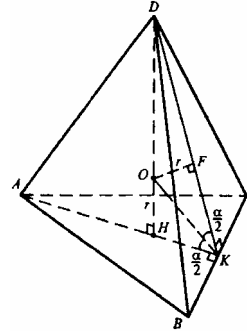
$\frac{x}{2\sqrt{3}} = \frac{r}{\tan \frac{\alpha}{2}}$, $x = \frac{2\sqrt{3}r}{\tan \frac{\alpha}{2}}$. В треугольнике DHK : $\frac{DH}{HK} = \tan \alpha$, $DH = HK \tan \alpha =$

$$= \frac{r}{\tan \frac{\alpha}{2}} \cdot \tan \alpha. \quad V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} DH = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot DH = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}r}{\tan \frac{\alpha}{2}} \right)^2 \cdot \frac{r \tan \alpha}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot$$

$$\cdot \frac{12}{\tan^3 \frac{\alpha}{2}} \cdot r^3 \cdot \tan \alpha = \frac{\sqrt{3} \tan \alpha}{\tan^3 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{3V}{4\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \cdot \tan \alpha \cdot \cot^3 \frac{\alpha}{2} \cdot V.$$

755. SH перпендикулярна плоскости $ABCD$. Построим $NK \perp AD$, $HL \perp DC$, отрезки SL и SK . По теореме о трех перпендикулярах $SL \perp DC$ и $SK \perp AD$. Тогда, $\angle SKH$ и $\angle SLH$ — линейные углы двугранных углов при основании пирамиды. Из условий задачи $\angle SKH = \angle SLH = \beta$. $\triangle SHK = \triangle SHL$ (по катету и острому углу).

Точка H равноудалена от сторон ромба $ABCD$, значит, является центром вписанной в ромб окружности.



$$S_{ABCD} = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin \alpha \right) = a^2 \sin \alpha; S_{\Delta AHD} = \frac{1}{2} a \cdot HK;$$

$$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{\Delta AHD}; a^2 \cdot \sin \alpha = 2a \cdot HK, HK = HL = \frac{a \sin \alpha}{2}.$$

Построим отрезок LO, точка O — центр вписанного шара, $O \in SH$. OL — биссектриса $\angle SLH$, $\angle OLH = \frac{\beta}{2}$.

Из треугольника OHL: $\frac{OH}{HL} = \operatorname{tg} \angle HLO$, OH — радиус шара.

$$OH = HL \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{a \sin \alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}. V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi (OH)^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{a^3 \sin^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\beta}{2}}{8} = \frac{\pi}{6} \sin^3 \alpha \cdot \operatorname{tg}^3 \frac{\beta}{2} \cdot a^3.$$

756. Рассмотрим сечение цилиндра, которое является прямоугольником ABCD, вписанным в окружность радиуса R.

O — центр сферы (и окружности). BD — диагональ осевого сечения, $\angle BDA = \alpha$. $BD = 2R$.

Вычислим из прямоугольного треугольника BAD $AD = 2R \cos \alpha$.

Радиус основания цилиндра равен $\frac{1}{2} AD$, то есть $R \cos \alpha$.

Высота цилиндра $AB = 2R \sin \alpha$.

$$V_{\text{цил}} = \pi \cdot (R \cos \alpha)^2 \cdot AB = \pi R^2 \cos^2 \alpha \cdot 2R \sin \alpha = \pi R^3 \cos \alpha (2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha) = \pi R^3 \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha.$$

757. Рассмотрим сечение цилиндра с шаром, которое является прямоугольником ABCD, вписанным в окружность радиуса R, точка O — центр окружности и сферы. Образующая цилиндра $AB = l$. $BO = OD = OA = OC = R$.

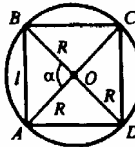
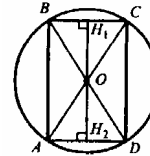
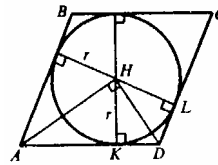
Из треугольника AOB по теореме синусов:

$$\frac{l}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin(\frac{180^\circ - \alpha}{2})} = \frac{R}{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} = \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$R = \frac{l \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} = \frac{l \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{l}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}. V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{l^3}{8 \sin^3 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi l^3}{6 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}.$$

758. Рассмотрим сечение шара и конуса, которое является равнобедренным треугольником APB, PH — высота конуса, O — центр описанной окружности (и шара), $O \in PH$.

$PH = H$, $AH = r$. Обозначим R — радиус окружности большого круга шара; $OP = OA = OB = R$.



Из треугольника APH: $AP = \sqrt{H^2 + r^2}$, $PB = AP$.

$$S_{\Delta APB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PH = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot H = rH.$$

Вычислим R по формуле: $R = \frac{abc}{4S}$, где a, b, c — стороны треугольника

$$APB, \text{ а } S \text{ — его площадь. } R = \frac{\sqrt{H^2 + r^2} \cdot \sqrt{H^2 + r^2} \cdot 2r}{4rH} = \frac{H^2 + r^2}{2H}.$$

Площадь поверхности шара:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{H^2 + r^2}{2H} \right)^2 = \frac{4\pi(H^2 + r^2)^2}{4H^2} = \frac{\pi(H^2 + r^2)^2}{H^2}.$$

$$\text{Объем шара: } V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{(H^2 + r^2)^3}{8H^3} = \frac{\pi(H^2 + r^2)^3}{6H^3}.$$

759. Плоскость треугольника ABC, лежащего в основании пирамиды, пересечет шар по окружности, и треугольник ABC будет вписан в эту окружность. Пусть AB — гипотенуза, следовательно, $\angle ACB = 90^\circ$, тогда, он опирается на диаметр, которым является гипотенуза AB.

Построим высоту пирамиды MO. Построим отрезки OA, OB, OC; эти три отрезка являются проекциями соответствующих наклонных боковых ребер пирамиды.

В треугольниках MOA, MOB, MOC MO — общий катет, $\angle MAO = \angle MBO = \angle MCO = \alpha$ — по условию, тогда, $\Delta MOA = \Delta MOB = \Delta MOC$, откуда $OA = OB = OC$, то есть точка O — равноудалена от вершин основания и поэтому является центром описанной около основания окружности.

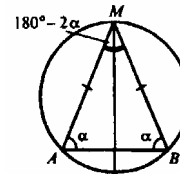
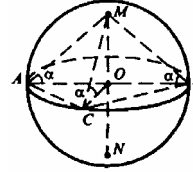
Таким образом, MO — высота пирамиды, MO лежит в плоскости AMB, тогда, плоскость AMB перпендикулярна плоскости ABC.

Из теоремы синусов следует, что: $\frac{AB}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = 2R$, R — радиус шара.

$$\frac{2}{\sin 2\alpha} = 2R, R = \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

$$\text{Площадь поверхности шара: } S = 4\pi R^2 = \frac{4\pi}{\sin^2 2\alpha} \text{ см}^2.$$

$$\text{Вычислим объем шара: } V = \frac{4}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sin^3 2\alpha} \text{ см}^3.$$



760. Построим высоту пирамиды MF; построим отрезки FA, FB, FC, FD.

$\Delta MFA = \Delta MFB = \Delta MFC = \Delta MFD$, т.к. они прямоугольные, MF — общий катет, $\angle MBF = \angle MAF = \angle MCF = \angle MDF = \beta$ — по условию.

Следовательно, $FA = FB = FC = FD$, тогда точка F равноудалена от вершин основания, значит, является центром описанной около основания окружности.

Рассмотрим сечение пирамиды и шара плоскостью АМС. Точка О — центр шара, $O \in MF$.

Из теоремы синусов в треугольнике АМС:

$$\frac{AC}{\sin(180^\circ - 2\beta)} = 2R, \text{ где } R \text{ — радиус шара.}$$

$$R = \frac{10}{2\sin 2\beta} = \frac{5}{\sin 2\beta}. \text{ Площадь поверхности шара:}$$

$$S = 4\pi R^2 = \frac{4\pi \cdot 25}{\sin^2 2\beta} = \frac{100\pi}{\sin^2 2\beta} \text{ см}^2.$$

$$\text{Объем шара: } V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{125}{\sin^3 2\beta} = \frac{500\pi}{3\sin^3 2\beta} \text{ см}^3.$$

$$761. OA = 1,5 \text{ м, } MO = 0,5 \text{ м, } AD = l.$$

$$V_{\text{цист}} = 50 \text{ м}^3; V_{\text{цил}} = \pi r^2 l = \pi \cdot 1,5^2 \cdot l \text{ м}^3.$$

АМВ, СND — шаровые сегменты.

$$V_{\text{сегм}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right), \text{ где } h = MO = 0,5 \text{ (м), } R = OA = 1,5 \text{ (м).}$$

$$V_{\text{сегм}} = \pi \cdot 0,5^2 \left(1,5 - \frac{0,5}{3} \right) = 0,25\pi \cdot \frac{4,5 - 0,5}{3} = \frac{0,25\pi}{3} \cdot 4 = \frac{\pi}{3} \text{ м}^3.$$

$$V_{\text{цист}} = V_{\text{цил}} + 2V_{\text{сегм}}.$$

$$V_{\text{цист}} = 50 = 2,25\pi l + \frac{2\pi}{3} \text{ м}^3.$$

$$l = \frac{50 - \frac{2\pi}{3}}{2,25\pi} \approx \frac{50 - \frac{2 \cdot 3,14}{3}}{2,25 \cdot 3,14} = \frac{50 - 2,09}{7,065} = \frac{47,91}{7,065} \approx 6,78 \text{ м.}$$

762. Пусть ребро куба равно а. Площадь поверхности куба равна $6a^2$.

Пусть радиус шара $OA = b$. Площадь поверхности шара $4\pi b^2$.

Пусть радиус основания цилиндра равен с, тогда $AB = H = 2с$.

$$S_{\text{осн}} = \pi c^2; S_{\text{бок}} = 2\pi c \cdot H = 2\pi c \cdot 2с = 4\pi c^2;$$

$$S_{\text{полн}} = 4\pi c^2 + 2\pi c^2 = 6\pi c^2.$$

Пусть радиус основания конуса равен d, тогда $PO = H = 2d$.

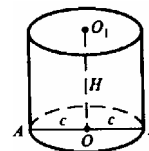
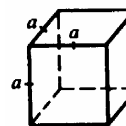
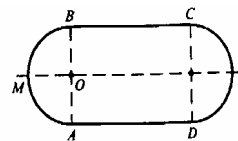
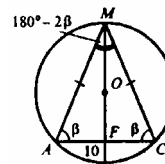
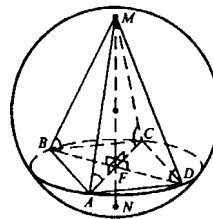
$$S_{\text{осн}} = \pi d^2; S_{\text{бок}} = \pi d \cdot AP. AP = \sqrt{d^2 + H^2} = \sqrt{d^2 + 4d^2} = d\sqrt{5}.$$

$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot d \cdot d \cdot \sqrt{5} = \pi \sqrt{5} d^2. S_{\text{полн}} = \pi d^2 + \pi \sqrt{5} d^2 = \pi d^2 (\sqrt{5} + 1) \text{ (из условия).}$$

$$6a^2 = 4\pi b^2 = 6\pi c^2 = \pi d^2 (\sqrt{5} + 1).$$

Выразим а, с и d через b.

$$6a^2 = 4\pi b^2; a^2 = \frac{4\pi b^2}{6} = \frac{2\pi b^2}{3}; a = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \cdot b \text{ (1)}$$

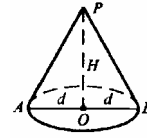


$$6\pi c^2 = 4\pi b^2; c^2 = \frac{4\pi b^2}{6} = \frac{2}{3} b^2; c = \sqrt{\frac{2}{3}} b. (2)$$

$$d^2 \cdot \pi (\sqrt{5} + 1) = 4\pi b^2;$$

$$d^2 = \frac{4\pi b^2}{\pi(\sqrt{5} + 1)} = \frac{4b^2 \cdot (\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} = \frac{4b^2 \cdot (\sqrt{5} - 1)}{5 - 1} = b^2(\sqrt{5} - 1);$$

$$d = \sqrt{\sqrt{5} - 1} \cdot b.$$



$$\text{Объем куба равен } a^3; a^3 = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{3}} b\right)^3 = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} b^3.$$

$$\text{Объем шара равен } \frac{4}{3} \pi b^3.$$

$$\text{Объем цилиндра равен } \pi c^2 \cdot H;$$

$$\pi c^2 \cdot H = \pi \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}} b\right)^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} b = \pi \cdot \frac{2}{3} b^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} b = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} b^3.$$

$$\text{Объем конуса равен } \frac{1}{3} \pi d^2 H;$$

$$\frac{1}{3} \pi d^2 H = \frac{\pi}{3} \cdot b^2(\sqrt{5} - 1) \cdot 2 \cdot b \sqrt{\sqrt{5} - 1} = \frac{2\pi}{3} (\sqrt{5} - 1) \sqrt{\sqrt{5} - 1} \cdot b^3.$$

Сравним объемы тел. Т.к. все они выражены через радиус шара b , то остается сравнивать коэффициенты при b^3 .

$$\frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}}; \frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{2\pi}{3} (\sqrt{5} - 1)^{\frac{3}{2}} \frac{2\pi}{3} \text{ — общий множитель. Следо-}$$

довательно, остаются числа:

$$\sqrt{\frac{2\pi}{3}}; \quad 2; \quad 2\sqrt{\frac{2}{3}}; \quad (\sqrt{5} - 1)^{\frac{3}{2}} \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

$$\text{Сравним числа (1) и (2). } \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \text{ и } 2; \frac{2\pi}{3} \text{ и } 4; \pi \text{ и } \frac{4 \cdot 3}{2}; \pi \text{ и } 6.$$

$$\text{Т.к. } \pi < 6, \text{ то } \sqrt{\frac{2\pi}{3}} < 2. \text{ Т.к. } \sqrt{\frac{2}{3}} < 1, \text{ то } 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} < 2.$$

$$\text{Сравним теперь (1) и (3). } \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \text{ и } 2\sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{2\pi}{3} \text{ и } \frac{8}{3}; \pi \text{ и } \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2}; \pi \text{ и } 4.$$

$$\text{Т.к. } \pi < 4, \text{ то } \sqrt{\frac{2\pi}{3}} < 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Таким образом, установлено, что } \sqrt{\frac{2\pi}{3}} < 2\sqrt{\frac{2}{3}} < 2.$$

Сравним теперь (4) и (1). $(\sqrt{5}-1)^{\frac{3}{2}}$ и $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$; $(\sqrt{5}-1)^3$ и $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3}{2}(\sqrt{5}-1)^3$ и π .
 $(\sqrt{5}-1)^3 = (5+1-2\sqrt{5})(\sqrt{5}-1) = (6-2\sqrt{5})(\sqrt{5}-1) = 6\sqrt{5} - 6 - 10 + 2\sqrt{5} = 2(4\sqrt{5}-8)$;
 $\frac{3}{2} \cdot 2(4\sqrt{5}-8) = 3 \cdot 4(\sqrt{5}-2)$, $12(\sqrt{5}-2)$ и π .
 $\sqrt{5} \approx 2,23$; $\sqrt{5}-2 \approx 0,23$. $12 \cdot 0,23 = 2,76$. $2,76$ и π .

Т.к. $2,76 < \pi$, то $(\sqrt{5}-1)^3 < \sqrt{\frac{2\pi}{3}}$.

Таким образом, числа расположены в следующем порядке:

$$(\sqrt{5}-1)^3 < \sqrt{\frac{2\pi}{3}} < 2\sqrt{\frac{2}{3}} < 2.$$

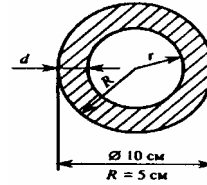
Им соответствует объемы тел: $V_{\text{кон}} < V_{\text{куба}} < V_{\text{цил}} < V_{\text{ш}}.$

763. а) $d = 2 \text{ мм} = 0,2 \text{ см}$; $R = 5 \text{ см}$.

$$r = R - d = 5 - 0,2 = 4,8 \text{ см}.$$

$$\text{Объем шара: } V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3).$$

$$\text{Масса шара: } m_{\text{шара}} = \rho_{\text{меди}} \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3).$$



$$m_{\text{ш}} \approx 8,9 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3,14 (5^3 - 4,8^3) = 8,9 \cdot 1,33 \cdot 3,14 (125 - 110,592) \approx 11,837 \cdot 3,14.$$

$$14,41 \approx 37,17 \cdot 14,41 \approx 535,6 \text{ г}.$$

$$\rho_{\text{ш}} = \frac{m}{\frac{4}{3} \pi R^3} \approx \frac{3 \cdot 535,6}{4 \cdot 3,14 \cdot 125} = \frac{1606,8}{500 \cdot 3,14} = \frac{1606,8}{1570} \approx 1,023 \text{ г/см}^3.$$

Сравним плотность шара $\rho_{\text{ш}}$ и плотность воды, которую примем равной 1 г/см^3 .

$\rho_{\text{ш}} > \rho_{\text{в}}$, тогда, шар не сможет плавать в воде;

$$\text{б) } d = 1,5 \text{ мм} = 0,15 \text{ см}. r = R - d = 5 - 0,15 = 4,85 \text{ (см)}. V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3).$$

$$m_{\text{шара}} = \rho_{\text{меди}} \cdot V_{\text{ш}} = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3). m_{\text{ш}} = 8,9 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3,14 (125 - 4,85^3) \approx 8,9 \cdot 1,33 \cdot 3,14$$

$$(125 - 114,09) = 11,837 \cdot 3,14 \cdot 10,91 = 405,50 \text{ г}.$$

$$\rho_{\text{ш}} = \frac{m}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{3 \cdot 405,50}{4 \cdot 3,14 \cdot 125} = \frac{1216,5}{1570} \approx 0,77 \text{ г/см}^3.$$

Если принять $\rho_{\text{воды}} = 1 \text{ г/см}^3$, то $\rho_{\text{ш}} < \rho_{\text{в}}$, такой шар будет плавать на поверхности воды.