

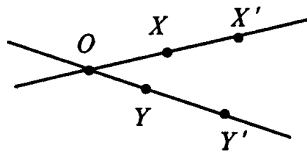
Домашняя работа по геометрии за 9 класс

**к учебнику «Геометрия. 7-9 класс»
А.В. Погорелов, М.: «Просвещение», 2001 г.**

учебно-практическое
пособие

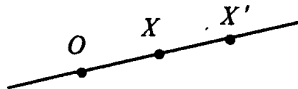
§ 11. ПОДОБИЕ ФИГУР

- № 1.** При гомотетии точка X переходит в точку X' , а точка Y — в точку Y' . Как найти центр гомотетии, если точки X, X', Y, Y' не лежат на одной прямой?¹



По определению преобразования гомотетии — центр гомотетии лежит на одном луче с данными точками, поэтому точка пересечения прямых XX' и YY' является центром. Эти прямые пересекутся, так как точки X, X', Y и Y' не лежат на одной прямой, по условию.

- № 2.** При гомотетии точка X переходит в точку X' . Постройте центр гомотетии если коэффициент гомотетии равен 2.

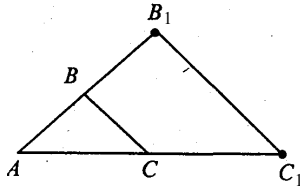


1) Так как искомый центр гомотетии лежит на одной прямой с точками X и X' , то для нахождения центра проведем прямую XX' .

¹ Условия заданий приводятся в учебных целях и в необходимом объеме — как иллюстративный материал. Имя автора и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги. (Ст. 19 п. 2 Закона РФ об авторском праве и смежных правах от 9 июня 1993 г.)

2) Так как $k = 2$, то по определению гомотетии $OX' = 2OX$, где O — центр гомотетии, значит, отложим от точки X' отрезок $OX' = 2OX$ и получим искомую точку O .

№ 3. Начертите треугольник. Постройте гомотетичный ему треугольник, приняв за центр гомотетии одну из его вершин и коэффициент гомотетии, равным 2.



Построим $\triangle ABC$ и примем точку A — центр гомотетии. На продолжении AB отложим отрезок $AB_1 = 2AB$, получим точку B_1 , гомотетичную точке B .

Аналогично, на продолжении AC отложим отрезок $AC_1 = 2AC$, получим точку C_1 , гомотетичную точке C .

Проведем отрезки AB_1 , AC_1 , BC_1 и получим $\triangle AB_1C_1$, гомотетичный $\triangle ABC$ с $k = 2$.

№ 5. Что представляет собой фигура, подобная треугольнику?

Фигура, подобная треугольнику, также является треугольником.

№ 6. У подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = 30^\circ$, $AB = 1$ м, $BC = 2$ м, $B_1C_1 = 3$ м. Чему равны угол A_1 и сторона A_1B_1 ?

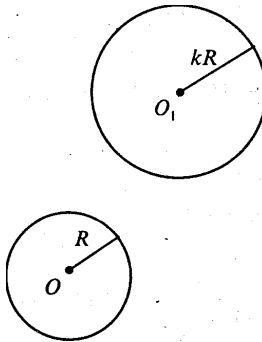
Так как подобие сохраняет углы, то $\angle A = \angle A_1 = 30^\circ$. Далее $B_1C_1 = kBC$, а значит:

$$k = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Также $A_1B_1 = kAB = 1,5 \cdot 1 = 1,5$ (м).

Ответ: $\angle A_1 = 30^\circ$, $A_1B_1 = 1,5$ (м).

№ 7. Докажите, что фигура, подобная окружности, есть окружность.



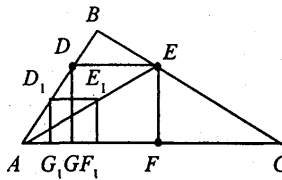
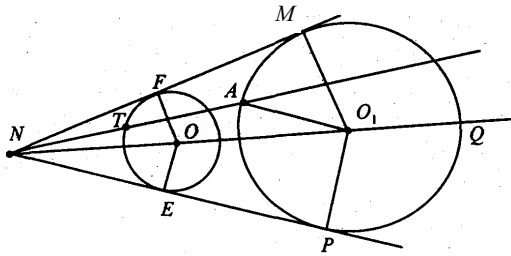
Докажем, что отношение радиусов окружностей равно k . Тогда рассмотрим преобразование подобия с этим коэффициентом k , при котором точка O переходит в точку O_1 . Точки, находящиеся на расстоянии R от точки O (т.е. точки первой окружности), будут находиться на расстоянии kR от точки O_1 , т.е. будут лежать на окружности с радиусом kR . А, значит, окружность перейдет в окружность. Что и требовалось доказать.

№ 8*. Даны угол и внутри его точка A . Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку A .

Построение:

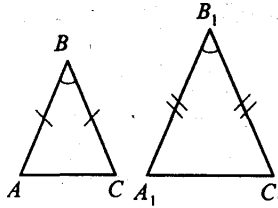
- 1) Проведем биссектрису угла NQ .
- 2) Отметим на ней точку O , опустим перпендикуляры OF и OE на стороны угла.
- 3) Построим окружность с центром в точке O и радиусом OE .
- 4) Проведем луч NA , который пересекает окружность в точке T .
- 5) Проведем прямую AO_1 , так что $AO_1 \parallel TO$. Тогда $\triangle NTO$ и $\triangle NAO_1$ подобны, так что

$$\frac{AO_1}{TO} = \frac{AN}{NT} = \frac{O_1N}{NO} = k$$



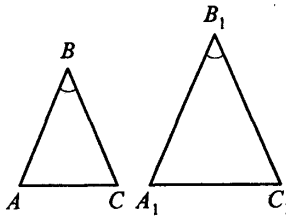
№ 10. Докажите подобие равнобедренных треугольников с равными углами при вершинах, противолежащих основаниям.

Пусть $\angle B = \angle B_1$. И $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ — равнобедренные.



Тогда $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$ (так как $\angle A = \angle C$ и $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ и $\angle A = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B)$. Аналогично $\angle A_1 = \angle C_1 = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B_1)$. Так что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, (по двум углам). Что и требовалось доказать.

№ 11. У двух равнобедренных треугольников углы между боковыми сторонами равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны 17 см и 10 см, основание другого равно 8 см. Найдите его боковую сторону.



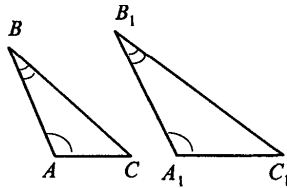
Пусть $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ — равнобедренные; $\angle B = \angle B_1$, $AC = 8$ см, $A_1C_1 = 10$ см, $A_1B_1 = 17$ см. Тогда $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (следует из задачи № 10), значит

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

$$\text{то есть } AB = \frac{AC \cdot A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{8 \cdot 17}{10} = 13,6 \text{ см.}$$

Ответ: $AB = 13,6$ см.

№ 12. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $A_1B_1 = 10$ м, $A_1C_1 = 8$ м. Найдите остальные стороны треугольников.



$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, (по двум углам). Значит

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Так что

$$B_1C_1 = \frac{A_1B_1 \cdot BC}{AB} = \frac{10 \cdot 7}{5} = 14 \text{ м и } AC = \frac{AB \cdot A_1C_1}{A_1B_1} = \frac{5 \cdot 8}{10} = 4 \text{ м.}$$

Ответ: $AC = 4$ м, $B_1C_1 = 14$ м.

№ 13. Решите задачу 12 при условии, что $AB = 16$ см, $BC = 20$ см, $A_1B_1 = 12$ см, $AC - A_1C_1 = 6$ см.

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по двум углам). Далее

$$k = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

— коэффициент подобия, значит, $AC = \frac{4}{3} A_1C_1$, и, поскольку

$$AC - A_1C_1 = 6,$$

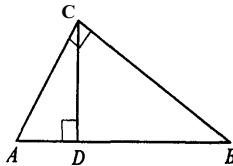
$$\frac{4}{3} A_1C_1 - A_1C_1 = 6; \frac{1}{3} A_1C_1 = 6; A_1C_1 = 18 \text{ см.}$$

Тогда $AC = 18 + 6 = 24$ см. Далее

$$B_1C_1 = \frac{3}{4} \cdot BC = \frac{3 \cdot 20}{4} = 15 \text{ см.}$$

Ответ: $AC = 24$ см, $A_1C_1 = 18$ см, $B_1C_1 = 15$ см.

- № 14.** Докажите, что высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному.



Пусть $\triangle ABC$ — прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$, CD — высота.

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$:

а) $\angle ACB = \angle CDA = 90^\circ$.

б) $\angle CAB = \angle DAC$ (общий угол).

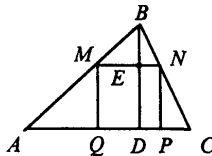
Значит, $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (по двум углам).

Аналогично доказывается, что $\triangle ABC \sim \triangle CBD$.

- № 15.** Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC , пересекает его сторону AC в точке A_1 , а сторону BC в точке B_1 . Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$.

Задача решена в учебнике на стр. 149 п. 103.

- № 16.** В треугольнике с основанием a и высотой h вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а другие две — на боковых сторонах. Вычислите сторону квадрата.



Пусть в $\triangle ABC$ BD — высота. Далее $MNPQ$ — квадрат, $N \in BC$, $M \in AB$, P и $Q \in AC$. Тогда $AC = a$, $BD = h$ (по условию).

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle MBN$:

а) $\angle ABC = \angle MBN$ (общий угол);

б) $\angle BAC = \angle BMN$ (как односторонние углы при параллельных прямых AC и MN и секущей AB).

Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle MBN$ (по двум углам). Значит стороны и высоты треугольников ABC и MBN пропорциональны. То есть:

$$\frac{BE}{BD} = \frac{MN}{AC}.$$

Пусть x — сторона квадрата. Тогда $BE = h - x$. То есть

$$\frac{h-x}{h} = \frac{x}{a},$$

$$a(h-x) = hx,$$

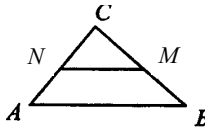
$$ah - ax = hx,$$

$$ah = x(h+a),$$

$$x = \frac{ah}{h+a}.$$

Ответ: $\frac{ah}{h+a}$.

№ 17. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC , делит его сторону AC в отношении $m : n$, считая от вершины C . В каком отношении она делит сторону BC ?

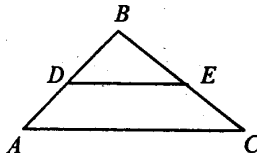


Пусть $MN \parallel AB$; $\frac{CN}{AN} = \frac{m}{n}$. Из задачи № 15 следует, что $\triangle ABC \sim \triangle CNM$. Значит $\frac{AC}{CN} = \frac{BC}{CM}$, но $AC = CN + AN$, $BC = MB + CM$, имеем $\frac{AN+CN}{CN} = \frac{MB+CM}{CM}$ или $\frac{AN}{CN} + 1 = \frac{MB}{CM} + 1$ то есть $\frac{AN}{CN} = \frac{MB}{CM}$. Так что

$$\frac{CM}{BM} = \frac{CN}{NA} = \frac{m}{n}.$$

Ответ: $\frac{m}{n}$.

- № 18.** В треугольнике ABC проведен отрезок DE , параллельный стороне AC (конец D отрезка лежит на стороне AB , а E — на стороне BC). Найдите AD , если $AB = 16$ см, $AC = 20$ см и $DE = 15$ см.



Из задачи № 15 следует, что $\triangle ABC \sim \triangle DBE$. Тогда:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DE}.$$

Далее $BD = AB - AD$, так что:

$$\frac{AB}{AB - AD} = \frac{AC}{DE}, \quad \frac{16}{16 - AD} = \frac{20}{15},$$

$$240 = 320 - 20AD, \quad 20AD = 80; \quad AD = 4 \text{ см.}$$

Ответ: $AD = 4$ см.

№ 19. В задаче 18 найдите отношение $AD : BD$, если известно, что $AC : DE = 55:28$.

Так как $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DE} = \frac{55}{28}$ и $AB = BD + AD$, то

$$\frac{BD + AD}{BD} = \frac{55}{28},$$

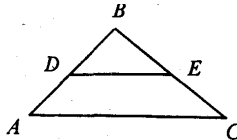
$$1 + \frac{AD}{BD} = \frac{55}{28},$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{27}{28}.$$

Ответ: $\frac{AD}{BD} = \frac{27}{28}$.

№ 20. Найдите длину отрезка DE в задаче 18, если:

- 1) $AC = 20$ см, $AB = 17$ см и $BD = 11,9$ см;
- 2) $AC = 18$ дм, $AB = 15$ дм и $AD = 10$ дм.



1) Имеем: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DE}$,

откуда получаем, что:

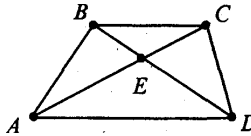
$$DE = \frac{AC \cdot BD}{AB} = \frac{20 \cdot 11,9}{17} = 14 \text{ см.}$$

2) $BD = AB - AD$, то есть

$$BD = 15 - 10 = 5 \text{ дм и } DE = \frac{AC \cdot BD}{AB} = \frac{18 \cdot 5}{15} = 6 \text{ дм.}$$

Ответ: 1) 14 см; 2) 6 дм.

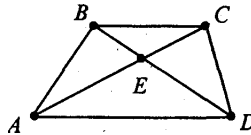
- № 21. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E . Докажите подобие треугольников BCE и DAE .



Рассмотрим $\triangle BCE$ и $\triangle DAE$:

- а) $\angle BEC = \angle AED$ (как вертикальные углы);
- б) $\angle CBE = \angle EDA$ (как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей BD). Значит, $\triangle BCE \sim \triangle AED$ (по двум углам). Что и требовалось доказать.

- № 22. Найдите отношение отрезков диагонали трапеции, на которые она разбивается другой диагональю, если основания трапеции относятся как $m : n$.

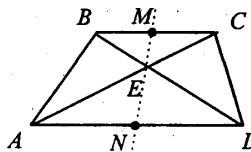


$\triangle AED \sim \triangle BCE$ (см. решение № 21). Значит

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BC} = \frac{m}{n}.$$

Ответ: $\frac{m}{n}$

- № 23. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции, делит одно основание в отношении $m : n$. В каком отношении она делит другое основание?



Пусть $\frac{BM}{MC} = \frac{m}{n}$.

Рассмотрим $\triangle MCE$ и $\triangle AEN$:

1) $\angle MEC = \angle AEN$ (углы вертикальные);

2) $\angle MCE = \angle EAN$ (как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых MC и AN секущей AC).

Значит $\triangle MCE \sim \triangle AEN$ (по двум углам). Тогда

$$\frac{MC}{AN} = \frac{ME}{NE}.$$

Аналогично доказывается, что $\triangle BME \sim \triangle DNE$, а, значит,

$$\frac{MB}{ND} = \frac{ME}{NE}.$$

Так что $\frac{ME}{NE} = \frac{MC}{AN} = \frac{MB}{ND}$, значит,

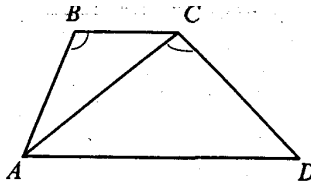
$$MC \cdot ND = MB \cdot AN;$$

$$\frac{AN}{ND} = \frac{MC}{MB} = \frac{n}{m}.$$

Ответ: $\frac{n}{m}$.

№ 24. В трапеции $ABCD$ с диагональю AC углы ABC и ACD равны. Найдите диагональ AC , если основания BC и AD соответственно равны 12 м и 27 м.

Рассмотрим $\triangle ACD$ и $\triangle CBA$:



а) $\angle ACD = \angle ABC$ (по условию);

б) $\angle CAD = \angle BCA$ (как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AC).

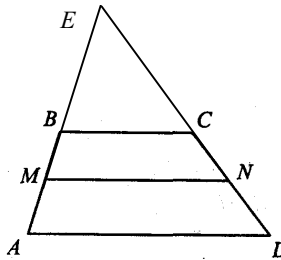
Так что $\triangle ACD \sim \triangle CBA$. Поэтому: $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{AC}$, то есть

$$AC^2 = CB \cdot AD;$$

$$AC = \sqrt{CB \cdot AD} = \sqrt{12 \cdot 27} = \sqrt{324} = 18 \text{ см.}$$

Ответ: $AC = 18$ см.

№ 25. Линия, параллельная основаниям трапеции, делит одну боковую сторону в отношении $m : n$. В каком отношении делит она вторую боковую сторону?



Пусть $ABCD$ — трапеция, AD и BC — ее основания, $MN \parallel AD \parallel BC$,

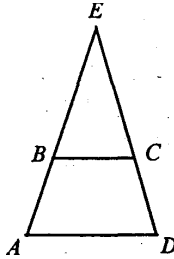
$$\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}.$$

Боковые стороны трапеции пересекаются в точке E . По теореме о пропорциональных отрезках, параллельные прямые AD , MN и BC , пересекающие стороны $\angle E$ отсекают от сторон пропорциональные отрезки, так что:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{m}{n}.$$

Ответ: $\frac{m}{n}$.

- № 26.** Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E . Найдите стороны треугольника AED , если $AB = 5$ см, $BC = 10$ см, $CD = 6$ см, $AD = 15$ см.



Рассмотрим $\triangle AED$ и $\triangle BEC$. Так как $AD \parallel BC$, то эти треугольники подобны (см решение задачи № 15). Значит,

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BC},$$

но $AE = AB + BE$, так что

$$\frac{AB + BE}{BE} = \frac{AD}{BC}; \quad \frac{5 + BE}{BE} = \frac{15}{10};$$

$$50 + 10BE = 15BE; \quad 5BE = 50; \quad BE = 10 \text{ см.}$$

Тогда $AE = AB + BE = 5 + 10 = 15$ см.

Аналогично из подобия треугольников AEB и BEC имеем:

$$\frac{DE}{CE} = \frac{AD}{BC}.$$

А, так как $DE = CD + CE$, то

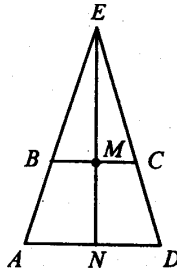
$$\frac{CD + CE}{CE} = \frac{AD}{BC}; \quad \frac{6 + CE}{CE} = \frac{15}{10};$$

$$15CE = 60 + 10CE; \quad 5CE = 60; \quad CE = 12 \text{ см,}$$

$$DE = CE + CD = 6 + 12 = 18 \text{ см.}$$

Ответ: $AE = 15$ см, $DE = 18$ см.

- № 27.** Найдите высоту треугольника AED из задачи № 26, опущенную на сторону AD, если BC=7 см, AD=21 см и высота трапеции равна 3 см.



Пусть EN — высота треугольника AED, MN — высота трапеции.

$\triangle AED \sim \triangle BEC$ (было доказано в задаче № 26). Поэтому

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BC} = \frac{21}{7} = 3.$$

Далее рассмотрим $\triangle AEN$ и $\triangle BEM$.

а) $\angle A = \angle B$ (углы при пересечении параллельных прямых BM и AN секущей AB);

б) $\angle N = \angle M = 90^\circ$.

Тогда, $\triangle AEN \sim \triangle BEM$ и

$$\frac{EN}{EM} = \frac{AE}{BE} = 3.$$

Но $EN = EM + MN$, так что:

$$\frac{EM + 3}{EM} = \frac{3}{1};$$

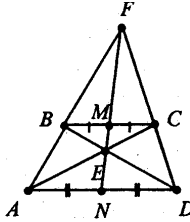
$$3EM = EM + 3; 2EM = 3; EM = 1,5 \text{ см},$$

тогда $EN = EM + MN = 1,5 + 3 = 4,5 \text{ см}$.

Ответ: 4,5 см.

- № 28*.** Диагонали трапеции пересекаются в точке E, а продолжения боковых сторон пересекаются в точке F.

Докажите, что прямая EF делит основания трапеции пополам.



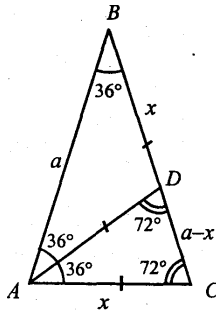
$\triangle FMC \sim \triangle FND$ (так как $\angle FMC = \angle FND$ — односторонние углы при $BC \parallel AD$ и $\angle NFD$ — общий). Так что $\frac{MC}{ND} = \frac{FM}{FN}$.

Аналогично $\triangle FMB \sim \triangle FNA$ и $\frac{BM}{AN} = \frac{FM}{FN}$, так что $\frac{MC}{MD} = \frac{BM}{AN}$, то есть $\frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND} = k$.

В задаче № 23 было доказано, что $\frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND} = \frac{1}{k}$, так что $k = 1$ и $BM = MC$; $ND = AN$. Что и требовалось доказать.

№ 29*. У равнобедренного треугольника ABC с основанием AC и противолежащим углом 36° проведена биссектриса AD.

- 1) Докажите подобие треугольников ABC и CAD.
- 2) Найдите основание треугольника ABC, если его боковая сторона равна a . $AB = BC = a$.



1) Так как $\angle B = 36^\circ$, то

$$\angle BAC = \angle ACB = (180^\circ - 36^\circ):2 = 72^\circ.$$

Поскольку AD — биссектриса $\angle A$, то:

$$\angle CAD = \angle DAB = 72^\circ:2 = 36^\circ.$$

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle CAD$. Так как

а) $\angle BAC = \angle ACB = 72^\circ$;

б) $\angle ABC = \angle CAD = 36^\circ$.

Значит, $\triangle ABC \sim \triangle CAD$ (по двум углам). Что и требовалось доказать.

2) Из подобия треугольников ABC и ACD следует:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CD}.$$

Пусть $BD = x$ см, следовательно $DC = a - x$.

Далее $BD = AD = AC$ (стороны равнобедренных треугольников), то есть $BD = AD = AC = x$ см.

Подставляя в пропорцию: $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, получим

$$x^2 = a^2 - ax, x^2 + ax - a^2 = 0,$$

$$D = a^2 + 4a^2 = 5a^2, x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2},$$

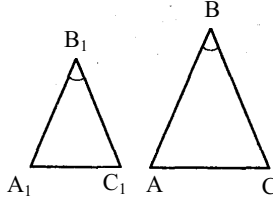
$x_1 = \frac{-a - a\sqrt{5}}{2} = -\frac{a(1+\sqrt{5})}{2} < 0$, не удовлетворяет условию задачи, так как $x > 0$.

$$x_2 = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{5} - a}{2} = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2} > 0.$$

Значит, $AC = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a$ см.

Ответ: $AC = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a$.

- № 30.** Углы B и B_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Стороны треугольника ABC , прилежащие к углу B , в 2,5 раза больше сторон треугольника $A_1B_1C_1$, прилежащих к углу B_1 . Найдите AC и A_1C_1 , если их сумма равна 4,2 м.



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = 2,5 \text{ и } \angle B = \angle B_1, \text{ так что } \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

(по признаку подобия треугольников) с коэффициентом подобия, равным 2,5.

Пусть $A_1C_1 = x$ м, следовательно $AC = 2,5x$ м, но

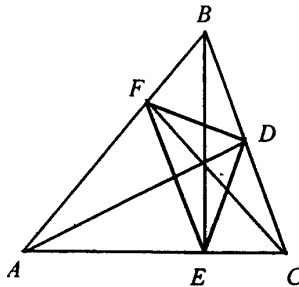
$$A_1C_1 + AC = 4,2 \text{ м,}$$

Так что $x + 2,5x = 4,2$, $3,5x = 4,2$, $x = 1,2$ м. Тогда, $A_1C_1 = 1,2$ м, следовательно

$$AC = 4,2 - A_1C_1 = 4,2 - 1,2 = 3 \text{ м.}$$

Ответ. $A_1C_1 = 1,2$ м, $AC = 3$ м.

- № 32*.** В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD , BE , CF . Найдите углы треугольника DEF , зная углы треугольника ABC .



Из предыдущей задачи получаем, что $\triangle FBD \sim \triangle ABC$, следовательно, $\angle BDF = \angle A$, $\angle BFD = \angle C$.

Далее $\triangle DCE \sim \triangle ABC$ так, что $\angle CDE = \angle A$ и $\angle CED = \angle B$.
 $\angle D = 180^\circ - (\angle BDF + \angle CDE) = 180^\circ - (\angle A + \angle A) = 180^\circ - 2\angle A$.

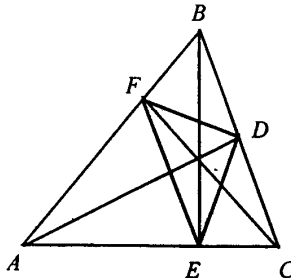
Так как $\triangle AEF \sim \triangle ABC$, то $\angle AEF = \angle B$, $\angle AFE = \angle C$. Так что:

$$\angle E = 180^\circ - (\angle CED + \angle AEF) = 180^\circ - (\angle B + \angle B) = 180^\circ - 2\angle B.$$

$$\angle F = 180^\circ - (\angle AFE + \angle BFD) = 180^\circ - (\angle C + \angle C) = 180^\circ - 2\angle C.$$

Ответ. $\angle D = 180^\circ - 2\angle A$; $\angle E = 180^\circ - 2\angle B$, $\angle F = 180^\circ - 2\angle C$.

№ 33*. Докажите, что биссектрисы треугольника DEF в задаче № 32 лежат на высотах треугольника ABC.



$\angle FBA = \angle BDA - \angle BDF$, так что $\angle FDA = 90^\circ - \angle A$ и $\angle ADE = \angle ADC - \angle CDE = 90^\circ - \angle A$, значит, AD — биссектриса $\angle D$.

Аналогично доказывается, что EB — биссектриса $\angle E$ и FC — биссектриса $\angle F$, то есть биссектрисы этих углов лежат на высотах $\triangle ABC$.

Что и требовалось доказать.

№ 34. Подобны ли два равносторонних треугольника?

Так как стороны равностороннего треугольника равны, то три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, так что равносторонние треугольники подобны.

№ 35. Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если:

- 1) $AB = 1$ м, $AC = 1,5$ м, $BC = 2$ м; $A_1B_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 15$ см, $B_1C_1 = 20$ см;
- 2) $AB = 1$ м, $AC = 2$ м, $BC = 1,5$ м; $A_1B_1 = 8$ дм, $A_1C_1 = 16$ дм, $B_1C_1 = 12$ дм;
- 3) $AB = 1$ м, $AC = 2$ м, $BC = 1,25$ м; $A_1B_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 20$ см, $B_1C_1 = 30$ см;

Треугольники будут подобны, если будет выполняться равенство:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

1) $\frac{100}{10} = \frac{150}{15} = \frac{200}{20} = 10$ — треугольники подобны.

2) $\frac{10}{8} = \frac{20}{16} = \frac{15}{12}$ — неверно, поэтому треугольники не подобны.

3) $\frac{100}{10} = \frac{200}{20} = \frac{125}{13}$ — неверно, поэтому треугольники не подобны.

№ 37. Стороны треугольника равны 0,8 м, 1,6 м и 2 м. Найдите стороны подобного ему треугольника, периметр которого равен 5,5 м.

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$; P — периметр $\triangle ABC$; P_1 — периметр $\triangle A_1B_1C_1$; $AB = 0,8$ м, $BC = 1,6$ м, $AC = 2$ м; $P_1 = 5,5$ м. Тогда

$$P = AB + BC + AC = 0,8 + 1,6 + 2 = 4,4 \text{ м.}$$

Воспользуемся задачей № 36:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k,$$

тогда $k = \frac{5,5}{4,4} = \frac{5}{4}$. Значит:

$$A_1B_1 = k \cdot AB = \frac{5}{4} \cdot 0,8 = 1 \text{ м},$$

$$B_1C_1 = k \cdot BC = \frac{5}{4} \cdot 1,6 = 2 \text{ м},$$

$$A_1C_1 = k \cdot AC = \frac{5}{4} \cdot 2 = 2,5 \text{ м}.$$

Ответ. $A_1B_1 = 1 \text{ м}$, $B_1C_1 = 2 \text{ м}$, $A_1C_1 = 2,5 \text{ м}$.

№ 38. Периметр одного треугольника составляет $\frac{11}{13}$ периметра подобного ему треугольника. Разность двух соответствующих сторон равна 1 м. Найдите эти стороны.

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1; P_{\triangle ABC} = \frac{11}{13} P_{\triangle A_1B_1C_1}; A_1B_1 - AB = 1 \text{ м}.$$

$$\frac{P_{\triangle A_1B_1C_1}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{13}{11}.$$

Пусть $AB = x$, тогда

$$A_1B_1 = x + 1 \text{ и } \frac{x+1}{x} = \frac{13}{11},$$

$$11x + 11 = 13x, 2x = 11, x = 5,5 \text{ м}.$$

То есть $AB = 5,5 \text{ м}$, а $A_1B_1 = 6,5 \text{ м}$.

Ответ: 6,5 м; 5,5 м.

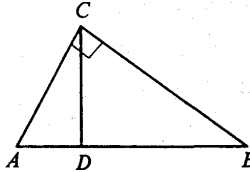
№ 39. Подобны ли два прямоугольных треугольника, если у одного из них есть угол 40° , а у другого — угол, равный: 1) 50° ; 2) 60° ?

У подобных треугольников углы равны, к тому же сумма острых углов прямоугольного треугольника 90° .

а) $40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$ (треугольники подобны).

б) $40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$ (треугольники не подобны).

- № 40.** Основание высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, делит ее на отрезки 9 см и 16 см. Найдите стороны треугольника.



В $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, CD — высота, $AD = 9$ см, $DB = 16$ см.
 $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ (так как $\angle CDA = \angle CDB = 90^\circ$ и $\angle ACD = 90^\circ - \angle A = \angle B$). Значит $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$, $CD^2 = AD \cdot BD$,

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ см.}$$

Далее из $\triangle ACD$ по теореме Пифагора имеем:

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{81 + 144} = 15 \text{ см.}$$

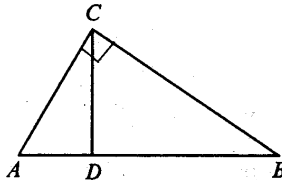
Из $\triangle CBD$ по теореме Пифагора имеем:

$$CB = \sqrt{DB^2 + CD^2} = \sqrt{256 + 144} = 20 \text{ см;}$$

$$AB = AD + BD = 9 + 16 = 25 \text{ см.}$$

Ответ: $AC = 15$ см; $CB = 20$ см, $AB = 25$ см.

- № 41.** Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см, а один из катетов равен 10 см. Найдите проекцию другого катета на гипотенузу.



В $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$; CD — высота, $AB = 25$ см, $AC = 10$ см.

Пусть $AD = x$ см, следовательно

$$DB = (25 - x) \text{ см.}$$

В $\triangle ACD$ по теореме Пифагора имеем:

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 100 - x^2.$$

По доказанному в решении задачи № 40:

$$CD^2 = AD \cdot DB = x \cdot (25 - x) = 25x - x^2.$$

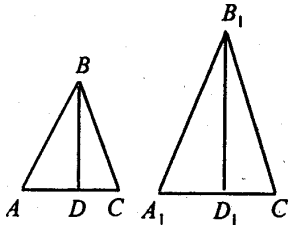
Так что:

$$100 - x^2 = 25x - x^2, 100 = 25x, x = 4 \text{ см.}$$

$$BD = 25 - x = 21 \text{ см.}$$

Ответ: $BD = 21$ см.

№ 42. Докажите, что соответствующие высоты подобных треугольников относятся как соответствующие стороны.



$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Пусть BD — высота $\triangle ABC$, B_1D_1 — высота $\triangle A_1B_1C_1$.

Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle A_1B_1D_1$.

а) $\angle A = \angle A_1$ (так как $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$);

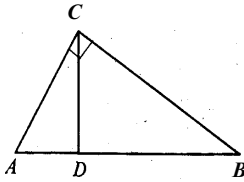
б) $\angle D = \angle D_1$ (прямые углы).

Значит, $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$ (по двум углам), то есть:

$$\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{A_1B_1}{AB}.$$

Что и требовалось доказать.

- № 43. Катеты прямоугольного треугольника относятся как $m:n$. Как относятся проекции катетов на гипотенузу?



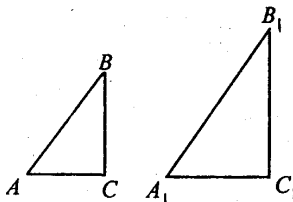
Пусть в $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $\frac{AC}{BC} = \frac{m}{n}$.

$\triangle ACD \sim \triangle ABC$, так что $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$, откуда $AD = \frac{AC^2}{AB}$. Далее $\triangle ABC \sim \triangle BCD$, откуда $\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$, то есть $DB = \frac{BC^2}{AB}$. Так что

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC^2}{AB} : \frac{BC^2}{AB} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Ответ: $\frac{m^2}{n^2}$.

- № 44. Длина тени фабричной трубы равна 35,8 м; в это же время вертикально воткнутый в землю кол высотой 1,9 м дает тень длиной 1,62 м. Найдите высоту трубы.



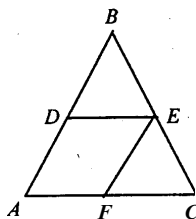
Возьмем $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, где $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $AC = 1,62$ м, $BC = 1,9$ м, $A_1C_1 = 35,8$ м. Найдем B_1C_1 (длина трубы).

Свет на кол и трубу падает с одной стороны и под одним углом, значит $\angle A = \angle A_1$, к тому же $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$. Значит $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ и $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$, то есть

$$B_1C_1 = \frac{A_1C_1 \cdot BC}{AC} = 41,99 \approx 42 \text{ м.}$$

Ответ: $B_1C_1 \approx 42$ м.

№ 45. В треугольник ABC вписан ромб ADEF так, что угол A у них общий, а вершина E находится на стороне BC. Найдите сторону ромба, если $AB = c$ и $AC = b$.



Так как $DE \parallel AC$ (по определению ромба), то $\triangle ABC \sim \triangle DBE$:

$$\frac{DB}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC}$$

тогда, $\frac{DB}{AB} = \frac{DE}{AC}$. Далее, $BD = AB - AD = c - AD$, $DE = AD$, так что:

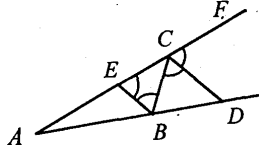
$$\frac{c - AD}{c} = \frac{AD}{b},$$

$bc - b \cdot AD = c \cdot AD$, $bc = AD(b + c)$, так что

$$AD = \frac{b \cdot c}{b + c}$$

Ответ. $AD = \frac{b \cdot c}{b + c}$.

№ 46*. Биссектриса внешнего угла треугольника ABC при вершине C пересекает прямую AB в точке D. Докажите, что $AD:BD = AC:BC$.



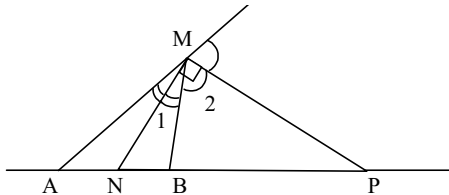
Проведем $BE \parallel CD$. Тогда $\angle CBE = \angle BCD$ (как углы накрест лежащие при пересечении параллельных прямых EB и CD секущей CB); $\angle BEC = \angle DCF = \angle DCB$ (как соответственные углы при тех же параллельных прямых); $\angle DCF = \angle DCB$ (т.к. CD биссектриса $\angle BCF$). Значит, $\triangle ECB$ — равнобедренный и $EC = BC$.

Из решения задачи № 17 имеем: если стороны угла пересечены параллельными прямыми, то отсекаемые на сторонах угла отрезки пропорциональны, то есть

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{EC}.$$

Но так как $EC = BC$, то $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$, что и требовалось доказать.

№ 47*. Докажите, что геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек постоянно (не равно единице), есть окружность.



Возьмем произвольную точку M, такую что $\frac{MA}{MB} = \lambda \neq 1$.

Проведем биссектрису MN и биссектрису внешнего угла MP в $\triangle AMB$.

Тогда $\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{BM} = \lambda$ (свойство биссектрисы);

$\frac{AM}{BM} = \frac{AP}{BP} = \lambda$ (см. задачу №46). То есть положение точек N и

P зависит только от выбора числа λ и не зависит от точки M .
 $\angle NMP = \angle 1 + \angle 2$. Но $2 \cdot \angle 1 + 2 \cdot \angle 2 = 180^\circ$. Значит, $\angle NMP = 90^\circ$, а следовательно геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек постоянно и не равно 1 — это множество точек, из которых фиксированный отрезок (NP) виден под прямым углом, то есть окружность, построенная на диаметре NP . Что и требовалось доказать.

№ 48. Найдите дополнительные плоские углы, зная, что:
1) один из них в 5 раз больше другого; 2) один из них на 100° больше другого; 3) разность их равна 20° .

1) Пусть 1-й угол равен x° , тогда 2-й будет $5x^\circ$, а т.к. сумма двух плоских углов равна 360° , то:

$$x + 5x = 360^\circ, 6x = 360^\circ, x = 60^\circ.$$

Значит, 1-й угол — 60° , а 2-й — 300° .

2) Пусть 1-й угол равен x° , тогда 2-й будет $(x + 100^\circ)$, а их сумма 360° , т. е.:

$$x + x + 100^\circ = 360^\circ, 2x = 260^\circ, x = 130^\circ,$$

$$100^\circ + x = 230^\circ.$$

Значит, 1-й угол — 130° , а 2-й — 230° .

3) Пусть 1-й угол равен x° , тогда 2-й будет $x + 20^\circ$, а их сумма 360° , т. е.:

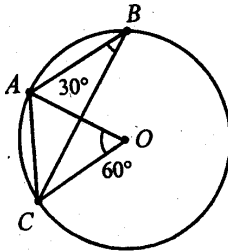
$$x + x + 20^\circ = 360^\circ, 2x = 340^\circ, x = 170^\circ,$$

$$20^\circ + x = 190^\circ.$$

Значит, 1-й угол — 170° , а 2-й — 190° .

Ответ: 1) $60^\circ, 300^\circ$; 2) $130^\circ, 230^\circ$; 3) $170^\circ, 190^\circ$.

- № 49. Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равна хорда AC , если угол ABC равен 30° , а диаметр окружности 10 см?



Так как вписанный угол $ABC = 30^\circ$, то соответствующий ему центральный угол будет 60° (по теореме 11.5), то есть $\angle AOC = 60^\circ$.

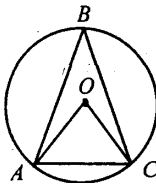
Рассмотрим $\triangle AOC$. Так как $AO = OC$ (как радиусы окружности), а $\angle O = 60^\circ$, то $\triangle AOC$ — равнобедренный, значит,

$$AC = AO = OC = r = 5 \text{ см.}$$

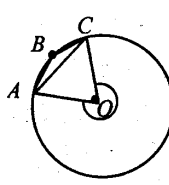
Ответ: $AC = 5$ см.

- № 50. Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равен угол ABC , если хорда AC равна радиусу окружности? (Два случая.)

І случай



ІІ случай



1) $\angle AOC$ является центральным для $\angle ABC$.

Так как $AC = AO = OC$, то $\triangle AOC$ равнобедренный, следовательно $\angle AOC = 60^\circ$, а

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = 30^\circ.$$

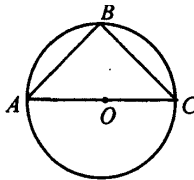
2) $\angle AOC$ в $\triangle AOC$ равен 60° , но центральный угол, соответствующий нашему вписанному, есть угол, дополнительный к $\angle AOC$ и равен $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$. Тогда:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} 300^\circ = 150^\circ.$$

Ответ: $\angle ABC = 30^\circ$ или 150° .

№ 51. Докажите, что центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.

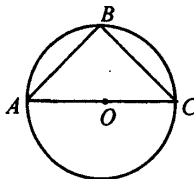
Пусть $\triangle ABC$ вписан в окружность с центром O .



Из следствия теоремы 11.5 о вписанном угле имеем, что $\angle B = 90^\circ$ опирается на диаметр окружности; значит, гипотенуза треугольника AC — диаметр окружности и точка O — центр окружности находится в ее середине. Что и требовалось доказать.

№ 52. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два равнобедренных треугольника.

Опишем около $\triangle ABC$ окружность.

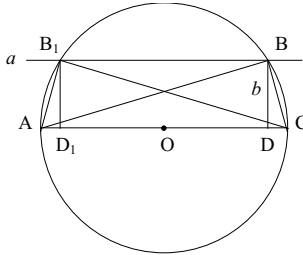


Центр окружности будет совпадать с серединой гипотенузы (по доказанному в задаче № 51). Значит, BO — медиана, но

$\triangle ABO$ и $\triangle BCO$ равнобедренные, так как $AO = OB$ и $OB = OC$ — радиусы одной окружности. Что и требовалось доказать.

№ 53. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу.

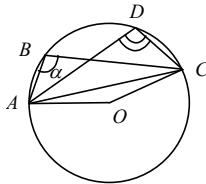
Пусть AC — гипотенуза; $BD = b$ — высота.



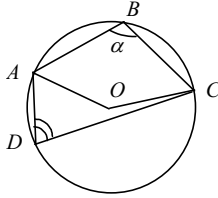
Построение:

- 1) проведем отрезок AC , разделим его пополам, приняв O за середину AC ;
- 2) проведем окружность с центром в точке O и радиусом AO ;
- 3) проведем прямую $a \parallel AC$ на расстоянии b от прямой AC . Прямая a пересечет окружность в двух точках B_1 и B . Так что $\triangle ABC$ и $\triangle AB_1C$ — искомые.

№ 54. На окружности отмечены четыре точки A, B, C, D . Чему равен угол ADC , если угол ABC равен α ? (Два случая.)



1-й случай: $\angle ADC$ и $\angle ABC$ — вписанные, опирающиеся на одну хорду. Поэтому $\angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOC = \angle ABC = \alpha$.

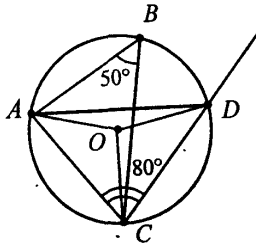


2-й случай: в $\triangle AOC$ $\angle AOC = 360^\circ - 2\alpha$, так как дополнительный к нему угол $\angle AOC = 2\alpha$, как центральный угол, соответствующий описанному $\angle B = \alpha$.

$$\angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} (360^\circ - 2\alpha) = 180^\circ - \alpha.$$

Ответ: 1) α ; 2) $180^\circ - \alpha$.

№ 55. Хорды окружности AD и BC пересекаются. Угол ABC равен 50° , угол ACD равен 80° . Найдите угол CAD.



$\angle ADC = \angle ABC = 50^\circ$ — как вписанные, опирающиеся на одну хорду. Тогда $\angle CAD = 180^\circ - \angle ADC - \angle ACD = 180^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 50^\circ$.

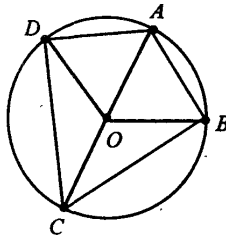
Ответ: 50° .

№ 56*. Докажите, что у четырехугольника, вписанного в окружность, сумма противоположных углов равна 180° .

Пусть четырехугольник ABCD вписан в окружность. По теореме 11.5 имеем:

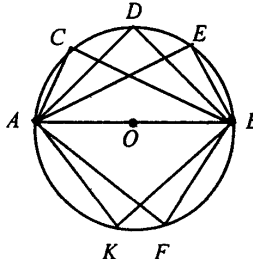
$$\begin{aligned}\angle A + \angle C &= \frac{1}{2} \angle DOB + \frac{1}{2} \angle BOD = \\ &= \frac{1}{2} (\angle DOB + \angle BOD) = \frac{1}{2} 360^\circ = 180^\circ,\end{aligned}$$

так как $\angle DOB$ и $\angle BOD$ дополнительные.



Аналогично $\angle D + \angle B = 180^\circ$. Что и требовалось доказать.

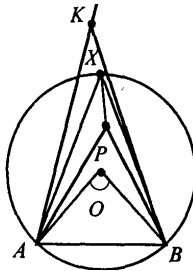
№ 57. Докажите, что геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых проходят через две данные точки, есть окружность.



Пусть существует такая точка D, что $\angle ADB = 90^\circ$. Опишем окружность вокруг прямоугольного $\triangle ADB$. Тогда ее центром является точка O — середина AB. А радиус равен $\frac{1}{2} AB = AO$, то есть не зависит от точки D. Так что любая точка — вершина прямого угла (из условия задачи) принадлежит окружности с центром O — серединой AB, и радиусом $AO = \frac{1}{2} AB$. Что и требовалось доказать.

№ 58. Докажите, что геометрическое место вершин углов с заданной градусной мерой, стороны которых проходят через две данные точки, а вершины лежат по одну сторону от прямой, соединяющей эти точки, есть дуга окружности с концами в этих точках.

Пусть AB — прямая. Угол AXB — вписан в окружность. Если вершина X принадлежит дуге окружности $(O; r)$, то все углы, вершины которых лежат на окружности по одну сторону от прямой AB , равны $\frac{1}{2} \angle AOB$, поэтому они равны между собой.



Докажем теперь, что данным свойством обладают только точки этой части окружности. Рассмотрим два варианта:

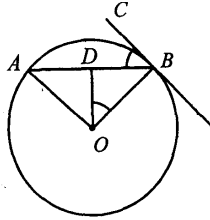
- а) вершина P лежит внутри окружности, тогда $\angle APB > \angle AXB$;
- б) вершина K лежит вне окружности, тогда $\angle AXB > \angle AKB$.

Так что вершины должны лежать на окружности, то есть на дуге окружности.

Что и требовалось доказать.

№ 59. Докажите, что острый угол между хордой окружности и касательной к окружности в конце хорды равен половине угла между радиусами, проведенными к концам хорды.

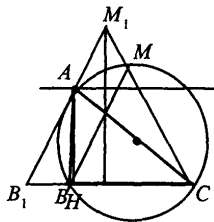
Пусть OA и OB — радиусы окружности $(O; r)$; AB — хорда; CB — касательная. Тогда $\angle OBC = 90^\circ$ (по свойству касательной), а $\angle OBD = \angle OAD$ (как углы равнобедренного треугольника). Тогда $\angle OBD = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AOB$.



$$\begin{aligned} \text{Далее } \angle CBA &= \angle OBC - \angle OBD = 90^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2} \angle AOB) = \\ &= 90^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \angle AOB. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

№ 60. Постройте треугольник по стороне, противолежащей ей углу и высоте, проведенной из вершины этого угла.



Пусть a — сторона $\triangle ABC$; $\angle A = \alpha$; h_a — высота, опущенная из $\angle A$.

Построение:

1) Построим равнобедренный треугольник B_1M_1C с $\angle M_1 = \angle A = \alpha$.

2) На луче CB_1 отложим отрезок $CB = a$ от точки C .

3) Проведем $BM \parallel B_1M_1$ через точку B .

4) Около $\triangle MCB$ опишем окружность.

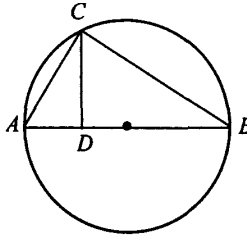
5) Проведем прямую $b \parallel BC$, находящуюся на расстоянии h_a .

6) Обозначим точку пересечения b и окружности A .

$\triangle ABC$ — искомым, так как $\angle A = \angle M = \alpha$ (как вписанные углы, лежащие по одну сторону от прямой BC); $BC = a$ (по построению); $AH = h_a$ (по построению).

№ 61. Из точки C окружности проведен перпендикуляр CD к диаметру AB . Докажите, что $CD^2 = AD \cdot BD$.

Пусть AB — диаметр окружности; $CD \perp AB$.

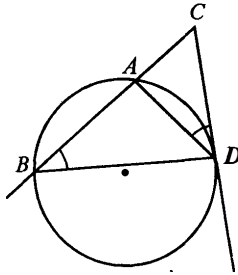


1) Проведем лучи CA и CB , получим $\triangle ACB$, у которого $\angle C = 90^\circ$ (т.к. опирается на диаметр).

2) По признаку подобия прямоугольных треугольников имеем: $\triangle ACD \sim \triangle CDB$, так что $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$, т.е. $CD^2 = AD \cdot BD$.

Что и требовалось доказать.

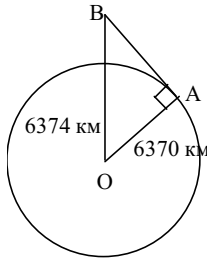
№ 62. Докажите, что произведение отрезков секущей окружности равно квадрату отрезка касательной, проведенной из той же точки: $AC \cdot BC = CD^2$.



$$\angle ABD = \angle ADC.$$

Рассмотрим $\triangle CBD$ и $\triangle ACD$. $\angle CBD = \angle CDA$ (по условию), $\angle C$ — общий, поэтому $\triangle CBD \sim \triangle ACD$ по двум углам, значит: $\frac{BC}{CD} = \frac{CD}{AC}$, откуда имеем: $CD^2 = AC \cdot BC$. Что и требовалось доказать.

- № 63.** Как далеко видно из самолета, летящего на высоте 4 км над Землей, если радиус Земли 6370 км?

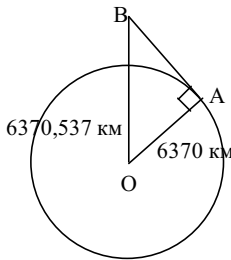


Пусть В — точка нахождения самолета. Проведем касательную ВА. Тогда в $\triangle AOB$, $\angle A = 90^\circ$; $AO = 6370$ км; $OB = 6374$ км. По теореме Пифагора:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{6374^2 - 6370^2} = \sqrt{(6374 - 6370)(6374 + 6370)} = \\ &= \sqrt{4 \cdot 12744} \approx 225,8 \text{ км.} \end{aligned}$$

Ответ: $\approx 225,8$ км.

- № 64.** Вычислите радиус горизонта, видимого с вершины телебашни в Останкине, высота которой 537 м.



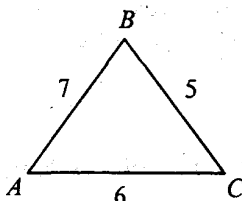
Аналогично задаче № 63 получаем:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{6370,537^2 - 6370^2} = \sqrt{(6370,537 - 6370)(6370,537 + 6370)} = \\ &= \sqrt{0,537 \cdot 12740,537} \approx 82,7 \text{ км} \end{aligned}$$

Ответ: $\approx 82,7$ км.

§ 12. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

- № 1. Стороны треугольника 5 м, 6 м, 7 м. Найдите косинусы углов треугольника.



Пусть $AB = 7$ м; $BC = 5$ м; $AC = 6$ м. Тогда по теореме косинусов

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos \angle C,$$

то есть:

$$\cos \angle C = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} = \frac{25 + 36 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5},$$

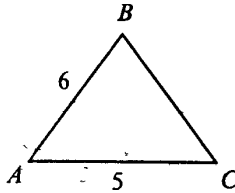
аналогично:

$$\cos \angle A = \frac{BA^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{49 + 36 - 25}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{60}{84} = \frac{5}{7},$$

$$\cos \angle B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{49 + 25 - 36}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{38}{70} = \frac{19}{35}.$$

$$\text{Ответ: } \cos \angle C = \frac{1}{5}, \cos \angle A = \frac{5}{7}, \cos \angle B = \frac{19}{35}.$$

- № 2.** У треугольника две стороны равны 5 м и 6 м, а синус угла между ними равен 0,6. Найдите третью сторону.



Пусть $AB = 6$ м, $AC = 5$ м; $\sin \angle A = 0,6$. Имеем:

$$\cos^2 \angle A = 1 - \sin^2 \angle A,$$

$$\cos \angle A = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \angle A} = \pm \sqrt{1 - 0,36} = \pm \sqrt{0,64} = \pm 0,8.$$

Далее по теореме косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$$

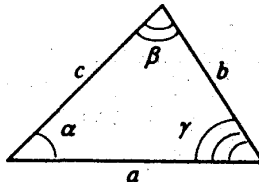
получаем, что

а) $BC^2 = 36 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 0,8 = 61 - 48 = 13$ м² и $BC = \sqrt{13}$ м;

б) $BC^2 = 36 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot (-0,8) = 61 + 48 = 109$ м² и $BC = \sqrt{109}$ м.

Ответ: а) $\sqrt{13}$ м; б) $\sqrt{109}$ м.

- № 3.** Стороны треугольника равны a , b , c . Докажите, что если $a^2 + b^2 > c^2$, то угол, противолежащий стороне c , острый. Если $a^2 + b^2 < c^2$, то угол, противолежащий стороне c , тупой.



γ — угол треугольника, противолежащий стороне c . По теореме косинусов имеем:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

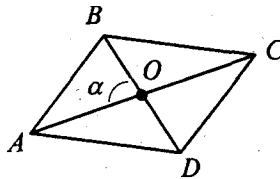
откуда получаем:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Если $a^2 + b^2 > c^2$, то $a^2 + b^2 - c^2 > 0$; тогда $\cos \gamma > 0$, а так как $0 < \gamma < 180^\circ$, то γ — острый.

Если $a^2 + b^2 < c^2$, то $\cos \gamma < 0$ и угол γ — тупой. Что и требовалось доказать.

№ 4. Даны диагонали параллелограмма c и d и угол между ними α . Найдите стороны параллелограмма.



Пусть ABCD — параллелограмм, $AC=c$, $BD=d$, $\angle AOB=\alpha$.

Тогда $OC = AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} c$, $BO = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} d$ (по свойству диагоналей параллелограмма), $\angle AOB = \alpha$, так что по теореме косинусов имеем:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos \angle AOB = \\ &= \frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{4} d^2 - \frac{1}{2} cd \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

$$AB = \sqrt{\frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{4} d^2 - \frac{1}{2} cd \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos \alpha}.$$

В $\triangle BOC$ по теореме косинусов имеем:

$$\begin{aligned} BC^2 &= BO^2 + OC^2 - 2BO \cdot OC \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = \\ &= \frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{4} d^2 - \frac{1}{2} cd \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{4} d^2 + \frac{1}{2} cd \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Т.к. $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, поэтому

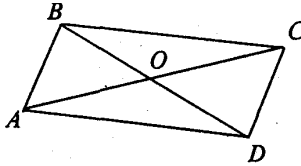
$$BC = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{2}cd \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + c^2 + 2cd \cdot \cos \alpha}.$$

Далее $AB = CD$ и $AD = BC$.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos \alpha}; \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + c^2 + 2cd \cdot \cos \alpha}$$

№ 5. Даны стороны параллелограмма a и b и один из углов α . Найдите диагонали параллелограмма.

Пусть $ABCD$ — параллелограмм, $AB = a$, $AD = b$, $\angle A = \alpha$.



В $\triangle BAD$, по теореме косинусов:

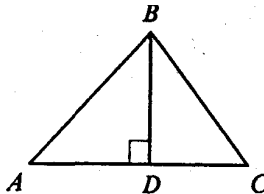
$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \alpha} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}.$$

В $\triangle ABC$, по теореме косинусов:

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \beta} = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}; AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}.$$

№ 6. Стороны треугольника 4 м, 5 м и 6 м. Найдите проекции сторон 4 м и 5 м на прямую, содержащую сторону 6 м.



$BD \perp AC$; $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 6$ м; AD — проекция AB на AC , DC — проекция BC на AC .

По теореме косинусов:

$$\cos \angle A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{25 + 36 - 16}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4};$$

$$\cos \angle C = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} = \frac{16 + 36 - 25}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}.$$

Далее в прямоугольном $\triangle ABD$ имеем:

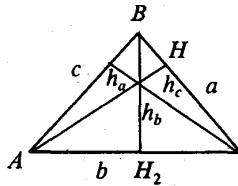
$$AD = AB \cos \angle A = 5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ м.}$$

А в $\triangle BCD$:

$$DC = BC \cos \angle C = 4 \cdot \frac{9}{16} = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ м.}$$

Ответ: $AD = 3,75$ м; $DC = 2,25$ м.

№ 8. Найдите высоты треугольника в задаче 1.



Найдем h_a , h_b , h_c . Из задачи 1 знаем, что

$$\cos \angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2ab} = \frac{36 + 49 - 25}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{60}{84} = \frac{5}{7};$$

$$\cos \angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{25 + 49 - 36}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{38}{70} = \frac{19}{35};$$

$$\cos \angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{25 + 36 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}.$$

Из основного тригонометрического тождества получаем:

$$\sin \angle A = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A} = \sqrt{1 - \frac{25}{49}} = \sqrt{1 - \frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7};$$

$$\sin \angle B = \sqrt{1 - \cos^2 \angle B} = \sqrt{1 - \frac{361}{1225}} = \sqrt{\frac{864}{1225}} = \frac{12\sqrt{6}}{35};$$

$$\sin \angle C = \sqrt{1 - \cos^2 \angle C} = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Далее находим:

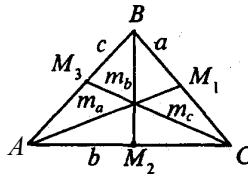
$$\text{из } \triangle ABH_1 \quad h_a = c \cdot \sin \angle B = 7 \cdot \frac{12\sqrt{6}}{35} = \frac{12\sqrt{6}}{5} \text{ м};$$

$$\text{из } \triangle BCH_2 \quad h_b = a \cdot \sin \angle C = 5 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 2\sqrt{6} \text{ м};$$

$$\text{из } \triangle ACH_3 \quad h_c = b \cdot \sin \angle A = 6 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7} = \frac{12\sqrt{6}}{7} \text{ м}.$$

$$\text{Ответ: } h_a = \frac{12\sqrt{6}}{5} \text{ м}, h_b = 2\sqrt{6} \text{ м}, h_c = \frac{12\sqrt{6}}{7} \text{ м}.$$

№ 9. Найдите медианы треугольника в задаче № 1 §12.



Найдем медианы m_a , m_b и m_c .

$$\text{В } \triangle ABM_1 \quad AB=c=7 \text{ м}, BM_1=\frac{1}{2} BC=\frac{1}{2} a=\frac{5}{2} \text{ м}, \cos \angle B = \frac{19}{35}$$

(см. задачу № 1 §12). По теореме косинусов:

$$m_a = AM_1 = \sqrt{c^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - 2 \cdot c \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \angle B} =$$

$$= \sqrt{49 + \frac{25}{4} - 2 \cdot 7 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{19}{35}} = \sqrt{\frac{145}{4}} = \frac{\sqrt{145}}{2}$$

$$\text{В } \triangle BCM_2 \text{ } BC = a = 5 \text{ м, } BM_2 = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} b = 3 \text{ м, } \cos \angle C = \frac{1}{5}.$$

Из теоремы косинусов:

$$m_b = BM_2 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - 2a\left(\frac{1}{2}b\right) \cdot \cos \angle C} =$$

$$= \sqrt{25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt{34 - 6} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

$$\text{В } \triangle AM_3C \text{ } AC = b = 6 \text{ м, } AM_2 = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} c = \frac{7}{2} \text{ м, } \cos \angle A = \frac{5}{7}.$$

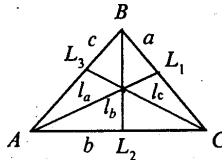
Так что

$$m_c = CM_3 = \sqrt{b^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 - 2b\left(\frac{1}{2}c\right) \cdot \cos \angle A} =$$

$$= \sqrt{36 + \frac{49}{4} - 2 \cdot 6 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{73}{4}} = \frac{\sqrt{73}}{2}$$

$$\text{Ответ: } m_a = \frac{\sqrt{145}}{2}; m_b = 2\sqrt{7}; m_c = \frac{\sqrt{73}}{2}$$

№ 10*. Найдите биссектрисы треугольника в задаче № 1.



Пусть $AL_1 = l_a$, $BL_2 = l_b$, $CL_3 = l_c$ — биссектрисы. По свойству биссектрисы треугольника:

$$\frac{AB}{BL_1} = \frac{AC}{CL_1}.$$

Известно, что $AB = 7$ м, $AC = 6$ м. Пусть $BL_1 = x$ м, следовательно $L_1C = 5 - x$, откуда:

$$\frac{7}{x} = \frac{6}{5-x}; 35 - 7x = 6x; -13x = -35; x = \frac{35}{13},$$

значит, $BL_1 = \frac{35}{13}$.

В $\triangle ABL_1$ $AB = 7$ м, $BL_1 = \frac{35}{13}$, $\cos \angle B = \frac{19}{35}$ (см. задачу № 1).

По теореме косинусов получаем:

$$\begin{aligned} AL_1 &= \sqrt{AB^2 + BL_1^2 - 2AB \cdot BL_1 \cdot \cos \angle B}; \\ AL_1 &= \sqrt{49 + \frac{1225}{169} - 2 \cdot 7 \cdot \frac{35}{13} \cdot \frac{19}{35}} = \sqrt{49 + \frac{1225}{169} - \frac{3458}{169}} = \\ &= \sqrt{49 - \frac{2233}{169}} = \sqrt{\frac{6048}{169}} = \frac{12\sqrt{42}}{13}. \end{aligned}$$

Аналогично: $\frac{AB}{AL_2} = \frac{BC}{L_2C}$, т.е. $\frac{7}{y} = \frac{5}{6-y}$, где $AL_2 = y$ м,

$$42 - 7y = 5y; -12y = -42; y = \frac{7}{2};$$

следовательно $AL_2 = \frac{7}{2}$ м.

В $\triangle ABL_2$, $AB = 7$ м, $AL_2 = \frac{7}{2}$ м, $\cos \angle A = \frac{5}{7}$, тогда

$$\begin{aligned} BL_2 &= \sqrt{AB^2 + AL_2^2 - 2AB \cdot AL_2 \cdot \cos \angle A} = \sqrt{49 + \frac{49}{4} - 2 \cdot 7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{7}} = \\ &= \sqrt{\frac{105}{4}} = \frac{\sqrt{105}}{2}. \end{aligned}$$

Далее $\frac{BC}{BL_3} = \frac{AC}{AL_3}$, т.е. $\frac{5}{z} = \frac{6}{7-z}$, где $BL_3 = z$ м.

$$35 - 5z = 6z; -11z = -35; z = \frac{35}{11};$$

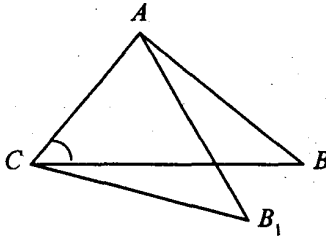
т.е. $BL_3 = \frac{35}{11}$.

В $\triangle CBL_3$

$$\begin{aligned} CL_3 &= \sqrt{BC^2 + BL_3^2 - 2BC \cdot BL_3 \cos \angle B} = \\ &= \sqrt{25 + \frac{1225}{121} - \frac{2090}{121}} = \sqrt{\frac{2160}{121}} = \frac{12\sqrt{15}}{11}. \end{aligned}$$

Ответ: $AL_1 = \frac{12\sqrt{42}}{13}$; $BL_2 = \frac{\sqrt{105}}{2}$; $CL_3 = \frac{12\sqrt{15}}{11}$.

№ 11*. Как изменяется сторона АВ треугольника АВС, если угол С возрастает, а длины сторон АС и ВС остаются без изменений?

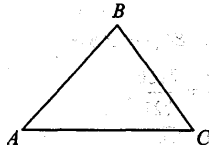


Имеем:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos \angle C.$$

Если АС и АВ не изменяются, а $\angle C$ возрастает, то $\cos \angle C$ — убывает, следовательно AB^2 возрастает. Значит, АВ возрастает.

- № 12.** У треугольника ABC $AB = 15$ см, $AC = 10$ см. Может ли $\sin \beta = \frac{3}{4}$?



По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle B}$, откуда имеем:

$$\sin \beta = \frac{AC \cdot \sin \angle C}{AB} = \frac{10}{15} \cdot \sin \angle C = \frac{2}{3} \cdot \sin \angle C,$$

то есть $\sin \angle C = \frac{3}{2} \sin \beta$.

Если $\sin \beta = \frac{3}{4}$, то $\sin \angle C = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$, но $-1 < \sin \angle C < 1$, а $\frac{9}{8} > 1$, так что $\sin \beta$ не может быть равен $\frac{3}{4}$.

Ответ. Не может.

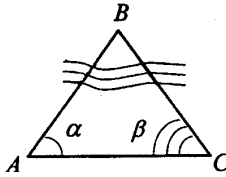
- № 14.** Как найти радиус окружности, описанной около треугольника, зная его стороны? Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5 м, 6 м, 7 м.

По теореме синусов: $R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}$. Далее, пусть $b = 6$ м. Тогда $\sin \beta = \frac{12\pi}{35}$ (смотри задачу № 8). Так что

$$R = \frac{b}{2 \sin \angle B} = \frac{6}{2 \cdot \frac{12\sqrt{6}}{35}} = \frac{6 \cdot 35}{2 \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{35}{4\sqrt{6}}.$$

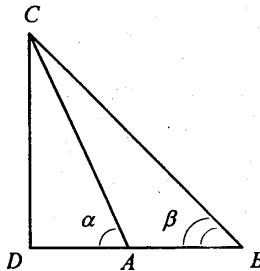
Ответ: $\frac{35}{4\sqrt{6}}$.

- № 15.** Объясните, как найти расстояние от точки А до недоступной точки В, зная расстояние АС и углы α и β .



По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\angle B}$, тогда: $AB = \frac{AC \cdot \sin\beta}{\sin\angle B}$,
т.к. $\angle B = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, то $\sin B = \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$
и $AB = \frac{AC \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

- № 16.** Объясните, как найти высоту x здания по углам α и β и расстоянию a .



В $\triangle ABC$ $\angle A = 180^\circ - \alpha$, тогда $\angle C = 180^\circ - \beta - (180^\circ - \alpha) = \alpha - \beta$.

Далее по теореме синусов: $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\angle C}$, так что

$$AC = \frac{AB \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

$\triangle ACD$ — прямоугольный, поэтому:

$$x = CD = AC \sin\alpha = \frac{AB \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

- № 18.** В треугольнике ABC $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 80^\circ$. Какая из сторон треугольника наибольшая, какая — наименьшая?

По теореме синусов $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B}$. Из условия следует что $\sin \angle C > \sin \angle B > \sin \angle A$, тогда $AB > AC > BC$, т.е. сторона AB — наибольшая, а сторона BC — наименьшая.

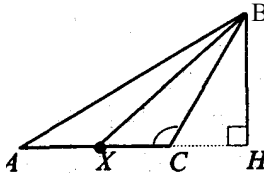
- № 19.** У треугольника ABC стороны $AB = 5,1$ м, $BC = 6,2$ м, $AC = 7,3$ м. Какой из углов треугольника наибольший, какой — наименьший?

По теореме синусов $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B}$. Так как по условию $AC > BC > AB$, то и $\sin \angle B > \sin \angle A > \sin \angle C$, значит и $\angle B > \angle A > \angle C$. Поэтому $\angle B$ — наибольший, а $\angle C$ — наименьший.

- № 20.** Что больше — основание или боковая сторона равнобедренного треугольника, если прилежащий к основанию угол больше 60° ?

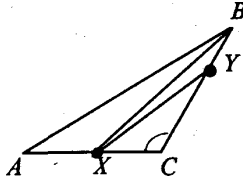
Так как прилежащий к основанию угол больше 60° , то угол при вершине меньше 60° . По теореме синусов против меньшего угла лежит меньшая сторона, так что боковая сторона больше.

- № 21.** У треугольника ABC угол C тупой. Докажите, что если точка X лежит на стороне AC , то $BX < AB$.



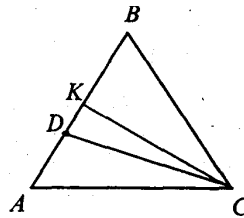
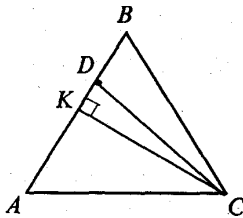
Проведем $BH \perp AC$. Так как X лежит на AC , то $AH > XH$, а значит, наклонная $AB > BX$ (т.к. из двух наклонных больше та, проекция которой больше). Что и требовалось доказать.

- № 22. У треугольника ABC угол C тупой. Докажите, что если точка X лежит на стороне AC , а точка Y — на стороне BC , то $XY < AB$.



Соединим X с B , по доказанному в предыдущей задаче $XB < AB$ и $XY < XB$. Так что $XY < AB$, что и требовалось доказать.

- № 23. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D . Докажите, что отрезок CD меньше по крайней мере одной из сторон: AC или BC .



Проведем $CK \perp AB$. Точка D лежит или между B и K или между A и K .

Если D лежит между точками K и B , то $KB > KD$; а если проекция больше, то больше и наклонная, т.е. $AB > CD$.

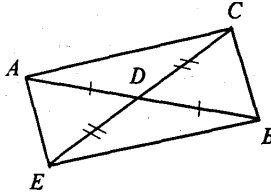
Аналогично доказывается, что $CD < AC$, если точка D лежит между точками A и K .

Если D совпадает с K , то $CD < CB$, так как наклонная больше перпендикуляра.

Что и требовалось доказать.

- № 24*. Дан треугольник ABC , CD — медиана, проведенная к стороне AB . Докажите, что если $AC > BC$, то угол ACD меньше угла BCD .

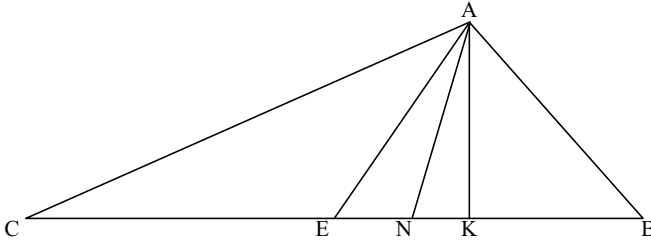
Продолжим медиану CD и отложим на ней отрезок $DE = CD$; полученный четырехугольник $ACBE$ — параллелограмм. $BE = AC$ и $CB = AE$.



В $\triangle ACE$ $\angle ACD$ лежит против стороны $AE = CB$. В $\triangle CBE$ $\angle BCD$ лежит против стороны $BE = AC$. Так как $AC > BC$, то $\angle ACD < \angle BCD$. Что и требовалось доказать.

№ 25*. Докажите, что биссектриса треугольника не меньше высоты и не больше медианы, проведенных из этой же вершины.

Пусть в $\triangle ABC$, AK — высота, AN — биссектриса $\angle A$, AE — медиана.



Из точки A к прямой BC проведены перпендикуляр AK (высота) и две наклонные. Следовательно точка N принадлежит либо KB , либо KE .

Точка N совпадает с K , тогда $AN = AK < AE$.

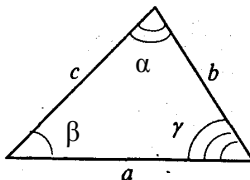
Точка N совпадает с E , тогда $AN = AE > AK$.

Точка N лежит между точками K и E , тогда $AK < AN < AE$ (так как ее проекция NK меньше EK — проекции AE).

По доказанному в задаче № 24, AN не может быть больше AE , т.е. точка N не может лежать между E и C . Что и требовалось доказать.

№ 26. Даны сторона и два угла треугольника. Найдите третий угол и остальные две стороны, если:

- 1) $a = 5, \beta = 30^\circ, \gamma = 45^\circ$
- 2) $a = 20, \alpha = 75^\circ, \beta = 60^\circ$;
- 3) $a = 35, \beta = 40^\circ, \gamma = 120^\circ$;
- 4) $b = 12, \alpha = 36^\circ, \beta = 25^\circ$;
- 5) $c = 14, \alpha = 64^\circ, \beta = 48^\circ$.



1) $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$

Используя теорему синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$, получаем:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{5 \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} \approx 2,59,$$

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{5 \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} \approx 3,66.$$

2) $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$.

Используя теорему синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$, получаем:

$$b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{20 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{20 \cdot 0,87}{0,97} \approx 17,9,$$

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{20 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{20 \cdot 0,7}{0,97} \approx 14,4.$$

3) $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 120^\circ - 40^\circ = 20^\circ$.

Используя теорему синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$, получаем:

$$b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{35 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{35 \cdot 0,64}{0,34} \approx 65,8 ,$$

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{35 \cdot \sin 120^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{35 \cdot 0,87}{0,34} \approx 89,6 .$$

$$4) \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 36^\circ - 25^\circ = 119^\circ .$$

Используя теорему синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$, получаем:

$$c = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} \beta = \frac{12 \cdot \sin 119^\circ}{\sin 25^\circ} \approx \frac{12 \cdot 0,88}{0,42} = 24,8 ,$$

$$a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{12 \cdot 0,88}{0,42} \approx 16,7 .$$

$$5) \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 64^\circ - 48^\circ = 68^\circ .$$

Используя теорему синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$, получаем:

$$a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{14 \cdot \sin 64^\circ}{\sin 68^\circ} = \frac{14 \cdot 0,9}{0,93} \approx 13,6 ,$$

$$b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{14 \cdot 0,74}{0,93} \approx 11,2 .$$

№ 27. Даны две стороны и угол между ними. Найдите остальные два угла и третью сторону, если:

- 1) $a = 12, b = 8, \gamma = 60^\circ$;
- 2) $a = 7, b = 23, \gamma = 130^\circ$;
- 3) $b = 9, c = 17, \alpha = 95^\circ$;
- 4) $b = 14, c = 10, \alpha = 145^\circ$;
- 5) $a = 32, c = 23, \beta = 152^\circ$;
- 6) $a = 24, c = 18, \beta = 15^\circ$.

1) Используя теорему косинусов, находим:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} = \sqrt{144 + 64 - 2 \cdot 96 \cdot 0,5} = \sqrt{112} \approx 10,6 .$$

$$\text{Далее } \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(10,6)^2 + 64 - 144}{2 \cdot 8 \cdot 10,6} \approx 0,19, \text{ так что}$$

$$\alpha = 79^\circ, \text{ а } \beta = 180^\circ - 79^\circ - 60^\circ = 41^\circ.$$

2) Используя теорему косинусов, находим:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} = \sqrt{49 + 529 + 2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 0,64} = \sqrt{784,08} \approx 28.$$

$$\text{Далее } \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{529 + 784 - 49}{2 \cdot 23 \cdot 28} \approx 0,98, \text{ так что}$$

$$\alpha = 11^\circ, \text{ а } \beta = 180^\circ - 11^\circ - 130^\circ = 39^\circ.$$

3) Используя теорему косинусов, находим:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha} = \sqrt{81 + 289 - 306 \cos 95^\circ} = \sqrt{396,7} \approx 19,9.$$

$$\text{Далее } \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{396,01 + 289 - 81}{2 \cdot 19,9 \cdot 17} = \frac{604,01}{676,6} = 0,89,$$

$$\text{так что } \beta = 27^\circ, \text{ а } \gamma = 180^\circ - 95^\circ - 27^\circ = 58^\circ.$$

4) Используя теорему косинусов, находим:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha} = \sqrt{196 + 100 + 227,6} = \sqrt{523,6} \approx 22,9.$$

$$\text{Далее: } \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{100 + 523,6 - 196}{2 \cdot 22,9 \cdot 10} \approx 0,93, \text{ так что}$$

$$\beta = 21^\circ, \text{ а } \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 145^\circ - 21^\circ = 14^\circ.$$

5) Используя теорему косинусов, находим:

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta} = \sqrt{1024 + 529 + 1472 \cdot 0,88} = \\ &= \sqrt{2848,36} \approx 53,4. \end{aligned}$$

$$\text{Далее: } \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2848,36 + 529 - 1024}{2 \cdot 53,4 \cdot 23} \approx 0,9580,$$

$$\text{так что } \alpha = 16^\circ, \text{ а } \gamma = 180^\circ - 152^\circ - 16^\circ = 12^\circ.$$

6) Используя теорему косинусов, находим:

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta} = \sqrt{576 + 324 + 864 \cdot \cos 15^\circ} \approx \sqrt{61,9} \approx 7,9.$$

Далее; $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{324 + 61,9 - 576}{2 \cdot 7,9 \cdot 18} \approx -0,67$, так что $\alpha = 130^\circ$, а $\gamma = 180^\circ - 15^\circ - 130^\circ = 35^\circ$.

№ 28. В треугольнике заданы две стороны и угол, противолежащий одной из сторон. Найдите остальные углы к сторону треугольника, если:

- 1) $a = 12, b = 5, \alpha = 120^\circ$;
- 2) $a = 27, b = 9, \alpha = 138^\circ$;
- 3) $a = 34, b = 12, \alpha = 164^\circ$;
- 4) $a = 2, b = 4, \alpha = 60^\circ$;
- 5) $a = 6, b = 8, \alpha = 30^\circ$.

1) По теореме синусов имеем: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$, откуда получаем:

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{5 \cdot \sin 120^\circ}{12} = \frac{5 \cdot 0,87}{12} \approx 0,3608,$$

т.е. $\beta = 21^\circ, \gamma = 180^\circ - 120^\circ - 21^\circ = 39^\circ$ и

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{12 \cdot \sin 39^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{12 \cdot 0,63}{0,87} \approx 8,69.$$

2) По теореме синусов имеем: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$, откуда получаем:

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{9 \cdot \sin 138^\circ}{27} = \frac{9 \cdot 0,67}{27} \approx 0,223,$$

т.е. $\beta \approx 13^\circ, \gamma = 180^\circ - 138^\circ - 13^\circ = 29^\circ$ и

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{27 \cdot \sin 29^\circ}{\sin 138^\circ} = \frac{27 \cdot 0,48}{0,67} \approx 19,6.$$

3) По теореме синусов имеем: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$, откуда получаем:

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{12 \cdot \sin 164^\circ}{34} = \frac{12 \cdot 0,28}{34} \approx 0,0973,$$

т.е. $\beta = 6^\circ$, $\gamma = 180^\circ - 164^\circ - 6^\circ = 10^\circ$ и

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{34 \cdot 0,18}{0,28} \approx 22,3.$$

4) По теореме синусов имеем: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$, откуда получаем:

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{4 \cdot 0,87}{2} = 1,73,$$

но $\sin \beta$ должен быть меньше 1, значит, задача не имеет решения.

5) По теореме синусов имеем: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$, откуда получаем:

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{8 \cdot 0,5}{6} \approx 0,667,$$

т.е. $\beta_1 = 42^\circ$ или $\beta_2 = 138^\circ$. Тогда $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$, т.е. $\gamma_1 = 108^\circ$ или $\gamma_2 = 12^\circ$. Далее $c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$, так что $c_1 \approx 11,4$ или $c_2 \approx 2,49$.

№ 29. Даны три стороны треугольника. Найдите его углы, если:

- 1) $a = 2, b = 3, c = 4$;
- 2) $a = 7, b = 2, c = 8$;
- 3) $a = 4, b = 5, c = 7$;
- 4) $a = 15, b = 24, c = 18$;

5) $a = 23, b = 17, c = 39;$

6) $a = 55, b = 21, c = 38.$

1) По теореме косинусов имеем:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 16 - 4}{24} = 0,875, \alpha \approx 29^\circ,$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4 + 16 - 9}{16} = 0,6875, \beta \approx 47^\circ.$$

Тогда $\gamma = 180^\circ - 29^\circ - 47^\circ = 104^\circ.$

2) По теореме косинусов имеем:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4 + 64 - 49}{2 \cdot 2 \cdot 8} = \frac{19}{32} = 0,5938, \alpha = 54^\circ,$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{49 + 64 - 4}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{109}{112} = 0,9732, \beta = 13^\circ.$$

Тогда $\gamma = 180^\circ - 54^\circ - 13^\circ = 113^\circ.$

3) По теореме косинусов имеем:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 49 - 16}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{58}{70} \approx 0,8286, \alpha = 34^\circ,$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{16 + 49 - 25}{2 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{40}{56} \approx 0,7143, \beta = 44^\circ.$$

Тогда $\gamma = 180^\circ - 34^\circ - 44^\circ = 102^\circ.$

4) По теореме косинусов имеем:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{576 + 324 - 225}{2 \cdot 24 \cdot 18} \approx 0,7813, \alpha = 39^\circ,$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{324 + 225 - 578}{2 \cdot 15 \cdot 18} = -\frac{27}{540} = -0,05, \beta = 93^\circ.$$

Тогда $\gamma = 180^\circ - 39^\circ - 93^\circ = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ.$

5) По теореме косинусов имеем:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{289 + 1521 - 289}{2 \cdot 17 \cdot 39} \approx 0,966, \alpha = 15^\circ,$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{529 + 1521 - 289}{2 \cdot 23 \cdot 39} \approx 0,9816, \beta = 11^\circ.$$

Тогда $\gamma = 180^\circ - 15^\circ - 11^\circ = 154^\circ$.

6) По теореме косинусов имеем:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{441 + 1444 - 3025}{2 \cdot 21 \cdot 38} \approx -0,7142, \alpha = 136^\circ,$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{3025 + 1444 - 441}{2 \cdot 55 \cdot 38} \approx 0,9636, \beta = 15^\circ.$$

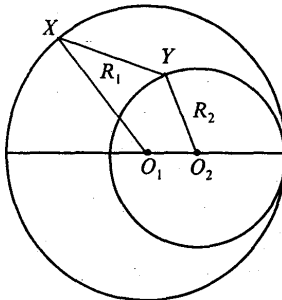
Тогда $\gamma = 180^\circ - 136^\circ - 15^\circ = 29^\circ$.

§ 13. МНОГОУГОЛЬНИКИ

№ 1. Даны две окружности с радиусами R_1 и R_2 и расстояние между центрами $d > R_1 + R_2$. Чему равны наибольшее и наименьшее расстояния между точками X и Y этих окружностей.

Задача решена в п. 113 учебника, стр. 169.

№ 2. Решите задачу 1 при условии, что $d < R_1 - R_2$.



Пусть X и Y — точки на окружностях. По теореме о длине ломаной для ломаной XO_1O_2Y имеем:

$$XY \leq XO_1 + O_1O_2 + O_2Y,$$

то есть $XO_1 + O_1O_2 + O_2Y = R_1 + R_2 + d$ — наибольшее расстояние.

Для ломаной XYO_2O_1 имеем:

$$XO_1 \leq XY + YO_2 + O_1O_2;$$

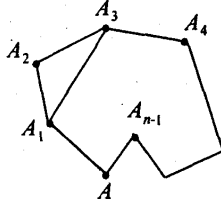
$$R_1 \leq XY + R_2 + d,$$

$$XY \geq R_1 - R_2 - d,$$

значит, $(R_1 - R_2 - d)$ — наименьшее расстояние.

№ 3. Докажите, что если вершины ломаной не лежат на одной прямой, то длина ломаной больше длины отрезка, соединяющего ее концы.

Пусть $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ — ломаная, точки A_1, A_2, \dots, A_n не лежат на одной прямой.



Доказать, что $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n > A_1A_n$.

Точки A_1, A_2, A_3 не лежат на одной прямой, по неравенству треугольника имеем:

$$A_1A_2 + A_2A_3 > A_1A_3. \quad (1)$$

Для ломаной $A_1A_3A_4$ получим:

$$A_1A_3 + A_3A_4 > A_1A_4. \quad (2)$$

Подставив (1) в (2), получим:

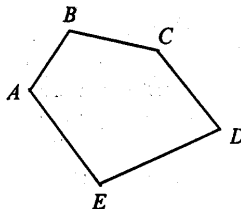
$$A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 > A_1A_4.$$

Продолжая преобразования, дальше аналогично получим:

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n > A_1A_n,$$

что и требовалось доказать.

№ 4. Докажите, что у замкнутой ломаной расстояние между любыми двумя вершинами не больше половины длины ломаной.



Пусть $ABCDEA$ — замкнутая ломаная линия.

Расстояние между двумя вершинами, например, A и D будем считать отрезком, соединяющим концы ломаной, следовательно по теореме о длине ломаной имеем: $AD \leq AB + BC + CD$ и $AD \leq AE + ED$, сложив два неравенства, получим:

$$2AD \leq AB + BC + CD + DE + EA,$$

$$AD \leq \frac{1}{2} (AB + BC + CD + DE + EA).$$

Что и требовалось доказать.

№ 5. Докажите, что у замкнутой ломаной длина каждого звена не больше суммы длин остальных звеньев.

Так же, как и в решении задачи № 4, получаем, что

$$AE \leq AB + BC + CD + DE.$$

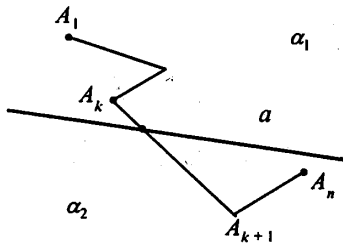
Для других звеньев аналогично.

№ 6. Может ли замкнутая ломаная иметь звенья длиной 1 м, 2 м, 3 м, 4 м, 11 м? Объясните ответ.

Для замкнутой ломаной длина самого большого звена должна быть меньше суммы длин всех остальных звеньев. Для данной ломаной должно выполняться $1 + 2 + 3 + 4 > 11$, то есть $11 < 10$, что неверно.

Ответ. Не может.

№ 7. Докажите, что если концы ломаной лежат по разные стороны от данной прямой, то она пересекает эту прямую.



Докажем, что у прямой и ломаной найдется хотя бы одна общая точка.

Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости a_1 и a_2 , в которых лежат концы A_1 , и A_n ломаной A_1A_2, \dots, A_n . Докажем, что у прямой a и ломаной найдется хотя бы одна общая точка. Допустим, что $A_1 \in a_1$, $A_n \in a_2$. Каждая из вершин $A_2A_3 \dots A_{n-1}$ принадлежит одной из полуплоскостей или прямой a . Если $A_2 \in a_2$, то отрезок A_1A_2 , пересекает прямую a , если $A_2 \in a$, то A_2 является общей точкой прямой и ломаной. Если $A_2 \in a_1$, то рассмотрим вершину A_3 и т.д. То есть если $A_3 \in a_2$, то отрезок A_2A_3 пересечет прямую a , если $A_3 \in a$, то A_3 является общей точкой прямой и ломаной. Если $A_3 \in a_1$, перейдем к рассмотрению вершины A_4 и т.д. Допустим, что среди вершин A_1, A_2, \dots, A_{n-1} не найдется ни одной, которая бы лежала в a_2 или на прямой a , то в этом случае отрезок $A_{n-1}A_n$ пересечет прямую a . Что и требовалось доказать.

№ 8. Сколько диагоналей у n -угольника?

Из каждой вершины n -угольника можно провести диагонали ко всем вершинам, кроме самой себя и двух соседних, т.е. $n - 3$ диагонали. Поскольку каждая диагональ соединяет две вершины, то общее количество диагоналей

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

№ 10. Углы выпуклого четырехугольника пропорциональны числам 1, 2, 3, 4. Найдите их.

По теореме о сумме углов многоугольника имеем:

$$S_4 = 180^\circ(n - 2) = 180^\circ \cdot (4 - 2) = 180^\circ \cdot 2 = 360^\circ.$$

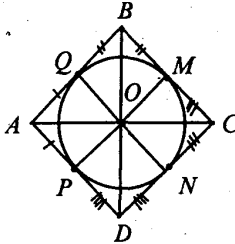
Пусть градусная мера 1-го угла k° , 2-го — $2k^\circ$, 3-го — $3k^\circ$ и 4-го — $4k^\circ$. Так как сумма всех углов 360° , получим уравнение:

$$k + 2k + 3k + 4k = 360^\circ; 10k = 360^\circ; k = 36^\circ.$$

Значит, 1 угол — 36° , 2-й — 72° , 3-й — 108° , 4-й — 144° .

№ 11. Докажите, что у четырехугольника, описанного около окружности, суммы длин противоположных сторон равны.

Пусть $ABCD$ — четырехугольник, описанный около окружности.



По свойству касательной $AP = AQ$, $DP = DN$, $CN = CM$ и $BQ = BM$, получаем, что

$$AB + CD = AQ + BQ + CN + DN;$$

$$BC + AD = BM + CM + AP + DP.$$

Следовательно

$$AB + CD = BC + AD.$$

Что и требовалось доказать.

№ 12. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внутренних углов которого равен: 1) 135° ; 2) 150° ?

Угол правильного n -угольника вычисляется по формуле:

$$\alpha = \frac{180^\circ(n-2)}{n};$$

$$1) 135^\circ = \frac{180^\circ n - 360^\circ}{n}, \quad 135^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ, \quad -45^\circ n = -360^\circ, \\ n = 360^\circ : 45^\circ, \quad n = 8;$$

$$2) 150^\circ = \frac{180^\circ n - 360^\circ}{n}, \quad 150^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ, \quad -30^\circ n = -360^\circ, \\ n = 360^\circ : (-30^\circ), \quad n = 8.$$

- № 13.** Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из внешних его углов равен: 1) 36° ; 2) 24° ?

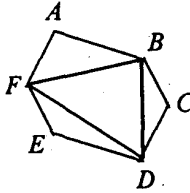
$$S_\alpha = 360^\circ, \alpha = \frac{360^\circ}{n};$$

$$1) 36^\circ = \frac{360^\circ}{n}, 36^\circ n = 360^\circ, n = 360^\circ : 36^\circ, n = 10;$$

$$2) 24^\circ = \frac{360^\circ}{n}, 24^\circ n = 360^\circ, n = 360^\circ : 24^\circ, n = 15.$$

- № 14.** Докажите, что взятые через одну вершины правильного $2n$ -угольника являются вершинами правильного n -угольника.

Пусть $ABCDEF$ — правильный $2n$ -угольник.



Рассмотрим $\triangle ABF$ и $\triangle BCD$.

$FA = BC$, $AB = CD$ (как стороны правильного многоугольника); $\angle A = \angle C$ (как углы правильного многоугольника).

Значит, $\triangle FAB = \triangle BCD$ (по 1-му признаку), т.е. $FB = BD$.

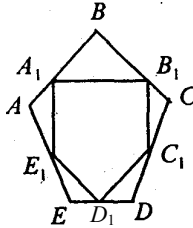
Аналогично доказывается, что все стороны n -угольника BDF равны, следовательно n -угольник — правильный.

Что и требовалось доказать.

- № 15.** Докажите, что середины сторон правильного n -угольника являются вершинами другого правильного n -угольника.

Пусть $ABCDE$ — правильный n -угольник, $AA_1 = A_1B$, $BB_1 = B_1C$ и т.д.

Рассмотрим $\triangle A_1BB_1$ и $\triangle B_1CC_1$.

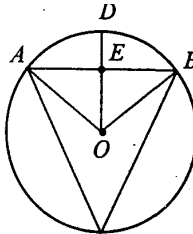


$A_1B = B_1C$, $BB_1 = CC_1$ (как половины равных сторон n -угольника); $\angle B = \angle C$ (из условия). Значит, $\triangle A_1BB_1 = \triangle B_1CC_1$, так что $A_1B_1 = B_1C_1$.

Аналогично доказывается, что все стороны полученного n -угольника равны, то есть n -угольник — правильный.

Что и требовалось доказать.

№ 17. Хорда, перпендикулярная радиусу и проходящая через его середину, равна стороне правильного вписанного треугольника. Докажите.



Нужно доказать, что:

$$AB = a_3 = R\sqrt{3},$$

где R — радиус окружности.

Рассмотрим $\triangle OEB$.

$\angle E = 90^\circ$, т.к. $OD \perp AB$ (по условию), $OB = R$, $OE = \frac{1}{2}R$ (по условию). По теореме Пифагора:

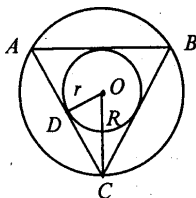
$$EB^2 = OB^2 - OE^2 = R^2 - \frac{1}{4}R^2 = \frac{3}{4}R^2, \quad EB = \sqrt{\frac{3}{4}R^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Далее $\triangle AEO = \triangle EBO$ (так как $AO = OB$ и катет OE — общий). Так что: $EA = EB = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Тогда

$$AB = AE + EB = \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

Что и требовалось доказать.

№ 18. У правильного треугольника радиус вписанной окружности в два раза меньше радиуса описанной окружности. Докажите.



Пусть в $\triangle ABC$ $AB = a$, $OC = R$ — радиус описанной окружности, $OD = r$ — радиус вписанной окружности.

Рассмотрим $\triangle DOC$.

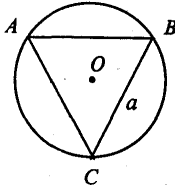
$\angle D = 90^\circ$ (AC — касательная), $\angle OCD = \frac{1}{2} \angle C = \frac{1}{2} 60^\circ = 30^\circ$ (как биссектриса равнобедренного треугольника). Тогда $\sin \angle OCD = \frac{OD}{OC}$. То есть

$$\sin 30^\circ = \frac{r}{R}, \frac{1}{2} = \frac{r}{R}, R = 2r.$$

Что и требовалось доказать.

№ 19. Сторона правильного вписанного в окружность треугольника равна a . Найдите сторону квадрата, вписанного в эту окружность.

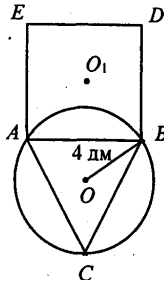
Дано: $\triangle ABC$ — правильный, вписанный в окружность $a_3 = a$. Найдём a_4 .



Так как $a_3 = R\sqrt{3}$, то $a = R\sqrt{3}$; $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Далее $a_4 = R\sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

- № 20.** В окружность, радиус которой 4 дм, вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата.



Пусть $\triangle ABC$ — правильный, вписанный в окружность, $OB = R_1 = 4$ дм, $ABDE$ — квадрат, R_2 — радиус описанной около квадрата окружности.

Тогда $a_3 = R_1\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ дм, $a_4 = a_3 = 4\sqrt{3}$ дм. Далее:
 $a_4 = R_2\sqrt{2}$, $R_2 = \frac{a_n}{\sqrt{2}}$, т.е.

$$R_2 = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6} \text{ дм.}$$

Ответ: $R_2 = 2\sqrt{6}$ дм.

- № 21.** Конец валика диаметром 4 см опилен под квадрат. Определите наибольший размер, который может иметь сторона квадрата.

Вписанный в окружность квадрат имеет большую сторону. Найдем ее.

$$R = d:2 = 4:2 = 2 \text{ см.}$$

$$a_4 = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ см.}$$

Ответ: $2\sqrt{2}$ см.

- № 22.** Конец винта газовой задвижки имеет правильную трехгранную форму. Какой наибольший размер может иметь каждая грань, если цилиндрическая часть винта имеет диаметр 2 см?

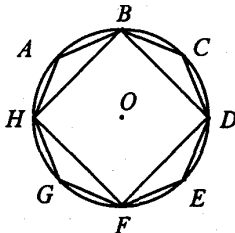
Требуется найти сторону вписанного в окружность треугольника.

$$R = d:2 = 2:2 = 1 \text{ см.}$$

$$a_3 = R\sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ см.}$$

Ответ: $\sqrt{3}$ см.

- № 23.** Докажите, что сторона правильного 8-угольника вычисляется по формуле $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, где R — радиус описанной окружности.



Пусть в окружность с радиусом R вписан правильный 8-угольник ABCDEFGH.

Тогда в $\triangle HAB$: $HB = a_4 = R\sqrt{2}$, $AH = AB = a_8$, $\angle A = 135^\circ$.
По теореме косинусов: $HB^2 = HA^2 + AB^2 - 2HA \cdot AB \cdot \cos \angle A$, т.е.

$$(R\sqrt{2})^2 = a_8^2 + a_8^2 - 2a_8^2 \cdot \cos 135^\circ,$$

т.к. $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то

$$2R^2 = 2a_8^2 + \sqrt{2} a_8^2 = a_8^2(2 + \sqrt{2}),$$

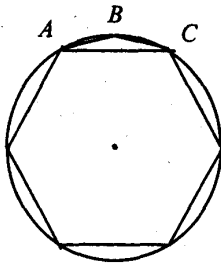
отсюда

$$a_8^2 = \frac{2R^2 \cdot (2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{2R^2 \cdot (2 - \sqrt{2})}{2} = R^2(2 - \sqrt{2}),$$

$$a_8 = \sqrt{R^2(2 - \sqrt{2})} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Что и требовалось доказать.

№ 24. Докажите, что сторона правильного 12-угольника вычисляется по формуле $a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, где R — радиус описанной окружности.



Пусть в окружность с радиусом R вписан $ABC\dots$ — правильный 12-угольник.

В $\triangle ABC$: $AC = a_6 = R$, $AB = BC = a_{12}$, $\angle B = 150^\circ$, из теоремы косинусов получаем: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle B$,

так как $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то

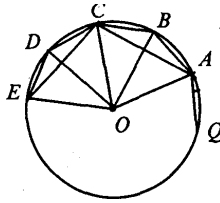
$$R^2 = a_{12}^2 + a_{12}^2 + 2a_{12}^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2a_{12}^2 + \sqrt{3}a_{12}^2 = a_{12}^2(2 + \sqrt{3})$$

$$a_{12}^2 = \frac{R^2}{2 + \sqrt{3}} = \frac{R^2 \cdot (2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{R^2(2 - \sqrt{3})}{1} = R^2(2 - \sqrt{3}),$$

т.е. $a_{12} = \sqrt{R^2(2 - \sqrt{3})} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$

Что и требовалось доказать.

№ 25*. Найдите стороны правильного пятиугольника и правильного 10-угольника, вписанных в окружность радиуса R .



Пусть ABCD... — правильный 10-угольник, ACE... — правильный 5-угольник, $AO = R$.

1) Рассмотрим $\triangle ABO$: $AB = a_{10}$; $OA = OB = R$.

$$\angle A = \angle B = \frac{1}{2} \cdot \frac{180^\circ \cdot (10 - 2)}{10} = 72^\circ,$$

тогда $\angle O = 180^\circ - \angle A - \angle B = 36^\circ$.

В задаче № 29 §11 доказано, что основание равнобедренного треугольника с такими углами равно $\frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}$, т.е.

$$a_{10} = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}.$$

2) Из $\triangle ABC$ по теореме косинусов получаем:

$$a_5^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle B,$$

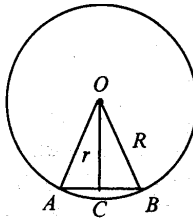
$$\begin{aligned} a_5^2 &= \frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{4} + \frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{4} - 2 \cdot \frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{4} \cos 144^\circ = \\ &= \frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{2} (1 + \cos 36^\circ), \end{aligned}$$

так как $\cos 144^\circ = -\cos 36^\circ$.

Из $\triangle ABO$ $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ (по теореме косинусов), так что подставив, получим

$$a_5 = R \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

№ 26. Сторона правильного многоугольника равна a , а радиус описанной окружности R . Найдите радиус вписанной окружности.

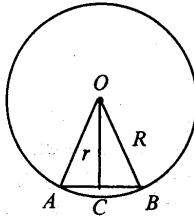


Пусть O — центр окружности, $AB = a$ — сторона правильного многоугольника, $OA = R$ — радиус описанной окружности, $OC = r$ — радиус вписанной окружности.

В $\triangle OBC$: $\angle C = 90^\circ$, $CB = \frac{a}{2}$, $OB = R$; так что по теореме Пифагора получаем:

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 - \frac{a^2}{4}, \\ r &= \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}. \end{aligned}$$

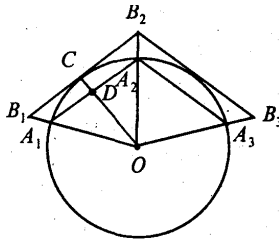
- № 27. Сторона правильного многоугольника равна a , а радиус вписанной окружности r . Найдите радиус описанной окружности.



Пользуясь решением задачи № 26, мы получили $R^2 = r^2 + \frac{a^2}{4}$, так что $R = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$.

- № 28. Выразите сторону b правильного описанного многоугольника через радиус R окружности и сторону a правильного вписанного многоугольника с тем же числом сторон.

Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — правильный n -угольник, вписанный в окружность радиуса R , а $B_1B_2\dots B_n$ — правильный n -угольник, описанный около той же окружности, $A_1A_2 = a$, $B_1B_2 = b$.



Рассмотрим $\triangle OA_1D$ и $\triangle OB_1C$: $\angle O$ — общий; $\angle D = \angle C = 90^\circ$. Значит, $\triangle OA_1D \sim \triangle OB_1C$.

Из подобия треугольников следует, что: $\frac{OD}{OC} = \frac{A_1D}{B_1C}$, то есть $B_1C = \frac{OC \cdot A_1D}{OD}$.

Далее $OC = R$, $A_1D = \frac{a}{2}$. OD найдем из $\triangle ODA_1$ по теореме Пифагора:

$$OD = \sqrt{OA_1^2 - A_1D^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2},$$

так что

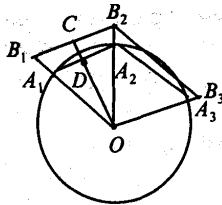
$$B_1C = \frac{R \cdot \frac{a}{2} \cdot 2}{\sqrt{4R^2 - a^2}} = \frac{Ra}{\sqrt{4R^2 - a^2}},$$

$$b = 2B_1C = \frac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

Ответ: $b = \frac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}}.$

№ 29. Выразите сторону a правильного вписанного многоугольника через радиус R окружности и сторону b правильного описанного многоугольника с тем же числом сторон.

Пусть $B_1B_2...B_n$ — правильный n -угольник, описанный около окружности радиуса R ; $B_1B_2 = b$. $A_1A_2...A_n$ — правильный n -угольник, вписанный в ту же окружность; $A_1A_2 = a$.



$\triangle OB_1C \sim \triangle OA_1D$ (по двум углам), откуда:

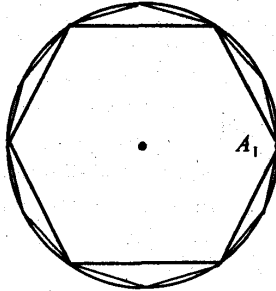
$$\frac{OD}{OC} = \frac{A_1D}{B_1C}; A_1D = \frac{OD \cdot B_1C}{OC}.$$

Так как $OC = R$, $B_1D = \frac{b}{2}$ и $OD = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}$,

то

$$A_1D = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4R^2 - a^2} \cdot \frac{b}{2}}{R}, \quad a = 2A_1D = \sqrt{\frac{4b^2 \cdot R^2}{4R^2 + b^2}} = \frac{2bR}{\sqrt{4R^2 + b^2}}.$$

№ 30. Впишите в окружность правильный 12-угольник.

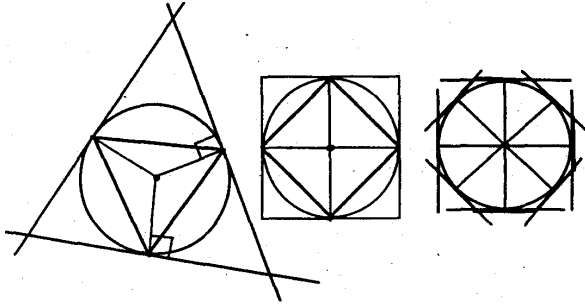


Выберем произвольную вершину A_1 на окружности. Из нее радиусом, равным радиусу окружности, делаем засечки на окружности и получаем вершины A_2, A_3, \dots, A_6 , которые соединим отрезками. Получим правильный шестиугольник. Далее построим серединные перпендикуляры к сторонам шестиугольника. Они разделят дуги окружности на 12 равных частей. Соединив эти точки отрезками с вершинами шестиугольника, получим 12-угольник.

№ 31. Опишите около окружности правильный треугольник, квадрат, правильный восьмиугольник.

Рассмотрим построение правильного треугольника.

На окружности выберем произвольную точку A_1 . Из нее проведем дугу радиуса окружности и получаем вершины A_2 и A_3 — точки пересечения дуги и окружности. Проведем через точки A_1, A_2, A_3 касательные к окружности. Точки пересечения касательных будут вершинами искомого треугольника.



Для построения четырехугольника и восьмиугольника проводим два перпендикулярных диаметра. Далее построение аналогично рассмотренному.

№ 32. Радиусы вписанной и описанной окружностей одного правильного n -угольника равны r_1 и R_1 , а радиус вписанной окружности другого правильного n -угольника равен r_2 . Чему равен радиус описанной окружности другого n -угольника?

Так как правильные n -угольники подобны, то получаем, что $\frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2}$ откуда имеем: $R_2 = \frac{R_1 r_2}{r_1}$.

№ 33. Периметры двух правильных n -угольников относятся как $a:b$. Как относятся радиусы их вписанных и описанных окружностей?

У правильных n -угольников отношения периметров равно отношению радиусов вписанных и описанных окружностей, так что отношения радиусов будут $a:b$.

№ 34. Вычислите длину окружности, если радиус равен:
1) 10 м; 2) 15 м.

Длина окружности вычисляется по формуле:

$$l = 2\pi R.$$

1) $R = 10$ м, $l = 2\pi R = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 = 62,8$ м.

2) $R = 15$ м, $l = 2\pi R = 2 \cdot 3,14 \cdot 15 = 94,2$ м.

№ 35. На сколько изменится длина окружности, если радиус изменится на 1 мм?

Допустим радиус равен R мм, следовательно $l_1 = 2\pi R$ мм, после изменения радиус станет $(R + 1)$ мм и $l_2 = 2\pi(R + 1) = 2\pi R + 2\pi = l_1 + 2\pi$. Так что длина окружности изменится на 2π или $\approx 6,28$ мм.

№ 36. Найдите отношение периметра правильного вписанного 8-угольника к диаметру и сравните его с приближенным значением π .

Сторона правильного 8-угольника равна $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (см. задачу № 23), тогда, $P_8 = 8R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, и, значит,

$$\frac{P_8}{d} = \frac{8R\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2R} = 4\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 3,06 < \pi.$$

Ответ: $\approx 3,06$.

№ 37. Решите задачу № 36 для правильного 12-угольника.

$a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (см. задачу № 24). Тогда: $P_{12} = 12R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, а значит

$$\frac{P_{12}}{d} = \frac{12R\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2R} = 6\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 3,12 < \pi.$$

Ответ: $\approx 3,12$

№ 38. Найдите радиус земного шара исходя из того, что 1 м составляет одну 40-миллионную долю длины экватора.

Пусть l — длина экватора, тогда $l = 2\pi R$ и $R = l/2\pi$. Далее, так как длина экватора 40000000 м, то:

$$R = \frac{40000000}{2\pi} \approx 6366,3 \text{ км.}$$

Ответ: $\approx 6366,3$ км.

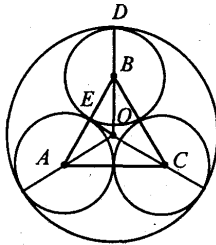
№ 39. На сколько удлинился бы земной экватор, если бы радиус земного шара увеличился на 1 см?

Из задачи № 35 имеем, что с изменением радиуса на 1 мм, длина окружности изменится на 2π мм. Значит, при увеличении радиуса земли на 1 см, длина экватора увеличится на 2π см $\approx 6,28$ см.

Ответ: $\approx 6,28$ см

№ 40. Внутри окружности радиуса R расположены n равных окружностей, которые касаются друг друга в данной окружности. Найдите радиус этих окружностей, если число их равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

1) Пусть внутри окружности радиусом R с центром в точке O расположены 3 равных окружности — окр (A ; r), окр (B ; r) и окр (C ; r).



$\triangle ABC$ — равносторонний, так как $AB = BC = AC = 2r$, $OE \perp AB$, $\angle EBO = 30^\circ$, $BE = r$.

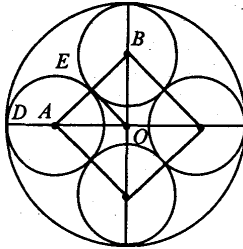
В $\triangle OBE$ имеем: $EB = OB \cdot \cos \angle EBO$, так что:

$$OB = \frac{EB}{\cos \angle EBO} = \frac{r}{\cos 30^\circ} = r : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

$$BD = r, R = BD + OB = r + \frac{2r}{\sqrt{3}} = r \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right). \text{ Тогда}$$

$$r = \frac{R}{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2}.$$

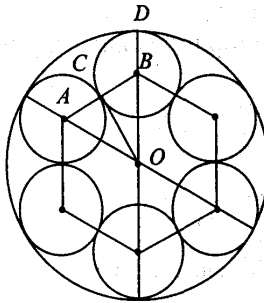
2) $OD = R$, $AD = r$, $OE \perp AB$, $AB = 2r$; $OD = DA + AO$, но $AO = r\sqrt{2}$ (как половина диагонали квадрата).



Значит, $R = r + r\sqrt{2}$, $R = r(1 + \sqrt{2})$, откуда

$$r = \frac{R}{(1 + \sqrt{2})} = \frac{R(1 - \sqrt{2})}{(1 - 2)} = R(\sqrt{2} - 1).$$

3) $OD = R$, $BD = r$, $CB = r$; $OC \perp AB$; $OB = AB = 2r$ (как радиус описанной окружности шестиугольника).



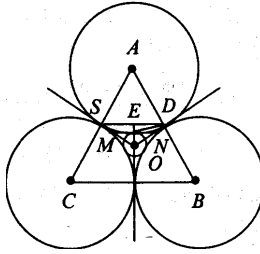
Тогда $OD = OB + BD$; $R = 3r$, откуда имеем $r = \frac{R}{3}$.

№ 41. Решите предыдущую задачу, если окружности расположены вне данной окружности.

1) Три равные окружности касаются друг друга. $OE = R$.

Проведем $SD \perp OE$ и $MN \perp OE$, тогда, $SD \parallel MN$.

Рассмотрим $\triangle OMD$ и $\triangle OEN$: $\angle M = \angle E$ (как прямые); $\angle N = \angle D$ (соответственные). Тогда, $\triangle OMD \sim \triangle OEN$.



Поэтому $\frac{OD}{ON} = \frac{MD}{EN}$, откуда имеем:

$$MD = \frac{OD \cdot EN}{ON} \quad (1).$$

В $\triangle OEN$ $\angle E = 90^\circ$, $\angle O = 60^\circ$, тогда $\angle N = 30^\circ$, значит, $OE = \frac{1}{2} ON$, т.е.: $R = \frac{1}{2} ON$, $ON = 2R$, тогда:

$$EN = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$$

В $\triangle END$, $\angle DEM$ — половина угла вписанного правильного 12-угольника, поэтому:

$$\angle DEM = \frac{1}{2} \cdot \frac{180^\circ(12-2)}{12} = \frac{1}{2} \cdot 150^\circ = 75^\circ.$$

Тогда, $\angle DEN = 15^\circ$, $\angle EDN = 15^\circ$, поэтому $\triangle END$ — равнобедренный и $EN = ND = R\sqrt{3}$, получаем, что:

$$OD = ON + ND = 2R + R\sqrt{3}.$$

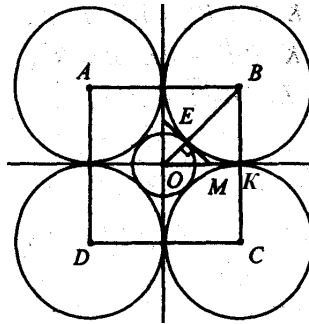
Подставим в пропорцию (1):

$$MD = \frac{(2R + R\sqrt{3}) \cdot R\sqrt{3}}{2R} = \frac{2R\sqrt{3} + 3R}{2} = \frac{R(2\sqrt{3} + 3)}{2}.$$

$\triangle ASD$ — равносторонний, так что:

$$AD = SD = 2MD = 2 \cdot \frac{R(2\sqrt{3} + 3)}{2} = R(2\sqrt{3} + 3).$$

2) Пусть четыре равные окружности, касаются друг друга, и окружность с центром в точке O и радиусом $OE = R$.



Проведем касательную EM к окр (O ; R), она пересечет OK в точке M ; $EM \perp OB$. В $\triangle OBK$ и $\triangle OEM$: $\angle K = \angle E$ (как прямые); $\angle O = \angle O$ (общий), значит, $\triangle OBK \sim \triangle OEM$. Поэтому

$$\frac{OB}{OM} = \frac{BK}{EM} \quad (1),$$

$$BK = \frac{OB \cdot EM}{OM} \quad (2).$$

В $\triangle OEM$ $\angle E = 90^\circ$, $\angle O = 45^\circ$, тогда, $\angle M = 45^\circ$ и $OE = EM = R$, значит: $OM = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$

В $\triangle OBK$ $OB = R + EB = R + BK$ (т.к. $EB = BK$).

Полученные выражения подставим в (1): $\frac{BK + R}{R\sqrt{2}} = \frac{BK}{R}$, т.е.

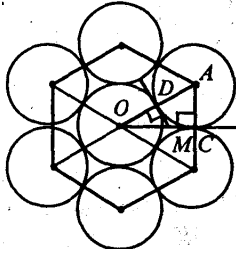
$$BK \cdot R \cdot R^2 = BK \cdot R\sqrt{2},$$

$$BK \cdot R\sqrt{2} - BK \cdot R = R^2,$$

$$BK(R\sqrt{2} - R) = R^2,$$

$$BK = \frac{R}{R(\sqrt{2} - 1)} = \frac{R(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = R(\sqrt{2} + 1).$$

3) $\triangle OAC \sim \triangle ODM$ (по двум углам).



Значит $\frac{OA}{OM} = \frac{AC}{DM}$ (1), но $OA = R + DA$, в $\triangle ODM \angle D = 90^\circ$, $\angle O = 30^\circ$, тогда, $DM = \frac{1}{2} OM$, $OM = 2DM$, по теореме Пифагора: $R^2 = 4DM^2 - DM^2$; $R^2 = 3DM^2$; $DM = \frac{R}{\sqrt{3}}$; $OM = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.
Подставим полученные значения DM и OM в (1):

$$\begin{aligned} \frac{R + DA}{\frac{2R}{\sqrt{3}}} &= \frac{DA}{\frac{R}{\sqrt{3}}} \\ \frac{R}{\sqrt{3}}(R + DA) &= \frac{2R}{\sqrt{3}} DA, \\ R(R + DA) &= 2R \cdot DA, \\ R^2 + R \cdot DA &= 2R \cdot DA, \\ 2R \cdot DA - R \cdot DA &= R^2, \\ DA(2R - R) &= R^2, \\ DA \cdot R &= R^2, \\ DA &= R. \end{aligned}$$

№ 42. Шкив имеет в диаметре 1,4 м и делает 80 оборотов в минуту. Найдите скорость точки на окружности шкива.

$d = 1,4$ м, так что $R = 1,4 : 2 = 0,7$ м; $l = 2\pi R \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 0,7 \approx 4,396$ м, но $v = lk$, где k — число оборотов в минуту, так что $v \approx 4,396 \cdot 80 \approx 351,68$ м/мин.

№ 43. Найдите длину дуги окружности радиуса 1 см, отвечающей центральному углу: 1) 30° ; 2) 45° ; 3) 120° ; 4) 270° .

Длина дуги вычисляется по формуле $l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$. В нашем случае $R = 2$ см, так что

$$l = \frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ} \text{ см.}$$

$$1) l = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 30^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \text{ см.}$$

$$2) l = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 45^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{4} \text{ см.}$$

$$3) l = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 120^\circ}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3} \text{ см.}$$

$$4) l = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 270^\circ}{180^\circ} = \frac{3\pi}{2} \text{ см.}$$

№ 44. Сколько градусов содержит центральный угол, если соответствующая ему дуга составляет: 1) $\frac{1}{23}$; 2) $\frac{1}{4}$;

3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $\frac{2}{5}$; 6) $\frac{3}{4}$ окружности?

Пусть l — длина окружности, а l_1 — длина дуги. Тогда $l = 2\pi R$, $l_1 = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$. Так что

$$\alpha = \frac{l_1 \cdot 180^\circ}{\pi R} = \frac{2l_1}{l} \cdot 180^\circ.$$

$$1) \alpha = \frac{1}{3} \cdot 360^\circ = 120^\circ;$$

$$2) \alpha = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ;$$

$$3) \alpha = \frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 72^\circ ;$$

$$4) \alpha = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ ;$$

$$5) \alpha = \frac{2}{3} \cdot 360^\circ = 240^\circ ;$$

$$6) \alpha = \frac{3}{4} \cdot 360^\circ = 270^\circ .$$

№ 45. Какой угол образуют радиусы Земли, проведенные в две точки на ее поверхности, расстояние между которыми равно 1 км? Радиус Земли равен 6370 км.

$R = 6370$ км — радиус Земли. $l = 1$ км — расстояние между двумя точками на поверхности Земли, α — угол между радиусами.

$$\text{Имеем: } l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha . \text{ Тогда:}$$

$$\alpha = \frac{l \cdot 180^\circ}{\pi R} = \frac{1 \cdot 180^\circ}{3,14 \cdot 6370} = 32'' .$$

№ 46. По радиусу $R = 1$ м найдите длину дуги, отвечающей центральному углу: 1) 45° ; 2) 30° ; 3) 120° ; 4) $45^\circ 45'$; 5) $60^\circ 30'$; 6) $150^\circ 36'$.

$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha , \text{ откуда имеем:}$$

$$1) l \approx \frac{3,14 \cdot 1 \cdot 45^\circ}{180^\circ} = 0,79 \text{ м.}$$

$$2) l \approx \frac{3,14 \cdot 1 \cdot 30^\circ}{180^\circ} = 0,52 \text{ м.}$$

$$3) l \approx \frac{3,14 \cdot 1 \cdot 120^\circ}{180^\circ} = 2,09 \text{ м.}$$

$$4) l \approx \frac{3,14 \cdot 1 \cdot 45,75^\circ}{180^\circ} = 0,8 \text{ м.}$$

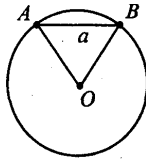
$$5) l \approx \frac{3,14 \cdot 1 \cdot 60,5^\circ}{180^\circ} = 1,06 \text{ м.}$$

$$6) l \approx \frac{3,14 \cdot 1 \cdot 150,6^\circ}{180^\circ} = 2,63 \text{ м.}$$

№ 47. По данной хорде a найдите длину ее дуги, если градусная мера дуги равна: 1) 60° ; 2) 90° ; 3) 120° .

Пусть дана окружность с центром O ; хорда $AB = a$, а градусная мера дуги равна 60° , 90° , 120° .

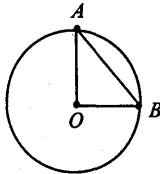
1. $\alpha = 60^\circ$. Рассмотрим $\triangle OAB$.



$AO = OB$ (как радиусы окружности), и $\angle AOB = \alpha = 60^\circ$. Тогда $\angle A = \angle B = (180^\circ - 60^\circ):2 = 60^\circ$, значит $\triangle AOB$ — равнобедренный и: $R = AO = a$. Далее:

$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot a \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi a}{3}.$$

2. $\alpha = 90^\circ$. $\triangle AOB$ — прямоугольный, равнобедренный.

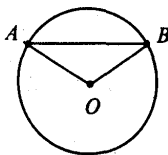


По теореме Пифагора получим: $a^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$, откуда:

$$R^2 = \frac{a^2}{2}, \quad R = \frac{a}{\sqrt{2}}. \text{ Далее получаем:}$$

$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}.$$

3) $\alpha = 120^\circ$. В $\triangle AOB$ $\angle AOB = \alpha = 120^\circ$, по теореме косинусов получим: $AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos \angle AOB$.

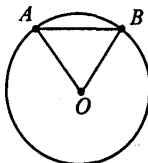


Так что $a^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 3R^2$, $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Далее

$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot a \cdot 120^\circ}{180^\circ} = \frac{2\pi a}{3\sqrt{3}}.$$

№ 48. По данной длине дуги l найдите ее хорду, если дуга содержит: 1) 60° ; 2) 90° ; 3) 120° .

1) $\alpha = 60^\circ$.

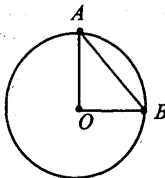


$l = \frac{\pi \cdot R \cdot 60^\circ}{180^\circ}$, откуда имеем: $R = \frac{3l}{\pi}$. Так как $\triangle ABO$ — рав-

носторонний, то

$$AB = R = \frac{3l}{\pi}.$$

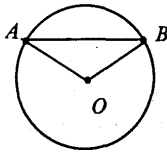
2) $\alpha = 90^\circ$.



$l = \frac{\pi \cdot R \cdot 90^\circ}{180^\circ}$, $R = \frac{3l}{\pi}$. Далее, $\triangle AOB$ — прямоугольный, так что по теореме Пифагора: $AO^2 + OB^2 = AB^2$, $R^2 + R^2 = AB^2$.

$$AB = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2} = \frac{2l}{\pi}\sqrt{2}.$$

3) $\alpha = 120^\circ$.



$l = \frac{\pi \cdot R \cdot 120^\circ}{180^\circ}$, т.е. $R = \frac{3l}{\pi}$. В $\triangle AOB$ по теореме косинусов: $AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos \alpha = AB^2$. $R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 120^\circ = AB^2$, $3R^2 = AB^2$.

$$AB = R\sqrt{3} = \frac{3l\sqrt{3}}{2\pi}.$$

№ 49. Найдите радианную меру углов: 1) 30° ; 2) 45° ; 3) 60° .

1) $30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$;

2) $45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$;

3) $60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$.

№ 50. Найдите радианную меру углов треугольника ABC, если $\angle A = 60^\circ$; $\angle B = 45^\circ$.

Так как $\angle A = 60^\circ$, то:

$$\angle A = 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}.$$

Так как $\angle B = 45^\circ$, то:

$$\angle B = 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}.$$

$\angle C = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$; так что:

$$\angle C = 75^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{12}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{12}$.

№ 51. Найдите градусную меру угла, если его радианная мера равна: 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{8}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $\frac{7\pi}{18}$; 6) $\frac{4\pi}{3}$.

1) $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 90^\circ$;

2) $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 45^\circ$;

3) $\frac{\pi}{8} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 22,5^\circ$;

4) $\frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$;

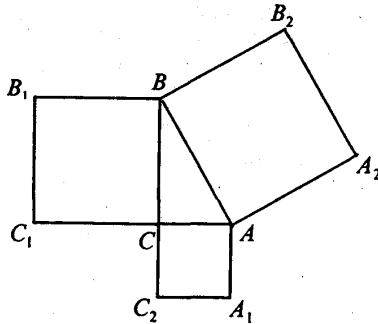
5) $\frac{7\pi}{18} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 70^\circ$;

6) $\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 240^\circ$.

§ 14. ПЛОЩАДИ ФИГУР

№ 1. Докажите, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.

Пусть катет $AC = b$, $BC = a$, гипотенуза $AB = c$; следовательно: $S_{AA_1C_1C} = b^2$, $S_{BB_1C_1C} = a^2$, $S_{ABB_2A_2} = c^2$.



Из теоремы Пифагора имеем: $a^2 + b^2 = c^2$, то есть

$$S_{AA_1C_1C} + S_{BB_1C_1C} = S_{ABB_2A_2}.$$

Что и требовалось доказать.

№ 2. Стороны двух участков земли квадратной формы равны 100 м и 150 м. Найдите сторону квадратного участка, равновеликого им.

$$a_1 = 100 \text{ м}, a_2 = 150 \text{ м}. S_1 + S_2 = S_3.$$

$$S_1 = a_1^2 = 100 \cdot 100 = 10000 \text{ м}^2.$$

$$S_2 = a_2^2 = 150 \cdot 150 = 22500 \text{ м}^2.$$

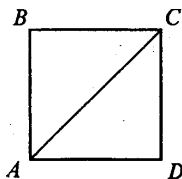
$$S_3 = S_1 + S_2 = 10000 + 22500 = 32500 \text{ м}^2.$$

Но $S_3 = a_3^2$, откуда имеем

$$a_3 = \sqrt{S_3} = \sqrt{32500} = 50\sqrt{13} \text{ м} \approx 180 \text{ м.}$$

Ответ: $a_3 \approx 180$ м.

№ 3. Найдите площадь квадрата S по его диагонали a .



ABCD — квадрат, $AC = a$. В $\triangle ABC$ $\angle B = 90^\circ$, по теореме Пифагора: $AB^2 + BC^2 = AC^2$, т.к. $AB = BC$, то: $2AB^2 = AC^2$, то есть

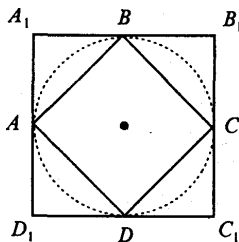
$$2AB^2 = a^2, AB^2 = \frac{a^2}{2},$$

следовательно:

$$S = AB^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Ответ: $S = \frac{a^2}{2}$.

№ 4. Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в ту же окружность?



Пусть $ABCD$ — квадрат, вписанный в окружность;
 $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат, описанный около окружности.

Рассмотрим $\triangle AA_1B$, $\angle A_1 = 90^\circ$, по теореме Пифагора:
 $AB^2 = AA_1^2 + A_1B_1^2$, то есть

$$AB^2 = \left(\frac{1}{2} A_1B_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} A_1B_1\right)^2 = \frac{1}{2} A_1B_1^2,$$

так как: $AB^2 = S_{ABCD}$, $A_1B_1^2 = S_{A_1B_1C_1D_1}$, то:

$$S_{A_1B_1C_1D_1} : S_{ABCD} = \frac{AB_1^2}{AB^2} = 2.$$

№ 5. Как изменится площадь квадрата, если каждую его сторону увеличить в 3 раза?

Сторона квадрата равна a , его площадь равна a^2 . Если сторону увеличить в 3 раза, то она станет — $3a$, а площадь — $9a^2$.

Далее: $\frac{9a^2}{a^2} = 9$.

Ответ: Площадь увеличится в 9 раз.

№ 6. Во сколько раз надо уменьшить стороны квадрата, чтобы его площадь уменьшилась в 25 раз?

Пусть a^2 — площадь квадрата, уменьшенного в 25 раз, тогда $25a^2$ — площадь квадрата, следовательно, сторона квадрата $5a$, где a — сторона уменьшенного квадрата. Значит, сторону квадрата следует уменьшить в 5 раз.

№ 7. Чему равны стороны прямоугольника, если они относятся как 4:9, а его площадь 144 м^2 ?

Пусть одна сторона прямоугольника будет $4x$ м, тогда другая — $9x$ м, площадь $4x \cdot 9x = 36x^2 \text{ м}^2$, что по условию задачи равно 144 м^2 .

$$36x^2 = 144, x^2 = 4, x = 2.$$

Тогда $4x = 8$ м и $9x = 18$ м. Значит, 1-я сторона — 8 м, 2-я сторона — 18 м.

№ 8. Чему равны стороны прямоугольника, если его периметр 74 дм, а площадь 3 м²?

Пусть одну сторону прямоугольника x дм; а другая y дм, тогда периметр будет $(x + y) \cdot 2$, что равно 74 дм, а площадь xy дм² по условию равна 300 дм².

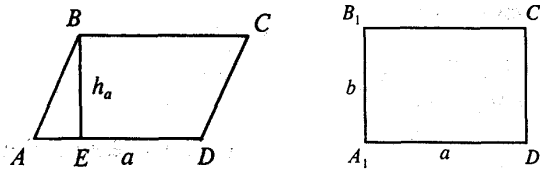
$$\begin{cases} (x + y) \cdot 2 = 74 \\ xy = 300 \end{cases} \begin{cases} x + y = 37 \\ xy = 300 \end{cases} \begin{cases} x = 37 - y \\ (37 - y)y = 300 \end{cases}$$

$$-y^2 + 37y - 300 = 0, y^2 - 37y + 300 = 0,$$

т.е. $y_1 = 12$ дм, а $y_2 = 25$ дм. Тогда $x_1 = 25$ дм, а $x_2 = 12$ дм.

Ответ. Одна сторона — 12 дм, другая — 25 дм.

№ 9. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если площадь его равна половине площади прямоугольника.



Пусть $ABCD$ — параллелограмм с острым углом A .

$A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник. Тогда $AD = A_1D_1 = a$, $AB = A_1B_1 = b$.

1) $S_{A_1B_1C_1D_1} = ab$, $S_{ABCD} = ah = \frac{1}{2} S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2} ab$. Тогда $h = \frac{b}{2}$.

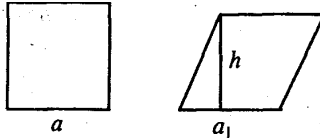
2) В $\triangle ABE$ $\angle E = 90^\circ$, так что $\sin \angle A = \frac{h}{b} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$, значит,

$\angle A = 30^\circ$.

Ответ: 30° .

№ 10. Квадрат и ромб имеют одинаковые периметры. Какая из фигур имеет большую площадь? Объясните ответ.

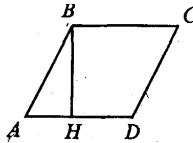
Пусть $P_{\text{кв}} = P_{\text{ромба}}$. Но $P_{\text{кв}} = 4a$, а $P_{\text{ромба}} = 4a$.



Тогда $a = a_1$. $S_{\text{кв}} = a \cdot a$. $S_{\text{ромба}} = a_1 \cdot h$, но $h < a$, так как катет меньше гипотенузы, а значит и $a \cdot a_1 > a_1 \cdot h$, так что $S_{\text{кв}} > S_{\text{ромба}}$.

№ 11. Найдите площадь ромба, если его высота 10 см, а острый угол 30° .

Пусть ABCD — ромб, BH = 10 см — высота, $\angle A = 30^\circ$.



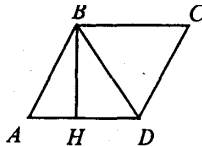
В $\triangle ABH$ $\angle H = 90^\circ$, так что $BH = AB \cdot \sin \alpha$, откуда

$$AB = \frac{BH}{\sin \alpha} = \frac{10}{\sin 30^\circ} = 20 \text{ см.}$$

Далее $S_{\text{ромба}} = AD \cdot BH = AB \cdot BH = 20 \cdot 10 = 200 \text{ см}^2$.
Ответ: 200 см^2 .

№ 12. Найдите площадь ромба, если его высота 12 см, а меньшая диагональ 13 см.

Пусть ABCD — ромб, BD=13 см (меньшая диагональ), BH=12 см — высота.



В $\triangle BDH$ $\angle H = 90^\circ$, $BD = 13$ см, $BH = 12$ см, по теореме Пифагора: $HD = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$ см.

В $\triangle ABH$ $\angle H = 90^\circ$, $BH = 12$ см, $AH = AD - HD = (AB - 5)$ см, по теореме Пифагора имеем: $AB^2 = AH^2 + BH^2$, то есть

$$AB^2 = (AB - 5)^2 + 12^2 = AB^2 - 10AB + 25 + 144,$$

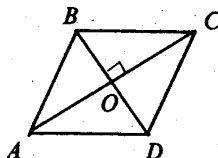
$10AB = 169$, $AB = 16,9$. Так что $AD = AB = 16,9$ см. Далее:

$$S_{ABCD} = AD \cdot BH = 16,9 \cdot 12 = 202,8 \text{ см}^2.$$

Ответ: $S_{ABCD} = 202,8 \text{ см}^2$.

№ 13. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения диагоналей.

Пусть $ABCD$ — ромб, AC и BD — диагонали.



Имеем:

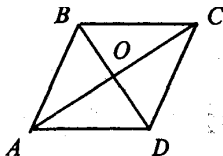
$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot BO + \frac{1}{2} AC \cdot DO = \\ &= \frac{1}{2} AC(BO + DO) = \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{AC \cdot BD}{2}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

№ 14. Найдите, стороны ромба, зная, что его диагонали относятся как 1:2, а площадь ромба равна 12 см^2 .

Пусть $ABCD$ — ромб, AC и BD — диагонали, $\frac{BD}{AC} = \frac{1}{2}$,

$S_{ABCD} = 12 \text{ см}^2$.



$S_{ABSD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 12 \text{ см}^2$. Пусть $BD = x \text{ см}$, тогда $AC = 2x \text{ см}$,
значит:

$$\frac{1}{2} x \cdot 2x = 12, x^2 = 12,$$
$$x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

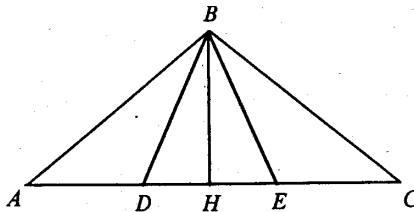
Значит: $BD = 2\sqrt{3} \text{ см}$, $AC = 4\sqrt{3} \text{ см}$.

Рассмотрим $\triangle AOB$, $\angle O = 90^\circ$, катет $AO = \frac{1}{2} AC = 2\sqrt{3} \text{ см}$,
катет $BO = \frac{1}{2} BD = \sqrt{3} \text{ см}$. Тогда по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{12 + 3} = \sqrt{15} \text{ см}.$$

Ответ: $\sqrt{15} \text{ см}$.

№ 15. Разделите данный треугольник на три равновеликие части прямыми, проходящими через одну вершину.



Разделим AC на $AD = DE = EC$. Тогда

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BH,$$

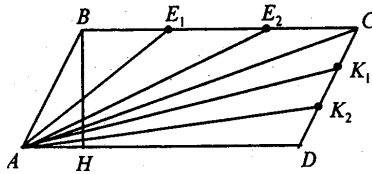
$$S_{DBE} = \frac{1}{2} DE \cdot BH,$$

$$S_{EBC} = \frac{1}{2} EC \cdot BH.$$

Так что $S_{ABD} = S_{DBE} = S_{EBC}$.

№ 16*. Решите предыдущую задачу, взяв вместо треугольника параллелограмм.

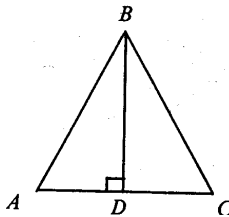
Проведем диагональ AC , $\triangle ABC = \triangle ACD$ (по трем сторонам), тогда: $S_{ABC} = S_{ACD}$



Разделим каждый из треугольников ABC и ACD на 3 равновеликие части, т.к. сами треугольники равны, то их части будут равновелики. Так что получится шесть равновеликих треугольников, но тогда $S_{ABE_2} = S_{AE_2CK_1} = S_{AK_1D}$. Так как эти фигуры содержат по 2 треугольника.

№ 17. Чему равна площадь равнобедренного треугольника, если его основание 120 м, а боковая сторона 100 м?

$\triangle ABC$ — равнобедренный, $AB = BC = 100$ м, $AC = 120$ м.



Проведем $BD \perp AC$, по свойству равнобедренного треугольника BD — медиана и высота. Тогда $AD = \frac{1}{2} AC = 60$ м.

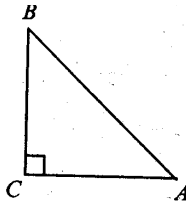
В $\triangle ABD$, $\angle D = 90^\circ$, $AB = 100$ м, $AD = 60$ м, по теореме Пифагора: $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{10000 - 3600} = \sqrt{6400} = 80$ м.
Далее

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 80 = 4800 \text{ м}^2.$$

Ответ: 4800 м^2 .

№ 18. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой a .

Рассмотрим $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $BC = AC$, $AB = a$ — гипотенуза.



По теореме Пифагора имеем: $AC^2 + BC^2 = AB^2$,

$$2BC^2 = a^2,$$

$$BC^2 = \frac{a^2}{2},$$

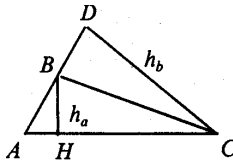
$$BC = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Тогда $AC = BC = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Далее:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{4}.$$

Ответ: $\frac{a^2}{4}$.

№ 19. У треугольника со сторонами 8 см и 4 см проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к стороне 8 см, равна 3 см. Чему равна высота, проведенная к стороне 4 см?



Пусть в $\triangle ABC$, $AC = 8$ см, $AB = 4$ см, $BH = h_a = 3$ см.
Тогда, с одной стороны:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12 \text{ см}^2.$$

С другой стороны,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_b,$$

получаем, что

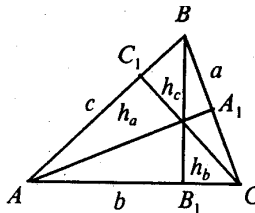
$$h_b = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \frac{24}{4} = 6 \text{ см.}$$

Ответ: 6 см.

№ 20. Докажите, что стороны треугольника обратно пропорциональны его высотам, т.е.:

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

Пусть в $\triangle ABC$, $BC = a$, $AA_1 = h_a$, $AC = b$, $BB_1 = h_b$, $AB = c$, $CC_1 = h_c$.



Тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c,$$

поэтому:

$$a = \frac{2S}{h_a}; \quad b = \frac{2S}{h_b}; \quad c = \frac{2S}{h_c}.$$

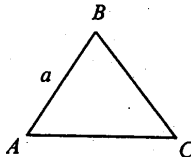
Из полученных равенств получаем

$$a : b : c = \frac{2S}{h_a} : \frac{2S}{h_b} : \frac{2S}{h_c} = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

Что и требовалось доказать.

№ 21. Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной a .

Пусть $\triangle ABC$ — равносторонний, $AB = a$.



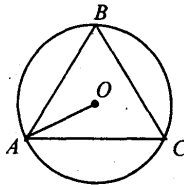
Тогда $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$, следовательно:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} a^2}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3} a^2}{4}$.

№ 22. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в круг радиуса R .

Пусть $\triangle ABC$ — правильный, вписанный в окружность; $AO = R$.

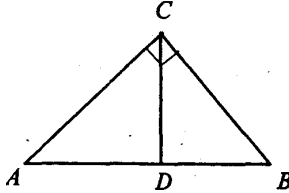


Тогда $a_3 = R\sqrt{3}$. То есть $AB = BC = AC = R\sqrt{3}$. Но тогда

$$S_{ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} \text{ (по предыдущей задаче) и } S_{ABC} = \frac{3R^2 \sqrt{3}}{4}.$$

- № 23.** Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его высота делит гипотенузу на отрезки 32 см и 18 см.

Пусть в треугольнике ABC , $\angle C = 90^\circ$, CD — высота, $AD = 32$ см, $DB = 18$ см. Найдите $S_{\triangle ABC}$.



$\triangle ACD \sim \triangle CBD$, поэтому:

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{32 \cdot 18} = \sqrt{16 \cdot 36} = 24 \text{ см.}$$

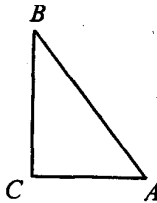
$$AB = AD + DB = 32 + 18 = 50 \text{ см.}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = 25 \cdot 24 = 600 \text{ см}^2.$$

Ответ: 600 см^2 .

- № 24.** Чему равны катеты прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 73 см, а площадь равна 1320 см^2 ?

Пусть в $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $AB = 73$ см, $S = 1320 \text{ см}^2$.



Допустим, $AC = x$ см, а $BC = y$ см, тогда по теореме Пифагора имеем: $x^2 + y^2 = 73^2$, а по формуле площади $\frac{xy}{2} = 1320$.

Так что:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5329 \\ \frac{xy}{2} = 1320 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5329 & (1) \\ 2xy = 5280 & (2) \end{cases}$$

Сложим и вычтем (2) из (1), получим

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 10609 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 49 \end{cases}$$

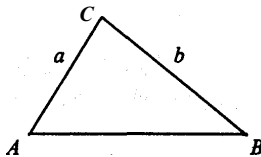
$$\begin{cases} (x+y)^2 = 10609 \\ (x-y)^2 = 49 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = 103 \\ x-y = 7 \end{cases}$$

Откуда $x = 55$, тогда $y = x - 7 = 48$. То есть $AC = 55$ см, $BC = 48$ см.

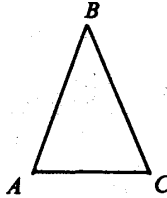
Ответ: 55 см, 48 см.

№ 25. У треугольника ABC $AC = a$, $BC = b$. При каком угле C площадь треугольника будет наибольшей?



Так как $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \angle C = \frac{1}{2} ab \sin \angle C$, то площадь будет наибольшей при наибольшем значении $\sin \angle C$. А $\sin \angle C$ — наибольший у $\angle C = 90^\circ$; $\sin 90^\circ = 1$. Значит, при $\angle C = 90^\circ$ S будет наибольшей и равной $\frac{1}{2} ab$.

- № 26.** Найдите площадь равнобедренного треугольника, у которого боковые стороны равны 1 м, а угол между ними равен 70° .



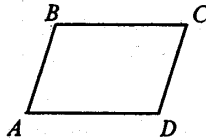
Пусть $\triangle ABC$ — равнобедренный, $AB = BC = 1$ м; $\angle B = 70^\circ$. Тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{2} \cdot 0,94 = 0,47 \text{ м}^2.$$

Ответ: $0,47 \text{ м}^2$.

- № 27.** Найдите площадь параллелограмма, если его стороны 2 м и 3 м, а один из углов равен 70° .

Пусть $ABCD$ — параллелограмм, $AD = 3$ м, $AB = 2$ м, $\angle A = 70^\circ$.

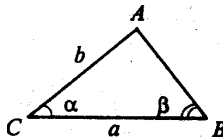


$$\text{Тогда } S_{ABCD} = AD \cdot AB \cdot \sin \angle A = 3 \cdot 2 \cdot \sin 70^\circ = 6 \cdot 0,94 = 5,64 \text{ м}^2.$$

Ответ: $5,64 \text{ м}^2$.

- № 28*.** Найдите площадь треугольника по стороне a и прилежащим к ней углам α и β .

Пусть $\triangle ABC$, $BC = a$, $\angle C = \alpha$, $\angle B = \beta$.



По теореме синусов имеем $\frac{BC}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle B}$, то есть

$$\frac{a}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))} = \frac{b}{\sin \beta}, \quad \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{b}{\sin \beta}.$$

откуда имеем: $b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$. Далее

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin \alpha = \frac{a \cdot a \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} = \frac{a^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}.$$

№ 29. Выведите формулу Герона для площади треугольника: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c — длины сторон треугольника, p — полупериметр.

Задача решена в п. 125 учебника, стр. 186.

№ 30. Найдите площадь треугольника по трем сторонам:

1) 13, 14, 15; 2) 5, 5, 6; 3) 17, 65, 80; 4) $\frac{25}{6}, \frac{29}{6}, 6$;

5) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$; 6) $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1,83.

1) $a = 13, b = 14, c = 15$.

$$p = \frac{a+b+c}{2}, \quad p = \frac{13+14+15}{2} = 21.$$

По формуле Герона получаем:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-13)(21-14)(21-15)} = \\ &= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} = 7 \cdot 3 \cdot 2 = 42 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

2) $a = 5, b = 5, c = 6$.

$$p = \frac{a+b+c}{2}, \quad p = \frac{5+5+6}{2} = 8.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8 \cdot (8-5)(8-5)(8-6)} = \\ = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = 4 \cdot 3 = 12 \text{ см}^2.$$

$$3) a = 17, b = 65, c = 80.$$

$$p = \frac{17 + 65 + 80}{2} = \frac{162}{2} = 81.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{81 \cdot 64 \cdot 16 \cdot 1} = 9 \cdot 8 \cdot 4 = 288 \text{ см}^2.$$

$$4) a = \frac{25}{6}, b = \frac{29}{6}, c = 6.$$

$$p = \frac{\frac{25}{6} + \frac{29}{6} + 6}{2} = \frac{15}{2}.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{15}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 10 \text{ см}^2.$$

$$5) a = 13, b = 37 \frac{12}{13}, c = 47 \frac{1}{13}.$$

$$p = \frac{13 + 37 \frac{12}{13} + 47 \frac{1}{13}}{2} = \frac{98}{2} = 49.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{49 \cdot 36 \cdot 11 \frac{1}{13} \cdot 1 \frac{12}{13}} = \\ = 7 \cdot 6 \cdot \frac{12}{13} \cdot 5 = \frac{2520}{13} = 193 \frac{11}{13}.$$

$$6) a = 2\frac{1}{12}, b = 3\frac{44}{75}, c = 1,83.$$

$$p = \frac{2\frac{1}{12} + 3\frac{44}{75} + 1,83}{2} = \frac{2\frac{25}{300} + 3\frac{176}{300} + 1\frac{249}{300}}{2} = 7\frac{150}{300} : 2 = \frac{15}{4}.$$

По формуле Герона получаем:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= \sqrt{\frac{15}{4} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{49}{300} \cdot \frac{192}{100}} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 24}{2 \cdot 3 \cdot 100} = \frac{7}{5} = 1,4. \end{aligned}$$

№ 31. Стороны треугольника a , b , c . Найдите высоту треугольника, опущенную на сторону c .

Пусть h_c — высота. Тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} c \cdot h_c.$$

С другой стороны по формуле Герона

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где: $p = \frac{a+b+c}{2}$. Так что

$$h_c = \frac{2S_{\triangle ABC}}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

№ 32. Боковые стороны треугольника 30 см и 25 см. Найдите высоту треугольника, опущенную на основание, равное: 1) 25 см; 2) 11 см.

Пусть a , b , c — стороны треугольника.

1) $a = 30$ см, $b = 25$ см, $c = 25$ см. Тогда

$$p = \frac{30+25+25}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ см};$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{40 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 15} = 20 \cdot 15 = 300 \text{ см}^2.$$

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 300}{25} = 24 \text{ см.}$$

2) $a = 30$ см, $b = 25$ см, $c = 11$ см. Тогда

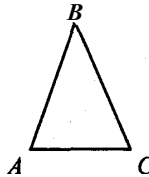
$$p = \frac{30 + 25 + 11}{2} = \frac{66}{2} = 33 \text{ см;}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{33 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 22} = 11 \cdot 3 \cdot 4 = 132 \text{ см}^2.$$

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{132 \cdot 2}{11} = 24 \text{ см.}$$

№ 33. Периметр равнобедренного треугольника равен 64 см, а его боковая сторона на 11 см больше основания. Найдите высоту треугольника, опущенную на боковую сторону.

Треугольник ABC — равнобедренный, AC — основание, $AB = AC + 11$ см; $P = 64$ см. h_{AB} — высота, опущенная на AB.



Пусть $AC = x$ см, тогда $AB = BC = (11 + x)$ см, а периметр равен $x + 2(x + 11)$, так что

$$\begin{aligned} x + 2(x + 11) &= 64, \\ 3x &= 64 - 22, \\ x &= 14. \end{aligned}$$

Значит: $AC = 14$ см, $AB = BC = 14 + 11 = 25$ см. Далее:

$$p = \frac{14 + 25 + 25}{2} = \frac{64}{2} = 32 \text{ см.}$$

$$S = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \sqrt{32 \cdot 18 \cdot 7 \cdot 7} = 7 \cdot 3 \cdot 8 = 168 \text{ см}^2.$$

$$\text{Тогда } h_{AB} = \frac{2S}{AB} = \frac{168 \cdot 2}{25} = 13,44 \text{ см.}$$

Ответ: 13,44 см.

№ 34. Найдите высоты треугольника, у которого стороны равны 13 см, 14 см и 15 см.

Пусть a, b, c — стороны треугольника; $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см.

$$p = \frac{a+b+c}{2}, \text{ тогда}$$

$$p = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21 \text{ см,}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84 \text{ см}^2.$$

Далее

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{84 \cdot 2}{13} = \frac{168}{13} = 12 \frac{12}{13} \text{ см;}$$

$$h_b = \frac{2S}{b} = \frac{84 \cdot 2}{14} = 12 \text{ см;}$$

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{84 \cdot 2}{15} = \frac{56}{5} = 11 \frac{1}{5} \text{ см.}$$

Ответ: $12 \frac{12}{13}$ см, 12 см и $11 \frac{1}{5}$ см.

№ 35. Найдите высоту треугольника со сторонами $2 \frac{1}{12}$, $3 \frac{44}{75}$, 1,83, проведенную к стороне $2 \frac{1}{12}$.

Пусть a, b, c — стороны треугольника; $a = 2 \frac{1}{12}$, $b = 3 \frac{44}{75}$, $c = 1,83$.

Из задачи № 30 (6) $S = 1,4 \text{ см}^2$, тогда:

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{1,4 \cdot 2}{2 \frac{1}{12}} = \frac{2,8 \cdot 12}{25} = 1,344 \text{ см.}$$

Ответ: 1,344 см.

№ 36. Найдите наименьшую высоту треугольника со сторонами: 1) 5, 5, 6; 2) 17, 65, 80 и наибольшую высоту треугольника со сторонами: 3) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 4) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$.

Из задачи № 20 следует, что наименьшая — высота, опущенная к наибольшей стороне, а наибольшая — высота, опущенная к наименьшей стороне.

Наименьшая высота h_c .

1) $a = 5$, $b = 5$, $c = 6$.

Из задачи № 30 (2) $S = 12 \text{ см}^2$; тогда

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{12 \cdot 2}{6} = 4 \text{ см.}$$

2) $a = 17$, $b = 65$, $c = 80$.

Из задачи № 30 (3) $S = 288 \text{ см}^2$; тогда

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{288 \cdot 2}{80} = 7,2 \text{ см.}$$

Наибольшая высота h_a .

3) $a = \frac{25}{6}$, $b = \frac{29}{6}$, $c = 6$.

Из задачи № 30 (4) $S = 10 \text{ см}^2$; тогда

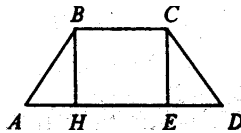
$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{10 \cdot 2}{\frac{25}{6}} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 6}{25} = \frac{24}{5} = 4,8 \text{ см.}$$

$$4) a = 13, b = 37\frac{12}{13}, c = 47\frac{1}{13}.$$

Из задачи № 30 (5) $S = \frac{2520}{13}$ см²; тогда

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot \frac{2520}{13}}{13} = \frac{5040}{169} = 29\frac{139}{169} \text{ см.}$$

№ 37. Найдите площадь трапеции, у которой параллельные стороны 60 см и 20 см, а непараллельные — 13 см и 37 см.



Пусть ABCD — трапеция, AD и BC — основания; AD = 60 см; BC = 20 см; AB = 13 см; CD = 37 см.

$$S_{ABCD} = \frac{AB + BC}{2} \cdot BH.$$

Пусть AH = x см, HE = BC = 20 см, тогда ED = AD – AH – HE = 60 – 20 – x = (40 – x) см.

В $\triangle ABH$ $\angle H = 90^\circ$, по теореме Пифагора имеем:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 169 - x^2.$$

В $\triangle CDE$ $\angle E = 90^\circ$, по теореме Пифагора:

$$\begin{aligned} CE^2 &= CD^2 - DE^2 = 1369 - (40 - x)^2 = \\ &= 1369 - 1600 + 80x - x^2 = 80x - x^2 - 231. \end{aligned}$$

Но $BH^2 = CE^2$, так что

$$169 - x^2 = 80x - x^2 - 231, -80x = -231 - 169, -80x = -400, x = 5.$$

Значит, AH = 5 см, тогда

$$BH^2 = 169 - 25, BH = \sqrt{144}, BH = 12 \text{ см.}$$

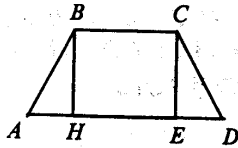
Следовательно

$$S_{ABCD} = \frac{60+20}{2} \cdot 12 = 40 \cdot 12 = 480 \text{ см}^2.$$

Ответ: 480 см^2 .

№ 38. В равнобокой трапеции основания равны 10 см и 24 см, боковая сторона 25 см. Найдите площадь трапеции.

Пусть $ABCD$ — трапеция, $AB = CD = 25$ см, $AD = 24$ см, $BC = 10$ см.



$\triangle ABH = \triangle CED$ ($\angle H = \angle E = 90^\circ$, $AB = CD$, $BH = CE$). Тогда

$$AH = ED = (AD - BC):2 = (24 - 10):2 = 7 \text{ см.}$$

Тогда по теореме Пифагора:

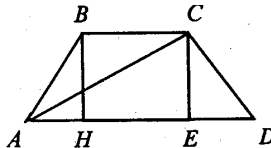
$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24 \text{ см.}$$

Следовательно

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{24 + 10}{2} \cdot 24 = 17 \cdot 24 = 408 \text{ см}^2.$$

Ответ: 408 см^2 .

№ 39. В равнобокой трапеции большее основание равно 44 м, боковая сторона 17 м и диагональ 39 м. Найдите площадь трапеции.



Пусть $ABCD$ — трапеция, $AB = CD = 17$ м, $AC = 39$ м, $AD = 44$ м.

В $\triangle ACE$ $\angle E = 90^\circ$, $AC = 39$ м, $AE = 44 - ED$. По теореме Пифагора:

$$\begin{aligned} CE^2 &= AC^2 - AE^2 = 39^2 - (44 - ED)^2 = \\ &= 1521 - 1936 + 88ED - ED^2 = -415 + 88ED - ED^2, \end{aligned}$$

то есть $CE^2 + ED^2 = 88ED - 415$.

В $\triangle CDE$ $\angle E = 90^\circ$, $CD = 17$ м. По теореме Пифагора имеем:

$$ED^2 + CE^2 = CD^2 = 17^2 = 289.$$

Получаем, что:

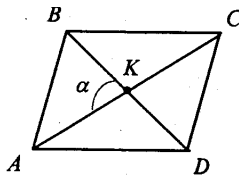
$$88ED - 415 = 289, 88ED = 704, ED = 8 \text{ м},$$

следовательно, $AE = ED = 8$ м; $BC = 44 - 8 \cdot 2 = 28$ м; $CE^2 = 289 - 64 = 225$, $CE = 15$ м. Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CE = \frac{44 + 28}{2} \cdot 15 = 36 \cdot 15 = 540 \text{ м}^2.$$

Ответ: 540 м^2 .

№ 41*. Докажите, что среди всех параллелограммов с данными диагоналями наибольшую площадь имеет ромб.



Пусть $ABCD$ — параллелограмм, AC и BD — диагонали, $\angle AKB = \alpha$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \alpha.$$

S_{ABCD} будет наибольшей, когда $\sin \alpha = 1$, то есть $\alpha = 90^\circ$, следовательно, диагонали данного параллелограмма перес-

каются под прямым углом, а такой параллелограмм является ромбом. Что и требовалось доказать.

№ 42. Выведите следующие формулы для радиусов описанной (R) и вписанной (r) окружностей треугольника: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{2s}{a+b+c}$, где a, b, c — стороны треугольника, а S — его площадь.

Задача решена в п. 127 учебника, стр. 187.

№ 43. Найдите радиусы описанной (R) и вписанной (r) окружностей для треугольника со сторонами: 1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7.

1) $a = 13, b = 14, c = 15$.

Полупериметр треугольника:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84.$$

Следовательно

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = 8 \frac{1}{8},$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{84 \cdot 2}{42} = 4.$$

2) $a = 15, b = 13, c = 4$.

Полупериметр треугольника:

$$p = \frac{15+13+4}{2} = \frac{32}{2} = 16.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{16 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 12} = 24.$$

Следовательно

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{15 \cdot 13 \cdot 4}{4 \cdot 24} = \frac{65}{8} = 8 \frac{1}{8},$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 24}{32} = 1,5.$$

3) $a = 35, b = 29, c = 8.$

Полупериметр треугольника:

$$p = \frac{35+29+8}{2} = \frac{72}{2} = 36.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{36 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 28} = 84.$$

Следовательно

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{35 \cdot 29 \cdot 8}{4 \cdot 84} = 24 \frac{1}{6},$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 84}{72} = 2 \frac{1}{3}.$$

4) $a = 4, b = 5, c = 7.$

Полупериметр треугольника:

$$p = \frac{4+5+7}{2} = 8.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1} = 4\sqrt{6}.$$

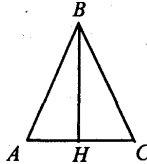
Следовательно

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 4\sqrt{6}} = \frac{35}{4\sqrt{6}},$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 4\sqrt{6}}{16} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

№ 44. Боковая сторона равнобедренного треугольника 6 см, высота, проведенная к основанию, 4 см. Найдите радиус описанной окружности.

Пусть ABC — равнобедренный треугольник, $AB = BC = 6$ см, $BH = 4$ см — высота, проведенная к основанию.



Тогда в $\triangle ABH$ $\angle H = 90^\circ$. По теореме Пифагора получаем:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ см.}$$

Тогда $AC = 2AH = 4\sqrt{5}$ см и

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 4 = 8\sqrt{5} \text{ см}^2.$$

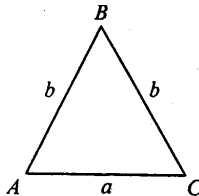
Следовательно:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{5}}{4 \cdot 8\sqrt{5}} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ см.}$$

Ответ: 4,5 см.

№ 45. Найдите радиусы окружностей описанной около равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b и вписанной в него.

Пусть ABC — равнобедренный треугольник, $AB = BC = b$, $AC = a$. Найдите R , r .



$$\text{Тогда } p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{2b + a}{2} = b + \frac{a}{2}.$$

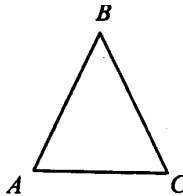
$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)^2} = \sqrt{\frac{2b+a}{2} \cdot \frac{2b-a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a}{4} \sqrt{4b^2 - a^2}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} R &= \frac{abb}{4S} = \frac{ab^2}{4 \cdot \frac{a}{4} \sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}; \\ r &= \frac{2S}{2a+b} = \frac{2 \cdot \frac{a}{4} \sqrt{4b^2 - a^2}}{2b+a} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(2b+a)} = \\ &= \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2\sqrt{(2b+a)(2b+a)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2b-a)(2b+a)}{(2b+a)(2b+a)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}. \end{aligned}$$

№ 46. Найдите радиус r вписанной и радиус R описанной окружностей для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Пусть ABC — равнобедренный треугольник, $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см.



$$\text{Тогда } p = \frac{13+13+10}{2} = 18 \text{ см.}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)^2} = \sqrt{18 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8} = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60 \text{ см}^2.$$

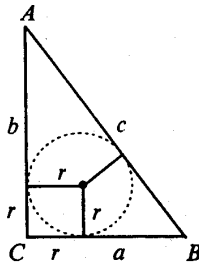
Следовательно:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 13 \cdot 10}{4 \cdot 60} = \frac{169}{24} \text{ см};$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 60}{36} = \frac{10}{3} \text{ см}.$$

№ 47. Докажите, что в прямоугольном треугольнике радиус вписанной окружности равен половине разности между суммой катетов и гипотенузой.

Пусть в $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $CB = a$, $AC = b$, $AB = c$. Докажем, что: $r = \frac{a+b-c}{2}$.



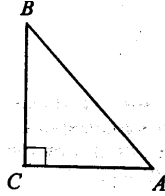
Имеем: $r = \frac{2S}{a+b+c}$, но $S = \frac{ab}{2}$, так что

$$\begin{aligned} r &= \frac{\frac{ab}{2} \cdot 2}{a+b+c} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2 - c^2} = \\ &= \frac{ab(a+b-c)}{a^2 + b^2 + 2ab - c^2} = \frac{ab(a+b-c)}{2ab} = \frac{a+b-c}{2}, \end{aligned}$$

что требовалось доказать.

№ 48. Катеты прямоугольного треугольника равны 40 см и 42 см. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей.

Пусть в $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 40$ см, $BC = 42$ см.



Тогда $S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{40 \cdot 42}{2} = 840 \text{ см}^2$. Далее по теореме

Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 1600 + 1764 = 3364 \text{ см}^2;$$

$$AB = \sqrt{3364} = 58 \text{ см.}$$

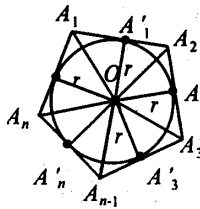
Пусть $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Тогда

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{40 \cdot 42 \cdot 58}{840} = 29 \text{ см,}$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 840}{140} = 12 \text{ см.}$$

Ответ: 29 см, 12 см.

№ 49. Докажите, что площадь многоугольника описанного около окружности, равна половине произведения периметра многоугольника на радиус окружности.



Пусть $A_1A_2...A_n$ — многоугольник, описанный около окружности; A_1A_2 ; A_2A_3 ; ... $A_{n-1}A_n$ — стороны многоугольника; $OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n = r$.

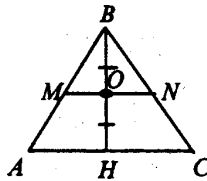
Соединим вершины многоугольника с центром окружности. Многоугольник разбит на n треугольников. Тогда:

$$\begin{aligned}
 S_{A_1 A_2 \dots A_n} &= S_{\Delta A_1 O A_2} + S_{\Delta A_2 O A_3} + \dots + S_{\Delta A_{n-1} O A_n} = \\
 &= \frac{1}{2} A_1 A_2 \cdot r + \frac{1}{2} A_2 A_3 \cdot r + \dots + \frac{1}{2} A_{n-1} A_n \cdot r = \\
 &= \frac{1}{2} r (A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_{n-1} A_n) = \frac{1}{2} r \cdot P_{A_1 \dots A_n}
 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

№ 50. Через середину высоты треугольника проведена перпендикулярная к ней прямая. В каком отношении она делит площадь треугольника?

Пусть ΔABC , BH — высота, $BO = OH$.



$\Delta ABC \sim \Delta MBN$, поэтому $\frac{BO}{BH} = \frac{MN}{AC}$, так что $AC = 2MN$.

Тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = MN \cdot BH,$$

$$S_{\Delta MBN} = \frac{1}{2} MN \cdot BO = \frac{1}{4} MN \cdot BH.$$

Поэтому

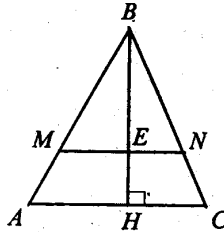
$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBN}} = \frac{MN \cdot BH \cdot 4}{MN \cdot BH \cdot 1} = 4 : 1.$$

Ответ: $\frac{S_{\Delta MBN}}{S_{\Delta ABC}} = 1 : 4$.

№ 51. Прямая, перпендикулярная высоте треугольника, делит его площадь пополам. Найдите расстояние от

этой прямой до вершины треугольника, из которой проведена высота, если она равна А.

Пусть в $\triangle ABC$, BH — высота, $MN \perp BH$, $BH = h$; $S_{\triangle BMN} = S_{\triangle MNC}$.



$\triangle ABC \sim \triangle MBN$, так как $MN \parallel AC$.

Так как $S_{\triangle BMN} = S_{\triangle MNC}$, то $S_{\triangle BMN} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$.

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MBN}} = \left(\frac{BH}{BE} \right)^2,$$

откуда получаем

$$\frac{BH}{BE} = \sqrt{\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MBN}}} = \sqrt{2}$$

$$BE = BH : \sqrt{2} = \frac{h\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{h\sqrt{2}}{2}$.

№ 52. Периметры правильных n -угольников относятся как $a:b$. Как относятся их площади?

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^2 = \left(\frac{a}{b} \right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Ответ: $a^2:b^2$.

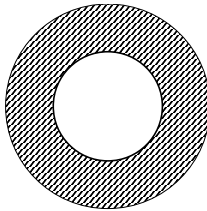
№ 53. Найдите площадь круга, если длина окружности l .

$l = 2\pi R$, откуда имеем $R = \frac{l}{2\pi}$. Тогда

$$S = \pi R^2 = \pi \left(\frac{l}{2\pi} \right)^2 = \pi \cdot \frac{l^2}{4\pi^2} = \frac{l^2}{4\pi}$$

Ответ: $\frac{l^2}{4\pi}$.

№ 54. Найдите площадь кругового кольца, заключенного между двумя окружностями с одним и тем же центром и радиусами: 1) 4 см и 6 см; 2) 5,5 м и 6,5 м; 3) a и b , $a > b$.



$$S_{\text{кольца}} = S_{\text{кр}1} - S_{\text{кр}2} = \pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi(R_1^2 - R_2^2).$$

Так что

$$1) S_{\text{кольца}} = \pi(36 - 16) = 20\pi \text{ см}^2.$$

$$2) S_{\text{кольца}} = \pi(6,5^2 - 5,5^2) = \pi(6,5 - 5,5)(6,5 + 5,5) = 12\pi \text{ см}^2.$$

$$3) S_{\text{кольца}} = \pi(a^2 - b^2) \text{ см}^2.$$

№ 55. Во сколько раз увеличится площадь круга, если его диаметр увеличить: 1) в 2 раза; 2) в 5 раз; 3) в n раз?

Если диаметр увеличить в n раз, то радиус увеличится тоже в n раз, тогда площадь увеличится в n^2 раз.

1) $n = 2$, так что:

$$\frac{S_1}{S_2} = n^2 = 4,$$

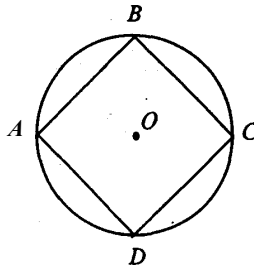
т.е. S круга увеличится в 4 раза.

2) Аналогично, если диаметр увеличить в 5 раз, то S круга увеличится в 25 раз.

3) Если диаметр увеличить в m раз, то S круга увеличится в m^2 раз.

№ 56. Найдите отношение площади круга к площади вписанного в него: 1) квадрата; 2) правильного треугольника; 3) правильного шестиугольника.

1) Пусть $ABCD$ — квадрат, вписанный в круг.



Тогда $a_4 = R\sqrt{2}$ и $S_{\text{кв}} = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2$, $S_{\text{кр}} = \pi R^2$, следовательно:

$$\frac{S_{\text{кр}}}{S_{\text{кв}}} = \frac{\pi R^2}{2R^2} = \frac{\pi}{2}.$$

2) Пусть ABC — треугольник, вписанный в круг. Тогда $a_3 = R\sqrt{3}$ и $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a_3 \cdot a_3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3} \cdot R\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$, $S_{\text{кр}} = \pi R^2$, следовательно:

$$\frac{S_{\text{кр}}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\pi R^2}{1} : \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{\pi R^2 \cdot 4}{3\sqrt{3}R} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

3) Пусть $ABCDEF$ — шестиугольник, вписанный в круг. Тогда $a_6 = R$ и $S_6 = 6 \cdot S_{\Delta ABC} = 6 \cdot \frac{R \cdot R \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$, $S_{\text{кр}} = \pi R^2$, следовательно:

$$\frac{S_{кр}}{S_6} = \frac{\pi R^2 \cdot 2}{1 \cdot 3\sqrt{3}R^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Ответ: 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; 3) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

№ 57. Найдите отношение площади круга, вписанного в правильный треугольник, к площади круга, описанного около него.

$$S_{\text{вп. круга}} = \pi r^2, S_{\text{оп. круга}} = \pi R^2.$$

Так как $a_3 = R\sqrt{3}$, то есть $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$ и $r = \frac{a_3}{2\sqrt{3}}$, то $r = \frac{R}{2}$.

Так что $S_{\text{вп. круга}} = \pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}$. Поэтому

$$\frac{S_{\text{оп. круга}}}{S_{\text{вп. круга}}} = \frac{\pi R^2}{4} : \pi R^2 = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

№ 58. Найдите отношение площади круга, описанного около квадрата, к площади круга, вписанного в него.

$$S_{\text{оп. круга}} = \pi R^2, S_{\text{вп. круга}} = \pi r^2.$$

Далее имеем: $a_4 = R\sqrt{2}$ и $r = \frac{a_4}{2}$, так что $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ и

$S_{\text{вп. круга}} = \pi \cdot \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2 \cdot 2}{4} = \frac{\pi R^2}{2}$. Так что

$$\frac{S_{\text{оп. круга}}}{S_{\text{вп. круга}}} = \frac{\pi R^2}{1} : \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi R^2 \cdot 2}{1 \cdot \pi R^2} = 2.$$

Ответ: 2.

№ 59. Найдите площадь сектора круга радиуса R , если соответствующий этому сектору центральный угол равен: 1) 40° ; 2) 90° ; 3) 150° ; 4) 240° ; 5) 300° ; 6) 330° .

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \alpha, \text{ так что получаем:}$$

$$1) S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} 40^\circ = \frac{\pi R^2}{9};$$

$$2) S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} 90^\circ = \frac{\pi R^2}{4};$$

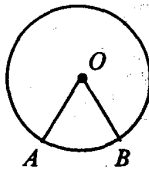
$$3) S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} 150^\circ = \frac{5\pi R^2}{12};$$

$$4) S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} 240^\circ = \frac{2\pi R^2}{3};$$

$$5) S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} 300^\circ = \frac{5\pi R^2}{6};$$

$$6) S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} 330^\circ = \frac{11\pi R^2}{12}.$$

№ 60. Дана окружность радиуса R . Найдите площадь сектора, соответствующего дуге с длиной, равной: 1) R , 2) l .



$$1) R = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha, \text{ откуда } \alpha = \frac{180^\circ \cdot R}{\pi \cdot R} = \frac{180^\circ}{\pi}.$$

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi R^2 \cdot 180^\circ}{360^\circ \cdot \pi} = \frac{R^2}{2}.$$

$$2) \alpha = \frac{180^\circ \cdot l}{\pi \cdot R}, \text{ так что}$$

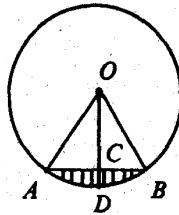
$$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2 \cdot 180^\circ l}{360^\circ \cdot \pi R} = \frac{Rl}{2}.$$

$$\text{Ответ: 1) } \frac{R^2}{2}; 2) \frac{Rl}{2}.$$

№ 61*. Найдите площадь кругового сегмента с основанием

$$a\sqrt{3} \text{ и высотой } \frac{a}{2}.$$

Пусть ADB — круговой сегмент, AB — основание, $AB = a\sqrt{3}$, $CD = \frac{a}{2}$ — высота сегмента.



В $\triangle AOC$ $\angle C = 90^\circ$, $AO = R$; $OC = OD - CD = R - \frac{a}{2}$ и $AC = \frac{1}{2} AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. По теореме Пифагора:

$$AO^2 = OC^2 + AC^2,$$

$$R^2 = \left(R - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

$$R^2 = R^2 - Ra + \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4},$$

то есть $Ra = a^2$, так что $R = \frac{a^2}{a} = a$.

В $\triangle AOB$ $AO = BO = a$, $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Тогда по теореме косинусов:

$$\cos \angle AOB = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2},$$

то есть $\angle AOB = 120^\circ$ и

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin \angle AOB = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

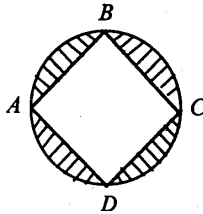
Далее

$$\begin{aligned} S_{\text{сегмента}} &= S_{\text{сектора}} - S_{\triangle AOB} = \\ &= \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha - S_{\triangle AOB} = \frac{\pi a^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } a^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

№ 62. Найдите площадь той части круга, которая расположена вне вписанного в него: 1) квадрата; 2) правильного треугольника; 3) правильного шестиугольника. Радиус круга R .

1) Пусть $ABCD$ — квадрат, вписанный в круг.

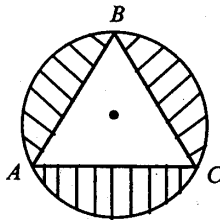


$$S_{\text{кр}} = \pi R^2.$$

$$a_4 = R\sqrt{2}, \text{ тогда } S_{\text{кв}} = a_4^2 = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2.$$

$$S = S_{\text{кр}} - S_{\text{кв}} = \pi R^2 - 2R^2 = R^2(\pi - 2).$$

2) Пусть ABC — треугольник, вписанный в круг.



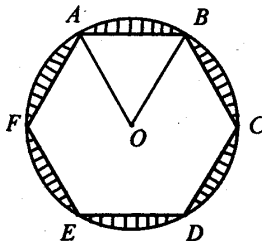
$$S_{\text{кр}} = \pi R^2.$$

$$a_3 = R\sqrt{3}, \text{ поэтому } S_{\Delta} = \frac{1}{2} a_3 \cdot a_3 \sin 60^\circ = \frac{(R\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Следовательно

$$S = S_{\text{кр}} - S_{\Delta ABC} = \pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = R^2 \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right).$$

3) Пусть $ABCDEF$ — шестиугольник, вписанный в круг.



$$S_{\text{кр}} = \pi R^2.$$

$$S_6 = 6 \cdot S_{\Delta AOB} = 6 \cdot \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin 60^\circ = 3R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}. \text{ Так что}$$

$$S = \pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}R^2}{2} = R^2 \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$\text{Ответ: 1) } R^2(\pi - 2); \text{ 2) } R^2 \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right); \text{ 3) } R^2 \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right).$$