

# **Домашняя работа по геометрии за 7 класс**

**С задачами повышенной трудности**

**к учебнику «Геометрия, 7-9: учеб.**

**для общеобразоват. учреждений/ Л.С. Атанасян,**

**В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 17-е изд. –**

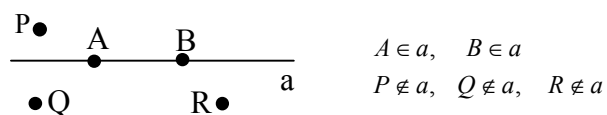
**М.: Просвещение, 2007»**

*Учебно-методическое пособие*

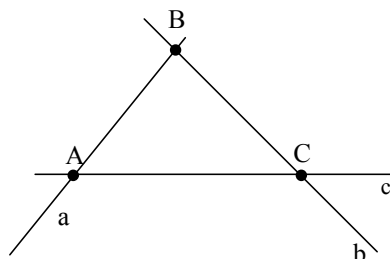
# Глава I

## § 1. Прямая и отрезок

1.

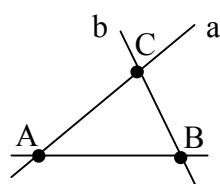


2.

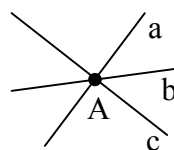


3.

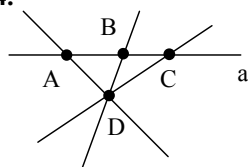
1-ый случай



2-ой случай

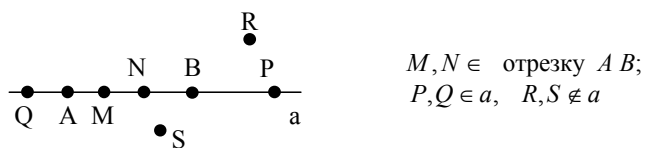


4.

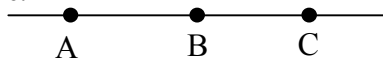


Получим четыре прямые

5.



6.



Имеем:  $[AB]$ ,  $[BC]$  и  $[AC]$  — три отрезка

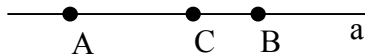
7.

а) Точка  $C$  принадлежит:  $[AD]$ ,  $[BD]$ ,  $[AC]$ ,  $[BC]$

б)  $B \notin [CD]$

## § 2. Луч и угол

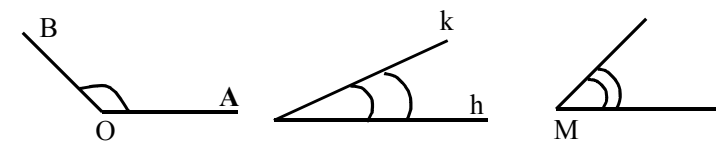
8.



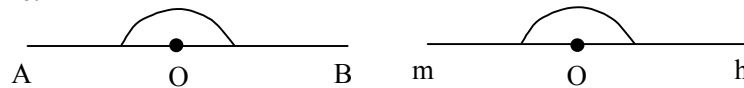
а) лучи  $[AB]$  и  $[AC]$  — совпадают,  $[BC]$  и  $[BA]$  — совпадают

б) Луч  $[CB]$  — является продолжением луча  $[CA]$

9.

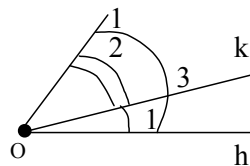


10.



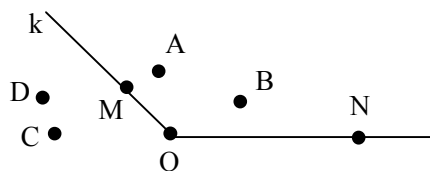
11.

Имеем:  $\angle hk$ ,  $\angle kl$ ,  $\angle h_1$ .

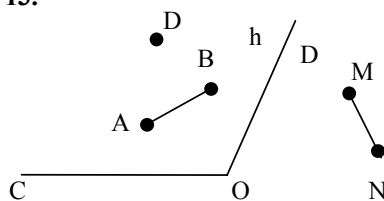


12.

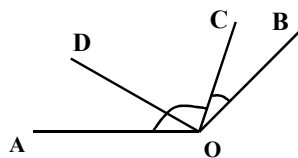
Получаем:



13.

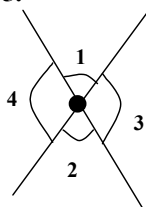


14.



Как видно из рисунка.

15.



При пересечении двух прямых образуется 4  
неразвернутых угла.  
 $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ .

16.

Внутри угла:  $M, A$

Вне угла:  $C, N$

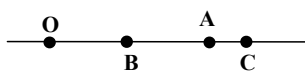
На сторонах угла:  $O, B$

17.

Лучи  $l$  и  $h$

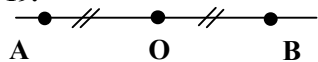
### § 3. Сравнение отрезков и углов

18.



$OB < OA$ ;  $OB < OC$ ;  $OC > OA$

19.



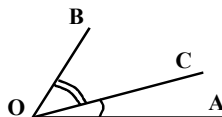
- а) Т.к.  $AO = OB$  — следовательно они совпадают при наложении,  
 б)  $OA < AB$ , то, отрезки  $OA$  и  $AB$  не совпадают при наложении.

20.

- а)  $B$  — середина  $[AC]$       б) Отрезок  $[CE]$   
 $C$  — середина  $[AE]$        $[AE]$  и  $[BD]$  — имеют общую середину  $C$ .  
 $D$  — середина  $[CE]$

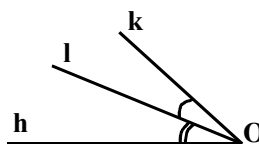
21.

$$\angle AOB > \angle AOC$$



22.

- а)  $l$  — биссектриса, значит,  $\angle hl = \angle lk$ , и углы, при наложении совпадут  
 б) Т.к.  $\angle hl < \angle hk$ , при наложении углы не совпадут



23.

- а)  $OB$  — биссектриса  $\angle AOC$   
 $OD$  — биссектриса  $\angle BOF$   
 $OC$  — биссектриса  $\angle AOE$   
 б)  $OC$  — биссектриса углов  $\angle BOD$  и  $\angle AOE$

## § 4. Измерение отрезков

24

Длина учебника — 14,5 см. = 145 мм.

Ширина учебника — 22 см. = 220 мм.

25.

Толщина учебника — 1,5 см., количество листов в нем — 170 л.,

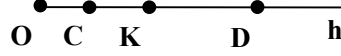
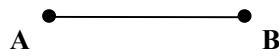
Значит толщина одного листа —  $\frac{1,5}{170} = \frac{3}{340} \approx 0,009$  см.

26.

а)  $CD = 6KL$ ;  $EF = 5KL$ ;  $PQ = 3KL$ ;  $AB = 2KL$ .

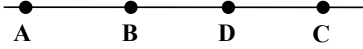
б)  $CD = 3AB$ ;  $EF = 2,5AB$ ;  $PQ = 1,5AB$ ;  $KL = 0,5AB$

27.



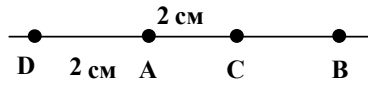
$$OK = \frac{1}{2}AB; OC = \frac{1}{4}AB; OD = 2AB.$$

28.



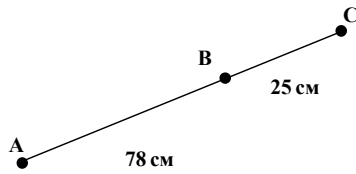
$$AB = BC \text{ и } BD = DC.$$

29.



Две точки: справа и слева от точки A. Это точка C и D.

30.



Дано:  $AB = 7,8 \text{ см}$ ;  $BC = 25 \text{ мм}$   
 $AC = ?$

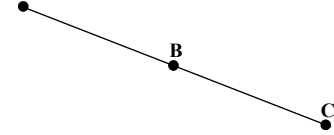
По свойству измерения отрезков имеем:

$$AC = AB + BC$$

$$AC = 78 \text{ мм} + 25 \text{ мм} = 103 \text{ мм}.$$

Ответ: 10 см., 3 см.

31.



Дано:  $AB = 3,7 \text{ см}$  |  $AB = 4 \text{ см}$   
 $AC = 7,2 \text{ см}$  |  $AC = 4 \text{ см}$   
 $BC = ?$

Решение: Из рисунка видим, что:

а)  $BC = AC - AB$

$$BC = 7,2 \text{ см} - 3,7 \text{ см} = 3,5 \text{ см}$$

б) Аналогично:  $BC = AC - AB$

$$BC = 40 \text{ мм} - 4 \text{ мм} = 36 \text{ мм}$$

Ответ: а) 3,5 см; б) 36 мм.

32.

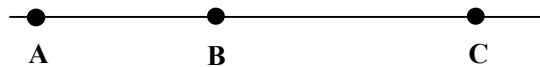
Дано:  $A, B, C \in a$

$$AB = 12 \text{ см.}, BC = 13,5 \text{ мм}$$

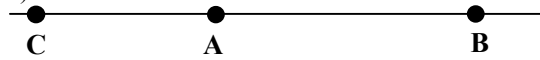
$AC = ?$

Решение: Рассмотрим два варианта а) и б):

а)  $AC = AB + BC = 12 \text{ см} + 13,5 \text{ см} = 25,5 \text{ см}.$



б)



$$AC = BC - BA = 13,5\text{см} - 12\text{см} = 1,5\text{см}$$

Ответ: 25,5 см; 1,5 см.

**33.**

Дано:  $B, D, M \in l$

$$BD = 7\text{см.}, MD = 16\text{см}$$

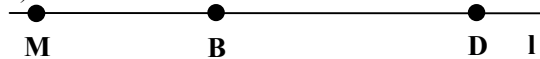
$BM = ?$

Решение: Рассмотрим два варианта :

а)  $BM = BD + DM = 7 + 16 = 23.$



б)



$$BM = DM - BD = 16\text{см} - 7\text{см} = 9\text{см}$$

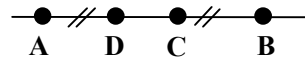
Ответ: а) 23 см; б) 9см.

**34.**

Дано:  $CA = BC$

$$AB = 64\text{см.}, D \in CA, CD = 15\text{см}$$

$CD = ?$ ,  $DA = ?$



Решение: Рассмотрим два варианта, что :

$$AC = CB = 64\text{см} : 2 = 32.$$

$$BD = BC - CD = 32\text{см} - 15\text{см} = 17\text{см}$$

$$DA = AC + CD = 32\text{см} + 15\text{см} = 47\text{см}$$

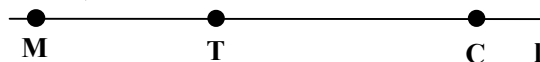
Ответ: а) 17 см; б) 47 см.

**35.**

Дано:  $M, T, C \in l$

$$MC = 650\text{км.}, MT = 170\text{ км}$$

$TC = ?$ ,



Решение:

$$TC = MC - MT = 650\text{км} - 170\text{км} = 480\text{км.}$$

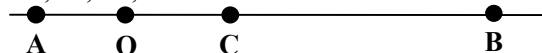
Ответ: 480 км.

**36.**

Если точка  $A, B, C$  лежат на одной прямой, то больший из отрезков  $AB, BC$ , и  $AC$  равен сумме двух других. По условию больший из данных отрезков ( $AC = 5$  см), а  $AB + BC = 7$  см., поэтому точки  $A, B, C$  не лежат на одной прямой.

**37.**

а) Дано:  $AC = CB$ ,  
 $AO = OC$ ,  $AB = 2$  см  
 $AC, CB, AO, OB$  – ?



Решение:

$C$  – середина  $AB$ , значит  $AC = CB = 2 : 2 = 1$  см

$O$  – середина  $AC$ , значит  $AO = OC = 1 : 2 = 0,5$  см

$OB = OC + CB = 0,5 \text{ см} + 1 \text{ см} = 1,5 \text{ см}$

Ответ: 1 см.; 1 см.; 0,5 см; 1,5 см.

б) Дано:  $AC = BC$ ,  
 $AO = OC$ ,  $CB = 3,2$  м  
 $AB, AC, AO, OB$  – ?

Решение:

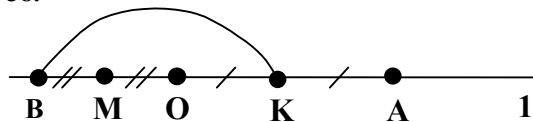
$AB = 2 \cdot BC = 2 \cdot 3,2 = 6,4$  м

$AC = CB = 3,2$  м

$AO = OC = 3,2 : 2 \text{ см} = 1,6$  м

Ответ: 6,4 м.; 3,2 м; 1,6 м; 1,6 м.

**38.**



Первый вариант:

а) Дано:  $OA = 12$  см,  $OB = 9$  см,  $O \in AB$

$OK = KA$ ,

$KM$  – ?

Решение: Из условия получаем равенств

$OK = KA = 12 \text{ см} : 2 = 6 \text{ см}$

$OM = MB = 9 \text{ см} : 2 \text{ см} = 4,5 \text{ см}$

$MK = MO + OK = 6 \text{ см} + 4,5 \text{ см} = 10,5 \text{ см}$

Ответ: 10,5 см.

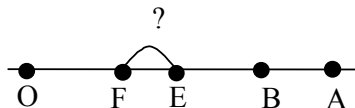
б) Второй вариант:

Дано:  $O \in AB$ ,

$OA = 12 \text{ см}$ ,  $OB = 9 \text{ см}$ ,

$OE = EA$ ,  $OF = FB$

$EF = ?$



Решение: Из условия получаем равенств

$$OE = EA = 12 \text{ см} : 2 = 6 \text{ см}$$

$$OF = FB = 9 \text{ см} : 2 \text{ см} = 4,5 \text{ см}$$

$$FE = OE - OF = 6 \text{ см} - 4,5 \text{ см} = 1,5 \text{ см}$$

Ответ: 1,5 см.

39.



Дано:  $C \in AB$ ,  $AB = a$

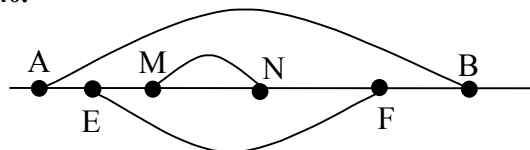
$AK = KC$ ,  $CM = MB$

$KM = ?$

Решение:  $KM = AB - MB - AK = AB - \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AC =$

$$= AB - \frac{1}{2}(BC + AC) = AB - \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$$

40.



Дано:

$AB = 28 \text{ см}$

$AE = EM$ ,  $NF = FB$ ,  $EF = 16 \text{ см}$

$MN = ?$

Решение:

$28 \text{ см} - 12 \text{ см} = \text{значит } AE + FB = 12 \text{ см}$

$AM = EM$ ,  $FB = NF$  (по условию) следует  $EM + NF = 12 \text{ см}$ ,

значит  $MN = EF - (EM + NF) = 16 \text{ см} - 12 \text{ см} = 4 \text{ см}$

Ответ: 4 см.

## § 5. Измерения углов

41– 43.

Это практические задания. Их надо выполнять по описанию в книге.

44.

Выполняем построение по указаниям. Построение можно сделать когда угол  $\angle AOB$  острый.

45.

Т.к. градусные меры углов равны, то равны и сами углы.

46.

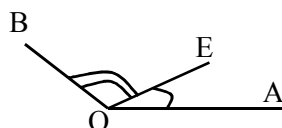
а)  $\angle AOX = 40^\circ$ ,  $\angle BOX = 60^\circ$ ,  $\angle AOB = 20^\circ$ ,  $\angle COB = 20^\circ$ ,  $\angle DOX = 130^\circ$

б)  $\angle AOB = \angle COB = 20^\circ$

в)  $\angle XOА = \angle AOC = 40^\circ$ ,  $\angle COD = \angle DOP = 50^\circ$ ,  $\angle AOB = \angle BOC = 20^\circ$

г)  $\angle AOX = 40^\circ$ ,  $\angle AOB = 20^\circ$ ,  $\angle AOC = 40^\circ$ ,  $\angle AOD = 90^\circ$

47.



Дано:

$$\angle AOE = 44^\circ \quad \left| \quad \angle AOE = 12^\circ 37'$$

$$\angle EOB = 77^\circ \quad \left| \quad \angle EOB = 108^\circ 25'$$

$$\angle AOB = ?$$

Решение: По свойству измерения углов имеем:

$$\angle AOB = \angle AOE + \angle EOB$$

$$\angle AOB = 44^\circ + 77^\circ$$

$$\angle AOB = 121^\circ; \text{ Аналогично:}$$

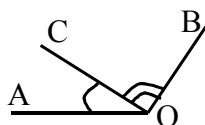
б)  $\angle AOB = \angle AOE + \angle EOB$

$$\angle AOB = 12^\circ 37' + 108^\circ 25'$$

$$\angle AOB = 120^\circ 62' = 121^\circ 02'$$

Ответ: а)  $121^\circ$ ; б)  $121^\circ 02'$

48.



Дано:  $\angle AOB = 78^\circ$ ,

$\angle AOC$ , меньше  $\angle BOC$  на  $18^\circ$

$\angle COB = ?$

Решение:

Возьмем  $\angle AOC = x$ , значит  $\angle BOC = x + 18$ ,

$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ , следовательно

49.

Дано:  $\angle AOB = 155^\circ$ ,  
 $\angle AOC$  больше  $\angle COB$  на  $15^\circ$   
 $\angle AOC = ?$

Решение:

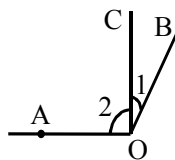
Пусть  $\angle 1 = x$ , тогда  $\angle 2 = x + 15$

$\angle AOB = \angle 1 + \angle 2$ , значит

$$155 = x + x + 15; 155 = 2x + 15; 2x = 140; x = 70;$$

$$\angle AOC = x + 15 = 85^\circ.$$

Ответ:  $85^\circ$ .



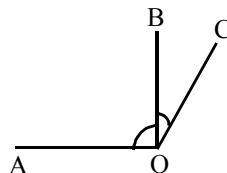
50.

Дано: угол  $\angle AOB$  часть угла  
 $\angle AOC$

$$\angle AOC = 108^\circ,$$

$$\angle AOB = 3 \angle BOC$$

$$\angle AOB = ?$$



Решение:

Пусть  $\angle BOC = x$ , тогда  $\angle AOB = 3x$

$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC, \text{ следовательно, } 108 = 3x + x; 108 = 4x; x = 27;$$

$$\angle AOB = 3x = 81^\circ.$$

Ответ:  $81^\circ$ .

51.

Дано:  $\angle AOD = 90^\circ$

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$$

OE – биссектриса  $\angle AOB$

OF – биссектриса  $\angle COD$

$$\angle EOF = ?$$

Решение:

По условию

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD, \text{ значит}$$

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 90^\circ : 3 = 30^\circ$$

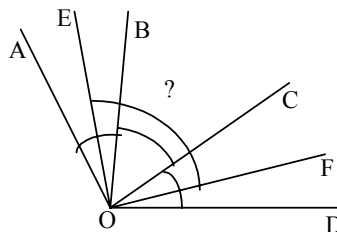
OE и OF – биссектрисы углов  $\angle AOB$  и  $\angle COD$ , следовательно

$$\angle EOB = \angle COF = 15^\circ.$$

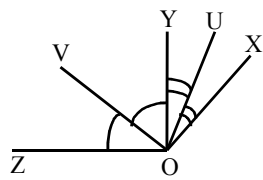
Далее видим, что:

$$\angle EOF = \angle EOB + \angle BOC + \angle COF = 15^\circ + 30^\circ + 15^\circ = 60^\circ.$$

Ответ:  $60^\circ$ .



52.



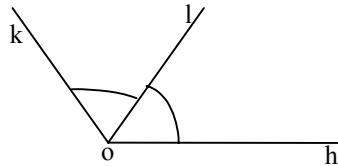
Дано:  $OV$  – биссектриса угла  $\angle ZOY$   
 $OU$  – биссектриса угла  $\angle XOY$   
 $\angle UOV = 80^\circ$   
 $\angle XOZ = ?$

Решение:

$$\begin{aligned}\angle ZOX &= \angle ZOV + \angle VOY + \angle YOU + \angle UOX = \\ &= 2\angle VOY + 2\angle YOU = 2\angle VOU = 2 \cdot 80^\circ = 160^\circ.\end{aligned}$$

Ответ:  $160^\circ$ .

53.



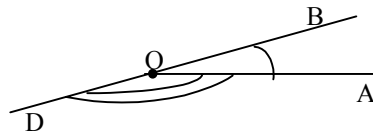
1)  $\angle hl$  – не прямой

Если  $\angle hl = 90^\circ$ , то  $\angle kh = 180^\circ$  —  
 а это не так, потому что по усло-  
 вию  $\angle hk < 180^\circ$

2)  $\angle hl$  – не тупой. Если  $\angle hl > 90^\circ$ , то  $\angle kh > 180^\circ$ , а это не так, по условию.

## § 6. Перпендикуляр. Прямые

54.



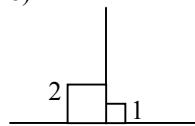
$\angle AOB$  – острый;  
 $\angle AOD$  – тупой.

55.

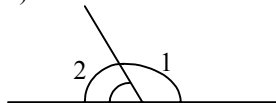
а)



б)



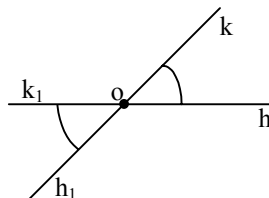
в)



На рисунке углы  $\angle 1$  и  $\angle 2$  смежные.

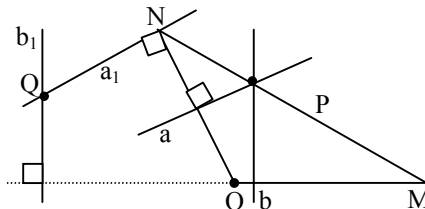
56.

Углы  $\angle hk$  и  $\angle h_1k_1$  – вертикальные.



57.

$b \perp OM$ ,  $a \perp ON$   
 $b_1 \perp OM$ ,  $a_1 \perp ON$

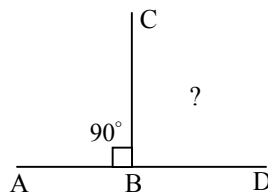
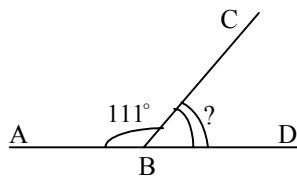


58.

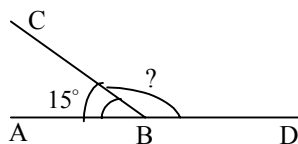
Из свойств смежных углов вытекает, что:

а)  $\angle CBD = 180^\circ - 111^\circ$   
 $\angle CBD = 69^\circ$

б)  $\angle CBD = 180^\circ - 90^\circ$   
 $\angle CBD = 90^\circ$



в)  $\angle CBD = 180^\circ - 15^\circ$   
 $\angle CBD = 165^\circ$



59.

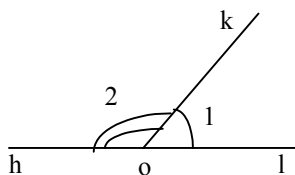
Прямым, т.к.  $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ .

60.

Верно, т.к.  $\angle 1 + \angle 1 = 180^\circ$ , а отсюда  $\angle 1 = 90^\circ$ .

**61.**

Дано:  $\angle 1$ ,  $\angle 2$  – смежные  
 $\angle 1$ ,  $\angle 2 = ?$



Решение:

Зная, что сумма смежных углов равна  $180^\circ$  имеем:

а)  $\angle 2 = x$ , тогда  $\angle 1 = x + 40$ ,

$$x + x + 40 = 180;$$

$$2x = 140; x = 70$$

$$\angle kh = 70^\circ,$$

$$\angle kl = 110^\circ$$

в) Пусть  $\angle 1 = x$ , тогда

$$\angle 2 = x + 47^\circ 18'$$

$$x + x + 47^\circ 18' = 180^\circ$$

$$(180^\circ = 179^\circ 60')$$

$$2x = 179^\circ 60' - 47^\circ 18'$$

$$2x = 132^\circ 42'; x = 66^\circ 21'$$

$$\angle kl = 66^\circ 21', \angle hk = 113^\circ 39'$$

д) если  $\angle 2 : \angle 1 = 5:4$ , то пусть

на 1 часть приходится  $x$ , тогда

$$\angle 2 = 5x, \angle 1 = 4x$$

$$5x + 4x = 180; 9x = 180; x = 20$$

$$\angle kh = 100^\circ, \angle kl = 80^\circ$$

б) Пусть  $\angle 1 = x$ , тогда

$$\angle 2 = x + 120^\circ;$$

$$x + x + 120^\circ = 180;$$

$$2x = 60; x = 30;$$

$$\angle kl = 30^\circ, \angle hk = 150^\circ$$

г) Пусть  $\angle 1 = x$ , тогда  $\angle 2 = 3x$

$$x + 3x = 180$$

$$4x = 180$$

$$x = 45$$

$$\angle kl = 45^\circ,$$

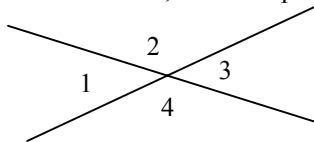
$$\angle hk = 135^\circ$$

**64.**

а) Т.к.  $\angle 2$  и  $\angle 4$  – вертикальные, то  $\angle 2 = \angle 4 = 117^\circ$

$$\angle 1 = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ, \text{ т.к. он смежный с } \angle 2$$

$$\angle 3 = \angle 1 = 63^\circ, \text{ т.к. он вертикальный с } \angle 1.$$



- б)  $\angle 1 = \angle 3 = 43^\circ 17'$  – как вертикальные  
 $\angle 2 = 180^\circ - 43^\circ 27' = 136^\circ 33'$ , т.к.  $\angle 2$  и  $\angle 3$  – смежные  
 $\angle 4 = 136^\circ 33'$ , т.к.  $\angle 4$  и  $\angle 2$  вертикальные.

**65.**

а) Дано:

$$\angle 1 + \angle 3 = 114^\circ$$

$$\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4 = ?$$

Решение:

Т.к.  $\angle 1 = \angle 3$  вертикальные, то

$$\angle 1 = \angle 3 = 114^\circ : 2 = 57^\circ$$

$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ , т.к.  $\angle 1$  и  $\angle 2$  – смежные

$$\angle 2 = 180^\circ - 57^\circ$$

$\angle 2 = \angle 4 = 123^\circ$ , т.к.  $\angle 2$  и  $\angle 4$  – вертикальные

Ответ:  $57^\circ, 123^\circ, 57^\circ, 123^\circ$ .

б) Дано:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 220^\circ$$

$$\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4 = ?$$

Решение:

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ$  как сумма  
двух развернутых углов

$$\angle 4 = 360^\circ - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$$

$\angle 4 = \angle 2 = 140^\circ$  (т.к.  $\angle 2$  и  $\angle 4$  – вертикальные)

$\angle 1 + 140^\circ + \angle 3 = 220^\circ$ , откуда

$$\angle 1 + \angle 3 = 80^\circ, \text{ то}$$

$\angle 1 = \angle 3 = 40^\circ$  (т.к.  $\angle 1$  и  $\angle 3$  – вертикальные)

Ответ:  $40^\circ, 140^\circ, 40^\circ, 140^\circ$ .

**66.**

а)  $\angle 2 + \angle 4 = 220^\circ$ , т.к.

$\angle 2, \angle 4$  – вертикальные, то

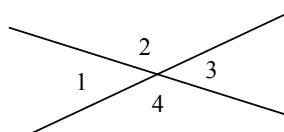
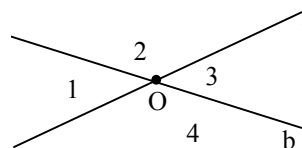
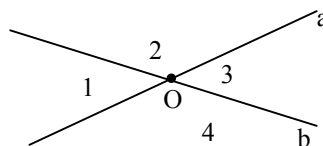
$$\angle 2 = \angle 4 = 220^\circ : 2 = 110^\circ$$

$\angle 1 = \angle 3 = 70^\circ$ , т.к.  $\angle 1$  и  $\angle 2, \angle 3$  и  $\angle 4$  – смежные

Ответ:  $70^\circ, 110^\circ, 70^\circ, 110^\circ$ .

б)  $3 \cdot (\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$

т.к.  $\angle 1 = \angle 3 = x$ , тогда  $\angle 2 = \angle 4 = 180^\circ - x$



Подставляем в 1-ое равенство:

$$3 \cdot (x+x) = 180^\circ - x + 180^\circ - x$$

$$6x = 360 - 2x; 8x = 360; x = 45;$$

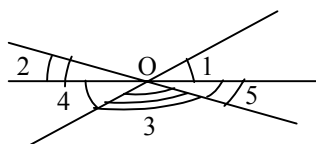
$$\angle 1 = \angle 3 = 45^\circ; \angle 2 = \angle 4 = 135^\circ.$$

в)  $\angle 2 - \angle 1 = 30^\circ$

$$\angle 1 = x, \text{ тогда, } \angle 2 = x + 30^\circ; x + x + 30 = 180; 2x = 150; x = 75;$$

$$\angle 1 = 75^\circ, \angle 2 = 105^\circ$$

67.



Решение:

Имеем:

$$\angle 1 = \angle 4 - \text{вертикальные}$$

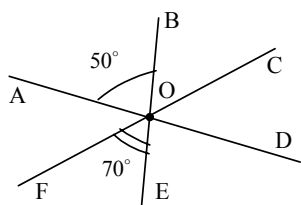
$$\angle 2 = \angle 5 - \text{вертикальные}$$

$\angle 4 + \angle 3 + \angle 5 = \angle AOB$  – развернутый угол, т.е.  $\angle AOB = 180^\circ$ .

$$180^\circ = \angle 4 + \angle 3 + \angle 5 = \angle 1 + \angle 3 + \angle 2.$$

Ответ:  $180^\circ$

68.



Дано:

$$\angle AOB = 50^\circ, \angle FOE = 70^\circ$$

$$\angle AOC, \angle BOD, \angle COE, \angle COD = ?$$

Решение:

$$\angle EOD = \angle AOB = 50^\circ \text{ по свойству вертикальных углов}$$

$$\angle FOD = \angle FOE + \angle EOD =$$

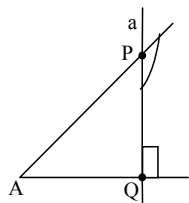
$$= 70^\circ + 50^\circ = 120^\circ$$

$$\angle COD = 180^\circ - \angle FOD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\angle AOB = 50^\circ + 70^\circ = 120^\circ; \angle COE = 60^\circ + 50^\circ = 110^\circ$$

$$\angle BOD = 70^\circ + 60^\circ = 130^\circ; \angle COD = 60^\circ$$

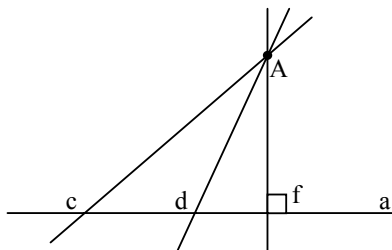
69.



Одновременно прямые AP и AQ не могут быть перпендикулярными прямой a, т.к. AP и AQ – пересекаются и, значит, не параллельны, что противоречит аксиоме параллельных прямых.

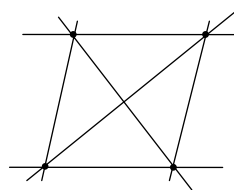
70.

Пусть  $f \perp a$ ,  $d \perp a$ ,  $c \perp a$ , тогда прямые  $f$ ,  $d$  и  $c$  – не пересекаются (по теореме), а по условию  $c$ ,  $d$  и  $f$  – проходят через точку  $A$ , значит, все три прямые одновременно быть перпендикулярными  $a$  не могут. Значит, только одна из трех прямых может быть перпендикулярна прямой  $a$ , а значит две не перпендикулярны прямой  $a$ .



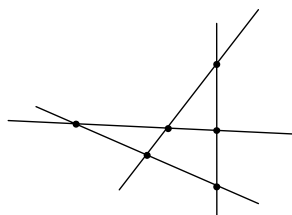
71.

Получилось 6 прямых



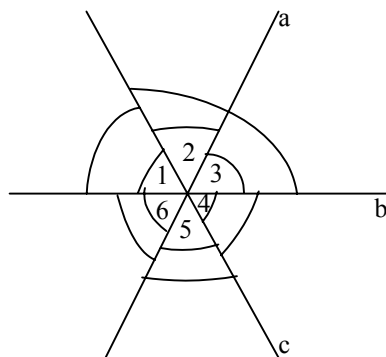
72.

Имеем 6 точек

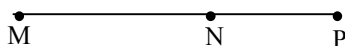


73.

Рассмотрим все углы и выберем неразвернутые. Тогда в итоге имеем 12 углов, как это показано на рисунке.



74.

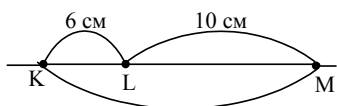


Дано:  $MP=24$  см  
 $NM$  в 2 раза больше  $NP$   
 $NP$ ,  $NM=?$

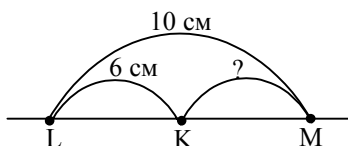
Решение:

Пусть  $NP=x$  см, тогда  $MN=2x$  см  
 $2x+x=24$ , значит,  $3x=24$ ,  
 $x=8$ , следовательно,  $NP=8$  см,  $MN=16$  см.  
 Ответ: 8 см, 16 см.

75.

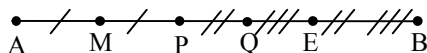


а) 1-ый случай  
 $KM=?$   
 Имеем:  
 $KM=KL+LM$ ;  $KM=6+10=16$  см



б) 2-ой случай  
 $KM=?$   
 Имеем:  
 $KM=LM-LK$   
 $KM=10-6=4$  см

76.



Дано:  $AB=a$ ,  
 $AP=2PQ=2QB$   
 $QE=EB$ ,  $AM=MP$   
 $AE$ ,  $ME=?$

Решение:

а)  $AP=2PQ=2QB$ , значит  $PQ=QB$  и  $Q$  – середина  $PB$   
 значит  $P$  – середина  $AB$ , значит,  $AP=PB=\frac{1}{2}a$

$Q$  – середина  $PB$ , то  $PQ=QB=\frac{1}{4}a$

$E$  – середина  $QB$ , то  $EB=QE=\frac{1}{8}a$

$AE=AB-BE=a-\frac{1}{8}a=\frac{7}{8}a$

б)  $ME=AB-AM-EB=a-\frac{1}{4}a-\frac{1}{8}a=\frac{5}{8}a$

Ответ:  $\frac{7}{8}a$ ;  $\frac{5}{8}a$

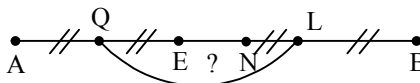
77.

а) Дано:  $AB=m$ ,  $Q$  – середина  $AE$ ,

$L$  – середина  $NB$

$AE=EN=NB$ .

$QL=?$



Решение:

Имеем:  $AE=EN=NB=\frac{m}{3}$

$Q, L$  – середины соответственных отрезков, значит,

$$AQ=QE=NL=LB=\frac{m}{6}$$

Тогда:

$$QL=AB-AQ-LB; \quad QL=m-\frac{m}{6}-\frac{m}{6}=\frac{2}{3}m.$$

Ответ:  $\frac{2}{3}m$ .

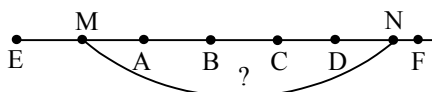
б) Дано:  $EF=m$ ;

$EA=AB=BC=CD=DF$

$EM=MA$

$DN=NF$

$MN=?$



Решение:

$EA=AB=BC=CD=DF$ , тогда,  $AE=AB=BC=CD=DF=\frac{m}{5}$

Далее:

$$EM=NF=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}DF=\frac{m}{10}; \quad MN=EF-EM-NF=m-\frac{m}{5}=\frac{4}{5}m.$$

Ответ:  $\frac{4}{5}m$ .

78.

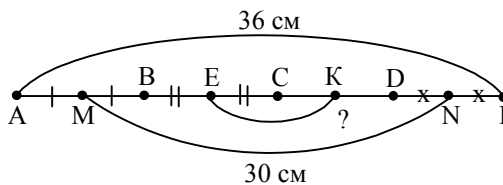
Дано:  $AF=36$  см,

$MN=30$  см

$AM=MB, DN=NF$ ,

$BE=EC, CK=KD$

$EK=?$



Решение:

$$AF=MN=(AM+NF); \quad 36-30=6\text{см}-(AM+NF)$$

$$AM=MB$$

$NF=ND$ , следовательно,  $AM=NF=MB+DN=6$  см

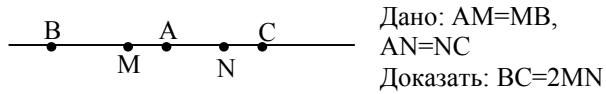
$BD=BC+CD=30-6=24$  см, тогда,

$$BC=BE+EC=2EC, CD=CK+KD=2CK, EK=EC+CK=\frac{1}{2}BD$$

Учитывая, что  $EK=\frac{1}{2}BD$  получаем  $EK=12$  см.

Ответ: 12 см.

**79.**



Доказательство:

Пусть  $BM=a$ ,  $NC=b$

Из  $BM=MA$  следует  $AB=2a$

Из  $NC=NA$  следует  $AC=2b$ , значит,  $BC=BA+AC=2a+2b=2\cdot(a+b)$ ;

$MN=MA+AN=a+b$ .

Тогда:  $BC=2\cdot(a+b)$ , значит  $BC=2MN$ .

Тогда:  $MN=a+b$ .

**80.**

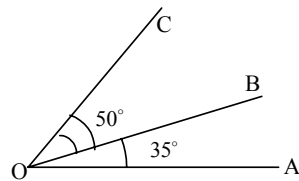
Дано:  $\angle AOB=35^\circ$ ,  $\angle BOC=50^\circ$

$\angle AOC=?$

Решение:

Рассмотрим два случая:

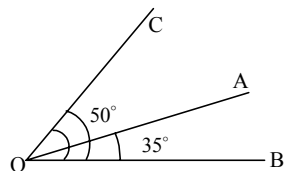
а)



$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$$

$$\angle AOC = 35^\circ + 50^\circ = 85^\circ$$

б)



$$\angle AOC = \angle BOC - \angle BOA$$

$$\angle AOC = 50^\circ - 35^\circ = 15^\circ$$

**81.**

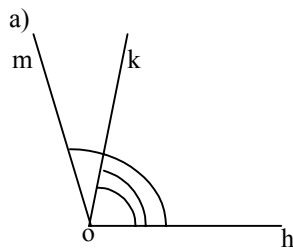
Дано:  $\angle hk=120^\circ$ ,  $\angle hm=150^\circ$

$\angle km=?$

Решение:

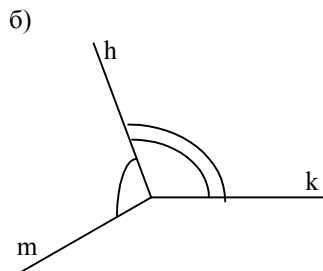
Рассмотрим два случая:

20



$$\angle km = \angle hm - \angle hk$$

$$\angle km = 150^\circ - 120^\circ = 30^\circ$$



$$\angle km = \angle kh + \angle hm$$

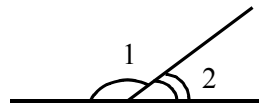
$$\angle km = 120^\circ + 150^\circ = 270^\circ$$

**82.**

Дано: а)  $\angle 1$  больше  $\angle 2$  на  $45^\circ$

б)  $\angle 1 - \angle 2 = 35^\circ$

$\angle 1, \angle 2 = ?$



Решение:

а) Пусть  $\angle 2 = x$ , тогда

$\angle 1 = x + 45^\circ$ ,  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$  (по свойству смежных углов)

то  $x + x + 45 = 180$ ,  $2x = 135$ ,  $x = 67^\circ 30'$

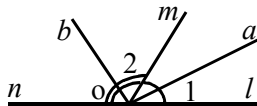
$\angle 2 = 67^\circ 30'$ ,  $\angle 1 = 112^\circ 30'$

б) Пусть  $\angle 2 = x$ , тогда,  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ , значит,  $x + x + 35 = 180$ ,  $2x = 145$ ,

$x = 72^\circ 30'$

$\angle 1 = 107^\circ 30'$ .

**83.**



Дано: a, b – биссектрисы  $\angle 1, \angle 2$

$\angle ab = ?$

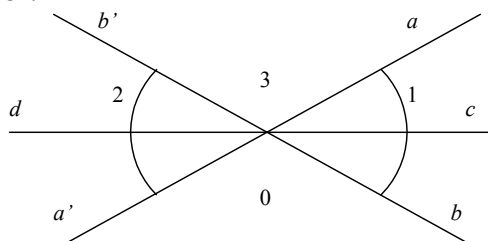
Решение:

$\angle nb + \angle bm + \angle ma + \angle al = 180^\circ = 2\angle bm + 2\angle ma = 2\angle ab$ , откуда

$\angle ab = 90^\circ$ .

Ответ:  $90^\circ$ .

84.



Дано:  $\angle 1 = \angle 2$  – вертикальные углы  
 $c, d$  – биссектрисы  $\angle 1, \angle 2$  соответственно.

Доказать, что  $c, d$  лежат на одной прямой.

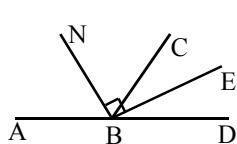
$\angle 1$  и  $\angle 3$  – смежные углы, тогда  $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ . (по свойству).

$\angle 1 = \angle 2$ , значит  $\angle ac = \angle bc = \angle b'd = \angle a'd$ , значит

$\angle ab' + \angle 3 + \angle ac = 180^\circ$ , тогда

$\angle dc = 180^\circ$  – развернутый угол и тогда согласно определению развернутого угла лучи  $d$  и  $c$  – лежат на одной прямой.

85.



Дано:  $BE$  – биссектриса угла  $\angle CBD$

$BN$  – биссектриса угла  $\angle ABC$

$\angle EBN = 90^\circ$

Доказать, что  $A, B, D$  лежат на одной прямой.

Доказательство:

$\angle EBN = 90^\circ$ ;  $\angle EBN = \angle EBC + \angle CBN$

Пусть  $\angle EBC = x$ , тогда  $\angle CBN = 90^\circ - x$

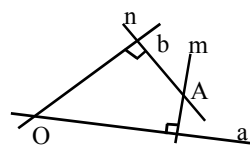
$BN$  – биссектриса  $\angle ABC$ , значит  $\angle ABN = \angle NBC = 90^\circ - x$

$BE$  – биссектриса  $\angle CBD$ , значит  $\angle DBE = \angle EBC = x$

$\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = 2(90^\circ - x) + 2x = 180 - 2x + 2x = 180^\circ$

значит,  $\angle ABD$  – развернутый, и точки  $A, B, D$  лежат на одной прямой.

86.



Дано:  $n \perp b$ ;  $m \perp a$

Доказать, что  $m, n$  – не совпадают.

Доказательство от противного:

Пусть  $m$  и  $n$  совпадают, значит лежат на одной прямой  $l$ , тогда имеем, что  $l \perp a$  и  $l \perp b$ ,

т.е. одна прямая перпендикулярна двум различным прямым  $a$  и  $b$ , тогда  $a$  и  $b$  не пересекаются согласно теореме о прямых, а это противоположно условию, что  $a \cap b = O$ , значит наше предположение не верно, а верно то, что  $m$  и  $n$  не совпадают, ч.т.д.

## Глава II

### § 1. Первый признак равенства треугольников.

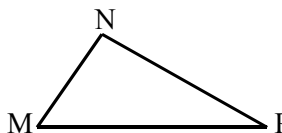
87.

стороны: MN, NP, MP

углы:  $\angle NMP$ ,  $\angle MPN$ ,  $\angle PNM$

MN=12 мм; NP=25 мм; MP=34 мм;

Значит  $P_{\triangle MNP}=71$  мм.

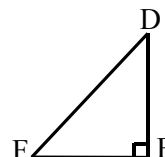


88.

а) против углов D, E, F – лежат соответственно EF; FD; DE.

б) против сторон DE; EF; FD лежат соответственно углы F; D; E.

в)  $\angle D$  и  $\angle E$ ;  $\angle E$  и  $\angle F$ ;  $\angle F$  и  $\angle D$  – углы прилежащие соответственно к сторонам OE; EF; FO.



90.

Дано: AC=2AB, AB=17 см, BC=AC-10

$P_{\triangle ABC}=?$

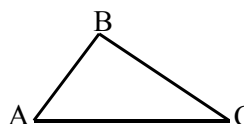
Решение:

AC=2AB=2·17=34 см

BC=AC-10=34-10=24 см

P=AB+BC+AC=17+24+34=75 см

Ответ: 75 см.



91.

Дано:  $P_{\triangle ABC}=48$  см, AB=18 см, BC-AC=4,6 см

BC, AC=?

Решение:

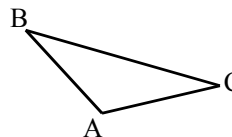
$P_{\triangle ABC}=AB+BC+AC=48$

18+BC+AC=48 см, тогда, BC+AC=30.

Пусть AC=x, тогда, BC=x+4,6 и 2x=25,4

x=12,7, значит, AC=12,7 см, BC=17,3 см.

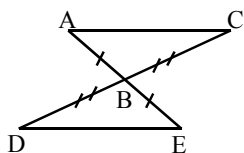
Ответ: 12,7 см; 17,3 см.



92.

Нет, не могут. Если треугольники равные, то у них равные соответственные стороны, а значит равны их перпендикуляры, что не так по условию.

93.



Дано:  $AB=BE$ ,  $DB=BC$

Доказать:

а)  $\triangle ABC = \triangle EBD$

б)  $\angle D = 47^\circ$ ,  $\angle E = 42^\circ$

$\angle A$ ,  $\angle C = ?$

Доказательство:

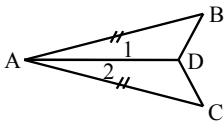
1) Рассмотрим  $\triangle EBD$  и  $\triangle ABC$

$AB=EB$  по условию;  $CB=DB$  как вертикальные;

$\angle ABC = \angle DBE$  по 2-му признаку, значит  $\triangle ABC = \triangle EBD$ , тогда,

$\angle A = \angle E = 42^\circ$ ;  $\angle D = \angle C = 47^\circ$ .

94.



Дано:  $AB=AC$ ,  $\angle 1 = \angle 2$

$AC=15$  см,  $DC=5$  см

Доказать: 1)  $\triangle ABD = \triangle ACD$

2)  $BD$ ,  $AB = ?$

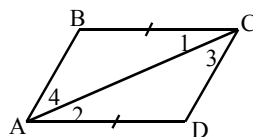
Доказательство:

$\angle 1 = \angle 2$ ;  $AB=AC$

сторона  $AD$  – общая, значит,  $\triangle ABD = \triangle ACD$  по 1-му признаку.

Далее, т.к.  $\triangle ABD = \triangle ACD$ , то  $BD=DC=5$  см;  $AB=AC=15$  см.

95.



Дано:  $BC=AD$   $\angle 1 = \angle 2$

$AD=17$  см,  $DC=14$  см

Доказать: 1)  $\triangle ABC = \triangle CDA$

2)  $AB$ ,  $BC = ?$

Доказательство:

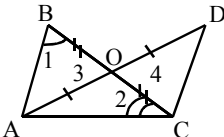
1) Рассмотрим  $\triangle CDA$  и  $\triangle ABC$

$BC=AD$ , сторона  $AC$  – общая;  $\angle 1 = \angle 2$

тогда  $\triangle ABC = \triangle CDA$  по 1-му признаку;

следовательно,  $AB=CD$  и  $AB=14$  см,  $BC=17$  см.

96.



Дано:  $OA=OD$ ,  $OB=OC$

$\angle 1 = 74^\circ$ ,  $\angle 2 = 36^\circ$

Доказать: 1)  $\triangle AOB = \triangle DOC$

2)  $\angle ACD = ?$

Доказательство:

1) Рассмотрим  $\triangle DOC$  и  $\triangle AOB$

$BO=OC$ ;  $AO=OD$ ;  $\angle 3 = \angle 4$  т.к. они вертикальные,

значит  $\angle AOB = \angle DOC$  по 1-му признаку;  $\angle 1 = \angle OCD = 74^\circ$ ,  
значит,  $\angle ACD = \angle 2 + \angle OCD = 36^\circ + 74^\circ = 110^\circ$ .  
Ответ:  $110^\circ$ .

**97.**

Дано:  $AO = OC$ ,  $BO = OD$

Доказать:  $\triangle ABC = \triangle CDA$

Доказательство:

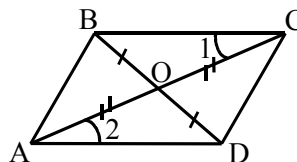
Рассмотрим  $\triangle COB$  и  $\triangle AOD$

$BO = OD$ ;  $AO = OC$

$\angle AOB = \angle COD$  т.к. они вертикальные, значит  $\triangle AOD = \triangle COB$  по 2-му признаку, тогда  $CB = AD$  и  $\angle 1 = \angle 2$ .

Рассмотрим  $\triangle CDA$  и  $\triangle ABC$

$BC = AD$ ,  $AC$  – общая сторона;  $\angle 1 = \angle 2$ , значит,  $\triangle ABC = \triangle CDA$  по 1-му признаку равенства  $\triangle$ , ч.т.д.



**98.**

Дано:  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ ,

$\angle A = \angle A_1$ ,  $AP = A_1P_1$

Доказать:  $\triangle BPC = \triangle B_1P_1C_1$ .

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle A_1B_1C_1$  и  $\triangle ABC$

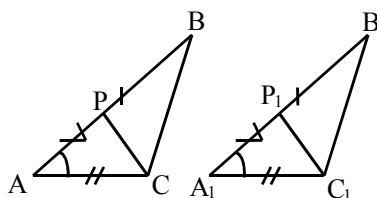
$AC = A_1C_1$ ,  $AB = A_1B_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ ,

значит  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  по 1-му признаку равенства треугольников, тогда  $BC = B_1C_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ .

Рассмотрим  $\triangle B_1P_1C_1$  и  $\triangle BPC$

$BC = B_1C_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $BP = B_1P_1$  т.к.

$BP = AB - AP = A_1B_1 - A_1P_1 = B_1P_1$ , тогда  $\triangle BPC = \triangle B_1P_1C_1$  по 1-му признаку, ч.т.д.



**99.**

Дано:  $AC = AD$ ,  $AB = AE$

Доказать:  $\angle CBD = \angle DEC$

Доказательство:

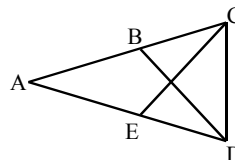
Рассмотрим  $\triangle ADB$  и  $\triangle ACE$

$AC = AD$ ;  $AE = AB$

$\angle A$  – общий угол  $\triangle ADB$  и  $\triangle ACE$

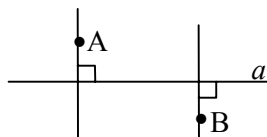
тогда  $\triangle ACE = \triangle ADB$  по 1-му признаку

$\angle ABD = \angle AEC$  следовательно,  $\angle CBD$ ,  $\angle ABD$  – смежные, тогда  $\angle CBD = 180^\circ - \angle ABD$ , тогда  $\angle DCE$ ,  $\angle AEC$  – смежные, тогда  $\angle CED = 180^\circ - \angle AEC$ , отсюда  $\angle CBD = \angle CED$ , т.к.  $\angle ABD = \angle AEC$ .

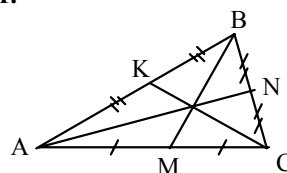


## § 2. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

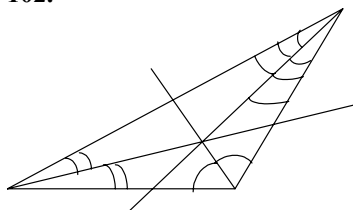
100.



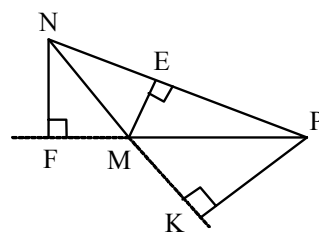
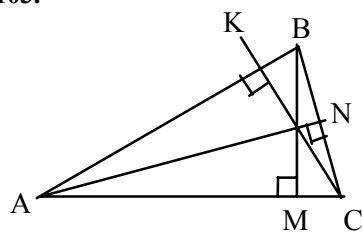
101.



102.

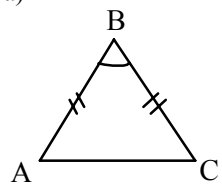


103.



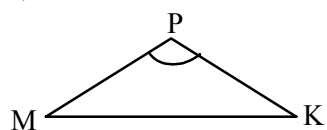
104.

а)



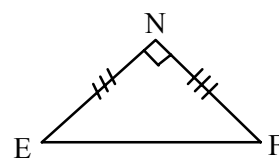
угол  $\angle B$  — острый

в)



угол  $\angle P$  — тупой

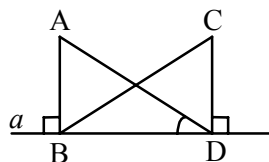
б)



угол  $\angle N$  — прямой

**105.**

Дано:  $AB, CD \perp a$   
 $AB=CD, \angle ADB=44^\circ$   
 Доказать:  $\triangle ABD = \triangle CDB$   
 $\angle ABC=?$

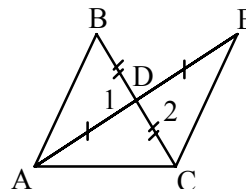


Доказательство:

1) Рассмотрим  $\triangle CDB$  и  $\triangle ABD$   
 сторона  $BD$  — общая  
 $AB=CD$ ;  $\angle B=\angle D=90^\circ$  по условию  
 значит  $\triangle ABD = \triangle CDB$  по 1-му признаку  
 2) тогда  $\angle ADB = \angle CBD$  следовательно  
 $\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = 90^\circ - 44^\circ = 46^\circ$

**106.**

Дано:  $AD=DE$ ;  $BD=DC$   
 $\angle ACD=56^\circ, \angle ABD=40^\circ$   
 Доказать:  $\triangle ABD = \triangle ECD$   
 $\angle ACE=?$

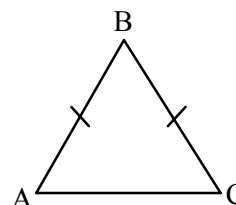


Доказательство:

1) Рассмотрим  $\triangle ECD$  и  $\triangle ABD$   
 $BD=DC$ ;  $AD=DE$ ;  $\angle 1 = \angle 2$  т.к. они вертикальные,  
 тогда  $\triangle ABD = \triangle ECD$  по 1-му признаку следовательно,  
 2)  $\angle ABD = \angle ECD$  и  $\angle ACE = \angle ACD + \angle DCE = 56^\circ + 40^\circ = 96^\circ$ .

**107.**

Дано:  $AB=BC, AB=2AC$   
 $P_{ABC}=50$  см  
 $AB, BC, AC=?$

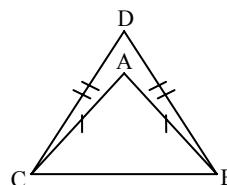


Решение:

Пусть  $AC=x$ , тогда  $AB=BC=2x$ ,  
 $P_{ABC}=AC+AB+BC$ , значит,  $50=x+2x+2x$ ,  
 $50=5x$ ,  $x=10$ ,  $AC=10$  см,  $AB=BC=20$  см.  
 Ответ: 10 см; 20 см; 20 см.

**108.**

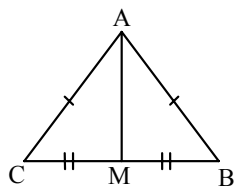
Дано:  $AB=AC$ ;  $P_{ABC}=40$  см;  $DB=DC=BC$   
 $P_{ACD}=45$  см;  $AB$  и  $BC=?$



Решение:

$P_{ABC}=AB+BC+AC=BC+2AB$  т.к.  $AB=AC$   
 $40=BC+2AB$   
 $P_{ACD}=DB+BC+CD=3BC$  т.к.  $BC=DC=BD$ ;  $45=3BC$ , значит,  
 $BC=15$  см и  $40=15+2AB$ ;  $2AB=25$ , т.е.  $AB=12,5$  см.  
 Ответ: 12,5 см; 15 см.

109.



Дано:  $AC=AB$ ;  $CM=MB$

$P_{ABM}=24$  см,  $P_{ABC}=32$  см

$AM=?$

Решение:

$P_{ABM}=AB+BM+AM$ ;  $24=AB+BM+AM$ ;

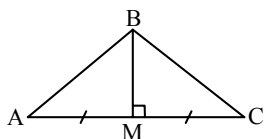
$P_{ABC}=AB+BC+AC$ ;  $32=2AB+2BM$

$16=AB+BM$ ;  $24=AB+BM+AM=16+AM$ , тогда,

$AM=8$  см.

Ответ: 8 см.

110.



Дано:  $AM=CM$ ,  $\angle BMC=90^\circ$

Доказать:  $AB=BC$

Доказательство:

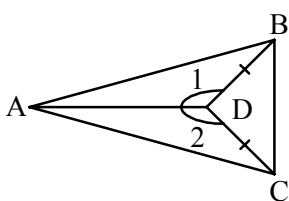
Рассмотрим  $\triangle CBM$  и  $\triangle ABM$

$AM=MC$ ; сторона  $BM$  – общая;  $\angle AMB=\angle CMB=90^\circ$ ,

значит,  $\triangle ABM=\triangle CBM$  по 1-му признаку

следовательно,  $AB=BC$ , ч.т.д.

111.



Дано:  $CD=BD$ ,  $\angle 1=\angle 2$

Доказать:  $AB=AC$

Доказательство:

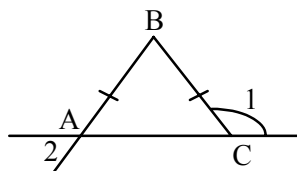
Рассмотрим  $\triangle ACD$  и  $\triangle ABD$

сторона  $AD$  – общая

$BD=DC$ ;  $\angle 1=\angle 2$

значит,  $\triangle ABD=\triangle ACD$  по 1-му признаку; тогда  $AB=AC$ , ч.т.д.

112.



Дано:  $AB=BC$ ,  $\angle 1=130^\circ$

$\angle 2=?$

Решение:

углы  $\angle 1$  и  $\angle ACB$  – смежные, т.е.

$\angle 1+\angle ACB=180^\circ$ ,

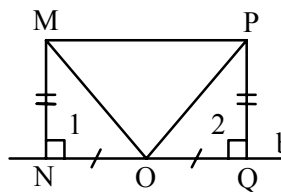
значит  $\angle ACB=180^\circ-130^\circ=50^\circ$ ;  $\triangle ABC$  – равнобедренный, значит,

$\angle BAC=\angle ACB=50^\circ$  как вертикальные,  $\angle 2=\angle BAC$ , т.е.  $\angle 2=50^\circ$

Ответ:  $50^\circ$ .

**113.**

Дано:  $MN, PQ \perp b$   
 $MN=PQ, NO=OQ$   
 $\angle MOP=105^\circ$   
 Доказать:  $\angle OMP=\angle OPM$   
 $\angle NOM=?$



Доказательство:

1) Рассмотрим  $\triangle POQ$  и  $\triangle HON$

$MN=PQ; NO=OQ; \angle N=\angle O=90^\circ$  — по условию,

тогда  $\triangle MON=\triangle POQ$  — по 1-му признаку

следовательно,  $\angle 1=\angle 2, OM=OP$ ,

тогда  $\triangle MOP$  — равнобедренный, откуда  $\angle OMP=\angle OPM$ .

2)  $\angle 1+\angle MOP+\angle 2=180^\circ$  — развернутый угол, т.е.

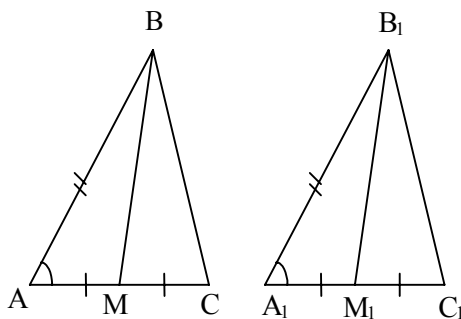
$\angle 1+105^\circ+\angle 2=180^\circ; \angle 1+\angle 2=75^\circ$ , но  $\angle 1=\angle 2$ , значит,

$\angle 1=\angle 2=37^\circ 30'$ , т.е.

$\angle NOM=37^\circ 30'$ .

Ответ:  $37^\circ 30'$ .

**114.**



Дано:  $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$

$BM, B_1M_1$  — медианы

Доказать:  $BM=B_1M_1$

Доказательство:

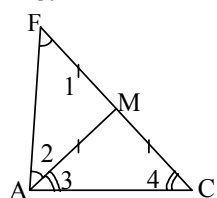
Рассмотрим  $\triangle A_1B_1M_1$  и  $\triangle ABM$

$AB=A_1B_1; \angle A=\angle A_1$  из равенства треугольников

$AM=A_1M_1$  потому что  $AM=\frac{1}{2}AC, A_1M_1=\frac{1}{2}A_1C_1$

и  $AC=A_1C_1$  значит,  $\triangle ABM=\triangle A_1B_1M_1$  — по первому признаку следовательно,  $BM=B_1M_1$  что и требовалось доказать.

115.



Дано:  $BM=MC=AM$   
Доказать:  $\angle A = \angle B + \angle C$

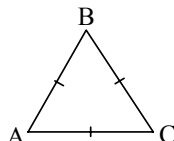
Доказательство:

$\triangle ABM$  — равнобедренный, потому что  $BM=MA$ , тогда  $\angle 1 = \angle 2$ .

$\triangle AMC$  — равнобедренный, потому что  $AM=MC$ , тогда  $\angle 3 = \angle 4$ .

$\angle A = \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 4$ , т.е.  $\angle A = \angle B + \angle C$  что и требовалось доказать.

116.



Дано:  $AB=BC=AC$ .  
Доказать:  $\angle A = \angle B = \angle C$ .

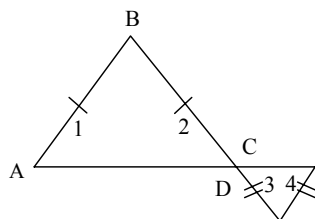
Доказательство:

$\triangle ABC$  — равнобедренный, потому что  $AB=BC$ , тогда  $\angle A = \angle C$

$\triangle ABC$  — равнобедренный, потому что  $AB=AC$ , тогда  $\angle B = \angle C$

Имеем:  $\angle A = \angle C = \angle B$ .

117.



Дано:  $AB=BC$ ,  $CD=DE$   
Доказать:  $\angle BAC = \angle CED$

Доказательство:

$\triangle ABC$  — равнобедренный, потому что  $AB=BC$ , тогда  $\angle 1 = \angle 2$

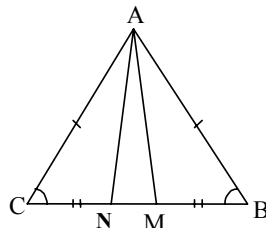
$\triangle CDE$  — равнобедренный, потому что  $CD=DE$ , тогда  $\angle 3 = \angle 4$

углы  $\angle 2$ ,  $\angle 3$  — вертикальные, т.е.  $\angle 2 = \angle 3$

Имеем:  $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$

Тогда  $\angle 1 = \angle 4$ , т.е.  $\angle BAC = \angle CED$ , что и требовалось доказать.

118.



Дано:  $AC=AB$   
 $CN=MB$

Доказать: а)  $\triangle BAM = \triangle CAN$

б)  $\triangle AMN$  — равнобедренный

Доказательство:

1) Рассмотрим  $\triangle ACN$  и  $\triangle ABM$   
 $AB=AC$   $BM=CN$

$\angle B = \angle C$  как углы при основании равнобедренного треугольника, значит  $\triangle ABM = \triangle ACN$  по первому признаку, следовательно,  $\triangle AMN$  — равнобедренный, что и требовалось доказать.

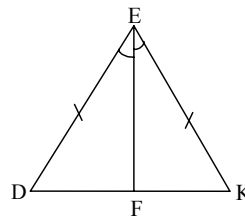
**119.**

Дано:  $DE = EK$

$\angle KEF = \angle DEF$ .

$DK = 16$  см,  $\angle DEF = 43^\circ$

$KF$ ,  $\angle DEK$ ,  $\angle EFD = ?$



Решение:

Так как  $\triangle DEK$  — равнобедренный, то  $EF$  — медианы и высота, т.е

$DF = FK$  и  $EF \perp DK$ , тогда  $\angle DEK = 2 \cdot \angle DEF$ ;  $\angle DEK = 2 \cdot 43^\circ = 86^\circ$ ;

$\angle EFK = 90^\circ$ ;  $KF = DF = \frac{1}{2} DK = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$  см.

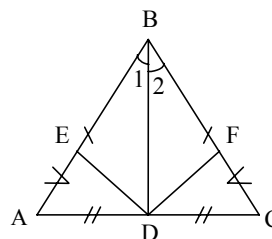
Ответ: 8 см,  $86^\circ$ ,  $90^\circ$ .

**120.**

Дано:  $AB = BC$ ,  $AE = FC$ ,

Доказать: а)  $\triangle BDE = \triangle BDF$

б)  $\triangle ADE = \triangle CDF$



Доказательство:

1) Рассмотрим  $\triangle CDF$  и  $\triangle ADE$ :

$AD = DC$ ,  $AE = FC$ ;  $\angle A = \angle C$  как углы при основании равнобедренного треугольника, значит,  $\triangle ADE = \triangle CDF$  по первому признаку

2) Рассмотрим  $\triangle BDF$  и  $\triangle BDE$

сторона  $BD$  — общая

$\angle 1 = \angle 2$  — свойство медианы в равнобедренном  $\triangle$

$BE = AB - AE = AB - FC = BC - FC = BF$ , значит  $\triangle BDE = \triangle BDF$  по 1-му признаку, что и требовалось доказать.

### § 3. Второй и третий признаки равенства треугольников

**121.**

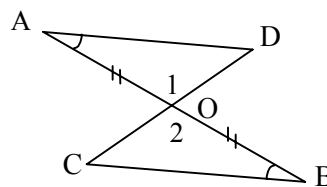
Дано:  $AO = OB$ ,

$\angle OAD = \angle OBC$

$CD = 26$  см,  $AD = 15$  см

Доказать:  $\triangle CBO = \triangle DAO$

$BC, CO = ?$



Доказательство:

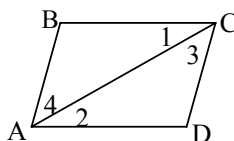
Рассмотрим  $\triangle DAO$  и  $\triangle CBO$

$AO=OB$ ;  $\angle A=\angle B$ ;  $\angle 1=\angle 2$  т.к. они вертикальные,  
значит  $\triangle CBO=\triangle DAO$  по 2-му признаку, следовательно  $CO=OD$ ,  
 $AD=CB$ ,  $\angle D=\angle C$

$$CD=OC+OD, CO=\frac{1}{2}CD=13\text{ см};$$

т.к.  $CO=OD$ , то  $BC=AD$  следовательно,  $BC=15$  см.

**122.**



Дано:  $\angle 1=\angle 2$ ;  $\angle 3=\angle 4$   
 $AD=19$  см,  $CD=11$  см  
 Доказать:  $\triangle ABC=\triangle CDA$   
 $AB, BC=?$

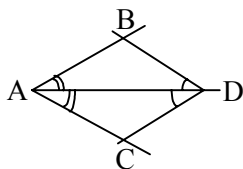
Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle CDA$  и  $\triangle ABC$

$AC$  — общая

$\angle 1=\angle 2$ ;  $\angle 3=\angle 4$ , значит  $\triangle ABC=\triangle CDA$  по второму признаку  
 тогда  $AB=CD=11$  см,  $BC=AD=19$  см.

**123.**



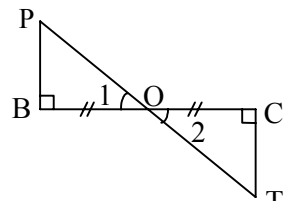
Дано:  $\angle BAD=\angle CAD$   
 $\angle ADB=\angle ADC$   
 Доказать:  $BD=CD$

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle ACD$  и  $\triangle ABD$

$\angle BAD=\angle CAD$ ;  $\angle BDA=\angle CAD$ ; сторона  $AD$  — общая  
 значит  $\triangle ABD=\triangle ACD$  по 2-му признаку,  
 тогда  $BD=CD$ , что и требовалось доказать.

**124.**



Дано:  $BO=OC$   
 $\angle B=\angle C=90^\circ$   
 Доказать:  $OP=OT$ ,  $\angle P=\angle T$

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle CTO$  и  $\triangle BPO$

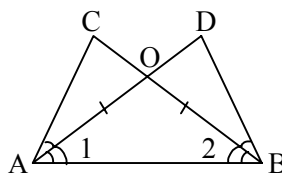
$BO=OC$ ;  $\angle B=\angle C=90^\circ$ ;  $\angle 1=\angle 2$  т.к. они  
 вертикальные, значит  $\triangle BPO=\triangle CTO$  по 2-му признаку,  
 тогда  $BP=CT$ ,  $PO=OT$ ,  $\angle P=\angle T$ , что и требовалось доказать.

**125.**

Дано:  $\angle DBC = \angle DAC$

$BO = AO$

Доказать:  $\angle C = \angle D$ ,  $AC = BD$



Доказательство:

Из  $AO = OB$ , следует  $\triangle AOB$  — равнобедренный,

т.е.  $\angle 1 = \angle 2$ .

Рассмотрим  $\triangle BDA$  и  $\triangle ABC$ :

$\angle CAB = \angle DBA$  т.к.  $\angle CAB = \angle CAD + \angle 1$ ;  $\angle DBA = \angle DBC + \angle 2$ ;

$\angle 1 = \angle 2$  сторона  $AB$  — общая

значит  $\triangle ACB = \triangle BDA$  (по стороне и 2 прилежащим к ней углам).

т.е.  $AC = DB$ ,  $\angle C = \angle D$ , что и требовалось доказать.

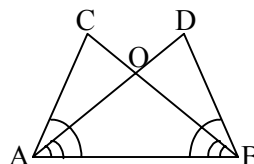
**126.**

Дано:  $\angle DAB = \angle CBA$ ,

$\angle CAB = \angle DBA$

$CA = 13$  см

$DB = ?$



Решение:

Рассмотрим  $\triangle ADB$  и  $\triangle ACB$ :

$\angle CAB = \angle ABD$ ;  $\angle ABC = \angle DBA$ ; сторона  $AB$  — общая

значит  $\triangle ACB = \triangle BDA$  по 2-му признаку, тогда  $AC = BD = 13$  см.

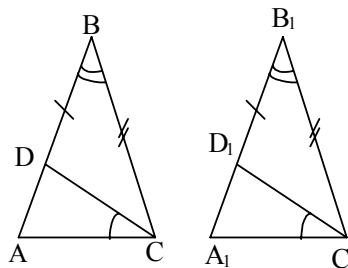
**127.**

Дано:  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$ ,

$\angle B = \angle B_1$

$\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$

Доказать:  $\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$



Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle A_1B_1C_1$  и  $\triangle ABC$ :

$AB = A_1B_1$ ;  $BC = B_1C_1$ ;  $\angle B = \angle B_1$

значит  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  по первому признаку

следовательно,  $AC = A_1C_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$

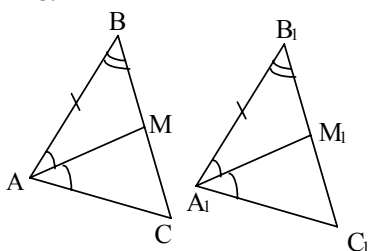
Рассмотрим  $\triangle D_1B_1C_1$  и  $\triangle DBC$ :

$BC = B_1C_1$ ;  $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$ , потому что

$\angle BCD = \angle C - \angle ACD$ , и  $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$ ;

$\angle B_1C_1D_1 = \angle C_1 - \angle A_1C_1D_1$ ;  $\angle B = \angle B_1$ , значит  $\triangle DBC = \triangle D_1B_1C_1$  по второму признаку, что и требовалось доказать.

128.



Дано:  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$   
 $\angle BAM = \angle M_1A_1C_1$   
 $\angle B_1A_1M_1 = \angle M_1A_1C_1$   
 Доказать:  $AM = A_1M_1$

Доказательство:

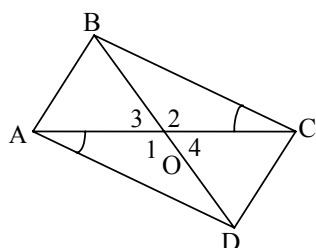
Рассмотрим  $\triangle A_1B_1M_1$  и  $\triangle ABM$ :  
 $AB = A_1B_1$  из равенства  
 $\angle B = \angle B_1$   $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

$\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$  (т. к.  $\angle A = \angle A_1$ )

значит  $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$  по 2-му признаку

следовательно,  $AM = A_1M_1$ , что и требовалось доказать.

129.



Дано:  $OA = OC$ ,  $\angle BCO = \angle DAO$   
 Доказать:  $\triangle BOA = \triangle DOC$

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle COB$  и  $\triangle AOD$

$\angle A = \angle C$ ;  $AO = OC$

$\angle 1 = \angle 2$  т. к. они вертикальные, значит

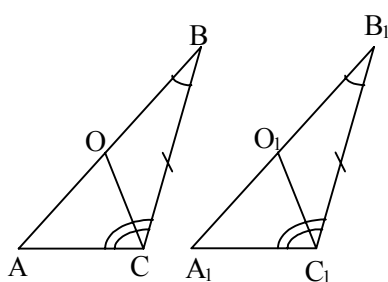
$\triangle AOB = \triangle COB$  по 2-му признаку

тогда  $BO = OD$

Рассмотрим  $\triangle CDO$  и  $\triangle ABO$ :

$AO = OC$ ;  $BO = OD$ ;  $\angle 3 = \angle 4$  как вертикальные, тогда  $\triangle ABO = \triangle CDO$  по 1-му признаку.

130.



Дано:  $CO$ ,  $C_1O_1$  — медианы  
 $BC = B_1C_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$   
 Доказать: 1)  $\triangle AOC = \triangle A_1O_1C_1$   
 2)  $\triangle BCO = \triangle B_1C_1O_1$

Доказательство:

1) Рассмотрим  $\triangle A_1B_1C_1$  и  $\triangle ABC$

$BC = B_1C_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$

тогда  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  по 2-му признаку

значит  $AB = A_1B_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ ,  $AC = A_1C_1$

2) Рассмотрим  $\triangle A_1O_1C_1$  и  $\triangle AOC$ :

$AC = A_1C_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ ,

$$AO=A_1O_1 \text{ (т. к. } AO=\frac{1}{2} AB, A_1O_1=\frac{1}{2} A_1B_1 \text{ и } AB=A_1B_1).$$

значит  $\triangle AOC=\triangle A_1O_1C_1$  по 1-му признаку

3) Рассмотрим  $\triangle B_1C_1O_1$  и  $\triangle BCO$ :

$$BC=B_1C_1, \angle B=\angle B_1$$

$$OB=O_1B_1 \text{ (т. к. } OB=\frac{1}{2} AB, O_1B_1=\frac{1}{2} A_1B_1 \text{ и } AB=A_1B_1)$$

значит  $\triangle BCO=\triangle B_1C_1O_1$  по 1-му признаку.

### 131.

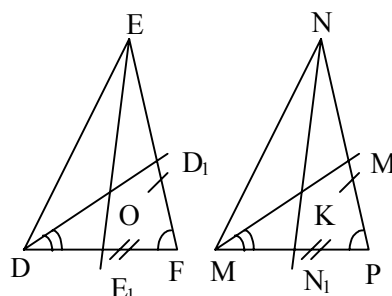
Дано:  $EF=NP$ ,  $DF=MP$ ,

$$\angle F=\angle P$$

$EE_1, DD_1$  — биссектрисы

$MM_1$  и  $NN_1$  — биссектрисы

Доказать:  $\angle DOE=\angle MKN$ .



Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle MNP$  и  $\triangle DFE$ :

$$EF=NP; DF=MP; \angle F=\angle P,$$

значит  $\triangle DEF=\triangle MNP$  по 1-му

признаку, следовательно,  $\angle D=\angle M$ ,  $\angle E=\angle N$ ,  $DE=MN$ .

Рассмотрим  $\triangle MKN$  и  $\triangle DOE$ :

$$DE=MN; \angle EDO=\angle NMK \text{ (т. к. } \angle FDO=\frac{1}{2} \angle D, \angle MNK=\frac{1}{2} \angle M \text{ и}$$

$$\angle D=\angle M); \angle DEO=\angle MNK \text{ (т. к. } \angle DEO=\frac{1}{2} \angle E, \angle MNK=\frac{1}{2} \angle N \text{ и}$$

$$\angle E=\angle N).$$

значит  $\triangle DOE=\triangle MKN$  по 2-му признаку, следовательно,

$\angle DOE=\angle MKN$  что и требовалось доказать.

### 132.

Дано:  $\angle NAA_1=\angle MAA_1$

$$a \perp AA_1$$

Доказать:  $AM=AN$

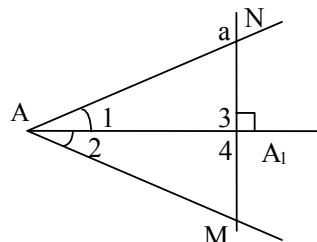
Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle AMA_1$  и  $\triangle ANA_1$ :

сторона  $AA_1$  — общая

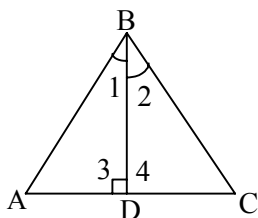
$$\angle 1=\angle 2 \text{ — по условию}$$

$$\angle 3=\angle 4=90^\circ \text{ — по условию}$$



тогда  $\triangle ANA_1 = \triangle AMA_1$  по 2-му признаку  
следовательно,  $AN = AM$  и значит,  $\triangle AMN$  — равнобедренный, что  
и требовалось доказать.

133.



Дано:  $\angle ABC = \angle CBD$   
 $\angle ADB = 90^\circ = \angle CDB$

Доказать:  $AB = BC$

Доказательство:

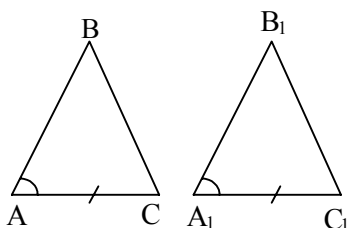
Рассмотрим  $\triangle CBD$  и  $\triangle ABD$ :

сторона  $BD$  — общая

$\angle 1 = \angle 2$ ;  $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$ ;

значит  $\triangle ABD = \triangle CBD$  по 2-му признаку, тогда  $AB = BC$  и  
 $\triangle ABC$  — равнобедренный, что и требовалось доказать.

134.



Дано:  $AB = BC$

$A_1B_1 = B_1C_1$

$AC = A_1C_1$   $\angle A = \angle A_1$

Доказать:  $ABC = A_1B_1C_1$

Доказательство:

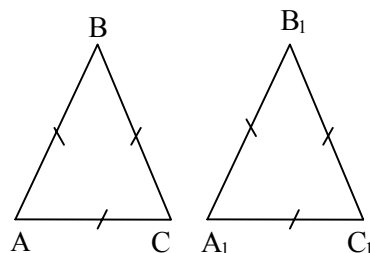
Из  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A_1B_1C_1$  — равнобедренные, следует что

$\angle A = \angle C$ ,  $\angle A_1 = \angle C_1$

из  $\angle A = \angle A_1$ , следует  $\angle C = \angle C_1$  тогда,  $AC = A_1C_1$ ;  $\angle A = \angle A_1$ ;  $\angle C = \angle C_1$

значит  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  по 2-му признаку

135.



Дано:  $AB = BC = AC$

$A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1$

$AB = A_1B_1$

Доказать:  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Доказательство:

Имеем:  $AB = AC = BC$  и

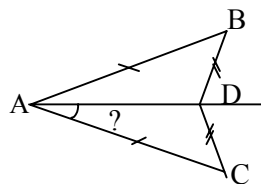
$A_1B_1 = A_1C_1 = B_1C_1$

т. к.  $AB = A_1B_1$

то  $BC = B_1C_1$  и  $AC = A_1C_1$ , тогда  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  по 3-му признаку, что  
и требовалось доказать.

**136.**

Дано:  $AB=BC$   
 $BD=DC$   $\angle BAC=50^\circ$   
 $\angle CAD=?$



Решение:

1) Рассмотрим  $\triangle ACD$  и  $\triangle ABO$ :

$AB=AC$ ;  $BD=DC$

сторона  $AD$  — общая

значит  $\triangle ABD=\triangle ACD$  по 3-му признаку

и тогда  $\angle BAD=\angle CAD$

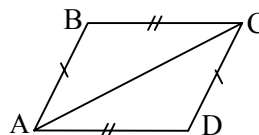
имеем:  $\angle CAD+\angle BAD=\angle BAC$ ;  $2\angle CAD=\angle BAC$

$$\angle CAD = \frac{1}{2} \cdot 50^\circ = 25^\circ.$$

Ответ:  $25^\circ$ .

**137.**

Дано:  $BC=AD$   
 $AB=CD$   
Доказать:  $\angle B=\angle D$



Доказательство:

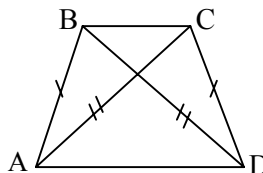
Рассмотрим  $\triangle CDA$  и  $\triangle ABD$ :

$AB=CD$ ;  $BC=AD$

сторона  $AC$  — общая; значит  $\triangle ABC=\triangle CDA$  по 3-му признаку, следовательно,  $\angle B=\angle D$  что и требовалось доказать.

**138.**

Дано:  $AB=CD$   
 $BD=AC$   
Доказать: 1)  $\angle CAD=\angle ADB$   
2)  $\angle BAC=\angle CDB$



Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle DCA$  и  $\triangle ABC$ :

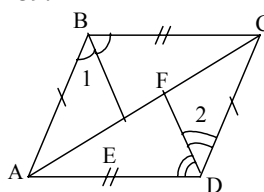
$AB=CD$ ;  $BD=AC$ ; сторона  $AD$  — общая

значит  $\triangle ABD=\triangle DCA$  по 3-му признаку, тогда  $\angle ADB=\angle CAD$ , из равенства треугольников  $\angle BAD=\angle CDA$

$\angle BAC=\angle BAD - \angle CAD$ , но  $\angle BAD=\angle CDA$ , а  $\angle CAD=\angle ADB$

$\angle CDB=\angle CDA - \angle ADB$ ;  $\angle BAC=\angle CDB$ , что и требовалось доказать.

139.



Дано:  $AB=CD$ ,  $AD=BC$

$\angle ABE=\angle CBE$

$\angle ADF=\angle CDF$

Доказать: 1)  $\angle ABE=\angle ADF$

2)  $\triangle ABE=\triangle CDF$

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle CDA$  и  $\triangle ABC$

$AB=CD$ ;  $BC=AD$ ; сторона  $AC$  — общая,

значит  $\triangle ABC=\triangle CDA$  по 3-му признаку  $\angle B=\angle D$ ,

тогда:  $\angle BAC=\angle DCA$ ,  $\angle ACB=\angle CAD$

Далее:

$$\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABC; \quad \angle ADF = \frac{1}{2} \angle ADC$$

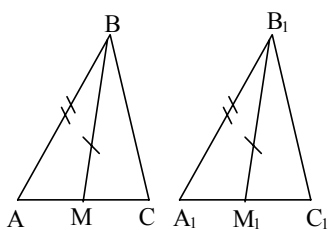
значит  $\angle ABE=\angle ADF$ , т. к.  $\angle B=\angle D$ .

Рассмотрим  $\triangle CDF$  и  $\triangle ABE$ :

$AB=CD$ ;  $\angle BAC=\angle DCA$ ;  $\angle 1=\angle 2$ , т. к.  $\angle ABE=\angle ADF=\angle CDF$

значит  $\triangle ABE=\triangle CDF$  по 2-му признаку.

140.



Дано:  $AM=CM$

$A_1M_1=C_1M_1$

$BM=B_1M_1$ ,  $AB=A_1B_1$ ,  $AC=A_1C_1$

Доказать:  $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$

Доказательство:

Из  $AC=A_1C_1$  т. е.

$$\frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} A_1C_1, \text{ получаем } AM=A_1M_1$$

Рассмотрим  $\triangle ABM$  и  $\triangle A_1B_1M_1$ :

$AB=A_1B_1$ ;  $BM=B_1M_1$ ;  $AM=A_1M_1$

значит  $\triangle ABM=\triangle A_1B_1M_1$  по 3-му признаку

следовательно,  $\angle A=\angle A_1$

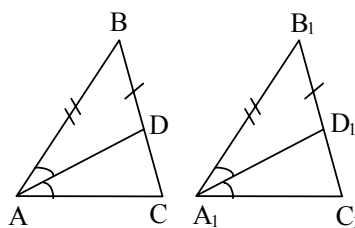
Рассмотрим  $\triangle A_1B_1C_1$  и  $\triangle ABC$

$AB=A_1B_1$ ,  $AC=A_1C_1$ ,  $\angle A=\angle A_1$ ,

значит  $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$  по 1-му признаку.

**141.**

Дано:  $AD, A_1D_1$  — биссектрисы  
 $AB=A_1B_1, BD=B_1D_1, AD=A_1D_1$   
 Доказать:  $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$



Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle A_1B_1D_1$  и  $\triangle ABD$

$AB=A_1B_1, AD=A_1D_1,$

$BD=B_1D_1$ , значит  $\triangle ABD=\triangle A_1B_1D_1$  по 3-му признаку

следовательно,  $\angle BAD=\angle B_1A_1D_1, \angle B=\angle B_1$

Из  $AD$  и  $A_1D_1$  — биссектрисы, получаем  $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$

Рассмотрим  $\triangle A_1B_1C_1$  и  $\triangle ABC$ :

$AB=A_1B_1, \angle B=\angle B_1, \angle BAC=\angle B_1A_1C_1$

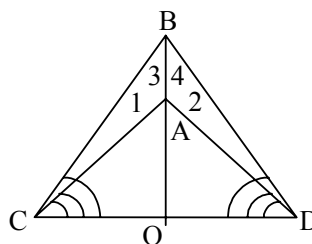
тогда  $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$  по 2-му признаку, что и требовалось доказать.

**142.**

Дано:  $BC=BD, AC=AD$

Доказать: а)  $\angle ADB=\angle ACB$

б)  $DO=OC$



Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle ABD$  и  $\triangle ABC$

$CB=BD, AC=AD$

сторона  $BA$  — общая

тогда  $\triangle ABC=\triangle ABD$  по 3-му признаку

следовательно,  $\angle ACB=\angle ADB, \angle CBA=\angle DBA$

Рассмотрим  $\triangle DBO$  и  $\triangle CBO$ :

сторона  $BO$  — общая;

$BC=BD, \angle CBO=\angle DBO$ , тогда  $\triangle CBO=\triangle DBO$  по 1-му признаку и значит  $CO=OD$ , что и требовалось доказать.

## § 4. Задачи на построение

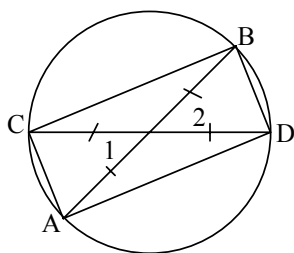
**143.**

а) хорды окружности:  $MN, CD, AB$ ;

б) диаметр:  $AB$ ;

в) радиусы:  $OP, OA, BO$

144.



Дано: AB, CB — диаметры

Доказать: а)  $BD=AC$

б)  $AD=BC$

в)  $\angle BAD=\angle BCD$

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle BOD$  и  $\triangle AOC$

$OA=OB=R$  — радиус

$CO=OD=R$  — радиус

$\angle 1=\angle 2$  т. к. они вертикальные

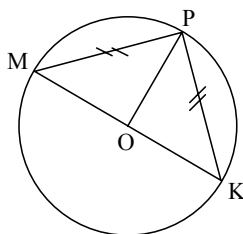
значит  $\triangle AOC=\triangle BOD$  по 1-му признаку, следовательно,  $AC=BD$ .

Также из  $\triangle AOB=\triangle BOC$  следует  $AD=BC$ .

Рассмотрим  $\triangle ABD$  и  $\triangle BOC$ ; сторона  $DB$  — общая;

$BC=AD$ ;  $PC=AB$ , значит  $\triangle ABC=\triangle ABD$  и тогда  $\angle DAB=\angle ABD$ .

145.



Дано: MK — диаметр

$MP=KP$

$\angle POM=?$

Решение:

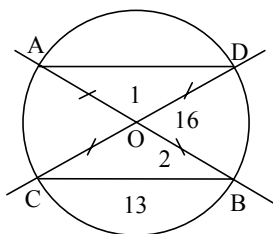
Из  $MP=PK$  следует, что  $\triangle MPK$  — равнобедренный

Т. к.  $MO=OK$  — радиусы, то  $PO$  — медиана равнобедренного  $\triangle MPK$ , опущенная на основание,

тогда  $PO$  — биссектриса и высота (по свойству равнобедренного треугольника) и  $\angle MOP=90^\circ$ .

Ответ:  $90^\circ$ .

146.



Дано: AB, CD — диаметры

$CB=13$  см,  $AB=16$  см

$P_{AOD}=?$

Решение:

Рассмотрим  $\triangle COB$  и  $\triangle AOD$ :

$AO=OB=OC=OD$  (как радиусы)

$\angle 1=\angle 2$  т. к. они вертикальные

значит  $\triangle AOD=\triangle COB$  по 2-му признаку

следовательно,  $AD=CB=13$  см и  $AO=OB=OC=OD=8$  см, тогда

$P_{AOD}=AO+OD+AD=8+8+13=29$  см

Ответ: 29 см.

**147.**

Дано:  $\angle AOB = 90^\circ$

BC — диаметр.

Доказать:  $AC = AB$

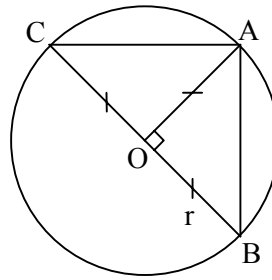
Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle BOA$  и  $\triangle COA$ :

сторона  $OA$  — общая

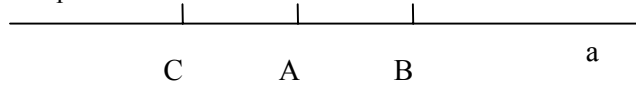
$CO = OB$  — радиусы;  $\angle COA = \angle BOA = 90^\circ$

значит  $\triangle COA = \triangle BOA$  по 1-му признаку  
и  $AC = AB$ , что и требовалось доказать.

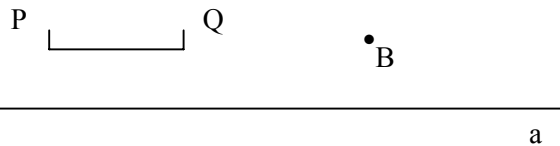


**148.**

См. рис.

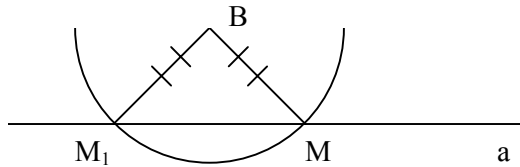


**149.**



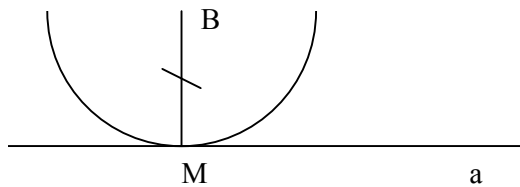
Возможны три случая:

**I случай**



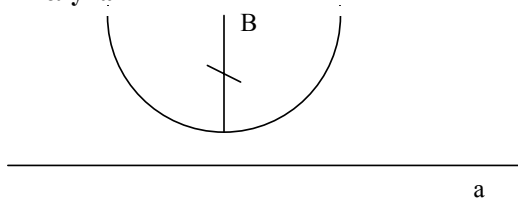
на прямой есть 2 точки, удаленные от B на расстояние PQ.

**II случай**



одна точка на прямой, которая удалена от B на расстояние PQ.

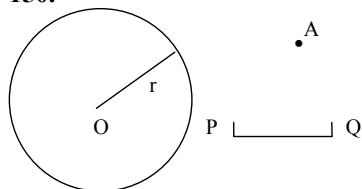
### III случай



не существует такой точки на прямой  $a$ .

$PQ=BM$  — радиус окружности с центром в точке  $B$ , так мы строим  $M$ . В третьем случае задача не имеет решения.

### 150.

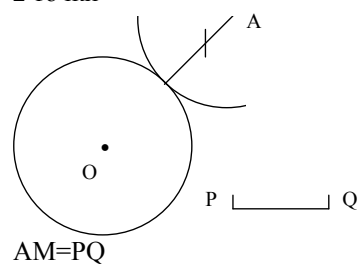


Снова возможны 3 случая:

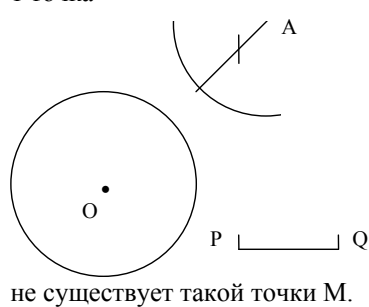
Построение делаем как и в предыдущей задаче. И опять задача не всегда имеет решение, пример — 3 случай.

$AM=PQ$

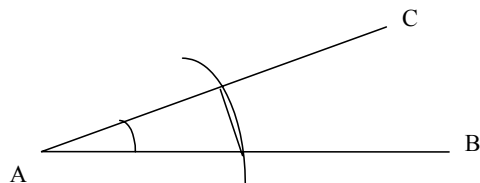
2 точки

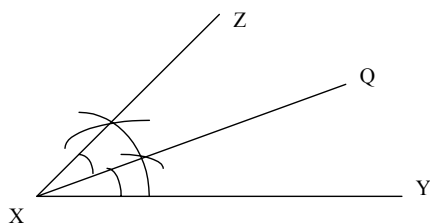


1 точка



### 151.





Построение:

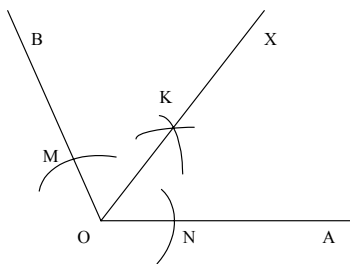
С помощью циркуля построим  $\angle YXQ = \angle BAC$ , от луча XQ при помощи циркуля отложим еще раз  $\angle QXZ = \angle BAC$  и получим  $\angle YXZ = 2\angle BAC$

**152.**

Построение:

Построим окружность с центром в O любого радиуса. Окружность пересечет стороны угла в точках N и M.

Построим 2 окружности с одинаковым радиусом, большим половины длины отрезка MN. Одна окружность с центром M, а другая с центром N. Эти окружности пересекутся в точке K. OK и есть искомый луч.



**153.**

Построение приведено в учебнике.

**154.**

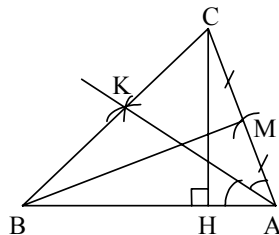
Построение:

а) Построение биссектрисы АК приведено в задаче о построении биссектрисы угла.

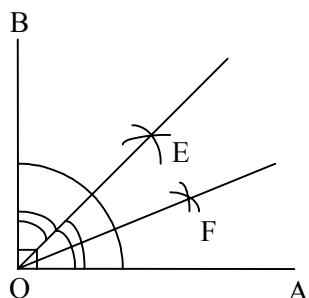
б) Строим точку M — середину CA (по задаче о построении середины отрезка).

в) Построим прямую a так, чтобы  $C \in a$  и  $a \perp AB$  (задача 153).

Пересечение AB и a есть H. CH — искомая высота.



155.



Построение:

С помощью треугольника построим  $\angle AOB = 90^\circ$  - прямой.

Построим биссектрису OE, имеем:

$\angle AOE = \angle BOE = 45^\circ$ .

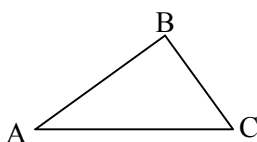
Построим OF — биссектрису  $\angle AOE$ .

Имеем:

$\angle AOF = \angle EOF = 22^\circ 30'$ .

Что и требовалось построить.

156.



Дано:  $P_{ABC} = 15$  см

$BC = AB + 2$ ,  $AC = AB + 1$

$AB$ ,  $BC$ ,  $AC = ?$

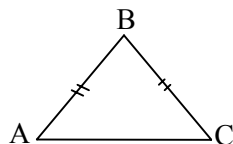
Решение:

Пусть  $AB = x$  см, т. к.  $P_{ABC} = AB + BC + AC$ , то

$15 = x + x + 2 + x + 1$ ,  $3x = 12$ ,  $x = 4$  см

Ответ:  $BC = 6$  см,  $AC = 5$  см,  $AB = 4$  см.

157.



Дано:  $AB = BC$

$AC = AB + 2$

$AC + 3 = AB + BC$

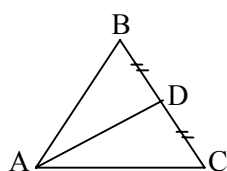
$AB$ ,  $BC$ ,  $AC = ?$

Решение:

Пусть  $AB = BC = x$  см, тогда  $AC = x + 2$  см и  $x + 2 + 3 = x + x$ ,  $x = 5$  значит,  $AB = BC = 5$  см,  $AC = 7$  см.

Ответ: 5 см; 5 см; 7 см.

158.



Дано:  $AB = BC$ ,  $AC = 8$  см

$P_{ABD} = P_{ADC} + 2$  см;  $BD = CD$ .

$AB = ?$

Решение:

$P_{ABD} = AB + BD + AD$  значит  $P_{ABD} - P_{ADC} = 2$  см

$P_{ADC} = AC + CD + AD$  значит  $AB + BD + AD - AC - CD - AD = 2$

$AB - AC = 2$ ; из  $AC = 8$ , следует  $AB - 8 = 2$   $AB = 10$  см

Ответ: 10 см.

**159.**

Дано:  $AB=BC$ ;  $A_1B_1=B_1C_1$

$AB=A_1B_1$ ,  $\angle B=\angle B_1$

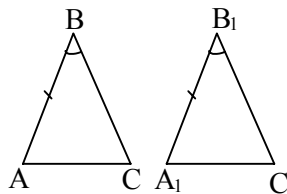
Доказать:  $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$

Доказательство:

Имеем  $AB=BC=A_1B_1=B_1C_1$  — из условия

Рассмотрим  $\triangle A_1B_1C_1$  и  $\triangle ABC$ :

$AB=A_1B_1$ ,  $BC=B_1C_1$ ,  $\angle B=\angle B_1$ , значит  $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$  по первому признаку.



**160.**

Дано:  $AO=OB$ ,  $\angle AOD=\angle BOD=90^\circ$

Доказать: 1)  $AD=DB$

2) если  $AD=DB$ , то  $D \in a$ .

Доказательство:

1) Рассмотрим  $\triangle BDO$  и  $\triangle ADO$

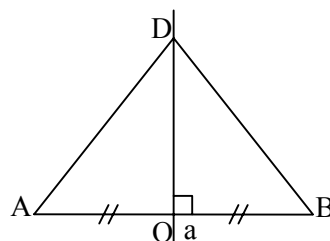
сторона  $DO$  — общая,

$AO=OB$

значит  $\angle AOD=\angle BOD=90^\circ$

$\triangle AOD=\triangle BOD$  по 2-му признаку

тогда  $AD=DB$ .



2)

Докажем обратное

если  $AD=BD$ , то  $D \in a$

Рассмотрим  $\triangle BDO$  и  $\triangle ADO$ :

$AD=BD$ ,  $AO=OB$ , сторона  $DO$  —

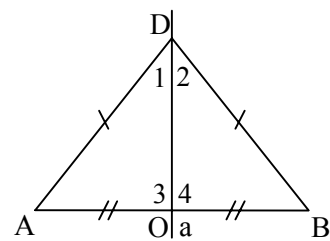
общая, значит  $\triangle ADO=\triangle BDO$  по 3-

му признаку, следовательно,

$\angle 1=\angle 2$ ;  $\angle 3=\angle 4$ ;  $\angle 3, \angle 4$  — смеж-

ные и  $\angle 3=\angle 4$ , значит,  $\angle 3=\angle 4=90^\circ$

и, значит,  $DO \perp AB$ , и  $DO$  и  $a$  совпадают, т.е.  $D \in a$ .



**161.**

Дано:  $AM, A_1M_1$  — медианы,

$AM=A_1M_1$ ,  $BC=B_1C_1$ ,

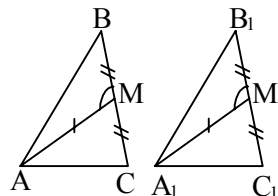
$\angle AMB=\angle A_1M_1B_1$

Доказать:  $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle A_1B_1M_1$  и  $\triangle ABM$ :

$AM=A_1M_1$ ,  $BM=B_1M_1$  (т. к.  $BM=\frac{1}{2}BC$ ;  $B_1M_1=\frac{1}{2}B_1C_1$  и  $BC=B_1C_1$ )

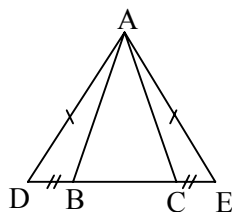


$\angle M = \angle M_1$ , значит  $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$  по 1-му признаку, следовательно,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $AB = A_1B_1$ .

Рассмотрим  $\triangle A_1B_1C_1$  и  $\triangle ABC$

$AB = A_1B_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $BC = B_1C_1$ , тогда  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  по 1-му признаку, что и требовалось доказать.

**162.**



Дано:  $AD = AE$

а)  $BD = CE$

Доказать:  $\angle CAD = \angle BAE$ ,  $AB = AC$

б)  $\angle CAD = \angle BAE$

Доказать:  $BD = CE$ ,  $AB = AC$

а) Рассмотрим  $\triangle AEC$  и  $\triangle ADB$ :

$AD = AE$ ,  $DB = CE$ ,  $\angle D = \angle E$  углы при основании равнобедренного треугольника, тогда  $\triangle ADB = \triangle AEC$  по 1-му признаку, значит  $AC = AB$ .

Рассмотрим  $\triangle EBA$  и  $\triangle DAC$

$AD = AE$ ,  $AC = AB$ ;  $DC = BE$ , потому что  $BD = CE$  и  $BC$  — общая сторона, тогда  $\triangle DAC = \triangle EBA$  по 3-му признаку, значит  $\angle CAD = \angle BAE$ .

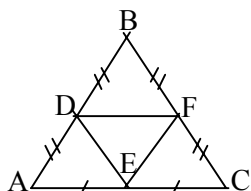
б) Рассмотрим  $\triangle ADC$  и  $\triangle EAB$

$AD = AE$ ,  $\angle D = \angle E$  при основании равнобедренного треугольника,  $\angle CAD = \angle BAE$  значит,  $\triangle DAC = \triangle EAB$  (по стороне и 2 прилежащим углам), следовательно,  $DC = BE$ ,  $AC = AB$ .

Что и требовалось доказать.

Что и требовалось доказать.

**163.**



Дано:  $AB = BC$

$E, D, F$  — середины  $AC, AB, BC$

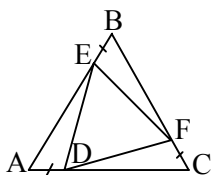
Доказать:  $\triangle DFE$  — равнобедренный.

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle CEF$  и  $\triangle ADE$ :

$AD = FC$ ,  $AE = EC$ ,  $\angle A = \angle C$  углы при основании равнобедренного треугольника, значит  $\triangle ADE = \triangle CEF$  по 1-му признаку, тогда  $DE = EF$  и значит  $\triangle DFE$  — равнобедренный.

**164.**



Дано:  $AB = BC = AC$

$EB = FC = AD$

Доказать:  $EF = FD = DE$

Доказательство:

Из  $AB = BC = AC$ ,  $EB = FC = AD$  следует, что

$AE = BF = CD$ .

Далее:

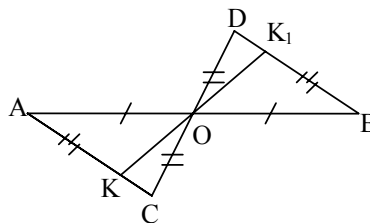
$AD=EB=FC$ ,  $AE=BF=DC$ ,  $\angle A=\angle B=\angle C$  (как углы равнобедренного треугольника), значит  $\triangle AED=\triangle EBF=\triangle DFC$  по 1-му признаку, тогда  $DE=EF=DC$  и значит  $\triangle DEF$  — равносторонний.

**165.**

Дано:  $AO=OB$ ,  $CO=OD$ ,  $AK=BK_1$

Доказать: а)  $OK=OK_1$

б)  $O \in KK_1$



Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle BOD$  и  $\triangle AOC$ :

$AO=OB$ ,  $CO=OD$ ,

$\angle AOC=\angle BOD$  т. к. они верти-

кальные, значит  $\triangle AOC=\triangle BOD$  по 1-му признаку, следовательно,  $\angle A=\angle B$ .

Рассмотрим  $\triangle BK_1O$  и  $\triangle AKO$ :

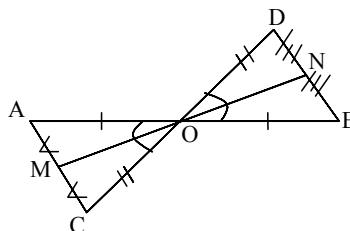
$AK=BK_1$ ,  $AO=OB$ ,  $\angle A=\angle B$ , тогда  $\triangle AKO=\triangle BK_1O$  по 1-му признаку, значит  $\angle AOK=\angle BOK_1$ ,  $KO=OK_1$ ,  $\angle AOK=\angle BOK_1$   $AB$  — лежит на прямой, тогда  $\angle AOK$ ,  $\angle BOK_1$  — вертикальные, и тогда  $O$ ,  $K$ ,  $K_1$  лежат на одной прямой.

**166.**

Дано:  $AO=OB$ ,  $CO=CD$ ,  $AM=MC$ ,

$BN=ND$

Доказать:  $OM=ON$



Доказательство:

1) Рассмотрим  $\triangle BOD$  и  $\triangle AOC$ :

$AO=OB$ ,  $CO=OD$

$\angle AOC=\angle BOD$  т. к. вертикальные,

значит  $\triangle AOC=\triangle BOD$  по 1-му признаку, следовательно,  $AC=BD$ ,  $\angle C=\angle D$ ,  $\angle A=\angle B$

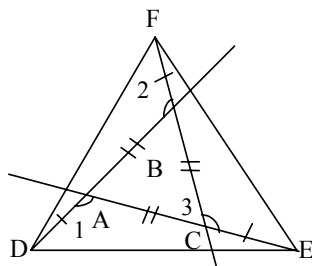
2) Рассмотрим  $\triangle DON$  и  $\triangle MOC$ :

$OC=OD$ ,  $\angle C=\angle D$ ,

$MC=DN$  (т. к.  $MC=\frac{1}{2} AC$ ,  $DN=\frac{1}{2} BD$  и  $AC=BD$ ),

значит  $\triangle MOC=\triangle DON$  по 1-му признаку, и значит  $OM=ON$ , что и требовалось доказать.

167.



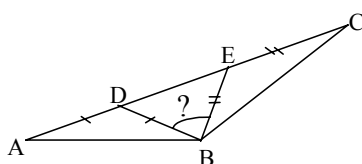
Дано:  $AB=BC=AC$ ,  $BF=CE=AD$   
Доказать:  $\triangle DEF$  — равносторонний.

Доказательство:

Из  $\triangle ABC$  — равносторонний, следует  $\angle A = \angle B = \angle C$ ,  $\angle 1$  и  $\angle A$ ,  $\angle 2$  и  $\angle B$ ,  $\angle 3$  и  $\angle C$  — смежные, значит,  $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ .  
Рассмотрим  $\triangle FEC$  и  $\triangle DEA$  и  $\triangle DBF$   
 $BF=CE=AD$

$DB=FC=AE$  ( $AB=BC=AC$  и  $DA=BF=CE$ ),  $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ , значит  $\triangle DBF = \triangle FEC = \triangle DEA$  по 1-му признаку, следовательно,  $FD=FE=DE$  и  $\triangle DFE$  — равносторонний.

168.



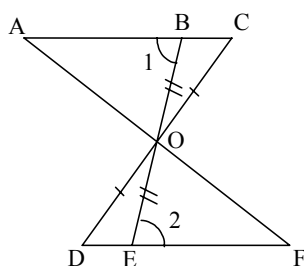
Дано:  $\angle A = 38^\circ$ ,  $\angle B = 110^\circ$ ,  $\angle C = 32^\circ$   
 $BD=DA$ ,  $BE=EC$ ,  $\angle DBE = ?$

Решение:

т. к.  $\triangle ADB$  — равнобедренный,  
то  $\angle A = \angle DAB = \angle ABO = 38^\circ$

т. к.  $\triangle BEC$  — равнобедренный, то  $\angle C = \angle BCE = \angle CBE = 32^\circ$   
 $\angle B = \angle ABD + \angle DBE + \angle CBE$  или  $110^\circ = 38^\circ + \angle DBE + 32^\circ$ , т.е.  $\angle DBE = 40^\circ$ .  
Ответ:  $40^\circ$ .

169.



Дано:  $OC=OD$ ,  $BO=OE$   
Доказать:  $AB=EF$

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle EOD$  и  $\triangle BOC$ :  
 $BO=OE$ ;  $CO=OD$ ;  $\angle BOC = \angle EOD$  т. к. они вертикальные, значит  $\triangle BOC = \triangle EOD$  по 1-му признаку, следовательно,  $\angle B = \angle E$ ,  $\angle 1$ ,  $\angle B$  — смежные, значит,

$\angle 1 = 180^\circ - \angle B$ ,  $\angle 2$ ,  $\angle E$  — смежные, значит,  $\angle 2 = 180^\circ - \angle E$ .

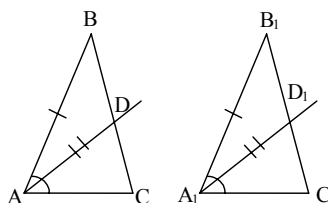
Из  $\angle B = \angle E$  следует  $\angle 1 = \angle 2$ .

Рассмотрим  $\triangle FEO$  и  $\triangle ABO$ :

$BO=OE$ ;  $\angle 1 = \angle 2$ ;  $\angle AOB = \angle FOE$  т. к. они вертикальные, значит  $\triangle ABO = \triangle FEO$  по 2-му признаку, что и требовалось доказать.

**170.**

Дано:  $AB=A_1B_1$ ,  $\angle A=\angle A_1$ ,  
 $AD$ ,  $A_1D_1$  — биссектрисы;  
 $A_1D_1=AD$ .  
 Доказать:  $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$



Доказательство:

Из  $\angle A=\angle A_1$  следует  $\angle BAD=\angle B_1A_1D_1$

т. к.  $AD$ ,  $A_1D_1$  — биссектрисы.

Рассмотрим  $\triangle B_1A_1D_1$  и  $\triangle BAD$ :

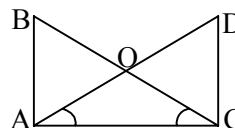
имеем:  $AB=A_1B_1$ ,  $AD=A_1D_1$ ,  $\angle BAD=\angle B_1A_1D_1$ , значит  
 $\triangle BAD=\triangle B_1A_1D_1$  по 1-му признаку, следовательно,  $\angle B=\angle B_1$ .

Рассмотрим  $\triangle A_1B_1C_1$  и  $\triangle ABC$ :

имеем:  $AB=A_1B_1$ ,  $\angle A=\angle A_1$ , значит  $\angle B=\angle B_1$ ,  $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$  по 2-му признаку, что и требовалось доказать.

**171.**

Дано:  $BC=AD$ ,  
 $\angle OAC=\angle OCA$   
 Доказать:  $\triangle ABO=\triangle CDO$



Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle ACD$  и  $\triangle ABC$ :

сторона  $AC$  — общая,  $BC=AD$ ,  $\angle C=\angle A$ , значит  $\triangle ACB=\triangle ACD$  по 1-му признаку, следовательно,  $\angle A=\angle C$ ,  $\angle B=\angle D$ ,  $AB=CD$ .

Рассмотрим  $\triangle DOC$  и  $\triangle AOB$ :  $AB=CO$

имеем:  $\angle B=\angle D$ ,  $\angle BAO=\angle DCO$

(т. к.  $\angle BAO=\angle A-\angle DAC$ ,  $\angle DCO=\angle C-\angle ACB$  и  $\angle A=\angle C$ ,  $\angle DAC=\angle ACB$ )

значит  $\triangle AOB=\triangle DOC$  по 2-му признаку, что и требовалось доказать.

**172.**

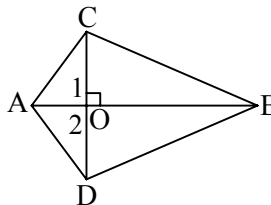
Дано:  $AC=AD$ ,  $AB\perp CD$   
 Доказать:  $BC=BD$ ,  $\angle ACB=\angle ADB$

Доказательство:

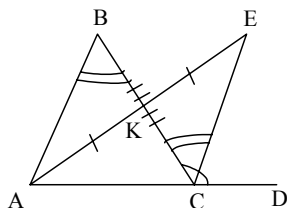
$\triangle DAC$  — равнобедренный, потому что  
 $AD=AC$ ,  $AO$  — высота, проведенная к  
 основанию, значит  $AO$  — биссектриса и  
 медиана  $\triangle DAC$  и значит,  $\angle 1=\angle 2$ ,  $CO=OD$ .

Рассмотрим  $\triangle ADB$  и  $\triangle ACB$ :

сторона  $AB$  — общая,  $AC=AD$ ,  $\angle 1=\angle 2$ ,  $\triangle ACB=\triangle ADB$  по 1-му признаку, следовательно,  $BC=BD$ ,  $\angle ACB=\angle ADB$ .



173.



Дано:  $\angle BCD$  — смежный с  $\angle ACB$ .

Доказать:  $\angle BCD > \angle 1$ ,  $\angle BCD > \angle 2$ .

Доказательство:

$\angle ACB + \angle BCD = 180^\circ$  следует из определения смежного угла

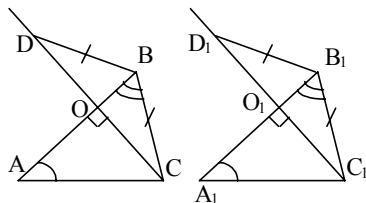
из  $\triangle ABC$  имеем

$$\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$$

значит  $\angle BCD = \angle CAB + \angle ABC$ , но  $\angle CAB > 0$  и  $\angle ABC > 0$ ,

значит  $\angle BCD < \angle CAB$ ,  $\angle CBD < \angle ABC$ , что и требовалось доказать.

174.



Дано:  $\angle A = \angle A_1$ ;  $\angle B = \angle B_1$

$BC = B_1C_1$

Доказать:  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Доказательство:

Выполним дополнительное построение:

$\angle ABD = \angle ABC$  и  $BD = BC$ :  $\angle A_1B_1D_1 = \angle A_1B_1C_1$  и  $B_1D_1 = B_1C_1$ ;

$\triangle DBC = \triangle D_1B_1C_1$  — равнобедренные треугольники,  $BO$ ,  $B_1O_1$  — биссектрисы, тогда они медианы и высоты. а значит  $DO = OC = D_1O_1 = O_1C_1$ ,  $BO \perp DC$ ,  $B_1O_1 \perp D_1C_1$ .

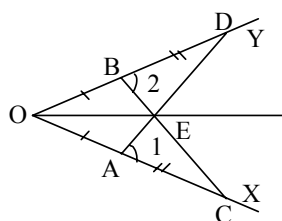
Рассмотрим  $\triangle A_1O_1C_1$  и  $\triangle AOC$ :

$OC = O_1C_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ , значит  $\triangle AOC = \triangle A_1O_1C_1$  (по катету и острому углу), следовательно,  $AO = A_1O_1$  значит,  $AB = AO + OB = A_1O_1 + O_1B_1 = A_1B_1$  следовательно,  $AB = A_1B_1$ .

Рассмотрим  $\triangle A_1B_1C_1$  и  $\triangle ABC$ :

$AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ , значит  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  по 1-му признаку

175.



Дано:  $OA = OB$ ,  $AC = BD$

Доказать:  $OE$  — биссектриса  $\angle XOY$

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle BCO$  и  $\triangle AOD$ :

угол  $\angle O$  — общий,  $OA = OB$ ,  $OD = OC$  (т.к.  $OD = OB + BD = OA + AC = OC$ )

значит  $\triangle ADO = \triangle BCO$  по 1-му признаку

следовательно,  $\angle D = \angle C$ ,  $\angle OAD = \angle OBC$

$\angle AOD$  и  $\angle 1$  — смежные, следовательно,  $\angle 1 = 180^\circ - \angle OAD$ ,  
 $\angle OBC$  и  $\angle 2$  — смежные, следовательно,  $\angle 2 = 180^\circ - \angle OBC$ ,  
 т. к.  $\angle OAD = \angle OBC$ , то  $\angle 1 = \angle 2$ .

Рассмотрим  $\triangle AEC$  и  $\triangle BED$ :

$\angle 1 = \angle 2$ ;  $\angle D = \angle C$ ;  $BD = AC$ , значит  $\triangle BED = \triangle AEC$  по 2-му признаку, следовательно,  $DE = EC$ .

Рассмотрим  $\triangle OCE$  и  $\triangle OED$ :

сторона  $OE$  — общая,  $OD = OC$ ,  $DE = EC$ , значит  $\triangle OED = \triangle OCE$  по 3-му признаку, следовательно,  $\angle DOE = \angle COE$  и значит  $OE$  — биссектриса  $\angle XOY$ , что и требовалось доказать.

*Описание способа построения биссектрисы угла, используя эту задачу.*

- 1) построить окружность с центром в вершине угла любого радиуса. Окружность пересечет стороны угла в точках  $A$  и  $B$ .
- 2) построить окружности с центрами в точках  $A$  и  $B$  одинакового радиуса. Окружность с центром  $A$  и радиусом  $R$  пересечет сторону угла в точке  $C$ , также окружность с центром  $B$  и радиусом  $R$  пересечет сторону угла в точке  $D$ . Значит:
- 3) Построим отрезки  $AD$  и  $BC$ .
- 4) Они пересекутся в точке  $E$ .
- 5) Соединим лучом вершину угла и точку  $E$ . Полученный луч и будет биссектрисой.

**176.**

Дано:  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$   
 $AM$ ,  $A_1M_1$  — медианы  
 $AM = A_1M_1$

Доказать:  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Доказательство:

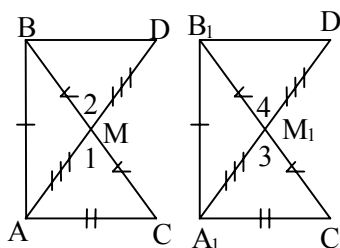
1) дополнительное построение:  
 проведем  $AM$  и  $A_1M_1$  за точки  $M$  и  $M_1$  и отметим на продолжениях точки  $D$  и  $D_1$ , чтобы  $AM = AD$ ,  $A_1M_1 = M_1D_1$

2) Рассмотрим  $\triangle BMD$  и  $\triangle AMC$ :

$AM = MD$ ,  $BM = MC$ ,  $\angle 1 = \angle 2$  т. к. они вертикальные, значит  $\triangle AMC = \triangle BMD$  по 1-му признаку, следовательно,  $AC = BD$  следует из  $AC = A_1C_1$ ,  $BD = B_1D_1$ .

Рассмотрим  $\triangle B_1M_1D_1$  и  $\triangle A_1M_1C_1$ :

$A_1M_1 = M_1D_1$ , значит  $B_1M_1 = M_1C_1$ ,  $\angle 3 = \angle 4$  т. к. они вертикальные,



значит  $\triangle A_1M_1C_1 = \triangle B_1M_1D_1$  по 1-му признаку, следовательно,  
 $A_1C_1 = B_1D_1$

3) Рассмотрим  $\triangle A_1B_1D_1$  и  $\triangle ABD$ :

$AB = A_1B_1$ ,  $AD = A_1D_1$  следует из  $AM = A_1M_1$ ,  $BD = B_1D_1$ , значит  
 $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$ , т. е. медианы  $BM$  и  $B_1M_1$  треугольников опущены  
на соответственно равные стороны  $AD$  и  $A_1D_1$ .

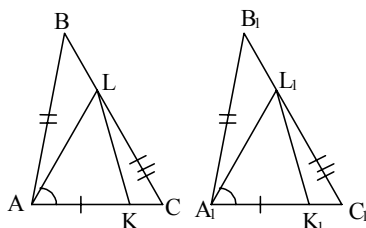
Из  $BM = B_1M_1$ , следует  $BC = B_1C_1$  т.к. ( $BC = 2BM$ ;  $B_1C_1 = 2B_1M_1$ ).

4) Рассмотрим  $\triangle A_1B_1C_1$  и  $\triangle ABC$ :

$AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ .

Имеем:  $BC = B_1C_1$ , значит  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  по 3-му признаку, что и  
требовалось доказать.

**177.**



Дано:  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ ,  
 $\angle A = \angle A_1$ ,  $AK = A_1K_1$ ,  $LC = L_1C_1$ .

Доказать: а)  $KL = K_1L_1$

б)  $AL = A_1L_1$

Доказательство:

1) Рассмотрим  $\triangle A_1B_1C_1$  и  $\triangle ABC$ :  
 $AB = A_1B_1$ .

Имеем:  $AC = A_1C_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ , значит  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  по 1-му при-  
знаку, следовательно,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ ,  $BC = B_1C_1$ .

2) Рассмотрим  $\triangle L_1C_1K_1$  и  $\triangle LCK$ :

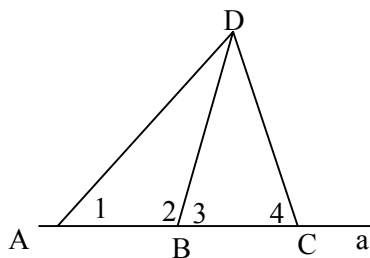
$LC = L_1C_1$ .

Имеем:  $\angle C = \angle C_1$ ,  $KC = AC - AK = A_1C_1 - A_1K_1 = K_1C_1$ , значит  
 $\triangle LCK = \triangle L_1C_1K_1$  по 1-му признаку, следовательно,  $LK = L_1K_1$ .

3) Рассмотрим  $\triangle A_1B_1L_1$  и  $\triangle ABL$ :

$AB = A_1B_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $BL = BC - LC = B_1C_1 - L_1C_1 = B_1L_1$ , значит  
 $\triangle ABL = \triangle A_1B_1L_1$  по 1-му признаку, следовательно,  $AL = A_1L_1$ , что и  
требовалось доказать.

**178.**



Дано: см.рисунок

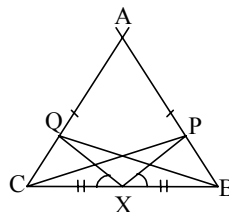
Доказать: хотя бы два из трех  
отрезков  $AD$ ,  $BD$  и  $CD$  не равны  
друг другу.

Доказательство:

Допустим, что  $AD = BD = CD$

$\triangle ABD$ ,  $\triangle BDC$  и  $\triangle ADC$  — равно-  
бедренные, и тогда

$\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 3 = \angle 4$ ,  $\angle 1 = \angle 4$ , откуда  $\angle 2 = \angle 3$ , но  $\angle 2$ ,  $\angle 3$  — смежные, значит  $\angle 2 = \angle 3 = 90^\circ$ , а это противоречит теореме о том, что через точку не лежащую на прямой можно провести единственный перпендикуляр к данной прямой, значит наше предположение неверно, а верно то, что надо доказать.



**179.**

Дано:  $AB = AC$ ,  $BX = XC$ ,  $\angle PXB = \angle QXC$ .

Доказать:  $BQ = CP$ .

Доказательство:

$\triangle ABC$  — равнобедренный, следует  $\angle B = \angle C$ .

Рассмотрим  $\triangle BPX$  и  $\triangle CQX$ :

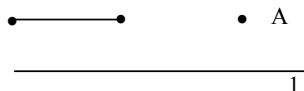
$CX = BX$

Имеем:  $\angle QXC = \angle PXB$ ,  $\angle C = \angle B$ , значит  $\triangle CQX = \triangle BPX$  по 2-му признаку, следовательно,  $CQ = PB$ ,  $QX = XP$ .

Рассмотрим  $\triangle BPC$  и  $\triangle CQB$ :

$CQ = PB$ , сторона  $CB$  — общая,  $\angle C = \angle B$ , значит  $\triangle CQB = \triangle BPC$  по 2-му признаку следовательно,  $QB = PC$  ч.т.д.

**180.**

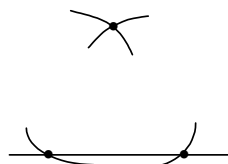


План построения:

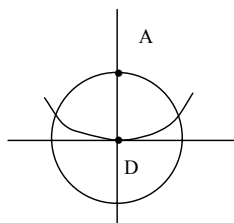
- 1) построим окружность с центром в точке  $A$  и радиусом  $R$ .
- 2) Эта окружность пересечет прямую  $l$  в двух точках; в одной точке или не пересечет.
- 3) Значит будет иметь два решения, одно или не одного.

3 случая

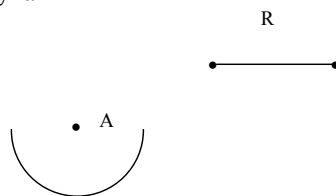
1 случай.



2 случай.

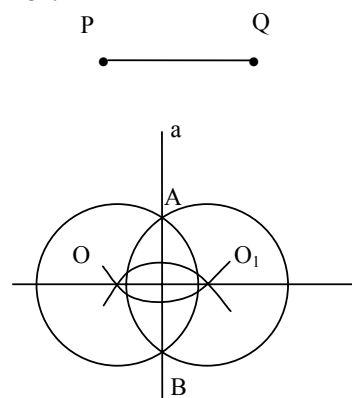


3 случай



- 1) центр искомой окружности может быть или В, или С. Т.е. задача имеет 2 решения.
- 2) центр искомой окружности D. Т.е. задача имеет одно решение.
- 3) задача не имеет решения. На прямой 1 нет точки, удаленной от А на расстояние R.

181.



Планы построения:

- 1) построим окружность с центром в А и радиусом PQ и окружность с центром в В тем же радиусом.
- 2) Эти окружности пересекутся в точках О и  $O_1$ , в точке О или не пересекутся.
- 3) Значит будем иметь два решения, одно или не одного.

1 случай

- 1) если  $AB < 2PQ$ , то центр искомой окружности может быть или О, или  $O_1$ . 2 решения.

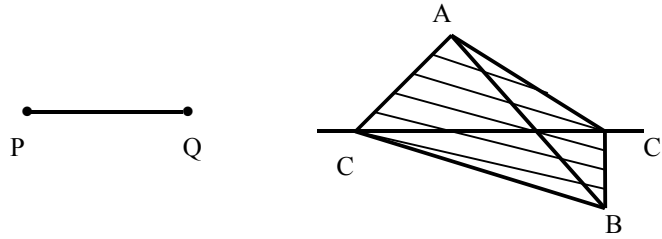
2 случай

- 2) если  $AB = 2PQ$ , то центр искомой окружности О. Одно решение.

3 случай

- 1) если  $AB > 2PQ$ , то задача не имеет решения.

182.



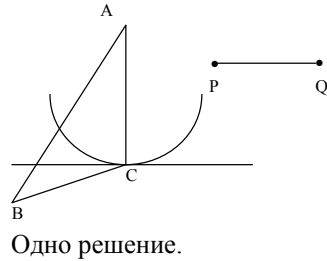
Построить:  $\triangle ABC$  чтобы  $C \in \alpha$ ,  $AC=PQ$

План построения:

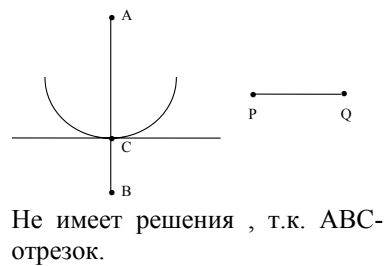
- 1) построим окружность в  $A$  и радиусом  $PQ$ .
- 2) Окружность пересечет прямую  $a$  в двух точках в одной точке,  $a$  может и не пересекать окружность. Обозначим эти точки  $C$  и  $C_1$ .
- 3) Соединим точки  $A, B, C$ , и  $A, B, C_1$ , получим треугольники  $\triangle ABC$  и  $\triangle ABC_1$ . Эти треугольники удовлетворяют требованиям задачи. Данная задача имеет два решения. Также может иметь одно или ни одного решения.

Например:

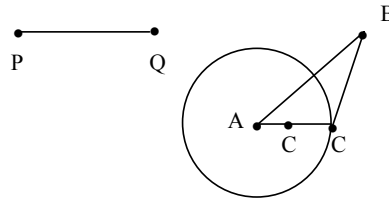
а)



б)



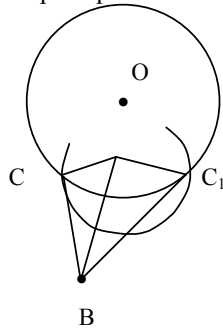
183.



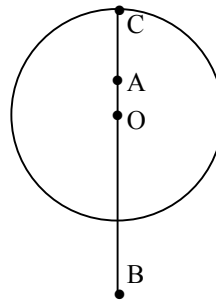
План построения:

- 1) построим окружность с центром в  $A$  и радиусом  $PQ$ .
- 2) Данная и построенная окружности пересеклись в  $C$ .
- 3) Соединим точки  $A, B, C$  и получим  $\triangle ABC$ . Задача может иметь два или ни одного решения

Например:



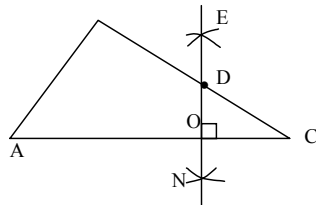
$\triangle ABC$  и  $\triangle ABC_1$  – искомые



Задача не имеет решения. Т.к.  $ABC$  – отрезок.

**184.**

Построить:  $D \in BC$  чтобы  $AD=DC$ .



План построения:

- 1) построим две окружности с центром в А и в С равными радиусам, но больше половины AC.
- 2) Окружности пересекутся в точках Е и N.
- 3) EN и BC пересекутся в точке D которая и есть искомая точка.

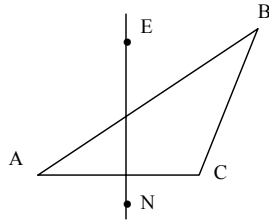
Доказательство:

В  $\triangle ADC$ , DO – серединный перпендикуляр, т.е.  $\triangle ADC$  – равнобедренный, значит  $AD=AC$ .

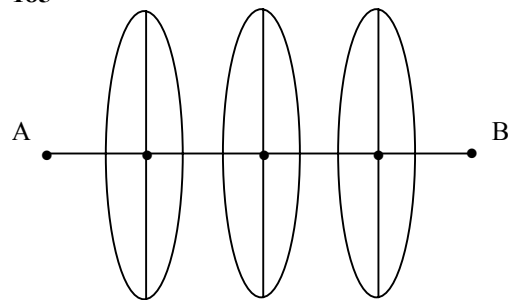
Задача может и не иметь решения.

Например:

EN и BC не пересекаются, т.е. нет такой точки  $D \in [BC]$ , что  $AD=DC$ .



185



План решения:

Делим отрезок паполам, и его каждую половину – паполам.

## Глава III

### §1. Признаки параллельности двух прямых.

186

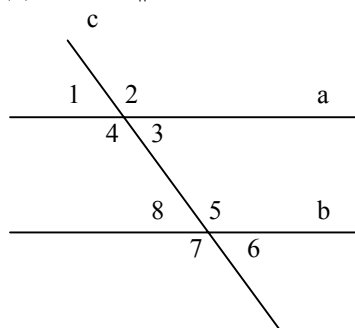
Дано:

а)  $\angle 1 = 37^\circ$ ,  $\angle 7 = 143^\circ$

б)  $\angle 1 = \angle 6$

в)  $\angle 1 = 45^\circ$ ,  $\angle 7 = 3\angle 3$

Доказать:  $a \parallel b$ .



а) Доказательство:

$\angle 1 = \angle 3 = 37^\circ$  т.к. они вертикальные

$\angle 7 = \angle 5 = 143^\circ$  т.к. они вертикальные

$\angle 3$ ,  $\angle 5$  – соответственные углы при прямых  $a$ ,  $b$  и секущей  $c$  и  $\angle 3 + \angle 5 = 37^\circ + 143^\circ = 180^\circ$ , значит по признаку параллельности прямых  $a \parallel b$ .

б) Доказательство:

$\angle 1 = \angle 3$  т.к. они вертикальные

$\angle 6 = \angle 8$  т.к. они вертикальные

$\angle 1 = \angle 6$  отсюда  $\angle 3 = \angle 8$

так как  $\angle 3$  и  $\angle 8$  накрест лежащие при прямых  $a$ ,  $b$  и секущей  $c$  и  $\angle 3 + \angle 5 = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$  следовательно  $a \parallel b$ .

в) Доказательство:

$\angle 1 = \angle 3 = 45^\circ$  т.к.  $\angle 1$  и  $\angle 3$  – вертикальные

$\angle 7 = 3\angle 3$ , следует  $\angle 7 = 135^\circ$

$\angle 5 = \angle 7 = 135^\circ$  –  $\angle 5$  и  $\angle 7$  – вертикальные

$\angle 3$ ,  $\angle 5$  – соответственные углы при прямых  $a$ ,  $b$  и секущей  $c$  и  $\angle 3 + \angle 5 = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$  следовательно  $a \parallel b$ .

**187.**

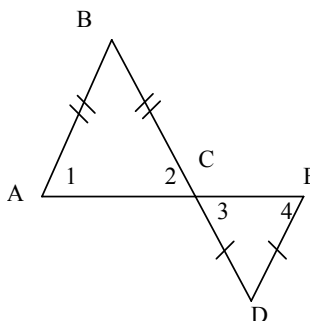
Доказать:  $AB \parallel DE$ .

Доказательство:

$\triangle ABC$  – равнобедренный, потому что  $AB=BC$ ,  $\angle 1=\angle 2$  как углы при основании равнобедренного треугольника.

$\triangle CDE$  – равнобедренный, потому что  $CD=ED$ .

Следовательно  $\angle 3=\angle 4$ ,  $\angle 2=\angle 3$  т.к. они вертикальные,  $\angle 1=\angle 2$ ,  $\angle 3=\angle 4$  откуда,  $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$ , т.е.  $\angle 1$  и  $\angle 4$  – накрест лежащие при прямых  $AB$ ,  $DE$  и секущей  $AE$ , и значит  $AB \parallel DE$ , по признаку параллельности.



**188.**

Дано:

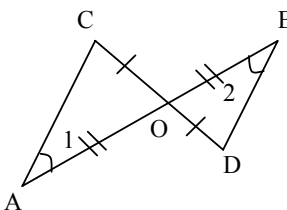
$AO=OB$ ,  $CO=OD$ .

Доказать:  $AC \parallel BD$

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle BDO$  и  $\triangle ACO$ :  $AO=OB$ .

Имеем:  $CO=OD$ ,  $\angle COA=\angle DOB$  т.к. они вертикальные, значит,  $\triangle AOC=\triangle BOD$  по 1-му признаку равенства  $\triangle$ . Следовательно  $\angle 1=\angle 2$ , а так как  $\angle A$  и  $\angle B$  – накрест лежащие при прямых  $AC$ ,  $BD$  и секущей  $AB$ , то  $AC \parallel BD$ .



**189.**

Доказать:  $BC \parallel AD$ .

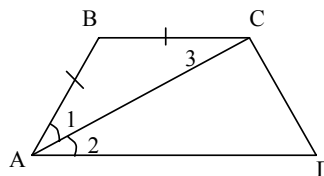
Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle ABC$ :

$AB=BC$ , следовательно

$\angle 1=\angle 3$  как углы при основании равнобедренного  $\triangle$ .

$\angle 1=\angle 2$ ,  $\angle 1=\angle 3$  значит  $\angle 2=\angle 3$ ,  $\angle 2$  и  $\angle 3$  – накрест лежащие при прямых  $BC$ ,  $AD$  и секущей  $AC$ , значит  $BC \parallel AD$ .



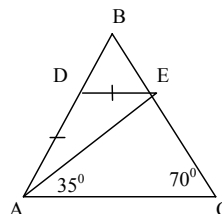
**190.**

Дано:  $AB=BC$ ,  $AD=DE$ ,  $\angle C=70^\circ$ ,  $\angle EAC=35^\circ$ .

Доказать:  $DE \parallel AC$ .

Доказательство:

$AB=BC$ , значит  $\angle A=\angle C=70^\circ$  как углы при основании равнобедренного  $\triangle$ .

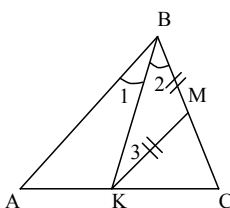


$$\angle EAC = 35^\circ$$

Из  $\angle A = 70^\circ$  следует  $\angle DAE = 35^\circ$

$\triangle ADE$  – равнобедренный, значит,  $\angle DEA = \angle EAC = 35^\circ$ ,  $\angle DEA$  и  $\angle EAC$  – накрест лежащие при прямых  $DE$  и  $AC$  и секущей  $AE$ , следовательно  $DE \parallel AC$  ч.т.д.

**191.**



Дано:  $\angle CBK = \angle ABK$ ,  $BK = KM$

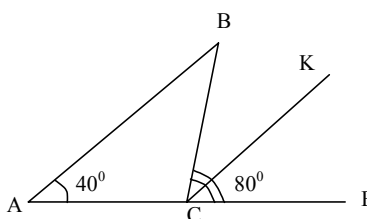
Доказать:  $KM \parallel AB$ .

Доказательство:

Из  $BM = KM$ , следует  $\triangle BMK$  – равнобедренный, тогда  $\angle 2 = \angle 3$  по св-ву равнобедренного  $\triangle$ .

$\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 2 = \angle 3$ , тогда,  $\angle 1 = \angle 3$ ,  $\angle 1$  и  $\angle 3$  – накрест лежащие при прямых  $AB$  и  $KM$ , и секущей  $BK$ , значит  $AB \parallel KM$ , по признаку.

**192.**



Дано:  $\angle A = 40^\circ$ ,

$\angle BCE$ ,  $\angle ACB$  – смежные углы

$\angle BCE = 80^\circ$

$\angle BCK = \angle ECK$

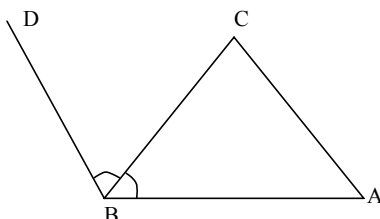
Доказать:  $AB \parallel CK$

Доказательство:

$$\angle BCK = \angle KCE = \frac{1}{2} \angle BCE = 40^\circ$$

$\angle BAC$  и  $\angle KCE$  – соответственные при прямых  $AB$ ,  $CK$  и секущей  $AC$  и  $\angle BAC = \angle KCE = 40^\circ$ , значит  $AB \parallel CK$  ч.т.д.

**193.**



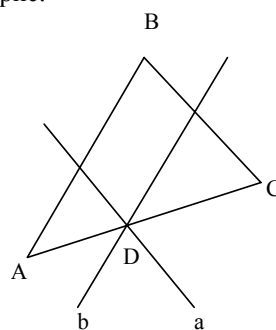
Доказательство:

$\angle ABC = 70^\circ$ , то  $\angle DBA = 140^\circ$  (т.к.  $BC$  – биссектриса)

$\angle DBA$  и  $\angle A$  – односторонние при прямых  $AC$ ,  $BD$  и секущей  $AB$ ,

$\angle DBA + \angle A = 140^\circ + 40^\circ = 180^\circ$ , значит  $DB \parallel AC$  по признаку параллельности прямых, ч.т.д.

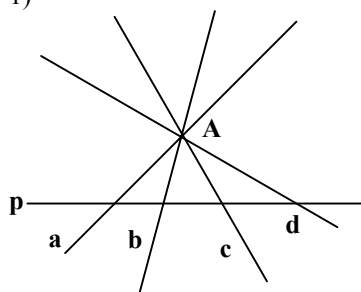
195.



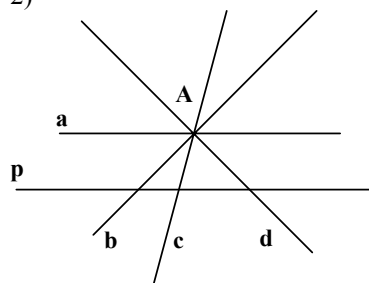
196.

197.

1)

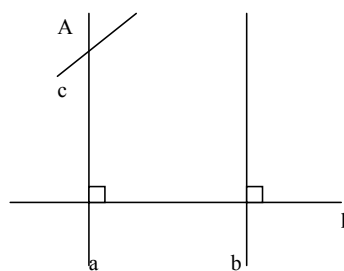


2)

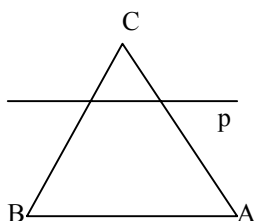


198.

$a \perp b$  и  $b \perp c$ , следует, что  $b \parallel a$  (по признаку параллельности двух прямых). Если  $c$  пересекает  $a$ , то по аксиоме  $c$  пересекает и  $b$ , ч.т.д.



199.



Дано:  $p \parallel AB$ ,  
Доказать:  $BC \cap p$  и  $AC \cap p$

Доказательство:

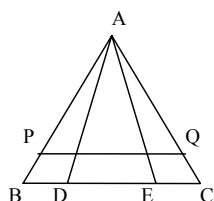
$BC \cap AB = B$

$AB \parallel p$ , значит по следствию из аксиомы

$BC \cap p$

Аналогично  $AC \cap p$

200.



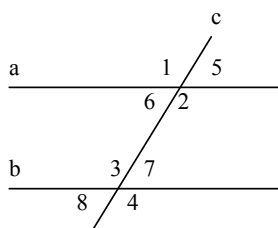
Дано:  $AP \parallel p$ ,  $PQ \parallel BC$

Доказать:  $p$  – пересекает  $AB$ ,  $AE$ ,  $BC$ ,  $PQ$ .

Доказательство:

Прямая  $AP$  пересекает  $AB$ ,  $AE$ ,  $AC$ ,  $BC$  и  $PQ$ . Значит, по следствию прямая  $p$  пересекает  $AB$ ,  $AE$ ,  $AC$ ,  $BC$  и  $PQ$  ч.т.д.

201.



Дано:

$\angle 2 + \angle 3 = 210^\circ$ ,  $a \parallel b$ ;  $\angle 1, \angle 2, \dots \angle 8 = ?$

Решение:

$\angle 2$  и  $\angle 3$  – накрест лежащие при параллельных прямых.

Значит  $\angle 2 = \angle 3$

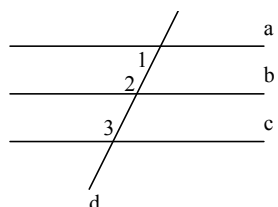
$\angle 2 = \angle 3 = 210^\circ : 2 = 105^\circ$  (т.к.  $\angle 2 + \angle 3 = 210^\circ$ )

$\angle 1 = \angle 2 = 105^\circ$  т.к. эти углы вертикальные,  $\angle 3 = \angle 4 = 105^\circ$ ;  $\angle 2, \angle 6$  – смежные, следовательно,  $\angle 2 + \angle 6 = 180^\circ$  т.е.

$\angle 6 = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$ ,  $\angle 5 = \angle 6 = 75^\circ$  (т.к. они вертикальные) при параллельных,  $\angle 7 = \angle 6 = 75^\circ$ ,  $\angle 8 = \angle 7 = 75^\circ$  т.к. они вертикальные.

Ответ:  $105^\circ, 105^\circ, 105^\circ, 105^\circ, 75^\circ, 75^\circ, 75^\circ, 75^\circ$ .

202.



Дано:  $\angle 1 = 42^\circ$ ,  $\angle 2 = 140^\circ$ ,  $\angle 3 = 138^\circ$

Какие из  $a, b, c$  – параллельны ?

Решение:

$\angle 1, \angle 2$  – односторонние при  $a, b$  и секущей  $d$

и  $\angle 1 + \angle 2 = 42^\circ + 140^\circ = 182^\circ \neq 180^\circ$ , т.е.  $a \nparallel b$

$\angle 1, \angle 3$  – односторонние при  $a, c$  и секущей  $d$  и  $\angle 1 + \angle 3 = 42^\circ + 138^\circ = 180^\circ$ , т.е.  $a \parallel c$ ,  $\angle 2, \angle 3$  – односторонние при  $b, c$  и секущей  $d$  и  $\angle 2 \neq \angle 3$ , т.е.  $a \not\parallel b$ .  
 Ответ: две прямые  $a$  и  $c$ .

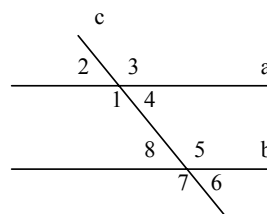
**203.**

Дано:  $a \parallel b$ ,

а)  $\angle 1 = 150^\circ$

б)  $\angle 1 = \angle 4 + 70^\circ$

$\angle 1, \angle 2, \dots, \angle 8 = ?$



Решение:

а)  $\angle 1 = 150^\circ$  следовательно,  $\angle 3 = \angle 1 = 150^\circ$  т.к. они вертикальные,  $\angle 5 = \angle 1 = 150^\circ$  (как накрест лежащие при параллельных)  $\angle 7 = \angle 5 = 150^\circ$  – вертикальные,  $\angle 1, \angle 4$  – смежные, следовательно,  $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$ ,  $\angle 4 = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ ,  $\angle 2 + \angle 4 = 30^\circ$  т.к. они вертикальные,  $\angle 8 = \angle 4 = 30^\circ$  (как накрест лежащие при параллельных)

$\angle 6 + \angle 8 = 30^\circ$  – вертикальные.

Ответ:  $30^\circ, 150^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 30^\circ$ .

б) Пусть  $\angle 1 = x$ , тогда  $\angle 4 = x - 70^\circ$

$\angle 1, \angle 4$  – смежные, следовательно,  $x + x - 70 = 180$ ,  $2x = 250$ ,  $x = 125$ ,

$\angle 1 = 125^\circ$ ,  $\angle 4 = \angle 1 - 70 = 55^\circ$ .

По примеру пункта а) имеем:

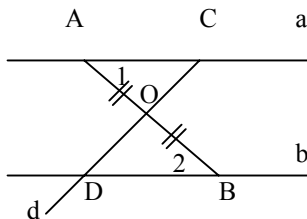
$\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 125^\circ$ ,  $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 55^\circ$ .

Ответ:  $125^\circ, 55^\circ$ .

**204.**

Дано:  $a \parallel b$ ,  $AO = OB$

Доказать:  $CO = OD$



Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle BOD$  и  $\triangle AOC$ :

$AO = BO$

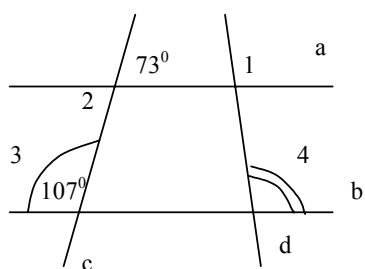
$\angle AOC = \angle BOD$  т.к. они вертикальные

$\angle 1 = \angle 2$  (как накрест лежащие при параллельных  $a$  и  $b$ )

Значит,  $\triangle AOC = \triangle BOD$  по 2-му признаку равенства  $\triangle$ .

Следовательно  $CO = OD$ , ч.т.д.

205.



$\angle 1 = ?$

Доказательство:

$\angle 2$  и угол  $73^\circ$  вертикальные следовательно  $\angle 2 = 73^\circ$

$\angle 2, \angle 3$  – односторонние при прямых  $a, b$  и секущей  $c$

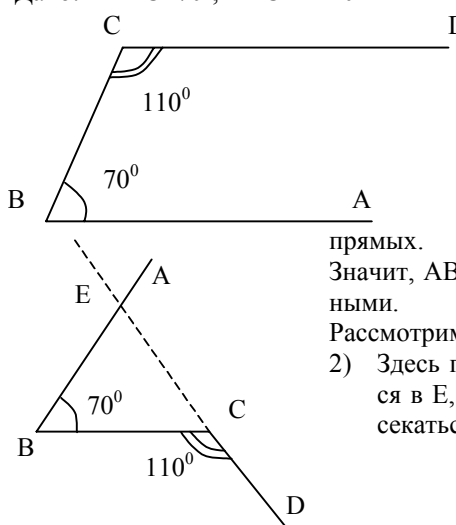
и  $\angle 2 + \angle 3 = 73^\circ + 107^\circ = 180^\circ$  следовательно по признаку параллельности прямых  $a \parallel b$ .

$\angle 1, \angle 4$  – соответственные углы при параллельных  $a$  и  $b$  следовательно  $\angle 1 = \angle 4 = 92^\circ$ .

Ответ:  $92^\circ$ .

206.

Дано:  $\angle ABC = 70^\circ, \angle BCD = 110^\circ$



Решение:

1)  $\angle C$  и  $\angle B$  – односторонние при прямых  $AB$  и  $CD$  и секущей  $BC$ , и  $\angle B + \angle C = 70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$ , следовательно,  $AB \parallel CD$  по признаку параллельности

прямых.

Значит,  $AB$  и  $CD$  могут быть параллельными.

Рассмотрим другую ситуацию:

2) Здесь прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в  $E$ , значит  $AB$  и  $CD$  могут пересекаться.

207.

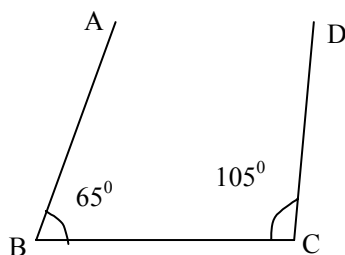
Дано:  $\angle ABC = 65^\circ, \angle BCD = 105^\circ$

$\angle B$  и  $\angle C$  – односторонние при прямых  $AB$  и  $CD$  и секущей  $BC$ ,

и  $\angle B + \angle C = 65^\circ + 105^\circ = 170^\circ \neq 180^\circ$ ,

следовательно,  $AB \nparallel CD$ , т.е.  $AB$  и  $CD$  не могут быть параллельны.

И значит они пересекаются



**208.**

Дано:  $a \parallel b$

$\angle 1 - \angle 2 = 50^\circ$ ,  $\angle 1$ ,  $\angle 2 = ?$

Решение:

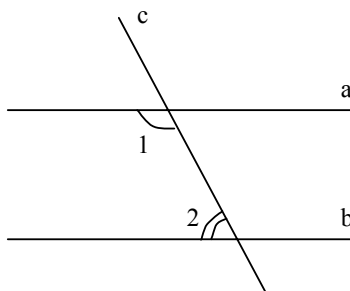
Из  $a \parallel b$  следует, что  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ .

Пусть  $\angle 1 = x$ , тогда  $\angle 2 = x - 50$

и  $x + x - 50 = 180$ ,  $2x = 230$ ,  $x = 115$ , т.е.

$\angle 1 = 115^\circ$ ,  $\angle 2 = 55^\circ$

Ответ:  $115^\circ$ ,  $55^\circ$ .



**209.**

Дано:  $a \parallel b$ ,  $c \parallel d$

$\angle 4 = 45^\circ$

$\angle 1$ ,  $\angle 2$ ,  $\angle 3 = ?$

Решение:

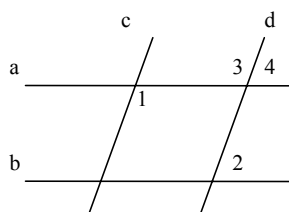
$\angle 3$ ,  $\angle 4$  – смежные, следовательно

$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ , значит  $\angle 3 + 45^\circ = 180^\circ$ , тогда

$\angle 3 = 135^\circ$ ,  $\angle 1$ ,  $\angle 3$  – накрест лежащие при  $c \parallel d$  и секущей, тогда

$\angle 1 = \angle 3 = 135^\circ$  (по свойству);  $\angle 2$ ,  $\angle 4$  – соответственные при  $a \parallel b$  и секущей  $d$ , тогда  $\angle 2 = \angle 4 = 45^\circ$  (по свойству).

Ответ:  $135^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $135^\circ$ .



**210.**

Дано:  $AP_1 \parallel BP_2 \parallel CP_3$ .

Доказать:  $\angle ACB = \angle CAP_1 + \angle CBP_1$ .

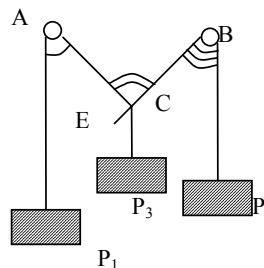
Доказательство:

$AP_1 \parallel CP_3$ , значит,  $\angle P_1AC + \angle ACP_3 = 180^\circ$ ;

$CP_3 \parallel BP_2$ , значит,  $\angle P_2BC = \angle P_3CE$

и  $\angle P_1AC + \angle P_3CE + \angle ACE = 180^\circ$

$(\angle P_1AC + \angle P_2BC) + \angle ACE = 180^\circ$  (1)



$\angle ACE$  и  $\angle ACB$  – смежные, следовательно,  $\angle ACE + \angle ACB = 180^\circ$  (2)  
сравнивая (1) и (2) получим  $(\angle P_1AC + \angle P_2BC) + \angle ACE = 180^\circ$ ,  
 $\angle ACE + \angle ACB = 180^\circ$ ,  $\angle ACB = \angle P_1AC + \angle P_2BC$  ч.т.д.

**211.**

а) Дано:  $a \parallel b$ ;  $AA_1$  – биссектриса  $\angle A$ ;  $BB_1$  — биссектриса  $\angle B$ .

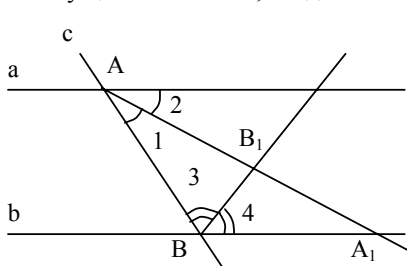
Доказать: а)  $AA_1 \parallel BB_1$ ; б)  $AA_1 \perp BB_1$ .

Доказательство:

$\angle A = \angle B$  как накрест лежащие при параллельных

Из  $AA_1$  и  $BB_1$  – биссектрисы равных углов, следует, что

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ ;  $\angle 2$  и  $\angle 3$  – накрест лежащие при прямых  $AA_1$  и  $BB_1$  и секущей  $c$  и  $\angle 2 = \angle 3$ , следовательно,  $AA_1 \parallel BB_1$ .



б)

Доказательство:

Т.к. они односторонние при параллельных  $a$  и  $b$ .

$\angle A + \angle B = 180^\circ$

Из  $AA_1$  и  $BB_1$  – биссектрисы равных углов  $\angle A$  и  $\angle B$ , следует

Что  $\angle 1 = \angle 2$ ;  $\angle 3 = \angle 4$ .

Рассмотрим  $\triangle AB_1B$ :

$\angle 1 + \angle 3 + \angle B_1 = 180^\circ$  по теореме о сумме углов  $\triangle$ , тогда,

$\frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + \angle B_1 = 180^\circ$ , следовательно,  $\frac{1}{2}180^\circ + \angle B_1 = 180^\circ$  или

$90^\circ + \angle B_1$ , т.е.  $\angle B_1 = 90^\circ$ , откуда получаем, что  $AA_1 \perp BB_1$  ч.т.д.

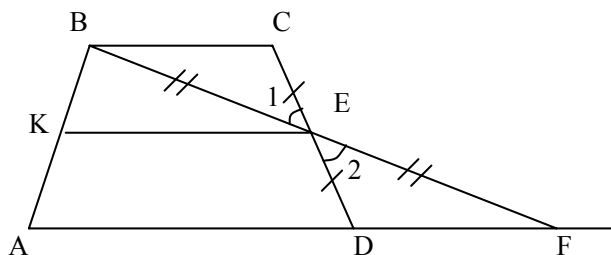
**212.**

Решение приведено в учебнике.

**213.**

Дано:  $CE = ED$ ,  $BE = EF$ ,  $KE \parallel AD$ .

Доказать:  $KE \parallel BC$ .



Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle FDE$  и  $\triangle BCF$ ,  $BE=EF$ ,  $E=ED$   $\angle 1=\angle 2$  – как вертикальные, значит  $\triangle BCE=\triangle FDE$  по 1-му признаку равенства  $\triangle$ .

Тогда  $\angle CBE=\angle DFE$ ,  $\angle CBE$  и  $\angle DFE$  – накрест лежащие при прямых  $BC$  и  $AD$  и секущей  $BF$  и  $\angle CBE=\angle DFE$  следовательно  $BC\parallel AD$  по признаку параллельности прямых.

$KE\parallel AD$ ,  $BC\parallel AD$  следовательно,  $KE\parallel BC$  по свойству параллельных прямых ч.т.д.

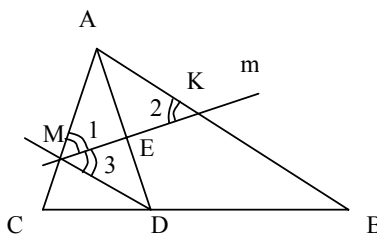
**214.**

Дано:

$AD$  – биссектриса  $\angle A$

$AE=ED$

Доказать:  $MD\parallel AD$



Доказательство:

Рассмотрим прямоугольные треугольники  $\triangle MAE$  и  $\triangle KAE$ , сторона  $AE$  – общая,  $\angle MAE=\angle KAE$ , значит  $\triangle MAE = \triangle KAE$  (по катету и острому углу), следовательно,  $\angle 1=\angle 2$ .

Рассмотрим прямоугольные треугольники  $\triangle AME$  и  $\triangle DME$ , сторона  $ME$  – общая,  $AE=ED$ .

Значит  $\triangle AME=\triangle DME$  (по 2 равным катетам), следовательно  $\angle 1=\angle 3$   $\angle 2=\angle 3$  – накрест лежащие при прямых  $AB$  и  $MD$  и секущей  $MK$ , и  $\angle 1=\angle 2$ ,  $\angle 1=\angle 3$  откуда  $\angle 2=\angle 3$ , и значит,  $AB\parallel MD$  (по признаку параллельности прямых).

**215.**

Дано: см. рис.

$\angle 1=?$

Решение:

$\angle KDA=\angle CDQ=115^\circ$  т.к. они вертикальные

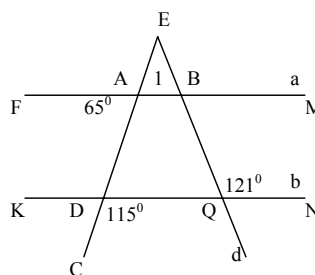
$\angle FAD$  и  $\angle KDA$  – односторонние при прямых  $a$  и  $b$

и секущей  $c$  и  $\angle FAD+\angle KDA=$

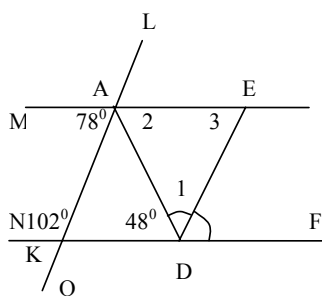
$=65^\circ+115^\circ=180^\circ$ , следовательно,  $a\parallel b$ ,  $\angle DAB$  и  $\angle BQN$  – смежные, тогда  $\angle DOB=180^\circ-121^\circ=59^\circ$ .

Из  $a\parallel b$  следует, что  $\angle 1=\angle DQB=59^\circ$  (как соответственные при параллельных прямых).

Ответ:  $59^\circ$ .



216.



Дано: DE – биссектриса угла  $\angle ADF$   
 $\angle 1, \angle 2, \angle 3 = ?$

Решение:

$\angle MAK$  и  $\angle NKA$  – односторонние при прямых ME и NF и секущей AK и  $\angle MAK + \angle NKA = 78^\circ + 102^\circ = 180^\circ$  следовательно,  $ME \parallel NF$  (по признаку параллельности прямых),  $\angle KDA$  и  $\angle ADF$  – смежные, тогда

$\angle KDA + \angle ADF = 180^\circ$ ;  $48^\circ + \angle ADF = 180^\circ$ , т.е.  $\angle ADF = 132^\circ$ .

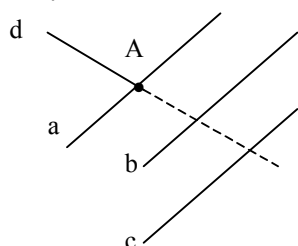
Из DE – биссектриса  $\angle ADF$ , следует, что  $\angle 1 = \angle EDF = 132^\circ : 2 = 66^\circ$

т.к.  $ME \parallel NF$  т.к. они накрест лежащие то  $\angle 3 = \angle EDF = 66^\circ$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$  (сумма углов треугольника) или  $66^\circ + \angle 2 + 66^\circ = 180^\circ$ , значит  $\angle 2 = 48^\circ$

Ответ:  $66^\circ, 48^\circ, 66^\circ$ .

217.

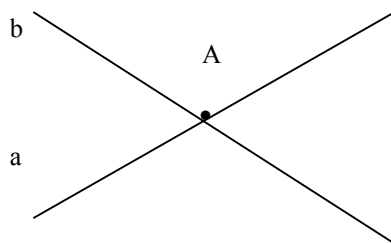


Дано:  $a \parallel c$   
 $b \parallel c$ ; c (пересекает прямую a)  
 Доказать: d пересекает прямую b.

Доказательство:

$a \parallel c, b \parallel c$ , следует, что,  $a \parallel b$  (по свойству параллельных прямых) так как  $a \parallel b$  и  $a \cap d = A$ , то  $d \cap b$  (свойство параллельных прямых)

218.



Можно ли построить прямую c:  
 $a \parallel c$ ;  $c \cap b$ .

Доказательство:

Возьмем любую точку M не перпендикулярную a.

Тогда по аксиоме параллельных прямых через точку M можно

построить прямую c, параллельную a и только одну.

$a \parallel c$

Тогда  $a \cap b$ , и значит  $c \cap b$  (по свойству параллельных прямых)

Ответ: можно.

**219.**

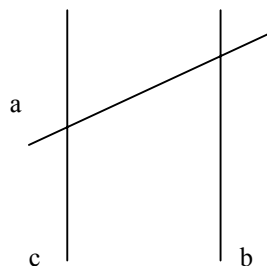
Дано:  $c \cap a$ ,  $c \cap b$ ,  $c$  — произвольная.

Доказать:  $a \parallel b$ .

Доказательство:

Пусть  $a \not\parallel b$ , тогда  $c \parallel b$ ,  $c \cap a$ , и  $a \cap b$  (так строим),

но это противоречит условию. Значит  $a \parallel b$  ч.т.д.



**220.**

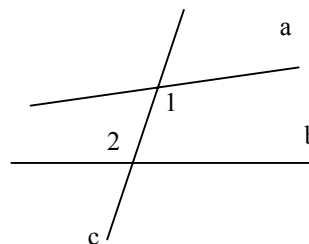
Дано:  $\angle 1$ ,  $\angle 2$  — накрест лежащие

$\angle 1 \neq \angle 2$

Доказать:  $a \cap b$

Доказательство:

Если  $\angle 1$  и  $\angle 2$  — накрест лежащие углы при прямых  $a$  и  $b$  и секущей  $c$  и  $\angle 1 \neq \angle 2$ , то  $a \not\parallel b$ , но если прямые на плоскости не параллельны, значит они пересекаются.



**221.**

Дано:  $BM \cap AC = E$ ,  $BE = EM$ ,  $AE = EC$ ,  $CN \cap AB = K$ ,  $AK = KB$ ,  $NK = KC$ .

Доказать:  $A, N, M \in l$ .

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle BCK$  и  $\triangle AKN$ :  $AK = KB$ .

Имеем:  $NK = KC$ ,  $\angle NKA = \angle CKB$  т.к. они вертикальные, значит  $\triangle AKN = \triangle BCK$  по 1-му признаку, следовательно,  $\angle 1 = \angle 2$ .

Рассмотрим  $\triangle BEC$  и  $\triangle AEM$ :  $ME = EB$ .

Имеем:  $AE = EC$ ,  $\angle AEM = \angle BEC$  — как вертикальные, значит,  $\triangle AEM = \triangle BEC$  по 1-му признаку равенства  $\triangle$ .

Следовательно,  $\angle 3 = \angle 4$ ,  $\angle 3$  и  $\angle 4$  — накрест лежащие углы при прямых  $AM$  и  $BC$  и секущей  $BM$ , и  $\angle 3 = \angle 4$ , т.е.  $AM \parallel BC$  (1)

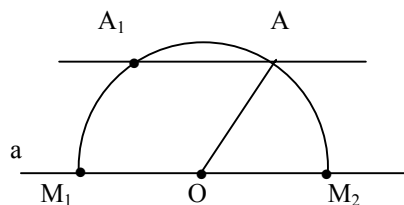
$\angle 1$  и  $\angle 2$  — накрест лежащие углы при прямых  $AN$  и  $BC$  и секущей  $NC$ , и  $\angle 1 = \angle 2$ , т.е.  $AN \parallel BC$  (2)

Сравнивая (1) и (2) имеем:

$AM \parallel AN$ ,  $AN \parallel BC$ , значит  $AM \parallel AN$ , но так как прямые  $AM$  и  $AN$  проходят через одну точку  $A$  и параллельны одной и той же прямой  $BC$ , то, по аксиоме параллельных прямых можно утверждать, что  $AM$  и  $AN$  — совпадают, т.е.  $A, N, M \in l$ .

Или  $A, N, M$  лежат на прямой  $l$  ч.т.д.

222.



Планы построения:

- 1) Построим окружность с центром в  $O$  и радиусом  $OA$
- 2) Окружность пересечет прямую  $a$  в  $M_1$  и  $M_2$
- 3) Окружность с центром в  $M_1$  и радиусом  $OA$  пересекает окружность с центром в  $O$  и радиусом  $OA$  в точке  $A_1$ .
- 4)  $AA_1 \perp a$ , значит  $AA_1$  – это и есть искомая нами прямая.

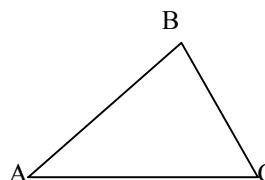
## Глава IV

### § 1. Сумма углов треугольника.

223.

Дано:

- а)  $\angle A = 65^\circ$ ;  $\angle B = 57^\circ$ ;  
б)  $\angle A = 24^\circ$ ;  $\angle B = 130^\circ$ ;  
в)  $\angle A = \alpha$ ;  $\angle B = 2\alpha$ ;  
г)  $\angle A = 65^\circ + \alpha$ ;  $\angle B = 60^\circ - \alpha$ .  
 $\angle C = ?$



Решение:

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  (по теореме о сумме углов треугольника)

а)  $65^\circ + 57^\circ + \angle C = 180^\circ$ , значит  $\angle C = 180^\circ - 122^\circ = 58^\circ$

б)  $24^\circ + 130^\circ + \angle C = 180^\circ$ , значит  $\angle C = 180^\circ - 154^\circ = 26^\circ$

в)  $\alpha + 2\alpha + \angle C = 180^\circ$ , значит  $\angle C = 180^\circ - 3\alpha$

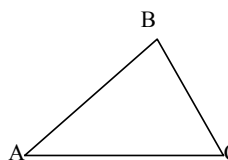
г)  $60^\circ + \alpha + 60^\circ - \alpha + \angle C = 180^\circ$ , значит  $\angle C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Ответ:  $58^\circ$ ;  $26^\circ$ ;  $180^\circ - 3\alpha$ ;  $60^\circ$ .

224.

Дано:

$\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$   
 $\angle A, \angle B, \angle C = ?$



Решение:

Пусть 1 часть —  $x^\circ$ , тогда  $\angle A = 2x^\circ$ ,  $\angle B = 3x^\circ$ ,  $\angle C = 4x^\circ$ .

Так как  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  (по теореме о сумме углов  $\Delta$ ), то  $2x + 3x + 4x = 180$ ,  $9x = 180$ ,  $x = 20$ .

Имеем, что  $20^\circ$  — приходится на 1 часть, следовательно,

$\angle A = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$ ;  $\angle B = 3 \cdot 20^\circ = 60^\circ$ ;  $\angle C = 4 \cdot 20^\circ = 80^\circ$

Ответ:  $40^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $80^\circ$ .

225.

Дано:  $AB = BC = AC$ .

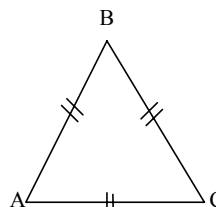
Доказать:  $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ .

Доказательство:

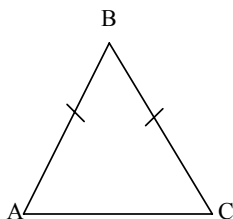
Из  $AB = BC = AC$ , следует

Что  $\angle A = \angle B = \angle C$  (свойство углов при основании равнобедренного треугольника).

Но  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  (по теореме о сумме углов треугольника), значит  $3 \cdot \angle A = 180^\circ$  или  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ$  ч.т.д.



226.



Дано:

$AB=BC$

Доказать:  $\angle A$  и  $\angle C$  – острые

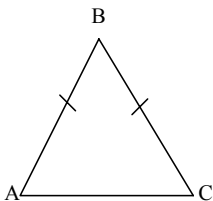
Доказательство:

Допустим  $\angle A$ ,  $\angle C$  – не острые, тогда  $\angle A = \angle C = 90^\circ$ , или  $\angle A = \angle C > 90^\circ$ .

Значит  $\angle A + \angle B + \angle C > 180^\circ$ , а это противоречит теореме о сумме углов треугольника, следовательно наше предположение неверно.

Тогда  $\angle A = \angle C < 90^\circ$  ч.т.д.

227.



а)

Дано:

$AB=BC$ ;  $\angle A = 2\angle B$

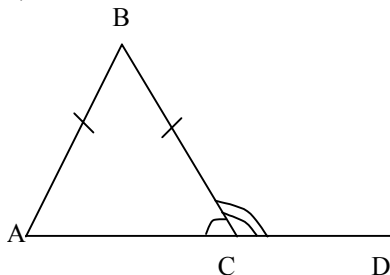
$\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C = ?$

Решение:

Пусть  $\angle B = x^\circ$ , значит  $\angle A = \angle C = 2x^\circ$

Из  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  (по теореме) следует, что  $2x + x + 2x = 180$ ,  $5x = 180$ ,  $x = 36$  или  $\angle B = 36^\circ$ ,  $\angle A = \angle C = 72^\circ$ .

б)



Дано:  $AB=BC$ ,  $\angle BCD = 3\angle C$

$\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C = ?$

Решение:

Пусть  $\angle C = x^\circ$ , тогда  $\angle A = x^\circ$ ,  $\angle BCD = 3x^\circ$

Из  $\angle BCD = \angle A + \angle B$  (по свойству внешнего угла) следует, что  $\angle B = 3x - x = 2x$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  (по теореме о сумме углов треугольника)

значит  $x + 2x + x = 180$ ,  $4x = 180$ ,  $x = 45$  или  $\angle A = \angle C = 45^\circ$ ,  $\angle B = 90^\circ$ .

228.

а)

1) Дано:  $AB=BC$ ,

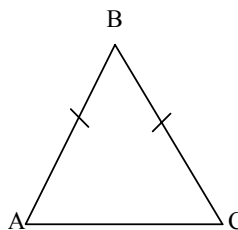
$\angle A=40^\circ$

$\angle A, \angle B, \angle C=?$

Решение:

Из  $\triangle ABC$  – равнобедренный, следует, что  $\angle A=\angle C=40^\circ$ , тогда,  $\angle B=180^\circ-(40^\circ+40^\circ)=100^\circ$ .  
(по теореме о сумме углов треугольника)

Ответ:  $40^\circ, 40^\circ, 100^\circ$ .



2)

Дано:  $AB=BC$ ,  $\angle B=40^\circ$

$\angle A, \angle B, \angle C=?$

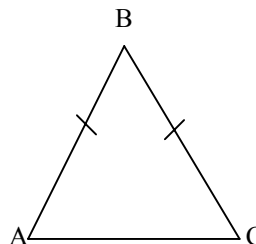
Решение:

$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$  (по теореме), значит

$\angle A+\angle C=180^\circ-40^\circ$  или  $\angle A+\angle C=120^\circ$

Из  $\angle A=\angle C$  (по свойству углов при основании равнобедренного треугольника) следует  $\angle A=\angle C=120^\circ:2=60^\circ$ .

Ответ:  $40^\circ, 60^\circ, 60^\circ$ .



б)

1)

Дано:  $AB=BC$ ,  $\angle A=60^\circ$

$\angle A, \angle B, \angle C=?$

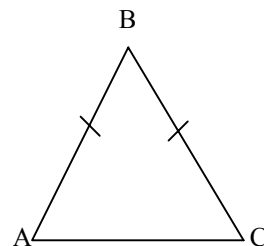
Решение:

Из  $\triangle ABC$  – равнобедренный, следует, что

$\angle A=\angle C=60^\circ$ , тогда

$\angle B=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=40^\circ$ . (по теореме о сумме углов треугольника)

Ответ:  $60^\circ, 60^\circ, 40^\circ$ .



2)

Дано:  $AB=BC$ ,  $\angle B=60^\circ$

$\angle A, \angle B, \angle C=?$

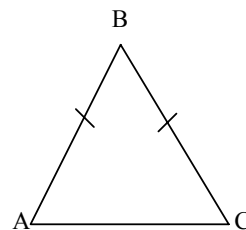
Решение:

$\angle B=60^\circ$ , значит  $\angle A+\angle C=180^\circ-60^\circ$  (по теореме)

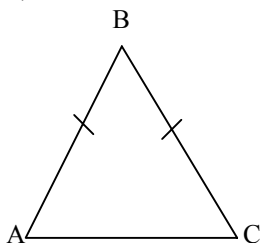
значит  $\angle A+\angle C=120^\circ$

Из  $\angle A=\angle C$  (по свойству углов при основании равнобедренного треугольника, следует)  $\angle A=\angle C=120^\circ:2=60^\circ$ .

Ответ:  $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$ .



в)



Дано:  $AB=BC$ ,  $\angle B=100^\circ$

$\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C=?$

Заметим, что  $\angle A$ ,  $\angle C < 90^\circ$  – из ранее идущей задачи, значит именно  $\angle B=100^\circ$

Решение:

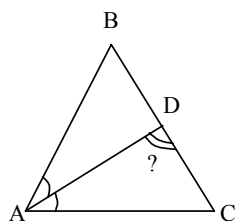
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  (сумма углов треугольника) т.е.

$\angle A + \angle C = 180^\circ - 100^\circ$ , тогда  $\angle A + \angle C = 80^\circ$

$\angle A = \angle C$  (по свойству углов при основании равнобедренного треугольника) следует  $\angle A = \angle C = 40^\circ$ .

Ответ:  $100^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $40^\circ$ .

**229.**



Дано:  $\angle BAD = \angle CAD$ ,  $AB=BC$ ,  $\angle C=50^\circ$

$\angle ADC=?$

Решение:

Из  $\triangle ABC$  – равнобедренный, следует  $\angle A = \angle C = 50^\circ$

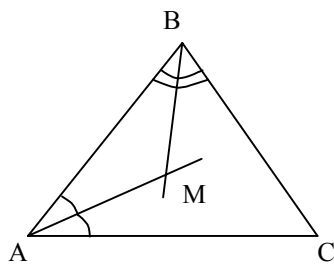
$\angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle A = 25^\circ$

$\angle DAC + \angle ADC + \angle C = 180^\circ$  (сумма углов треугольника)

значит  $25^\circ + \angle ADC + 50^\circ = 180^\circ$  или  $\angle ADC = 180^\circ - 75^\circ$ , т.е.  $\angle ADC = 105^\circ$ .

Ответ:  $105^\circ$ .

**230.**



Дано:  $\angle ABM = \angle CBM$ ,

$\angle BAM = \angle CAM$ ,

$\angle A = 58^\circ$ ,  $\angle B = 96^\circ$ .

$\angle AMB=?$

Решение:

$\angle BAM + \angle MBA + \angle AMB = 180^\circ$  (сумма углов треугольника)

$\frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle B + \angle AMB = 180^\circ$  (т.к. AM

и BM биссектрисы), значит  $\frac{1}{2} 58^\circ + \frac{1}{2} 96^\circ + \angle AMB = 180^\circ$ ,

$\angle AMB = 180^\circ - (29^\circ + 48^\circ)$ ,  $\angle AMB = 103^\circ$

Ответ:  $103^\circ$ .

**231.**

Дано:  $AM = \frac{1}{2} BC$ ;  $BM = MC$ .

Доказать:  $\triangle ABC$  прямоугольный.

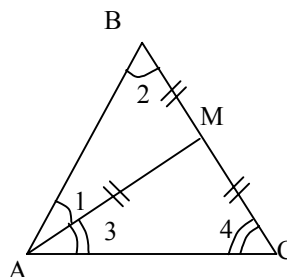
Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle AMC$  и  $\triangle ABM$ . Они равнобедренные, значит  $BM = MA = MC$ , следовательно,  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 3 = \angle 4$ .

Пусть  $\angle 1 = \angle 2 = x^\circ$ ,  $\angle 3 = \angle 4 = y^\circ$ , из  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

Следует  $x + x + y + y = 180^\circ$  т.е.  $x + y = 90^\circ$ .

Но  $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = x + y = 90^\circ$ , т.е.  $\triangle ABC$  прямоугольный. Ч.т.д.



**232.**

Дано:  $\angle BCD = 2\angle A$ .

Доказать:  $\triangle ABC$  – равнобедренный.

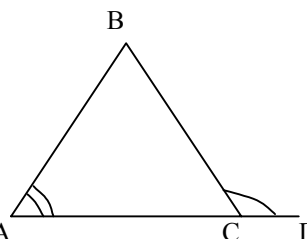
Доказательство:

Пусть  $\angle A = x$ , значит  $\angle BCD = 2x$ .

Из свойств внешнего угла имеем:

$\angle BCD = \angle A + \angle B$  т.е.  $2x = x + \angle B$

Т.е.  $\angle B = x$  т.е.  $\angle A = \angle B$  значит  $AC = BC$ , следовательно  $\triangle ABC$  – равнобедренный и обратное утверждение верно.



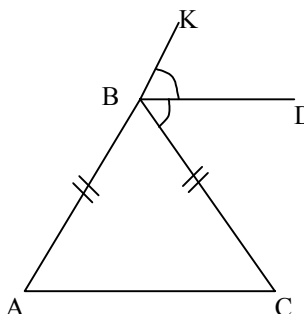
**233.**

Дано:  $AB = BC$ ,  $\angle KBD = \angle CBO$ .

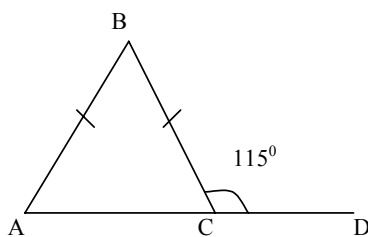
Доказать:

Доказательство:

Из  $\triangle ABC$  – равнобедренный, следует  $\angle A = \angle C$ ,  $\angle KBC$  – внешний, значит по предыдущей задаче  $\angle KBC = 2\angle A$ , следовательно  $\angle KBD = \angle DBC = \angle A$ , углы  $\angle DBK$  и  $\angle A$  – соответственные углы при прямых  $BD$  и  $AC$  и секущей  $AK$  и  $\angle DBK = \angle A$ , следовательно  $BD \parallel AC$  по признаку параллельности прямых.



234.



Рассмотрим 2 случая:

1) Дано:  $AB=BC$ ,  $\angle BCD=115^\circ$

$\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C=?$

Решение:

$\angle C$ ,  $\angle BCD$  – смежные, следовательно,  $\angle C=180^\circ-115^\circ=65^\circ$ ,

$\angle A=\angle C=65^\circ$  (как углы при основании равнобедренного тр-ка)

$\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C)$  (по теореме о сумме углов тр-ка), значит

$\angle B=180^\circ-130^\circ=50^\circ$ .

Ответ:  $65^\circ$ ;  $65^\circ$ ;  $50^\circ$ .

2) Дано:  $AB=BC$ ,  $\angle CBD=115^\circ$ ,  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C=?$

Решение:

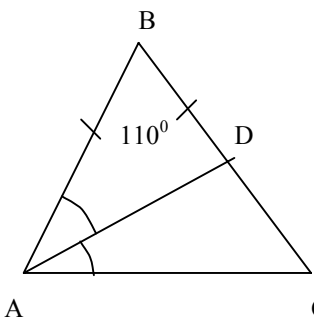
$\angle B$ ,  $\angle CBD$  – смежные, тогда  $\angle B=180^\circ-115^\circ=65^\circ$ .

Из  $\angle A=\angle C$  (углы при основании равнобедренного тр-ка).

Следует  $\angle A=\angle C=(180^\circ-65^\circ):2=57,5^\circ$ .

Ответ:  $65^\circ$ ;  $57^\circ 30'$ ;  $57^\circ 30'$ .

235.



Дано:  $\angle BAD=\angle CAD$ ,  $\angle ADB=110^\circ$ ,

$\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C=?$

Решение:

Пусть  $\angle A=x^\circ$ , тогда  $\angle C=2x^\circ$

$\angle ADC=180^\circ-110^\circ=70^\circ$  т.к.  $\angle AOB$  и

$\angle AOC$  смежные

$\angle A+\angle D+\angle C=180^\circ$  (сумма углов  $\Delta$ ).

значит  $x+70+2x=180^\circ$ ,  $3x=110^\circ$

$$x = 35\frac{2}{3} = 36^\circ 40'$$

значит,  $\angle DAC=36^\circ 40'$   $\angle C=2\cdot 36^\circ 40'=72^\circ 80'=73^\circ 20'$ , ( $1^\circ=60'$ ),

$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$  (сумма углов треугольника),

т.е.  $73^\circ 20'+\angle B+73^\circ 20'=180^\circ$

или  $\angle B=180^\circ-146^\circ 40'=179^\circ 60'-146^\circ 40'=33^\circ 20'$ .

Ответ:  $73^\circ 20'$ ;  $73^\circ 20'$ ;  $33^\circ 20'$ .

## § 2. Соотношение между сторонами и углами треугольника

236.

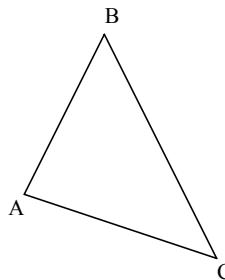
Может ли быть угол  $\angle A$  тупым, если,

а)  $AB > BC > AC$

$AB$  – самая большая сторона значит, наибольшим углом может быть только  $\angle C$ . Но в треугольнике может быть только один тупой угол, значит  $\angle A$  – не может быть тупым.

б)  $AB = AC < BC$

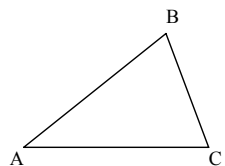
Из  $AB = BC$ , следует  $\triangle ABC$  – равнобедренный значит  $\angle C = \angle B$  и они могут быть только острыми углами  $BC > AB = AC$ , следовательно  $\angle A > \angle C = \angle B$ , и  $\angle A$  может быть тупым.



237.

а)  $\angle A > \angle B > \angle C$ , тогда  $BC > AC > BA$ ;

б)  $\angle A > \angle B = \angle C$ , тогда  $BC > AC = BA$ .



238.

Дано:  $AB = BC$ .

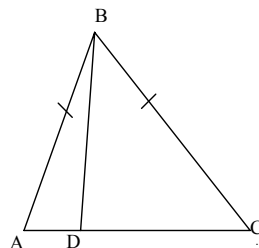
Доказать:  $BD < AB$ .

Доказательство:

Из  $\triangle ABC$  – равнобедренный, следует  $\angle A = \angle C$  – острые

$\angle ADB$  и  $\angle CDB$  – смежные и один из них тупой, другой острый или оба по  $90^\circ$ .

Если  $\angle ADB$  – тупой, то он наибольший в  $\triangle ADB$ , тогда  $AB > BD$ , если  $\angle CDB$  – тупой в  $\triangle CDB$ , то  $BC > BD$  и  $AB = BC > BD$  ч.т.д.



239.

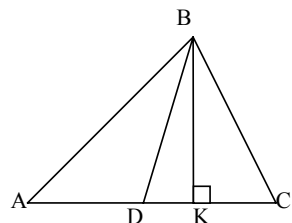
Дано:  $BD$  – медиана,  $BK$  – высота.

Доказать:  $BK \leq BD$ .

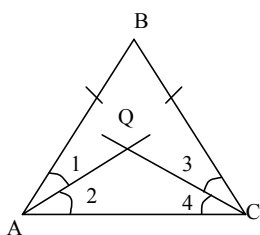
Доказательство:

$\angle K = 90^\circ$  – наибольший в  $\triangle DBK$ , тогда из неравенства треугольника имеем  $BD > BK$ .

$BD = BK$  когда  $\triangle ABC$  равнобедренный, и медиана с высотой опущены на основание, либо когда  $\triangle ABC$  – равнобедренный.



240.



Дано:  $AB=BC$ ,  $AO$  и  $CO$  – биссектрисы.

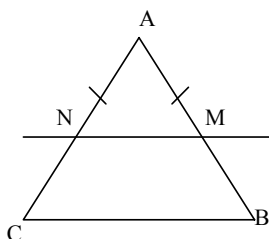
Доказать:  $\triangle AOC$  – равнобедренный.

Доказательство:

Из  $\triangle ABC$  – равнобедренный, следует  $\angle A = \angle C$ ,  $AO$ ,  $CO$  – биссектрисы равных углов, значит  $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$

т.к.  $\angle 2 = \angle 3$  то  $AO = CO$ , следовательно  $\triangle AOC$  – равнобедренный

241.



Дано:  $AB=AC$ ,  $NM \parallel BC$ .

Доказать:  $\triangle AMN$  равнобедренный.

Доказательство:

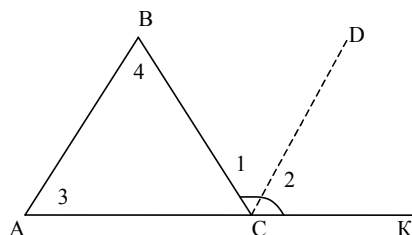
$NM \parallel BC$ , значит

$\angle C = \angle N$ ,  $\angle B = \angle M$ , как соответственные углы при параллельных прямых

Так как  $\triangle ABC$  – равнобедренный, то  $\angle B = \angle C$ . Значит,  $\angle N = \angle C = \angle B = \angle M$ .

Следовательно,  $\triangle AMN$  – равнобедренный.

242.



Дано:  $CD$  биссектриса,

угла  $\angle BCK$ ,  $DC \parallel AB$

Доказать:  $\triangle ABC$  – равнобедренный

Доказательство:

$CD \parallel AB$ , значит  $\angle 2 = \angle 3$  (соответственные при параллельных),  $\angle 1 = \angle 4$  (накрест лежащие при параллельных).

$\angle 2 = \angle 3$ ,  $\angle 1 = \angle 4$ ,  $\angle 1 = \angle 2$  тогда  $\angle 3 = \angle 4$ , и  $\triangle ABC$  равнобедренный по признаку

243.

Дано:  $AA_1$  – биссектриса  $\angle A$ ,  $CD \parallel AA_1$ .

Доказать:  $AC=AD$ .

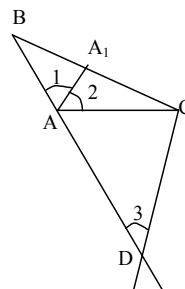
Доказательство:

$DC \parallel AA_1$  значит  $\angle 1 = \angle 3$

(как соответственные)  $DC \parallel AA_1$  значит

$\angle A_1AD + \angle 3 = 180^\circ$  (как односторонние)

$\angle 2 + \angle CAD + \angle 3 = 180^\circ$  (1)



$\angle 3 + \angle CAD + \angle 4 = 180^\circ$  (2) (сумма углов треугольника)

Откуда из (1) и (2)  $\angle 4 = \angle 2$ , тогда  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 1 = \angle 3$ ,  $\angle 2 = \angle 4$ ,  $\angle 3 = \angle 4$ , т.е.  $AC = AD$ , ч.т.д.

**244.**

Дано:  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $DE \parallel AC$ .

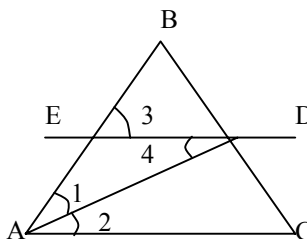
Доказать:  $\triangle ADE$  – равнобедренный.

Доказательство:

$AC \parallel ED$  значит  $\angle 1 = \angle 3$  (как соответственные углы)

$\angle 2 = \angle 4$  (как накрест лежащие углы)

$\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 1 = \angle 3$ ,  $\angle 2 = \angle 4$ , тогда  $\angle 1 = \angle 4$ , т.е.  $\triangle ADE$  – равнобедренный по признаку и  $AE = ED$ .



**245.**

Дано:  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 5 = \angle 6$ ,  $MN \parallel BC$ .

Доказать:  $MN = BM + CN$ .

Доказательство:

$MN \parallel BC$ , значит  $\angle 1 = \angle 3$ , как накрест лежащие углы

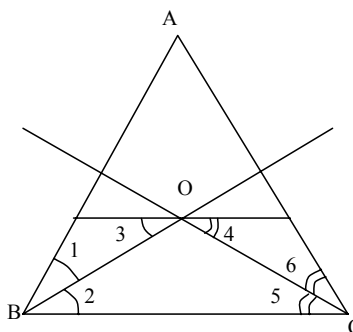
$\angle 1 = \angle 3 = \angle 2$ , значит

$\angle 2 = \angle 3$ , тогда  $\triangle CNO$  – равнобедренный и  $CN = NO$

$MN \parallel BC$ , значит  $\angle 4 = \angle 5$ , как накрест лежащие углы,  $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$

значит,  $\angle 4 = \angle 6$ , тогда  $OM = MB$ .

Следовательно,  $MN = NO + OM = CN + BM$  ч.т.д.



**246.**

Дано:  $\angle 1 = \angle 2$ ;  $\angle 4 = \angle 5$ ,

$OE \parallel AB$ ,  $OD \parallel AC$ .

Доказать:  $P_{\triangle OED} = BC$ .

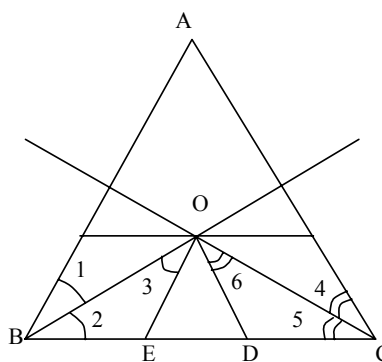
Доказательство:

$OE \parallel AB$ , значит  $\angle 1 = \angle 3$ , как накрест лежащие углы

Тогда  $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$

тогда  $\angle 2 = \angle 3$ , и  $BE = OE$  (по свойству равнобедренного треугольника)

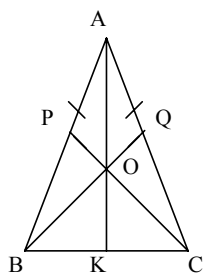
$OD \parallel AC$ , значит  $\angle 4 = \angle 6$ , как накрест лежащие углы.



Тогда  $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$ , значит,  $\angle 5 = \angle 6$ , и  $CD = OD$  (по свойству равнобедренного треугольника).

Тогда,  $P_{\triangle OED} = OE + ED + DO = BE + ED + DC = BC$  ч.т.д.

**247.**



Дано:  $AB = AC$ ,  $AP = AQ$ .

Доказать:

а)  $\triangle BOC$  – равнобедренный

б)  $BK = KC$ ,  $AK \perp BC$

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle CQB$  и  $\triangle BPC$ :

$BP = AP - PA = AC - AQ = CQ$

$\angle B = \angle C$  (как углы при основании равнобедренного тр-ка)

сторона  $BC$  – общая, значит  $\triangle BPC = \triangle CQB$  по 1-му признаку равенства тр-ов, следовательно  $\angle PCB = \angle QBC$  – равнобедренный по признаку.

Рассмотрим  $\triangle AOB$  и  $\triangle AOC$ :

сторона  $AO$  – общая,  $BO = OC$ ,  $AB = AC$ .

Значит  $\triangle AOB = \triangle AOC$  (по 3-му признаку равенства тр-ов)

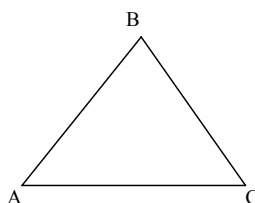
Следовательно  $\angle BAO = \angle CAO$ , значит  $AO$  – биссектриса  $\triangle ABC$  равнобедренного и по свойству биссектрисы опущенной на основание,  $AK$  – медиана и высота ч.т.д.

**248.**

а) Не существует т.к.  $1+2=3$  – противоречие с неравенством треугольника

б) треугольник не существует, так как  $1,2+1 < 2,4$ .

**249.**



Дано:  $AB = BC$ ,  $a = 25$  см,  $b = 10$  см.

Какая из сторон является основанием?

$B = AC = 10$  см,  $a + a = AB + BC > AC$ ,  $25 + 25 > 10$  – верно;

если  $AC = 25$ , то  $AB = BC = 10$ ,  $10 + 10 < 25$  – противоречие с неравенством треугольника.

Значит, основание  $b = 10$  см.

**250**

а)  $a=5$  см,  $b=3$  см,  $c=?$

Из  $\triangle ABC$  – равнобедренный, следует  $c=5$  см или  $c=3$  см  $\left[ \begin{array}{l} 5+5>3 \\ 3+3>5 \end{array} \right]$  —

верно.

б)  $a=8$  см,  $b=2$  см,  $c=?$

Из  $\triangle ABC$  – равнобедренный, следует  $c=8$  см.  $8+8>2$  – верно.

в)  $a=10$  см,  $b=5$  см,  $c=?$

Из  $\triangle ABC$  – равнобедренный, следует  $c=10$  см.  $10+10>5$  – верно.

**251.**

Решение приведено в книге

**252.**

Дано:  $\angle 1 > \angle 2$ ,  $P_{ABC}=74$  см,  
 $AC=16$  см,  $AB, BC=?$

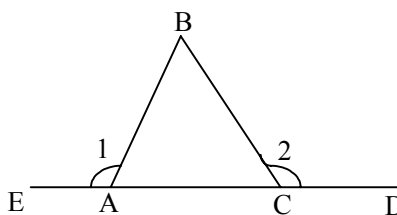
Решение

Из  $\angle 1 = \angle 2$ , следует  $\angle A = \angle C$   
как целые смежные с равными  
углами, значит,  $\triangle ABC$  – рав-  
нобедренный по признаку.

Пусть  $AC = 16$  см, и  $AB=BC=x$  см, тогда  $AB+BC+AC=74$ , или  
 $x+x+16=74$ ,  $2x=58$ ,  $x=29$ ,  $AB+BC=29$  см;  $29+29>16$  – верно.

Пусть  $AB=BC=16$  см, и  $AC=x$  см, тогда  $16+16+x=74$ ,  $32+x=74$ ,  
 $x=74-32$ ,  $x=42$ ,  $AC=42$  см, но  $16+16<42$  – противоречие с неравенст-  
вом треугольника, значит второе предположение неверно, а верно  
только первое.

Ответ: 16 см; 29 см; 29 см.



**253.**

Дано:  $AB=BC$

$P_{ABC}=25$  см.

$\angle DBC$  – острый.

$AB, BC, AC = ?$

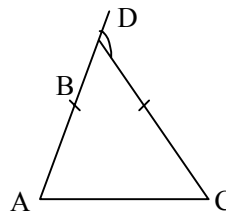
Решение

Пусть  $AB=BC = x$  см, тогда  $AC=x+4$  см

$P_{ABC}=AB+BC+AC$ , значит

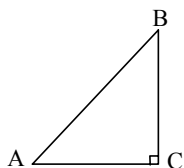
$25=x+x+x+4$ ,  $21=3x$ , тогда  $x=7$ , следова-  
тельно,  $AB=BC=7$  см,  $AC=11$  см.

Ответ: 7 см, 7 см, 11 см.



### § 3 Прямоугольные треугольники

254.



Дано:  $AC=BC$ ,  $\angle C=90^\circ$ ,  $\angle A$ ,  $\angle B = ?$

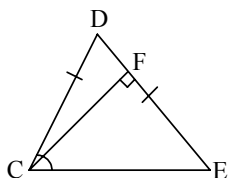
Решение

$\angle A + \angle B = 90^\circ$  (по свойству прямоугольного треугольника),

$\angle A = \angle B$ , значит  $\angle A = \angle B = 90^\circ : 2 = 45^\circ$ .

Ответ:  $45^\circ$ ,  $45^\circ$ .

255.



Дано:  $CD=DE$ ,  $\angle D=54^\circ$ ,  $\angle C=\angle E=126:2=63^\circ$

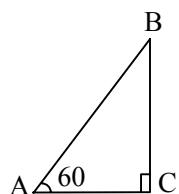
$\angle FCD=90^\circ-\angle D$  (по свойству прямоугольного треугольника),

$\angle FCD=90^\circ-54^\circ=26^\circ$ ,

$\angle ECF=\angle C-\angle FCD=63^\circ-26^\circ=37^\circ$ .

Ответ:  $37^\circ$ .

256.



Дано:  $\angle C=90^\circ$ ,  $\angle A=60^\circ$ ,  $AB+AC=26,4$  см,  $AB=?$

Решение

$\angle B=90^\circ-\angle A$  (по свойству прямоугольного треугольника),  $\angle B=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

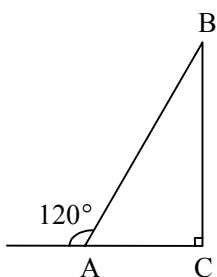
Т.к. сторона, лежащая против угла  $30^\circ$ , равна  $\frac{1}{2}$

гипотенузы, то  $AC=\frac{1}{2} AB$

$AB+AC=26,4$  значит  $AB+\frac{1}{2} AB=26,4$ , т.е.  $AB=17,6$  см.

Ответ: 17,6 см.

257.



Дано:  $\angle C=90^\circ$ , внешний при :  $\angle CA=120^\circ$ ,  $AC+AB=18$  см,  $AC$ ,  $AB=?$

Решение

$\angle BAC=180^\circ-120^\circ=60^\circ$  - по свойству смежных углов,  $\angle B=90^\circ-\angle A$  (по свойству угла прямоугольного треугольника)

значит  $\angle B=90^\circ-\angle 60^\circ=30^\circ$ , и следовательно, по свойству прямоугольного треугольника

имеем, что  $AC = \frac{1}{2} AB$ ,  $AB = 2AC$ .

$AC + AB = 18$ , значит  $AC + 2AC = 18$  т.е.  $AC = 6$  см.

Ответ: 6 см; 12 см.

**258.**

$AB = BC = AC = 12$  см,  $BD = DC$ ,  $\angle DMC = 90^\circ$ .

$AM = ?$

Решение

$\triangle ABC$  – равносторонний

$\angle B = \angle A = \angle C = 180^\circ : 3 = 60^\circ$

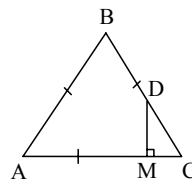
$\angle MDC = 90^\circ - \angle C$  (по свойству прямоугольного треугольника),  $\angle MDC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ , и по свойству прямоугольного

треугольника  $MC = \frac{1}{2} DC$ ;  $BD = DC$ , значит  $DC = \frac{1}{2} BC$ , т.е.

$MC = \frac{1}{4} BC = 3$  см.

$AM = AC - MC = 12 - 3 = 9$  см.

Ответ 9 см.



**259.**

Дано:  $AB = BC$ ,  $\angle B = 120^\circ$ ;  $\angle ANB = 90^\circ$ ;

$AN = 9$ ,  $AC = ?$

Решение

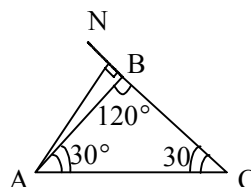
$AB = BC$ , значит  $\angle BAC = \angle BCA$ .

$\angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$  – по теореме о сумме углов треугольника.

Тогда  $\angle BAC = \angle BCA = 60^\circ : 2 = 30^\circ$ , следовательно по свойству прямоугольного треугольника  $AN = \frac{1}{2} AC$ , значит  $AC = AN \cdot 2$ ,

$AC = 9 \cdot 2 = 18$  см.

Ответ 18 см.



**260.**

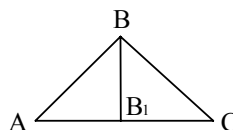
Дано:  $AB = BC = 15,2$ ;  $\angle BB_1C = 90^\circ$ ,  $BB_1 = 7,6$  см

$\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C = ?$

Решение

Из условия видим  $BB_1 = \frac{1}{2} BC$ , тогда по свой-

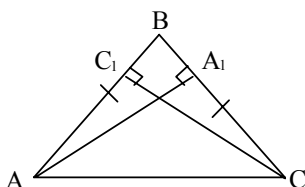
ству прямоугольного треугольника  $\angle BCB_1 = 30^\circ$ , значит  $\angle BAC = \angle BCA = 30^\circ$



$\triangle ABC$  – равнобедренный, но  $\angle ABC = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$  (сумма углов треугольника).

Ответ:  $30^\circ$ ;  $30^\circ$ ;  $120^\circ$ .

**261.**



Дано:  $AB = BC$ ,  $AA_1$ ,  $CC_1$  – высоты.

Доказать:  $AA_1 = CC_1$ .

Доказательство

$\triangle ABC$  равнобедренный, значит

$$\angle C_1AC = \angle A_1CA$$

$$\angle A_1AC = 90^\circ - \angle A_1CA =$$

$$= 90^\circ - \angle C_1AC = \angle C_1CA$$

Рассмотрим  $\triangle AA_1C$  и  $\triangle CC_1A$ : сторона  $AC$  – общая

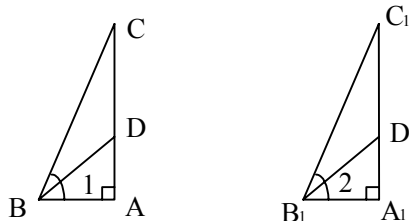
$\angle A_1AC = \angle C_1CA$ ,  $\angle C_1AC = \angle A_1CA$  по 2-му признаку равенства треугольников.

Значит  $\triangle AA_1C = \triangle CC_1A$

Следовательно,  $AA_1 = CC_1$

Что и требовалось доказать.

**262.**



Дано:  $\angle A = \angle A_1 = 90^\circ$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $BD$ ,  $B_1D_1$  – биссектрисы,  $BD = B_1D_1$ .

Доказать  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Доказательство:

$\angle B = \angle B_1$ ,  $BD$  и  $B_1D_1$  – биссектрисы,  $\angle 1 = \angle 2$

Рассмотрим  $\triangle A_1B_1D_1$  и  $\triangle ABD$ :  $BD = B_1D_1$ ,  $\angle 1 = \angle 2$

Значит  $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$  (по гипотенузе и острому углу)

Следовательно  $AB = A_1B_1$

Рассмотрим  $\triangle A_1B_1C_1$  и  $\triangle ABC$ :

$$AB = A_1B_1$$

$$\angle B = \angle B_1$$

$$\angle A = \angle A_1 = 90^\circ$$

Значит  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  по второму признаку равенства треугольников.

**263.**

Дано:  $AB=AC$ ,  $CC_1$ ,  $BB_1$  –  
высота,  $\angle BMC=140^\circ$ ,  $\angle A$ ,  $B$ ,  
 $C=?$

Решение

$180^\circ - 140^\circ = \angle 1$  (как смежные)

$\angle 1 = 40^\circ$ , значит  $\angle B_1CC_1 = 90^\circ -$

$40^\circ = 50^\circ$  ( по свойству углов

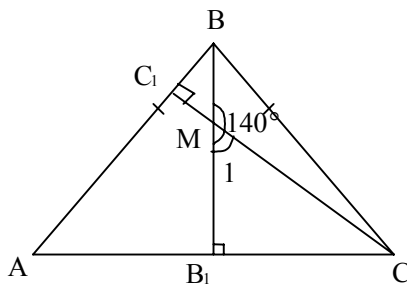
прямоугольного треугольни-

ка),  $\angle A = 90^\circ - \angle B_1CC_1 = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ ,  $\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A$  (сумма углов

треугольника).

Тогда  $\angle B + \angle C = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ ; т.к.  $AB=AC$ , то  $\angle B = \angle C = 70^\circ$ .

Ответ:  $40^\circ$ ;  $70^\circ$ ;  $70^\circ$ .



**264.**

Дано:  $AA_1$  и  $BB_1$  – высоты,  
 $\angle A = 55^\circ$ ,  $\angle B = 67^\circ$ ,  $\angle AMB=?$

Решение

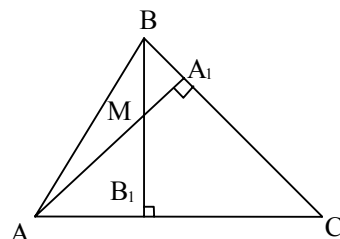
$\angle ABB_1 = 90^\circ - \angle BAA_1 = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$

(свойство углов прямоугольного  
треугольника)

Тогда,  $\angle AMB = 180^\circ - \angle BAM - \angle ABM =$

$= 180^\circ - 23^\circ - 35^\circ = 122^\circ$ .

Ответ:  $122^\circ$ .



**265.**

Дано:  $\angle FAN$ ,  $\angle HFA=?$

$AB=BC$ ,  $\angle B = 112^\circ$ ;  $\angle 1 = \angle 2$ ;

$\angle ANH = 90^\circ$

Решение

$\angle A + \angle C = 180^\circ - \angle B$ ;

$\angle A + \angle C = 180^\circ - 112^\circ$  (по теореме  
о сумме углов треугольника).

$\angle A + \angle C = 68^\circ$ ,  $\angle A = \angle C$ ,

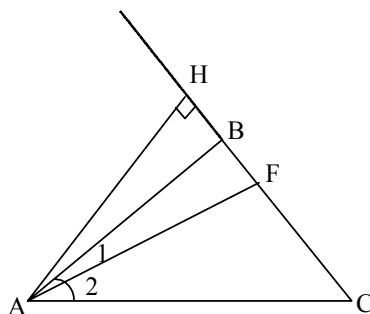
$\angle A = \angle C = 68^\circ : 2 = 34^\circ$  ( $AB=BC$ )

$\angle BFA = 180^\circ - \angle B - \angle BAF$ ,  $\angle BAF = \angle 1 = 34^\circ : 2 = 17^\circ$ ,

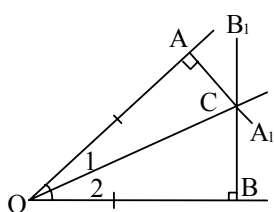
Тогда  $\angle BFA = 180^\circ - 112^\circ - 17^\circ = 51^\circ$ .

$\angle HAF = 90^\circ - \angle HFA = 90^\circ - 51^\circ = 39^\circ$ .

Ответ:  $90^\circ$ ,  $51^\circ$ ,  $39^\circ$ .



266



Дано:  $OA=OB$ ,  $AA_1=BB_1$ .

Доказать:  $OC$  – биссектриса

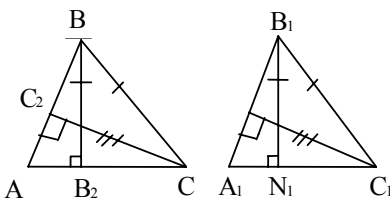
Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle OBC$  и  $\triangle OA_1C$ :

Сторона  $OC$  – общая,  $OA=OB$

Значит  $\triangle OBC = \triangle OA_1C$  (по катету и гипотенузе), следовательно,  $\angle 1 = \angle 2$  и  $OC$  – биссектриса что и требовалось доказать.

267.



Дано:

$CC_2$ ,  $BB_2$ ,  $C_1M_1$ ,  $B_1N_1$  высоты,

$BB_2=B_1N_1$ ,  $CC_2=C_1M_1$ ,

$BC=B_1C_1$ ,

Доказать:  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle N_1B_1C_1$  и  $\triangle B_2BC$ :

$BC=B_1C_1$ ,  $BB_2=B_1N_1$ .

Значит  $\triangle B_2BC = \triangle N_1B_1C_1$  (по гипотенузе и катету)

Следовательно  $\angle C = \angle C_1$

Рассмотрим  $\triangle M_1B_1C_1$  и  $\triangle C_2BC$ :

$BC=B_1C_1$ ,  $C_2C=M_1C_1$ ,  $\angle C_2BC = \angle M_1B_1C_1$  (по гипотенузе и катету).

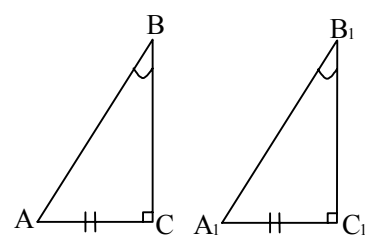
Следовательно  $\angle B = \angle B_1$

Рассмотрим  $\triangle A_1B_1C_1$  и  $\triangle ABC$ :

$BC=B_1C_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$

Значит  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$  (по 2-му признаку равенства треугольников)

268.



Дано:

$\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$

$\angle B = \angle B_1$

$AC = A_1C_1$

Доказать:

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Доказательство:

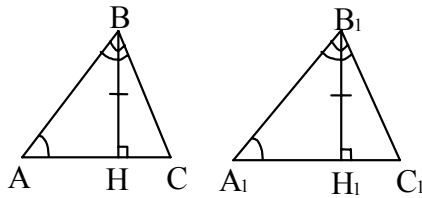
$\angle A = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - \angle B_1 = \angle A_1$

Рассмотрим  $\triangle A_1B_1C_1$  и  $\triangle ABC$ :

$AC = A_1C_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$  (по второму признаку равенства треугольников)

Значит  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  чтд.

269.



Дано:  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $BH = B_1H_1$  – высоты,  $BH = B_1H_1$

Доказать:  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Доказательство:

$\triangle A_1B_1H_1$  и  $\triangle ABH$ :

$BH = B_1H_1$

$\angle A = \angle A_1$

Значит  $\triangle ABH = \triangle A_1B_1H_1$  (по катету и острому углу)

Следовательно  $AB = A_1B_1$

$\triangle A_1B_1C_1$  и  $\triangle ABC$ :

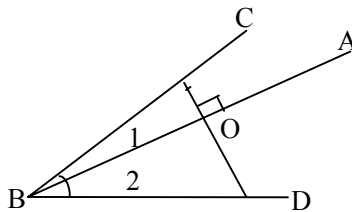
$AB = A_1B_1$

$\angle A = \angle A_1$

$\angle B = \angle B_1$  (по второму признаку равенства треугольников)

Значит  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  чтд.

270.



Построить

а – прямую через А,

где  $BC = BD$

План построения:

построим биссектрису  $BM$  данного угла  $\angle B$

через А проведем перпендикуляр  $CD$  к  $BM$

рассмотрим  $\triangle BOD$  и  $\triangle BOC$ :

$BO$  общая

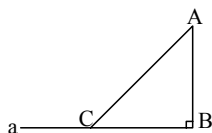
$\angle 1 = \angle 2$

Значит  $\triangle BOC = \triangle BOD$  (по катету и острому углу)

Следовательно,  $BC = BD$  и прямая  $CD$  искомая.

#### §4. Построение треугольника по трем элементам

271.



Дано:  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB + AC = 17$  см,  
 $AC - AB = 1$  см,  $AB = ?$

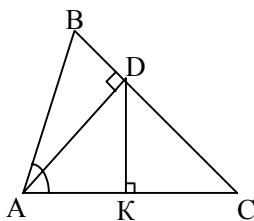
Решение

Пусть  $AB = x$ ,  $AC = y$ , тогда

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 18 \\ 2x = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 9 \\ x = 8 \end{cases} \text{ Значит } AB = 8 \text{ см.}$$

Ответ 8 см.

272.



Дано:  $AB = BC = AC$ ,  $\angle BAD = \angle CAD$ ,  
 $\angle DKA = 90^\circ$ ,  $DK = 6$  см,  $AD = ?$

Решение

$\triangle ABC$  – равносторонний, значит

$\angle BDA = \angle CDA = 90^\circ$ ,  $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ .

$\angle DKA = 90^\circ$ ,  $\angle DAK = 30^\circ$ , (т.к. AD – биссектриса).

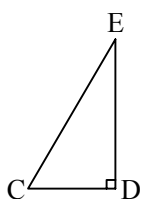
$DK = 6$  см;

DK – лежит против угла  $30^\circ$ , значит  $AD = 2DK$ ; (по свойству)

т.е.  $AD = 12$  см

Ответ 12 см.

273.



Дано:  $\angle D = 90^\circ$ ,  $CE + CD = 31$  см,  $CE - CD = 3$  см,  $CD = ?$

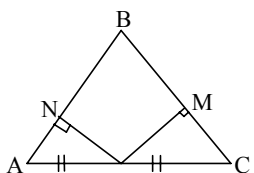
Решение:

Пусть  $CE = x$  см,  $CD = y$  см, тогда

$$\begin{cases} x + y = 31 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 34 \\ 2y = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 14 \end{cases} \text{ значит } CD = 14 \text{ см.}$$

Ответ: 14 см.

274.



Дано:  $AB = BC$ ,  $AK = KC$ ,  $KM \perp BC$ ,  $KN \perp AB$

Доказать:  $KN = KM$

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle CKM$  и  $\triangle KAN$ :

$AK = KC$ ,  $\angle A = \angle C$  (из  $\triangle ABC$  – равнобедренный)

Значит,  $\triangle KAN = \triangle CKM$  (по гипотенузе и острому углу)

Следовательно,  $KN = KM$ , чтд.

**275.**

Дано:  $AC=CB$ ,  $ME \perp AC$ ,  $MK \perp BC$ ,  $ME=MK$ .

Доказать:  $CM \perp AB$ .

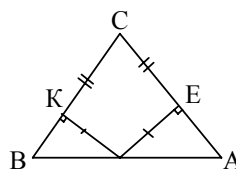
Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle EAM$  и  $\triangle BKM$ :

$KM=EM$ ,  $\angle B=\angle A$  (из  $\triangle ABC$  – равнобедренный)

Значит  $\triangle BKM=\triangle EAM$  (по катету и острому углу)

Следовательно,  $BM=MA$ , значит,  $CM$  – медиана равнобедренного треугольника, опущенная на основание,  $CM \perp AB$ , по свойству равнобедренного треугольника, чтд.



**276.**

Дано:  $AO=OB$ ,  $AA_1 \perp BB_1 \perp l$ .

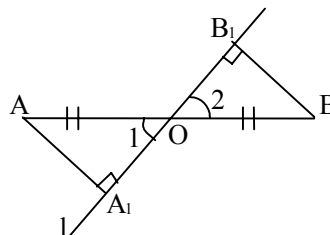
Доказать:  $AA_1=BB_1$ .

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle BB_1O$  и  $\triangle AA_1O$ :

$AO=BO$ ,  $\angle 1=\angle 2$  т.к. они вертикальные, значит,  $\triangle AA_1O=\triangle BB_1O$  (по гипотенузе и острому углу)

Следовательно,  $AA_1=BB_1$  чтд.



**277.**

Дано:  $a \parallel b$ ,  $AB \perp a$ ,  $AB=3$  см,

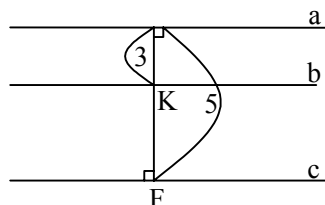
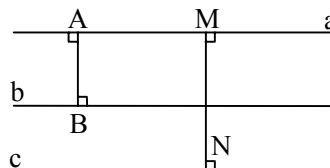
$a \parallel c$ ,  $MN \perp a$ ,  $MN=5$  см

Найти: расстояние между  $c$  и  $b$ .

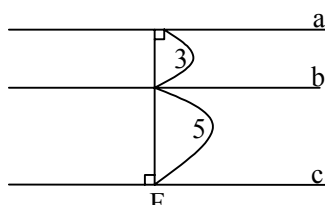
Решение:

$a \parallel b$ ,  $a \parallel c$ ,  $b \parallel c$  (по свойству параллельных прямых).

Рассмотрим 2 случая:



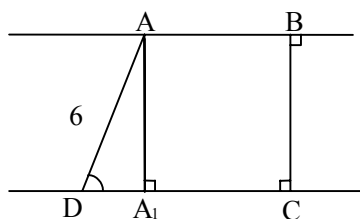
$$KF=5-3=2 \text{ см.}$$



$$KF=3+5=8 \text{ см.}$$

Ответ 2 см или 8 см.

**278.**



Дано:  $AB \parallel CD$ ,  $\angle ADC = 30^\circ$ ,  
 $AD = 6$  см,  $BC \perp AB$ ,  $BC = ?$

Решение:

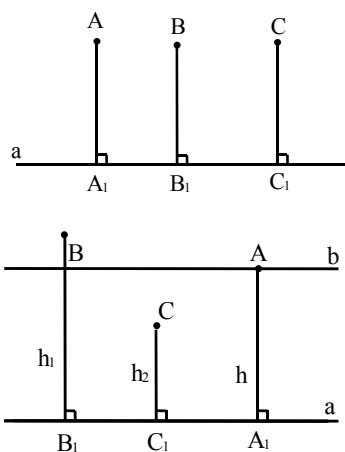
$\angle A_1 = 90^\circ$ ,  $\angle D = 30^\circ$ ,  $AA_1$  лежит против угла  $30^\circ$ , значит

$$AA_1 = \frac{1}{2} AD, AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ cm.}$$

$AA_1=BC, BC=3 \text{ cm.}$

Ответ 3 см.

**279.**



Дано:  $AA_1 \perp a$ ,  $BB_1 \perp a$ ,  $CC_1 \perp a$ ,

$$AA_1=BB_1=CC_1$$

Доказать: А, В, С – принадлежат одной прямой.

Доказательство:

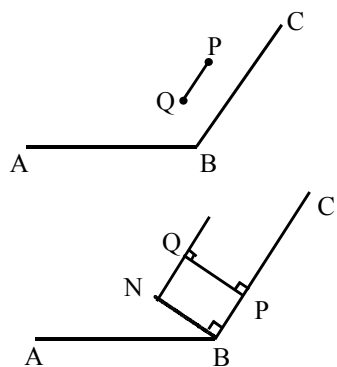
по аксиоме параллельных прямых  
через  $A$  проведем прямую  $b$ ,  $b \parallel a$ .

Тогда, все точки  $b \parallel a$  равноудалены от точек прямой  $a$ . Докажем, что  $B, C \in b$ .

Пусть  $B \notin b$ ,  $C \notin b$ , значит расстояние от точки  $B$  до  $a$  и  $C$  будет больше или меньше, чем расстояние  $h$ . Но это противоречит  $AA_1=BB_1=CC_1$ .

Следовательно, наше предположение неверно, и  $A, B, C \in b$  чтд.

**280.**



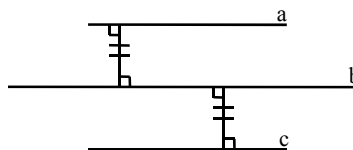
Найти множество всех точек, внутри  $\angle ABC$ , удаленных от  $BC$  на расстояние  $PQ$ .

$$NQ \parallel BC, BN \perp BC$$

Значит луч  $NQ$  и есть искомое множество точек.

**281.**

Ответ: прямая с параллельная  
данным и находящаяся на рав-  
ных расстояниях от них  
(см. рис).



**282.**

Дано:  $a \parallel b$ ,  $XO = OY$ .

Доказать:  $O \in c$ , где

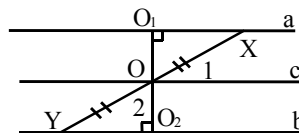
$c \parallel a \parallel b$  и  $OO_1 = OO_2$

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle OO_2Y$  и  $\triangle OO_1X$ :

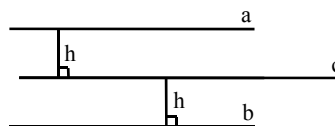
$OX = OY$ ,  $\angle 1 = \angle 2$  т.к. они вертикальные,  $\triangle OO_1X = \triangle OO_2Y$  (по гипоте-  
нузе и острому углу)

Следовательно,  $OO_1 = OO_2$ ,  $O$  – равноудалена от  $a$  и  $b$ , значит по пре-  
дыдущей задаче она лежит на прямой  $c \parallel a \parallel b$ .



**283.**

Ответ: две прямые, параллельные  
данной и расположенные на одном  
расстоянии  $h$  по разные стороны от  
 $c$ . См. рис.



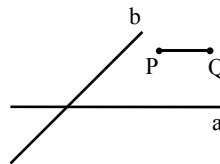
**284.**

Решение приведено в книге.

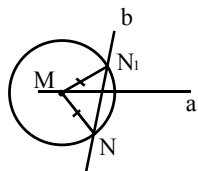
**285.**

Построить  $M \in a$ ,  $MN = PQ$ , и  $N \in b$ .

Задача может и не иметь решения

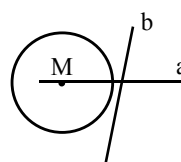


1)



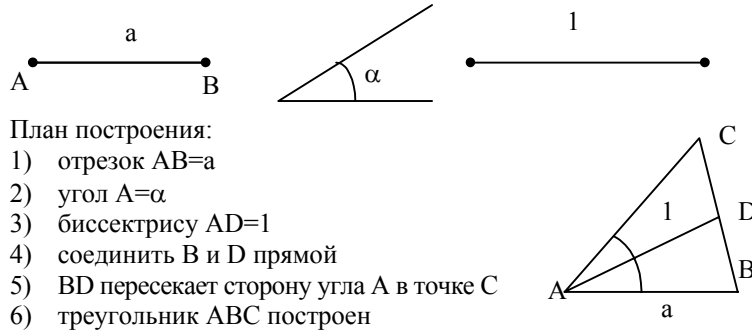
На прямой  $b$  существуют две  
точки  $N$  и  $N_1$ , такие, что  
 $MN = MN_1 = PQ$ . См. рис. 1.

2)

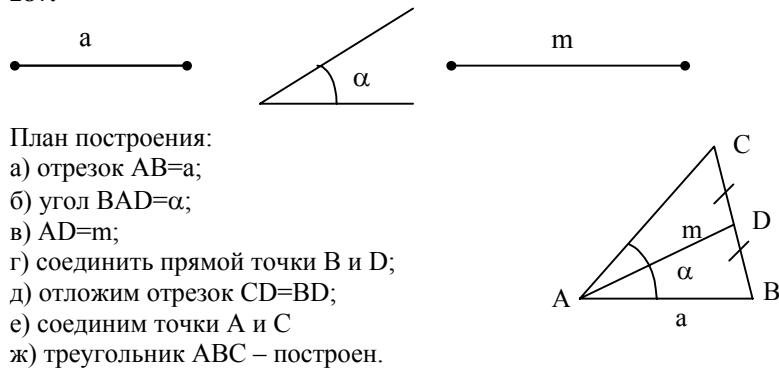


Нет решения, когда на  $b$  нет то-  
чек удаленных от  $M$  на  $PQ$ . См.  
рис 2.

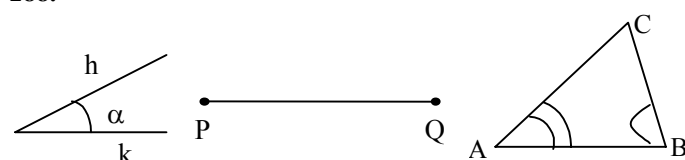
286.



287.



288.



Построить  $\triangle ABC$ :  $AB=PQ$ ,  $\angle ABC=\angle hk$ ,  $\angle BAC=\frac{1}{4}\angle hk$ .

План построения:

а)  $AB=PQ$

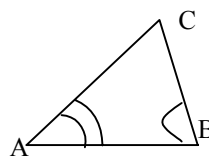
б)  $\angle B=\angle hk$

в)  $\angle A=\frac{1}{4}\angle hk$

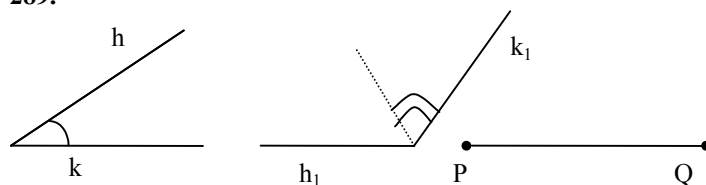
г) ) стороны  $\angle A$  и  $\angle B$  пересекаются в точке  $C$ .

д) треугольник  $ABC$  построен.

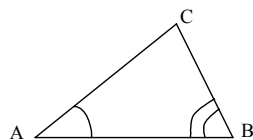
Для построения  $\frac{1}{4}\angle hk$ . надо построить биссектрису угла, а затем биссектрису его половинки.



**289.**



Построить  $\triangle ABC$ :  $AB=PQ$ ,  $\angle A=\angle hk$ ,  $\angle B=\frac{1}{2}\angle h1k1$



План построения:

а)  $AB=PQ$

б)  $\angle B=\angle hk$

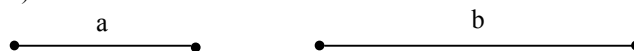
в)  $\angle A=\frac{1}{2}\angle h1k1$

г) стороны углов  $A$  и  $B$  пересекаются в точке  $C$ .

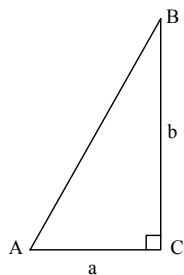
д)  $\triangle ABC$  – искомый.

**290.**

а)

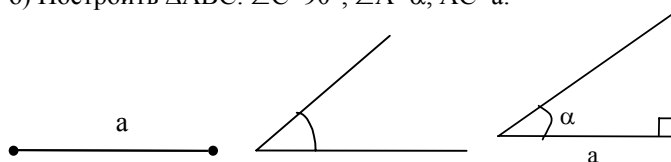


Построить  $\triangle ABC$ :  $\angle C=90^\circ$ ,  $AC=a$ ,  $CB=b$ .



План построения:

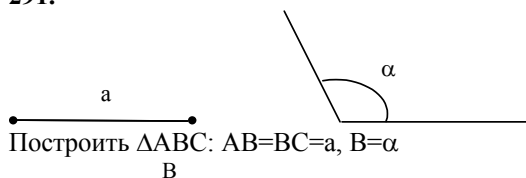
- а) Построить прямой  $\angle C$
- б) На одной стороне отложить  $AC=a$ , а на другой  $BC=b$
- в) соединить А и В.
- г) искомый  $\triangle ABC$  построен.
- б) Построить  $\triangle ABC$ :  $\angle C=90^\circ$ ,  $\angle A=\alpha$ ,  $AC=a$ .



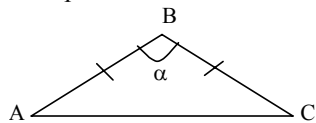
План построения:

- а) построить прямой  $\angle C$
- б) отложить на стороне  $AC=a$
- в) построить  $\angle A=\alpha$
- г) стороны углов А и С пересекаются в В
- д)  $\triangle ABC$  – построен.

**291.**



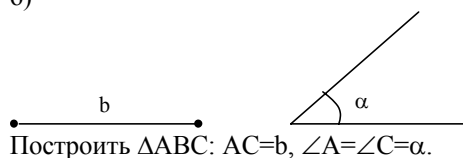
Построить  $\triangle ABC$ :  $AB=BC=a$ ,  $\angle B=\alpha$



План построения:

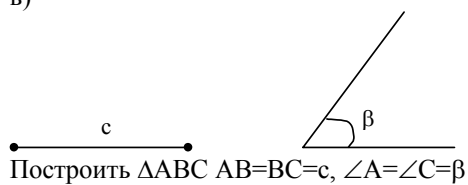
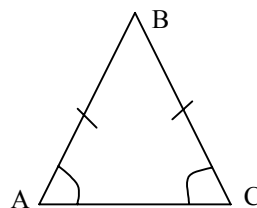
- а)  $\angle B=\alpha$
- б) на стороне угла отложить отрезки  $BC=a=AB$
- в) соединить точки А и С
- г)  $\triangle ABC$  – построен.

б)



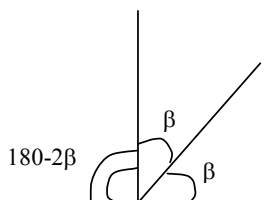
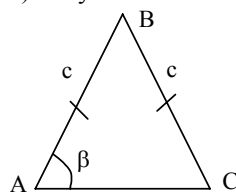
План построения:

- $AC=b$
- $\angle A=\angle C=\alpha$
- Стороны пересекаются в В
- $\triangle ABC$  – построен.
- 

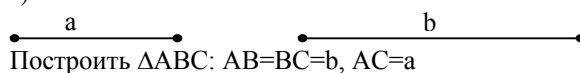


План построения:

- $AB=c$
- $\angle A=\beta$
- $\angle B=180^\circ-2\beta$
- на стороне угла В отложить  $BC=c$
- соединить А и С
- получаем  $\triangle ABC$

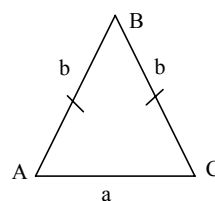


г)



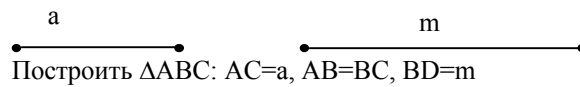
План построения:

- $AC=a$
- две окружности с центрами в А и С и радиусом b
- окружности пересекутся в В
- соединим А и В и В и С



д) получается  $\triangle ABC$

д)



Построить  $\triangle ABC$ :  $AC=a$ ,  $AB=BC$ ,  $BD=m$

План построения:

а)  $AC=a$

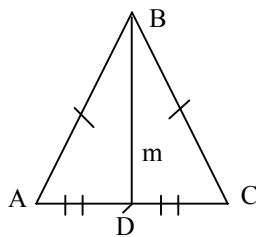
б)  $D$  – середину  $AC$

в) медиана равнобедренного треугольника является высотой, тогда построим  $\angle D=90^\circ$

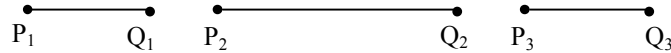
г) на стороне угла  $D$  отложим  $DB=m$

д) соединим  $A$  и  $B$ , и  $B$  и  $C$

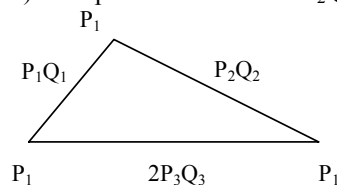
е) получаем треугольник  $ABC$ .



**292.**



а) Построить  $\triangle ABC$ :  $BC=P_2Q_2$ ,  $AC=2P_3Q_3$ ,  $AB=P_1Q_1$



План построения:

а)  $AB=P_1Q_1$

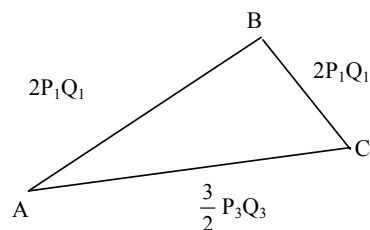
б) окружность с центром в точке  $A$  и радиусом  $P_2Q_2$

в) окружность с центром в точке  $B$  и радиусом  $2P_3Q_3$

г) окружности пересекутся в точке  $C$

д) получаем  $\triangle ABC$ .

б) Построить  $\triangle ABC$ :  $AB=2P_1Q_1$ ,  $BC=2P_2Q_2$ ,  $AC=\frac{3}{2}P_3Q_3$



План построения аналогичен пункту а). Задача имеет решение когда выполняется неравенство треугольника.

**293.**

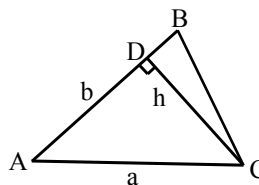
Решение задачи приведено в книге.

**294.**

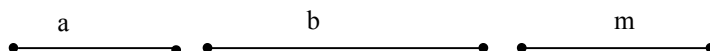
Построить  $\triangle ABC$ :  $AB=b$ ,  $AC=a$ ,  $CD=c$ ,  $CD \perp AB$ .

План построения:

- $\angle D = 90^\circ$
- На одной стороне отложить  $DC=h$
- окружность с центром в  $C$  и радиусом  $a$
- окружность пересечет вторую сторону  $\angle D$  в точке  $A$ .
- $AB=b$
- получаем  $\triangle ABC$ .



**295.**

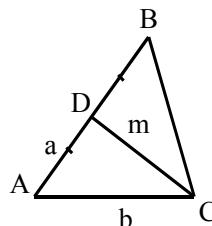


$m$  – медиана.

Построить  $\triangle ABC$ .

План построения:

- $AB=a$
- точку  $D$  – середину  $AB$ .
- окружность с центром в  $D$  и  $R=m$  и окружность с центром в точке  $A$  и радиусом  $b$
- окружности пересекаются в  $C$
- Соединить  $B$  и  $C$ .
- получаем  $\triangle ABC$ .



**296.**

Дано:  $AB=BC$

$\angle B = \angle C$

$BB_1$ ,  $CC_1$  – биссектрисы

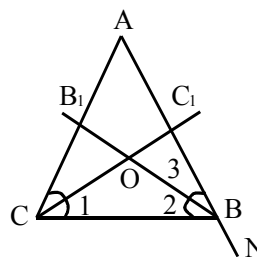
Доказать:  $\angle BOC = \angle CBN$ .

Доказательство:

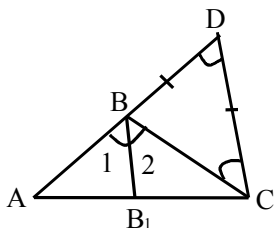
$\angle BOC = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2$  (по теореме о сумме углов треугольника)

$\angle NBC = 180^\circ - \angle 3 - \angle 2$  (как смежные)

$\angle B = \angle C$ ,  $CC_1$  и  $BB_1$  – биссектрисы, значит  $\angle 1 = \angle 3$  и  $\angle BOC = \angle NBC$ , что и требовалось доказать.



297.



Дано:  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $BD = BC$ ,  $\angle D = \angle C$ .

Доказать:  $BB_1 \parallel DC$ .

Доказательство:

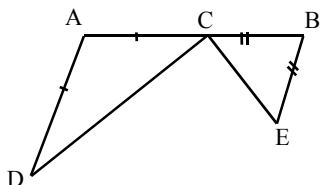
$\angle D + \angle C = 180^\circ - \angle DBC = \angle 1 + \angle 2$ , т.е.

$\angle D + \angle C = \angle 1 + \angle 2$ , но  $\angle D = \angle C$ , значит

$\angle D = \angle C = \angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle C$  и  $\angle 2$  накрест лежа-

щие при  $BB_1$  и  $DC$  и секущей  $BC$ , значит  $BB_1 \parallel DC$  (по признаку) чтд.

298.



Дано:  $AD \parallel BE$

$AD = AC$ ,  $\angle ADC = \angle ACD$

$CB = BE$ ,  $\angle BCE = \angle BEC$

Доказать:  $\angle DCE$  – прямой.

Доказательство:

$AD \parallel BE$ , значит  $\angle A + \angle B = 180^\circ$  (как односторонние)

$\angle A + \angle ADC + \angle ACD + \angle B + \angle BCE + \angle BEC = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

Тогда,  $\angle ADC + \angle ACD + \angle BCE + \angle BEC = 180^\circ$ , так как (значит  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ )

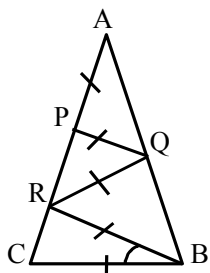
$\angle ADC = \angle ACD$ ,  $\angle BCE = \angle BEC$ , следовательно,

$\angle ACD + \angle BCE = 90^\circ$

$\angle DCE = 180^\circ - (\angle ACD + \angle BCE) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$  (как смежные)

Что и требовалось доказать.

299.



Дано:  $AB = AC$ ,  $\angle B = \angle C$

$AP = PQ = QR = RB = RC$

$\angle A = ?$

Решение:

Пусть  $\angle C = \angle B = x$ .

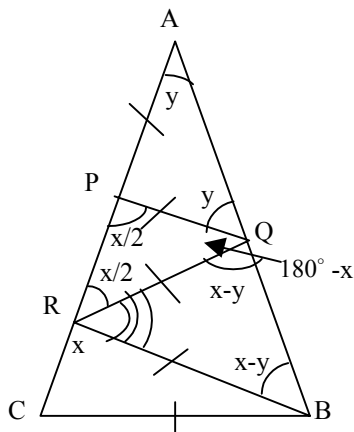
$\angle CBR = y$ .

Из  $\triangle RQB$ :

$\angle R + \angle Q + \angle B = 180^\circ$

значит,  $180^\circ - \frac{3}{2}x + x - y + x - y = 180^\circ$ ,  $\frac{1}{2}x = 2y$ ,  $x = 4y$

Из  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  — сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ .  
 Значит,  $4y + 4y + y = 180^\circ$ ;  
 $9y = 180^\circ$ ;  
 $y = 20^\circ$ .  
 Ответ:  $20^\circ$ .



**300.**

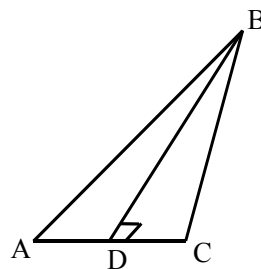
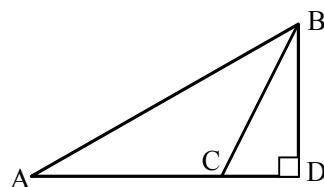
Дано:  $\angle C > 90^\circ$ ;  
 $BD \perp AC$ .

Доказать: D лежит на продолжении отрезка AC

Доказательство:

Пусть  $BD \in [AC]$ , значит,  $\angle D = 90^\circ$

$\angle C = 90^\circ$ , т.е.  $\angle D + \angle C > 180^\circ$ , а это противоречит теореме о сумме углов в треугольнике, значит, предположение неверно, а верно то, что надо доказать.



**301.**

Дано:  $AN \perp a$ ,  $HM_1 = HM_2$

а) Доказать:  $AM_1 = AM_2$

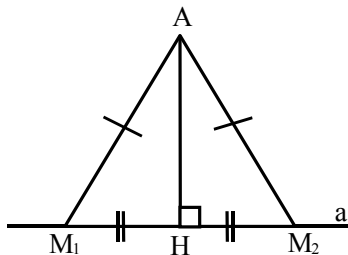
Рассмотрим  $\triangle ANM_2$  и  $\triangle ANM_1$ :

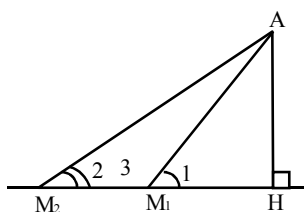
сторона AN — общая

$HM_1 = HM_2$

Значит,  $\triangle ANM_1 = \triangle ANM_2$  (по двум катетам).

Следовательно,  $AM_1 = AM_2$ .





б) Доказать:  $AM_1 < AM_2$ , если  $HM_1 < HM_2$ .

$\angle H = 90^\circ$ , следовательно,  $\angle 1$  – острый (из  $\triangle AHM_1$ )

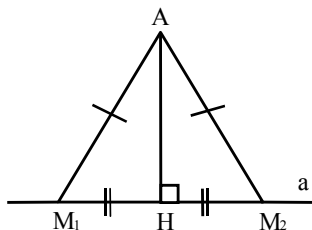
$\angle H = 90^\circ$ , следовательно,  $\angle 2$  – острый (из  $\triangle AHM_2$ ),  $\triangle AM_1M_2$ ,  $\angle 2$  – острый.

$\angle 3$  – тупой, т.к. он смежный с острым; Следовательно,  $AM_2 > AM_1$ , ч.т.д.

**302.**

Дано:  $AH \perp a$ ,  $AM_1 = AM_2$

а) Доказать:  $HM_1 = HM_2$



Из  $\triangle AHM_1$  и  $\triangle AHM_2$ :

сторона  $AH$  – общая

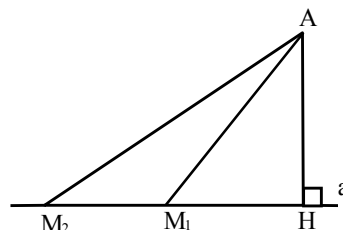
$AM_1 = AM_2$

Значит,  $\triangle AHM_1 = \triangle AHM_2$

(по двум катетам и гипотенузе).

значит,  $HM_1 = HM_2$ .

б) Доказать:  $HM_1 < HM_2$ , когда  $AM_1 < AM_2$ .



Пусть  $HM_1 > HM_2$  или  $HM_1 = HM_2$ .

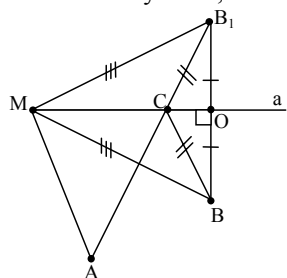
Если  $HM_1 = HM_2$ , то получим результат из 301 (а), что противоречит  $AM_1 < AM_2$ , значит,  $HM_1 = HM_2$  неверно.

Если  $HM_1 > HM_2$ , то (по 301 (б)) получим  $AM_1 > AM_2$ , следовательно,  $HM_1 > HM_2$  неверно.

Значит  $HM_1 < HM_2$ , ч.т.д.

**303.**

Найти: точку  $C \in a$ , чтобы расстояние  $AC + BC$  было максимальным.



Решение:

Через  $B$  проведем прямую  $BO$ ,  $BO \perp a$ , и отметим точку  $B_1$  так, что  $OB = OB_1$ . Тогда  $CB = CB_1$ , значит  $AC + BC = AC + CB_1 = AB_1$ , а для любой другой точки  $M$  прямой  $a$  получаем:

$AM + MB = AM + MB_1 > AB_1$  (по неравенству треугольника).

Тогда, для точки  $C$  сумма  $(AC + BC)$  – минимальная.

**304.**

Дано: М лежит внутри  $\triangle ABC$ .

Доказать:  $MB+MC < AB+AC$ .

Доказательство:

$MC < MO+OC$  (неравенство треугольника в  $\triangle MOC$ ).

$BO < BA+AO$  (из  $\triangle BOA$ ), значит

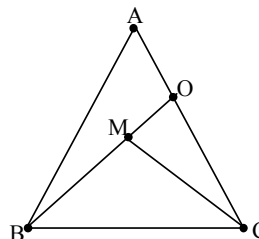
$BO=BM+OM$ , тогда

$BM+MO < BA+AO$ ;

складывая неравенства имеем:

$MC+BM+MO < MO+OC+BA+AO$ , т.е.  $MC+BM < OC+BA+AO$ .

$AO+OC=AC$ , значит  $MC+MB < AB+AC$ , ч.т.д.



**305.**

Доказать:  $BM+CM+AM < P_{ABC}$ .

Доказательство:

М лежит внутри  $\triangle ABC$ , значит, учитывая №301

имеем  $MB+MC < AB+AC$ ,

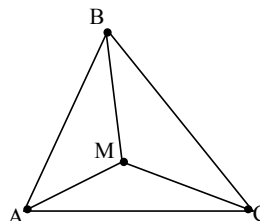
$MA+MB < AC+BC$ ,

$MA+MC < AB+BC$ , тогда

$MB+MB+MA+MA+MC+MC < AB+AB+BC+BC+AC+AC$ ,

или  $MB+MA+MC < AB+BC+AC = P_{ABC}$ ,

т.е.  $P_{ABC} > MB+MA+MC$ , ч.т.д.



**306.**

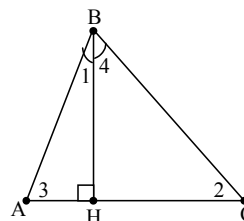
Дано:  $AB=AC+BC$ .

Доказать: А, В и С лежат на одной прямой.

Доказательство:

Если А, В, С не лежат на одной прямой, то они являются вершинами  $\triangle ABC$ .

Значит,  $AB < AC+CB$ , что противоречит условию. Следовательно, точки А, В, С лежат на одной прямой, ч.т.д.



**307.**

Дано:  $\angle AHB = 90^\circ$ .  $\angle B = 90^\circ$ .

Доказать:

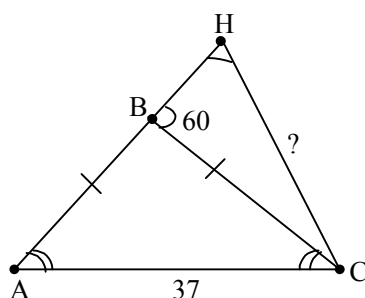
$\triangle ABC$ ,  $\triangle ABH$  и  $\triangle BCH$  имеют равные углы соответственно.

Доказательство:

$\triangle ABC$  – прямоугольный, значит,  $\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$  (1)

$\angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$  (2) (т.к.  $\triangle CBH$  – прямоугольный).  
 $\angle B = 90^\circ$ , следовательно,  $\angle 1 + \angle 4 = 90^\circ$  (3)  
 вычтем из (3) равенство (2):  
 $\angle 1 - \angle 2 = 0$ , значит  $\angle 1 = \angle 2$ .  
 Вычтем из (3) (1):  
 $\angle 4 - \angle 3 = 0$ , значит  $\angle 3 = \angle 4$ .  
 $\angle 1$  (в  $\triangle ABH$ ) =  $\angle 2$  (в  $\triangle CHB$ ) =  $\angle 2$  (в  $\triangle ABC$ )  
 $\angle 3$  (в  $\triangle ABH$ ) =  $\angle 4$  (в  $\triangle CHB$ ) =  $\angle 3$  (в  $\triangle ABC$ )  
 $\angle BHA$  (в  $\triangle ABH$ ) =  $\angle CHB$  (в  $\triangle CHB$ ) =  $\angle ABC$  (в  $\triangle ABC$ ).

**308.**



Дано:  $AB = BC$ ,  $AC = 37$  см.

$\angle HBC = 60^\circ$

$CH \perp AB$

$CH = ?$

Решение:

$\angle A + \angle C = 60^\circ$  (свойство внешнего угла)

$\angle A = \angle C$  ( $\triangle ABC$  – равнобедренный)

тогда  $2\angle A = 60^\circ$ ,

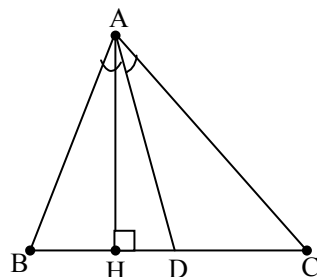
$\angle A = 30^\circ$

$\triangle CHA$  – прямоугольный и  $\angle A = 30^\circ$ , значит

$CH = \frac{1}{2} AC$  (по свойству),  $CH = 37 : 2 = 18,5$  см.

Ответ: 18,5 см.

**309.**



Дано:

$AB \neq AC$ ,  $AH$  – высота,

$AD$  – биссектриса

Доказать:

$\angle HAD = \frac{1}{2} (\angle B - \angle C)$

Доказательство:

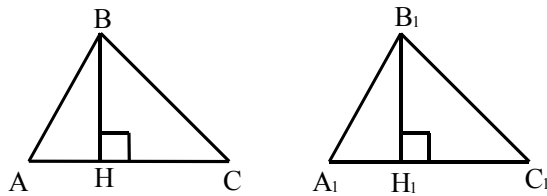
$AD$  – биссектриса, значит

$\angle CAD = \angle BAD$

$\triangle HAD$  – прямоугольный, значит,  $\angle HAD + \angle ADH = 90^\circ$ ,

$\angle HAD = 90^\circ - \angle ADH$ ;  
 $\angle ADH$  внешний к  $\triangle ADC$ , значит  $\angle ADH = \angle CAD + \angle C$   
 $\angle HAD = 90^\circ - \angle CAD - \angle C$ ,  $\angle CAD = \angle BAD$ , тогда,  
 $\angle HAD = 90^\circ - \angle BAD - \angle C$   
 Складывая равенства  
 $\angle HAD = 90^\circ - \angle CAD - \angle C$  и  $\angle HAD = 90^\circ - \angle BAD - \angle C$ , получим  
 $2\angle HAD = 180^\circ - (\angle CAD + \angle BAD + 2\angle C)$   
 $2\angle HAD = 180^\circ - (A + 2\angle C)$ ,  $\angle A + \angle B + \angle C =$  (сумма углов  $\triangle ABC$ ),  
 $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C$   
 $2\angle HAD = 180^\circ - (180^\circ - \angle B - \angle C + 2\angle C) = 180^\circ - 180^\circ + \angle B - \angle C =$   
 $= \angle B - \angle C$   
 т.е.  $\angle HAD = (\angle B - \angle C)$ .

**310.**



Дано:  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Доказать:  $BH = B_1H_1$

Доказательство:

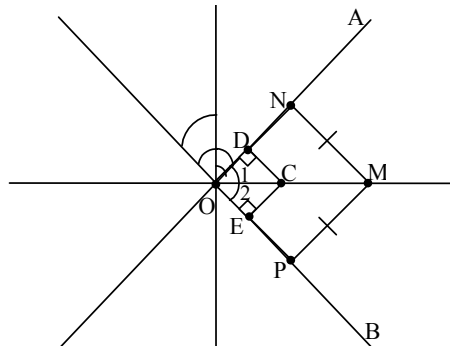
т.к.  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ , то  $AB = A_1B_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ ;

далее:  $AB = A_1B_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ , значит  $\triangle BHA = \triangle B_1H_1A_1$  (по гипотенузе и острому углу), тогда  $BH = B_1H_1$ .

**311.**

Построим биссектрисы углов, образованных при пересечении  $OA$  и  $OB$ . Возьмем любую точку  $C$  на биссектрисе. Тогда  $\triangle ODC = \triangle OEC$  ( $OC$  – общая гипотенуза) и  $(\angle 1 = \angle 2)$ , значит  $CD = CE$ .

Построим перпендикуляры  $MN$  и  $MP$  к  $OA$  и  $OB$ , тогда  $\triangle ONM = \triangle OPM$ , т.к. ( $OM$  – общая гипотенуза,

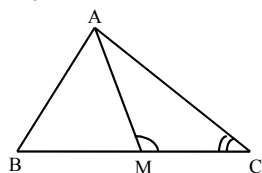


$MN=MP$ , по условию, что  $M$  равноудалена от  $OA$  и  $OB$ ).

Значит  $\angle NOP=\angle POM$ ,  $OM$  – биссектриса  $\angle AOB$ .

Значит, искомое множество, это две прямые, являющиеся биссектрисы углов, образованных при пересечении данных прямых.

**312.**



Доказать: если  $AC > AB$ , то  $AM < AC$

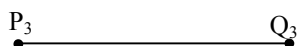
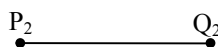
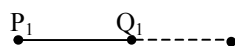
Доказательство:

$AC > AB$ , значит по теореме о соотношении между сторонами и углами и углами треугольника  $\angle B > \angle C$ .

$\angle AMC = \angle B + \angle BAM$  (т.к.  $\angle AMC$  – .....),  $\angle B > \angle C$ , значит

$\angle AMC > \angle C$  в  $\triangle ACM$   $\angle C < \angle M$ , значит по теореме  $AM < AC$ , что и требовалось доказать.

**313.**

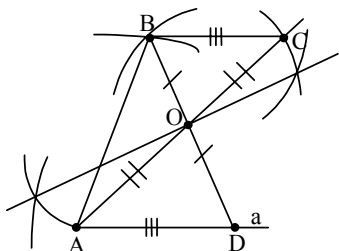


Дано:  $AB = P_3Q_3$

$BC = P_2Q_2$

$BO = P_1Q_1$  – медиана.

Построить  $\triangle ABC$ .



План построения:

а) строим любую прямую  $a$  и точку  $A$  на этой прямой;

б) строим точку  $D$ , что  $AD = P_2Q_2$  и  $D \in a$ ;

в) строим окружность с центром в  $A$  радиусом  $P_3Q_3$  и окружность с центром в  $D$  радиусом  $2P_1Q_1$ ;

г) окружности пересекаются в  $B$ ;

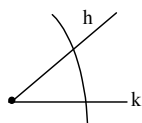
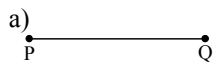
д) строим  $O$  – середину отрезка  $BD$ ;

е) строим прямую  $AO$ ;

ж) строим  $C$ , что  $AO = OC$ ;

з) получаем  $\triangle ABC$ .

**314.**

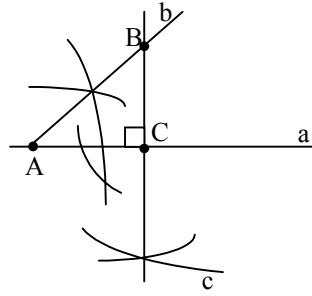


а) Построить:

$\triangle ABC$  прямоугольный,  $\angle A = \angle hk$ ,  
 $AB = PQ$

План построения:

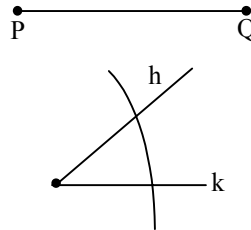
- возьмем любую прямую  $a$  и произвольную точку  $A$  на прямой  $a$ ;
- строим  $\angle ab = \angle hk$  (задача о построении угла, равного данному);
- строим точку  $B$ , что  $B \in b$  и  $AB = PQ$  (задача об откладывании отрезка, равного данному отрезку);
- строим прямую  $c$ , что  $B \in c$  и  $c \perp a$ ;
- прямая  $c$  пересекает прямую  $a$  в точке  $C$ ;
- получаем  $\triangle ABC$ .



б)

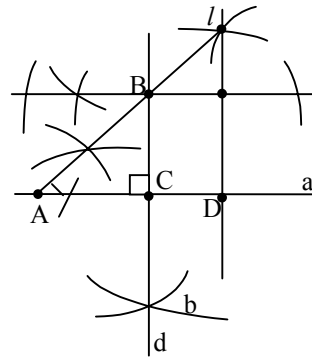
Построить:

прямоугольный  $\triangle ABC$ ,  $\angle A = \angle hk$ ,  
 $BC = PQ$ .

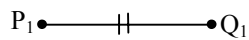
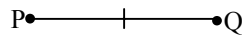


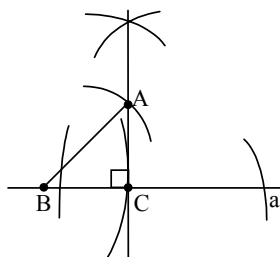
План построения:

- строим любую прямую  $a$  и произвольную точку  $A$  на прямой  $a$ ;
- строим  $\angle ab = \angle hk$ ;
- строим прямую  $c$ , чтобы  $c \parallel a$  и расстояние между  $a$  и  $c$  равно  $PQ$ ;
- прямая  $c$  пересекает прямую  $b$  в  $B$ ;
- строим прямую  $d$ ,  $B \in d$  и  $d \perp c$ ;
- $d$  пересекает прямую  $a$  в  $C$ ;
- получаем  $\triangle ABC$ .



в)



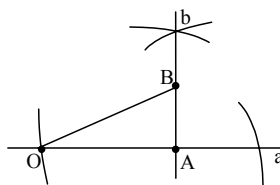


Построить:  
прямоугольный  $\triangle ABC$ ,  $AB=PQ$ ,  $BC=P_1Q_1$ .

План построения:

- а) строим любую прямую  $a$  и произвольную точку  $B$  на прямой  $a$ ;
- б) находим точку  $C$ , что  $C \in a$  и  $BC = P_1Q_1$ ;
- в) строим прямую  $b$ , что  $C \in b$  и  $a \perp b$ ;
- г) строим окружность  $w$  с центром в  $B$  и радиусом  $PQ$ ;
- д) окружность  $w$  пересекает прямую  $b$  в точке  $A$ ;
- е) получаем  $\triangle ABC$ .

**315.**



Построить:

угол, равный:

- а)  $30^\circ$ ; б)  $60^\circ$ ; в)  $15^\circ$ ; г)  $120^\circ$ ;
- д)  $150^\circ$ ; е)  $135^\circ$ ; ж)  $165^\circ$ ; з)  $75^\circ$ ;
- и)  $105^\circ$ .

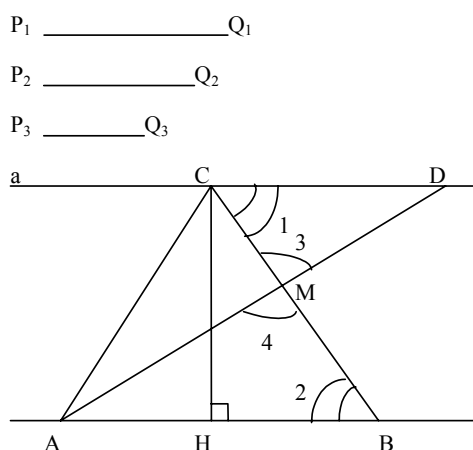
а) План построения:

- 1) строим произвольную прямую  $a$  и произвольную точку  $A$  на прямой  $a$ ;
- 2) строим прямую  $b$ , что  $A \in b$  и  $a \perp b$ ;
- 3) строим точку  $B$ , что  $B \in b$ ;
- 4) строим окружность  $w$  с центром в  $B$  и радиусом  $2AB$ ;
- 5) окружность  $w$  пересекает прямую  $a$  в точке  $O$ ;

$\triangle ABC$  – прямоугольный (по построению) и  $AB = \frac{1}{2} OB$  (по построению), значит  $\angle AOB = 30^\circ$  (т.к. катет противолежащий этому углу равен половине гипотенузы).

- б) получаем  $\angle AOB = 30^\circ$ .  
 $\angle OBA = 60^\circ$  (т.к.  $\triangle AOB$  – прямоугольный и  $\angle AOB = 30^\circ$ ).  
 в)  $\angle AOB$  делим пополам, получаем  $15^\circ$ .  
 г) т.к.  $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$ , то этот угол построен в п.а) – это угол, смежный  $\angle ABO$ ;  
 д) т.к.  $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ , то этот угол построен в п.а) – это угол смежный  $\angle AOB$ ;  
 е) т.к.  $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$ , то строим две перпендикулярные прямые и один из полученных прямых углов делим пополам;  
 ж) т.к.  $165^\circ = 180^\circ - 15^\circ$ , то это угол, смежный построенному в п.в), т.е. углу в  $15^\circ$ .  
 з) т.к.  $75^\circ = 90^\circ - 15^\circ$ , то строим угол в  $15^\circ$ , потом строим перпендикуляр к одной из сторон построенного угла, проходящий через его вершину. Один из полученных углов будет  $75^\circ$ .  
 и) т.к.  $105^\circ = 90^\circ + 15^\circ$ , то это другой из углов, полученных в пункте

**316.**

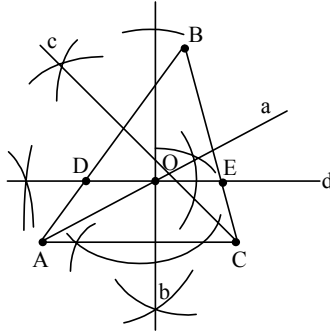


Построить:  $\triangle ABC$ ,  $CH = P_2Q_2$ ,  $AM = P_3Q_3$ ,  $AB = P_1Q_1$

План построения:

Строим параллельные прямые на расстоянии, равном данной высоте треугольника. На одной из них отмечаем точку A и откладываем AB, равный стороне треугольника. Строим окружность с центром A и радиусом,  $2 P_3Q_3$ . Строим середину AD – M, где D – пересечение окружности и второй прямой, и строим прямую BM.  $\triangle ABC$  – искомый. BM пересекается со второй из параллельных прямых в точке C. Получаем  $\triangle ABC$ .

317.



Построить: DE

$DE \parallel AC$ ,  $D \in AB$ ,  $E \in BC$  и  
 $DE = AD + CE$

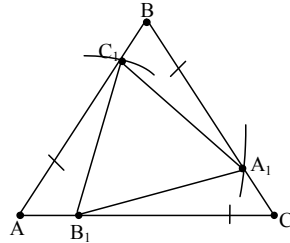
План построения:

- строим биссектрису  $\angle A$  – прямую  $a$ ;
- строим биссектрису  $\angle C$  – прямую  $c$ ;
- прямая  $a$  пересекается с прямой  $c$  в  $O$ ;
- строим прямую  $b$ , что  $O \in b$  и  $b \perp AC$ ;
- строим прямую  $d$ , что  $d \perp b$  и  $O \in d$ ;
- $a$  пересекается с  $AB$  в  $D$ ,  $a$  пересекается с  $CB$  в  $E$ ;
- получаем отрезок  $DE$ .

Доказательство:

$a$  – биссектриса  $\angle A$ ;  $c$  – биссектриса  $\angle C$ ;  $d \perp b$ ,  $b \perp AC$ , значит  $d \parallel AC$ ;  
 $d \cap AB$  в  $D$ ,  $d \cap BC$  в  $E$ , следовательно, по задаче 245 имеем:  
 $DE = AD + CE$ .

318.



Дано:  $B_1 \in AC$ ,  $AB = BC = AC$

Построить:  $A_1 \in BC$ ,  $C_1 \in AB$ , что  $\triangle A_1B_1C_1$  – равносторонний

План построения:

- строим окружность  $w_1$  с центром в  $B$  радиусом  $BB_1$
- $w_1$  пересекает  $BC$  в  $A_1$

- в) строим окружность  $w_2$  с центром в  $A$  радиусом  $B_1C$   
 г)  $w_2$  пересекает  $AB$  в  $C_1$   
 д) получаем  $\Delta A_1B_1C_1$ .

Доказательство:

$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$  (т.к.  $\Delta ABC$  – равносторонний) и  $AB = BC = AC$ ,  
 $AB_1 = AC - B_1C$ ,  $B_1C = AB - AC_1$ ,  $CA_1 = BC - BA_1$ ,  $B_1C = AC_1 = BA_1$  (по построению), значит  $AB_1 = BC_1 = CA_1$ , значит  $\Delta AC_1B_1 = \Delta BA_1C = \Delta CB_1A_1$  (по 2-му признаку равенства треугольников).

Тогда  $B_1C_1 = A_1C_1 = A_1B_1$ , и значит  $\Delta A_1B_1C_1$  – равносторонний, что и требовалось доказать.

319

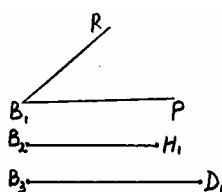


рисунок а

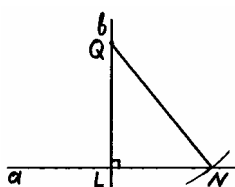


рисунок б

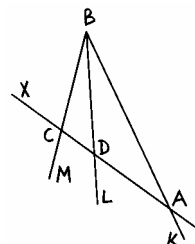


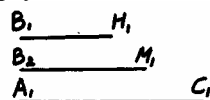
рисунок в

Пусть надо построить  $\Delta ABC$ , и даны углы  $RB_1P$  и отрезки:  $B_2H_1$ , равный высоте треугольника,  $B_3D_1$ , равный медиане треугольника (см. рис. а). Построим произвольную прямую  $a$ , отметим на ней точку  $L$  и через точку  $L$  проведем прямую в перпендикулярную прямой  $a$  (см. пункт 23 учебника). На прямой  $b$  от точки  $L$  отложим отрезок  $LQ$ , равный данному отрезку  $B_2H_1$ . Построим окружность с центром в точке  $Q$  и радиусом  $B_3D_1$ , она пересечет прямую  $a$  в точке  $N$  (см. рис. б). Построим произвольный луч  $BM$ , отложим от него угол  $MBK$  равный данному углу  $RB_1P$  (см. пункт 23 учебника). Построим биссектрису  $BL$  угла  $MBK$ , отложим отрезок  $BD$  равный данному отрезку  $B_3D_1$  (см. рис. в). От луча  $DB$  отложим угол  $BDX$  равный углу  $QNL$ , луч  $DX$  пересечет луч  $BM$  в точке  $C$ . Проведем прямую  $CD$ , она пересечет луч  $BK$  в точке  $A$ . Треугольник  $ABC$  есть искомый.

## Задачи повышенной трудности

320

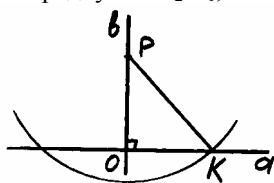
Пусть даны три отрезка  $B_1H_1$  – высота треугольника,  $A_1C_1$  – сторона треугольника  $B_2M_1$  – медиана треугольника.



а)

Построим треугольник  $ABC$  по стороне, высоте и медиане, проведенным к этой стороне.

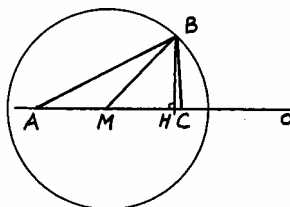
Проведем прямую  $a$  и построим прямую  $b$ , перпендикулярную прямой  $a$ . Пусть  $O$  – точка пересечения прямых  $a$  и  $b$ . На прямой  $b$  отложим отрезок  $OP = B_1H_1$ . Построим окружность с центром в точке  $P$  и радиусом  $B_2M_1$ , она пересечет прямую  $a$  в точке  $K$ .



б)

Теперь проведем прямую  $c$  на ней отметим отрезок  $AC = A_1C_1$ , построим к нему серединный перпендикуляр, который пересекает отрезок  $AC$  в точке  $M$  и  $AM = MC$ . Построим окружность с центром в точке  $M$  и радиусом  $B_2M_1$ .

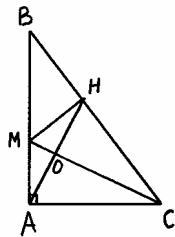
На прямой  $c$  от точки  $M$  отложим отрезок  $MH = OK$ . Через точку  $H$  проведем прямую перпендикулярную прямой  $c$ . Точка  $B$  пересечения этой прямой с окружностью является третьей вершиной искомого треугольника  $ABC$ . Однако при построении могут получиться четыре различных, но равных треугольника.



в)

**321**

На стороне BC от точки C отложим отрезок CH = AC. Проведем отрезок AH. Построим серединный перпендикуляр к отрезку AH, он пересечет отрезок AH в точке O, а отрезок AB в точке M, являющейся искомой точкой, т.к. AM = MH и MH ⊥ BC.



Докажем это: AC = CH по построению, CM – общая, значит, ΔMAC = ΔMHC ( по гипотенузе и катету), следовательно, AM = MH.

**322**

Из условия получаем, что  $AB = a \cdot CD$ , а  $CD = b \cdot AB$ , следовательно,  $a = \frac{AB}{CD}$ , а  $b = \frac{CD}{AB}$ ;  $a \cdot b = \frac{AB}{CD} \cdot \frac{CD}{AB}$ ;  $a = \frac{1}{b}$ .

**323**

Из условия получаем, что  $AB = m \cdot E_1F_1$  и  $AB = n \cdot E_2F_2$ , откуда  $m \cdot E_1F_1 = n \cdot E_2F_2$ , следовательно,  $E_1F_1 = \frac{n}{m} \cdot E_2F_2$ , т.е. искомое число  $\frac{n}{m}$ .

**324**

Из того, что углы  $\angle hk$  и  $\angle hl$  смежные следует:  $\angle hk = 180^\circ - \angle hl$ ;  
 $\angle hk + \angle hk = 180^\circ - \angle hl + \angle hk$ ;  $2\angle hk = 180^\circ - \angle hl + \angle hk$ ;  $\angle hk = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle hl + \angle hk)$ ;

$$\angle hk = 90^\circ - \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk).$$

Докажем второе утверждение:  $\angle hl = 180^\circ - \angle hk$ ;

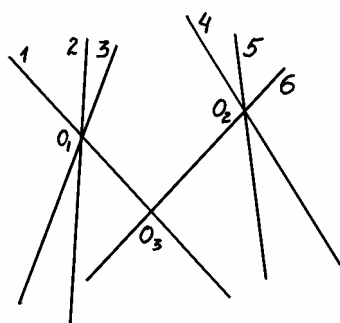
$$\angle hl + \angle hl = 180^\circ + \angle hl - \angle hk$$
;  $2\angle hl = 180^\circ + \angle hl - \angle hk$ ;

$$\angle hl = \frac{1}{2}(180^\circ + \angle hl - \angle hk)$$
;  $\angle hl = 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk)$ .

**325**

Пусть  $\angle 6$  является вертикальным для  $\angle 3$  а  $\angle 7$  является вертикальным для  $\angle 4$  тогда  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$  а из того что вертикальные углы равны получим  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ .

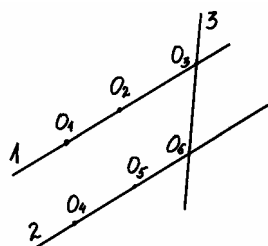
326.



Из условия следует что можно разбить наши шесть прямых на две тройки пусть прямые 1, 2 и 3 пересекаются в точке  $O_1$ , а прямые 4, 5 и 6 в точке  $O_2$ , а прямые 6 и 1 пересекаются в точке  $O_3$ . По условию через точку  $O_3$  должна проходить еще хотя бы одна прямая, кроме прямых 6 и 1, это возможно только если все три точки  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  совпадают.

Предположим противное, тогда через точку  $O_3$  проходит хотя бы одна из прямых 2, 3, 4 или 5, что невозможно, поскольку через две точки  $O_1$  и  $O_2$  или  $O_2$  и  $O_3$  на плоскости можно провести только одну прямую, или какие-то прямые совпадают, что противоречит условию, значит, наше предположение не верно, и все шесть прямых проходят через одну точку.

327

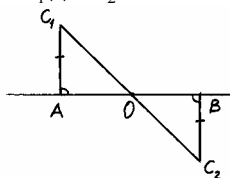


Из условия задачи следует, что наши шесть точек можно разбить на две тройки: пусть прямая 1 проходит через точки  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$ , а прямая 2 проходит через точки  $O_4$ ,  $O_5$  и  $O_6$ . Докажем, что прямые 1 и 2 совпадают: предположим противное. Тогда через точки  $O_3$  и  $O_6$  проходит прямая 3, и, поскольку две несовпадающие прямые могут пересекаться на плоскости

только в одной точке, то точки  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_4$  и  $O_5$  не принадлежат прямой 3, что противоречит условию, следовательно прямые 1 и 2 совпадают, и все шесть точек лежат на одной прямой.

328

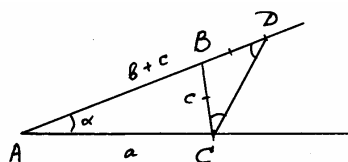
Рассмотрим прямые  $AC_1$  и  $BC_2$ , и секущую на прямую  $AB$ , т.к. накрестлежащие углы  $\angle BAC_1 = \angle ABC_2$  по условию, получим, что  $AC_1 \parallel BC_2$ .



$\angle AC_1C_2 = \angle BC_2C_1$  как накрестлежащие при пересечении параллельных прямых  $AC_1$  и  $BC_2$  секущей  $C_1C_2$ . Пусть точка  $O$  – точка пересечения прямых  $AB$  и  $C_1C_2$ .  $\triangle AC_1O = \triangle BC_2O$  по стороне и двум углам ( $\angle OAC_1 = \angle OBC_2$ ,  $\angle AC_1O = \angle BC_2O$ ,  $AC_1 = BC_2$ ), в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, т.е.  $AO = OB$ , что и требовалось доказать.

### 329

Построим треугольник по углу, прилежащей к нему стороне и сумме двух других сторон. Однозначностью построения мы докажем равенство данных треугольников.



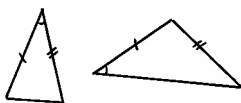
Представим, что треугольник уже построен (см. рис.)  $AD$  – это сумма двух сторон ( $b + c$ ),  $AB = b$ . Тогда  $BD = BC = c$ ,  
 $\Rightarrow \angle BDC = \angle BCD$ .

Построение: Проводим прямую, откладываем сторону  $a$ , откладываем сумму сторон. Соединяем точки  $C$  и  $D$ . От  $CD$  откладываем угол  $BDC$ . Находим точку  $B$ . Искомый треугольник –  $ABC$ . Построение однозначно.

### 330

Эти треугольники не могут быть неравными, так как сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , то третьи углы этих треугольников тоже равны, а, следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

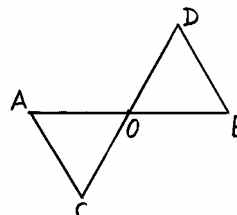
### 331



Могут. (см. рис.)

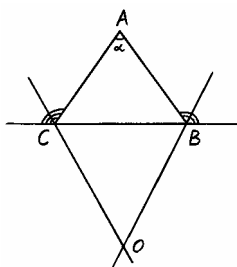
### 332

В треугольника  $AOC$  и  $BOD$   $\angle AOC = \angle BOD$  как вертикальные. В  $\triangle AOC$   $\angle AOC = \angle AOC$  (по свойству равнобедренного треугольника), а в  $\triangle BOD$   $\angle BDO = \angle BOD$ , следовательно,  $\angle ACO = \angle BDO$ . Из того, что сумма углов любого треугольника равна  $180^\circ$  следует, что  $\angle DBO = \angle CAO$ . Следовательно,



но,  $\triangle AOC = \triangle BOD$  по углу и прилежащим к нему сторонам, а в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, значит  $OC = OD$ .

333

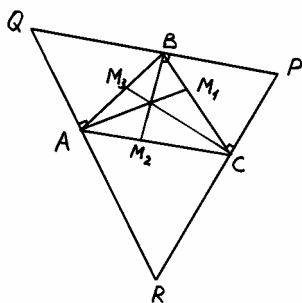


Пусть внешний угол при вершине B равен  $\beta$ , а угол при вершине C равен  $\gamma$ , тогда  $\alpha = 180^\circ - ((180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma)) = \beta + \gamma - 180^\circ$ ;  $\beta + \gamma = \alpha + 180^\circ$ . Из треугольника BOC

$$\angle BOC = 180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \gamma) =$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + 180^\circ) = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

334



Пусть дан  $\triangle ABC$ , а прямые, перпендикулярные к биссектрисам треугольника пересекаются в точках P, Q и R.  $AM_1$ ,  $BM_2$  и  $CM_3$  — биссектрисы  $\triangle ABC$ .  $\angle M_1AR = \angle M_1AQ = 90^\circ$  по построению.  $\angle M_1AC = \angle M_1AB = \frac{1}{2}\angle BAC$ , т.к.

$M_1A$  — биссектриса, следовательно,  $\angle CAR = \angle BAQ = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ . Ана-

логично,  $\angle BCP = \angle ACR = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BCA$  и  $\angle QBA = \angle PBC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$ . Из  $\triangle BPC$ :  $\angle BPC = 180^\circ - \angle PBC - \angle BCP = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BCA = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCA) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ , аналогично,  $\angle CRA = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$ ,  $\alpha \angle AQB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BCA$ . Что и требовалось доказать.

335

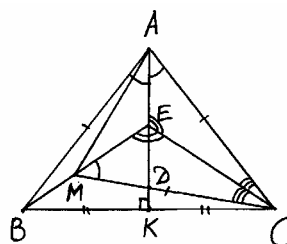
- а) остроугольный;
- б) остроугольный.

**336**

Если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник является прямоугольным, т.к. центр описанной около него окружности лежит на середине гипотенузы, следовательно, угол треугольника является острым, если медиана, проведенная из вершины этого угла больше половины противоположной стороны, и тупым, если медиана, проведенная из вершины этого угла меньше половины противоположной стороны.

**337**

Опустим высоту АК, которая является также медианой и биссектрисой, т.к.  $\triangle ABC$  — равнобедренный. Продолжим ВМ до пересечения с АК — точка Е. Точка D — пересечение АК и СМ. Соединим точку С и Е.



$$\angle ABC = \angle ACB = (180^\circ - \angle BAC) / 2 = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ.$$

$\triangle BEC$  — равнобедренный,  $\Rightarrow \angle CEK = \angle BEK = 180^\circ - \angle AKB - \angle EBK = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ,  $\Rightarrow \angle BEC = 120^\circ$ .

$$\begin{aligned} \angle ECK &= \angle EBK = 30^\circ; \angle ECM = \angle ECK - \angle MCB = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ; \\ \angle ACE &= \angle ACB - \angle BCM - \angle ECM = 50^\circ - 10^\circ - 20^\circ = 20^\circ; \angle CAK = \\ &= \angle CAB / 2 = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ. \end{aligned}$$

$\angle AEC = 180^\circ - \angle CAK - \angle ACE = 180^\circ - 40^\circ - 20^\circ = 120^\circ$ .  $\Rightarrow \triangle AEC = \triangle MEC$  по второму признаку равенства треугольников (EC — общая сторона,  $\angle AEC = \angle MEC = 120^\circ$ ,  $\angle ECM = \angle ACE = 20^\circ$ )  $\Rightarrow AC = MC$ ,  $\Rightarrow \triangle MAC$  — равнобедренный.

$$\angle ACM = \angle ACE + \angle ECM = 40^\circ,$$

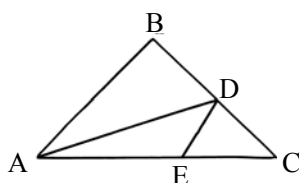
$$\Rightarrow \angle AMC = \frac{180^\circ - \angle ACM}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ.$$

**338.**

Рассмотрим треугольник ABC, пусть сторона AC является наибольшей стороной  $\triangle ABC$ . Пусть DE — отрезок с концами на разных сторонах треугольника ABC.

Не ограничивая общности достаточно рассмотреть два возможных расположения отрезка DE:

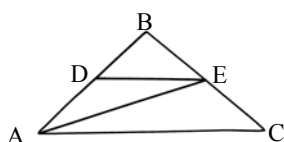
1) Один из концов отрезка лежит на наибольшей стороне треугольника (см. рисунок).



Если отрезок соединяет вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне, то этот отрезок меньше большей из двух других сторон (см. задачу №312).

В  $\triangle ABC$   $AD$  – отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне, а сторона  $AC$  – наибольшая сторона  $\triangle ABC$ , следовательно,  $AD < AC$ .

Теперь рассмотрим  $\triangle ADC$ ,  $DE$  – отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне, значит,  $DE \leq AD$  или  $DE \leq DC$ , но  $AD < AC$  (по доказанному) и  $DC \leq BC < AC$  (так как  $AC$  – наибольшая сторона  $\triangle ABC$ ), следовательно,  $DE < AC$ .

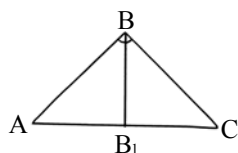


2) Ни один из концов отрезка  $DE$  не лежит на наибольшей стороне треугольника (см. рисунок).

В  $\triangle ABC$   $AE$  – отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне, значит,  $AE < AC$ , т.к.  $AC$  – наибольшая сторона  $\triangle ABC$ .

Теперь рассмотрим  $\triangle AEB$ ,  $DE$  – отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне, значит,  $DE \leq AE$  или  $DE \leq BE$ , но  $AE < AC$  (по доказанному) и  $BE \leq BC < AC$  (так как  $AC$  – наибольшая сторона  $\triangle ABC$ ), следовательно,  $DE < AC$ . Что и требовалось доказать.

**339.**



Из того, что угол, смежный с углом треугольника, больше каждого из двух других углов треугольника (задача №173), следует, что  $\angle BB_1C > \angle B_1BA$ , так как  $\angle BB_1C$  смежный с  $\angle AB_1B$  треугольника  $ABB_1$ .

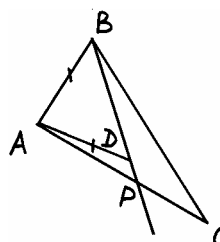
$\angle ABB_1 = \angle CBB_1$ , так как  $BB_1$  – биссектриса

угла  $ABC$ . О доказанному  $\angle BB_1C > \angle B_1BA$ , следовательно,  $\angle BB_1C > \angle CBB_1$ . В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, рассмотрим  $\triangle B_1BC$ , по доказанному  $\angle BB_1C > \angle CBB_1$ , следовательно,  $BC > B_1C$ .

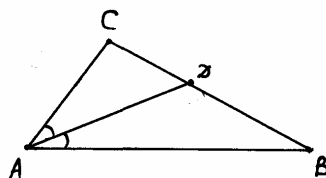
Из того, что  $\angle AB_1B$  смежный с  $\angle CB_1B$  треугольника  $CB_1B$ , следует, что  $\angle AB_1B > \angle CBV_1$ . На  $\angle CBB_1 = \angle ABB_1$ , следовательно,  $\angle AB_1B > \angle ABB_1$ . В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, рассмотрим  $\triangle AB_1B$ , по доказанному  $\angle AB_1B > \angle ABB_1$ , следовательно,  $BA > B_1A$ . Что и требовалось доказать.

340

Проведем луч  $BD$ , он пересечет сторону  $AC$  в точке  $P$ . В треугольнике  $ABP$  отрезок  $AD$  — отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне. Согласно задаче №312  $AD < AB$  или  $AD < AP$ , но по условию задачи  $AD = AB$ , следовательно,  $AD < AP$  и  $AB = AD$ , то есть  $AB < AP$ .  $AC = AP + PC$ , следовательно,  $AP < AC$ , тогда  $AB < AP < AC$ , то есть  $AB < AC$ , что и требовалось доказать.



341



По свойству биссектрисы можем записать отношение:  $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$ .

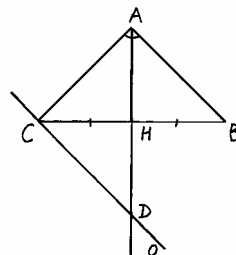
А из того, что  $AB > AC$ , можем заключить, что  $BD > CD$ .

Из того, что  $AB > AC$ , следует также, что  $\angle ACB > \angle ABC$ .

$\angle ADC = 180^\circ - \angle CAD - \angle ACB$ ,  $\angle ADB = 180^\circ - \angle BAD - \angle ABC$ ,  
 $\angle CAD = \angle BAD$ ,  $\Rightarrow \angle ADC < \angle ADB$ .

342

Рассмотрим  $\triangle ABC$ ,  $AN$  — биссектриса и медиана, проведенная из вершины  $A$ . Проведем прямую  $CO \parallel AB$ , точка  $D$  — точка пересечения  $CO$  с прямой  $AN$ .  $\triangle ANB = \triangle DNC$  (по стороне и прилежащим к ней углам:  $CN = NB$ , т.к.  $AN$  — медиана;  $\angle ANB = \angle DNC$  как вертикальные;  $\angle PDC = \angle NAB$  как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых  $CD$  и  $AB$  секущей  $AD$ , следовательно,  $\angle HCD = \angle HBA$ ).



Получаем, что  $\angle HDC = \angle NAB = \angle HAC$  ( $AN$  — биссектриса  $\angle CAB$ ) и  $AB = CD$ .  $\triangle ADC$  — равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника ( $\angle CAD = \angle CDA$ ), следовательно,  $AC = CD = AB$ , значит,  $\triangle ABC$  — равнобедренный.

Что и требовалось доказать.



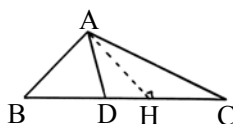
$\angle CАН = 180^\circ - \angle PAC$ , следовательно,  $\angle ДАН = \angle CАН$ .

$\triangle CАН = \triangle ДАН$  (по двум сторонам и углу между ними:  $CA=AD$  по построению,  $АН$  – общая сторона,  $\angle ДАН = \angle CАН$  по доказанному). В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, значит,  $CH=DN$ . Из неравенства треугольника следует, что  $DN=NB > DB$ , но  $DB=DA+AB=CA+AB$ . По доказанному  $DN=CH$ , следовательно,  $CH+NB > CA+AB$ .

У треугольников  $BCH$  и  $ABC$  сторона  $CB$  – общая.  $P_{\triangle BCH} = CH+NB+CB$ ;  $P_{\triangle ABC} = CA+AB+CB$ , из того, что  $CH+NB > CA+AB$  следует, что  $P_{\triangle BCH} > P_{\triangle ABC}$ . Что и требовалось доказать.

### 346.

Из доказанного в задаче №341 следует, что  $\angle ADC > \angle ADB$ , но  $\angle ADC + \angle ADB = 180^\circ$ , следовательно,  $\angle ADC > 90^\circ$ .

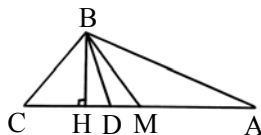


Предположим, что точка  $H$  принадлежит лучу  $DC$ , тогда  $\angle AHD = 90^\circ$ , так как  $АН$  – высота  $\triangle ABC$ . Рассмотрим  $\triangle ДАН$ . Сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , но в  $\triangle ДАН$  имеем:  $\angle АДН + \angle АНД > 180^\circ$ , получаем противоречие, следовательно, точка  $H$  лежит на луче  $DB$ . Что и требовалось доказать.

### 347.

Рассмотрим треугольник  $ABC$ , у которого  $AB \neq BC$ ,  $BC \neq AC$ ,  $AB \neq AC$ , пусть  $BH$  – высота  $\triangle ABC$ ,  $BD$  – биссектриса  $\triangle ABC$ ,  $BM$  – медиана  $\triangle ABC$ .

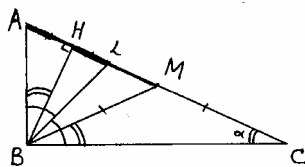
НЕ ограничивая общности будем считать, что  $BC < AB$ , тогда, по доказанному в задаче №346, получим, что точка  $H$  принадлежит лучу  $DC$ .



По доказанному в задаче №341, получим, что  $AD > DC$ , но  $AD+DC=AC$ , следовательно,  $AD > \frac{1}{2} \cdot AC$ .  $BM$  – медиана, следовательно,  $CM=AM=\frac{1}{2} \cdot AC$ . Получаем, что  $AD > AM$ , т.е. точка  $M$  при-

надлежит отрезку AD, следовательно, точка M принадлежит отрезку AD, следовательно, точка M принадлежит лучу DA, а точка D лежит между точками H и M, что и требовалось доказать.

348



$$\angle ABL = \angle LDC = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Пусть  $\angle ACB = \alpha$ , тогда  $\angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$ .  $\angle ABH = 180^\circ - \angle BAH - \angle AHB = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 90^\circ = \alpha$ .

Треугольник прямоугольный,  $\Rightarrow BM = MC$ ,  $\Rightarrow \triangle BMC$  — равнобедренный,  $\Rightarrow \angle MBC = \angle MCB = \alpha$ ,  $\Rightarrow \angle BMC = 180^\circ - 2\alpha$  (из треугольника BMC).

$$\angle AMB = 180^\circ - \angle BMC = 2\alpha$$

$$\triangle ABL: \angle ALB = 180^\circ - 45^\circ - (90^\circ - \alpha) = 45^\circ + \alpha$$

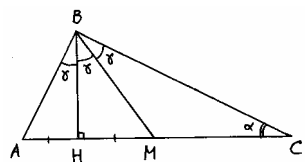
$$\angle BLC \text{ (смежный с } \angle ALB) = 180^\circ - 45^\circ - \alpha = 135^\circ - \alpha$$

$$\triangle LBM: \angle LBM = 180^\circ - 2\alpha - (135^\circ - \alpha) = 45^\circ - \alpha$$

$$\triangle HBL: \angle HBL = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ - \alpha = 45^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow \angle LBM = \angle HBL, \text{ ч.т.д.}$$

349



Обозначим  $\angle ABH = \angle HBM = \angle MBC$  через  $\gamma$ , а  $\angle ACB$  через  $\alpha$ .

BM — биссектриса  $\triangle BCH$ , тогда по свойству биссектрисы имеем:

$$\frac{HM}{BH} = \frac{MC}{BC} \quad (*)$$

В треугольнике ABM BH является биссектрисой и высотой,  $\Rightarrow \triangle ABM$  — равнобедренный,  $\Rightarrow BH$  — медиана  $\Rightarrow AH = HM$ .

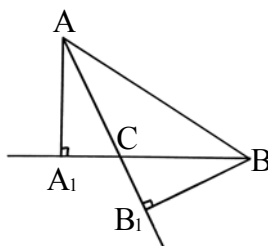
BM — медиана,  $\Rightarrow AM = MC$ ;  $AH = HM = AM/2$ ,  $\Rightarrow$  из (\*):

$BC = 2BH$ ,  $\Rightarrow$  т.к.  $\triangle BHC$  — прямоугольный,  $\angle \alpha = 30^\circ$ ,  $\Rightarrow \triangle BHC$ :

$2\gamma = 60^\circ$ ,  $\Rightarrow \gamma = 30^\circ$ ,  $\Rightarrow \angle ABC = 3\gamma = 90^\circ$ , ч.т.д.

**350.**

Рассмотрим прямоугольный  $\triangle BCB_1$ , с прямым углом  $BB_1C$  (так как  $BB_1$  – высота  $\triangle ABC$ , следовательно,  $BB_1$  перпендикулярна  $AC$ ).



В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета, т.е.  $BC \geq BB_1$ , учитывая, что по условию  $AA_1 \geq BC$ , получаем  $AA_1 \geq BC \geq BB_1$ . Рассмотрим прямоугольный  $\triangle ACA_1$  с прямым углом  $AA_1C$  (т.к.  $AA_1$  – высота  $\triangle ABC$ , следовательно,  $A_1$  перпендикулярна  $BC$ ). В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета, т.е.  $AC \geq AA_1$ , учитывая, что по условию  $BB_1 \geq AC$ , получаем  $BB_1 \geq AC \geq AA_1$ , по доказанному  $AA_1 \geq BC \geq BB_1$ , следовательно,  $AA_1 = BB_1$ .

$BB_1 = AA_1 \geq BC \geq BB_1$ , следовательно,  $BC = BB_1$  и  $\triangle BCB_1$  равнобедренный, а углы при основании равнобедренного треугольника равны, следовательно,  $\angle BCB_1 = \angle BB_1C = 90^\circ$ , тогда  $\angle CBB_1 = 180^\circ - \angle BCB_1 - \angle BB_1C = 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$ , следовательно,  $BB_1$  совпадает с  $BC$ .  $AA_1 = BB_1 \geq AC \geq AA_1$ , следовательно,  $AC = AA_1$  и  $\triangle ACA_1$  равнобедренный, а углы при основании равнобедренного треугольника равны, следовательно,  $\angle ACA_1 = \angle AA_1C = 90^\circ$ , тогда  $\angle CAA_1 = 180^\circ - \angle ACA_1 - \angle AA_1C = 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$ , значит,  $AA_1$  совпадает с  $AC$ .

По доказанному  $AC = AA_1 = BB_1 = BC$  и  $AC$  перпендикулярна  $BC$ , следовательно,  $\triangle ABC$  – равнобедренный и прямоугольный, что и требовалось доказать.

**351**

Решена в учебнике на стр. 95.

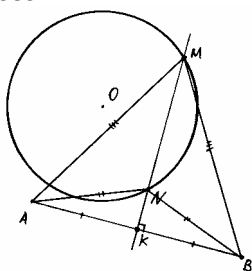
**352**

2 случая расположения точек.

Соединяем точки  $A$  и  $B$ . Находим середину  $AB$  — точку  $K$ . Поводим через нее перпендикуляр к  $AB$ . Находим точку  $M$ .  $M$  — искомая точка, поскольку  $MK$  является одновременно высотой и медианой в  $\triangle AMB$ ,  $\Rightarrow \triangle AMB$  — равнобедренный  $\Rightarrow AM = MB$ .

В случаях 3), 4) задача не имеет решения.

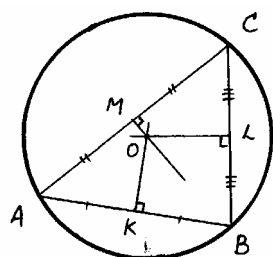
353



Соединяем точки A и B. Находим K — середину AB. Через K проводим перпендикуляр к AB. Его точки пересечения с окр-тью — искомые точки.

В случае, когда перпендикуляр касается окрестности — одно решение, когда не пересекается — нет решений.

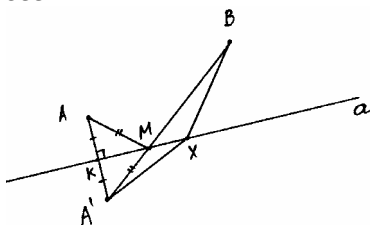
354



Соединяем точки A, B и C. Находим середины отрезков AB, BC и AC, соответственно K, L и M. Проводим перпендикуляры (серединные перпендикуляры  $\triangle ABC$ ). Находим точку O — их точку пересечения. Проводим окружность радиуса  $AO = BO = CO$  с центром в т. O.

Вокруг треугольника всегда можно описать окружность, поэтому задача не имеет решения, лишь когда лежат на одной прямой.

355

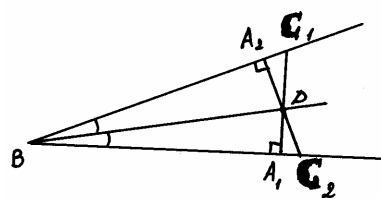


Из точки A опускаем перпендикуляр на  $a$ . Пусть K — точка пересечения. С другой стороны прямой откладываем точку  $A'$  с условием  $AK = A'K$ . Соединяем точки  $A'$  и B.

Пусть M — пересечение  $A'B$  и пр.  $a$ . M — искомая точка.

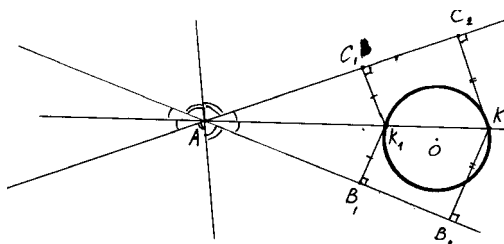
поскольку выполняется неравенство треугольника:  $AM + MB = A'M + MB$  (т.к.  $\triangle AA'M$  — равнобедренный)  $= A'B < AX + XB$ .

356



Откладываем угол B. Делим его пополам. Проводим биссектрису, откладываем на ней BD. Из точки D опускаем перпендикуляр на любую из сторон угла. Задача имеет 2 решения:  $\triangle A_1BC_1$  и  $\triangle A_2BC_2$ .

357



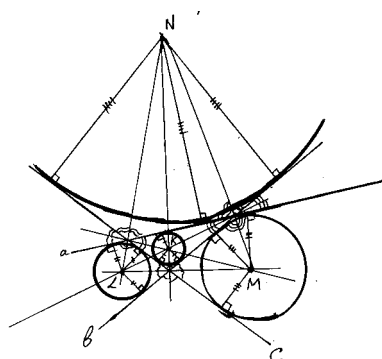
Делим углы пересекаемых прямых. Поводим биссектрисы. Точки пересечения биссектрисы с окружностью — искомые. Например  $\triangle AC_1K_1 = \triangle AB_1K_1$  (прямоугольные треугольники с равным острым углом и общей гипотенузой),  $\Rightarrow C_1K_1 = B_1K_1$ .

Задача может иметь 1, 2, 3, 4 решения или не иметь решения вообще, в зависимости от расположения окружности по отношению к биссектрисе углов.

358

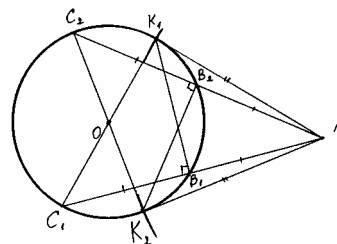
Как и в предыдущей задаче проводим биссектрису углов между пересекаемыми прямыми, а также биссектрисой смежных углов.

Получается 4 решения.



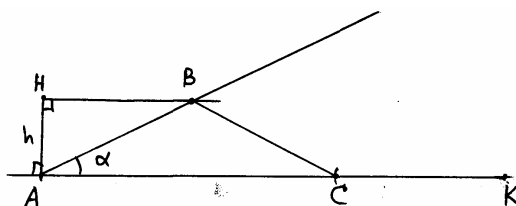
359

Пусть  $R$  — радиус окружности. Проводим окружность радиусов  $2R$  с центром в т.  $A$  и ищем пересечение ее с исходной окружностью — точки  $K_1, K_2$ . Через точки  $K_1, K_2$  проводим диаметры, находим точки  $C_1, C_2$ . Соединяем  $A$  с  $C_1$  и  $C_2$ , находим т.  $B_1$  и  $B_2$ . В частности,  $\angle C_1B_1K_1 = 90^\circ$  (по свойству диаметра), т.е.  $K_1B_1$  — высота  $\triangle AC_1K_1$ . Но  $\triangle AC_1K_1$  — равнобедренный, т.к.  $AK_1 = C_1K_1 = 2R_1 \Rightarrow K_1B_1$  — медиана,  $\Rightarrow AB_1 = B_1C_1$ .



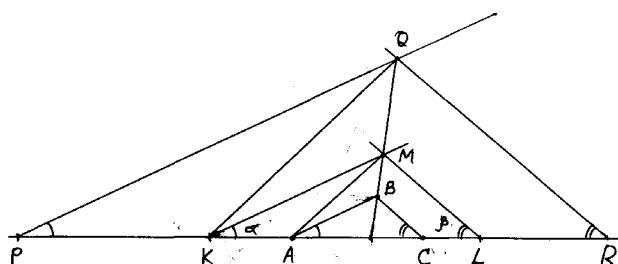
Если расстояние от т. А до окружности  $= 2R$ , то решение одно (надо лишь провести прямую ОА), если  $> 2R$  — то решений нет.

360



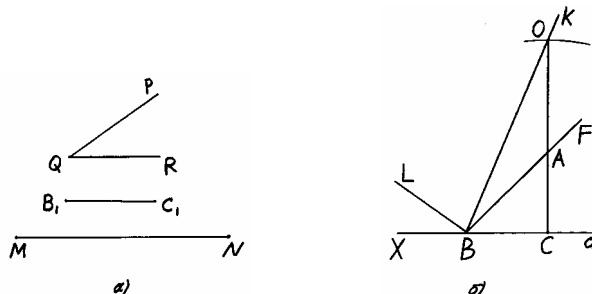
Проводим прямую. Отмечаем точку А — одну из вершин нашего треугольника на прямой отмечаем отрезок, равный периметру треугольника — находим т.к. откладываем заданный угол с вершиной в т. А. Из т. А проводим перпендикуляр к первой проведенной прямой. Откладываем на нем отрезок, равный высоте — находим т. Н. От нее откладываем перпендикуляр к последней прямой, находим его пересечение с другой стороной угла. Нашли точку В. От точки К откладываем отрезок, равный АВ; находим точку С. Соединяем В и С. АВС — искомый треугольник.

361



Проводим прямую. Откладываем на ней отрезок KL, равный периметру треугольника. Строим известные углы с вершинами в точках К и L. Находим пересечение их сторон — точку М. От точки К откладываем на исходную прямую отрезок, равный KM, находим т. Р. Аналогично находим т. R. через т. Р проводим прямую, параллельную KM, через т. Q — параллельную LM. Их пересечение — т. Q. Проводим прямую QM, а также соединяем Q и К. Через точку М проводим прямую, параллельную KQ, находим т. А, через нее проводим прямую, параллельную KM до пересечения с QM, находим т. В. Через нее проводим прямую, параллельную LM,  $\Rightarrow$  т. С. Из подобия треугольников ABC, KLM и PQR получаем, что  $AB = AK$ ,  $BC = CL$ , т.е.  $AB + BC + AC = KL$ , т.е.  $\triangle ABC$  — искомый.

124



Пусть надо построить  $\triangle ABC$ , и даны  $\angle PQR$  и отрезки  $B_1C_1$ , равный стороне треугольника, и  $MN$ , равный сумме двух других сторон треугольника (см. рис. а). Проведем произвольную прямую  $a$ , отметим на ней точку  $B$  и точку  $X$  (см. рис. б). От луча  $BX$  отложим угол  $\angle XBL$  равный углу  $\angle PQR$  (см. пункт 23 учебника). От точки  $B$  отложим отрезок  $BC$ , равный данному отрезку  $B_1C_1$ . Построим биссектрису  $BK$  угла  $LBC$  (см. пункт 23 учебника). Построим окружность  $C$  радиусом равным  $MN$  и центром в точке  $C$ , она пересечет луч  $BK$  в точке  $O$ . Отложим от луча  $BK$   $\angle KBF$  равный углу  $\angle KBC$ . Луч  $BF$  пересечет  $CO$  в точке  $A$ . Треугольник  $ABC$  есть искомым, докажем это.

$\angle KAB = \angle ABC + \angle ACB$  (как внешний).

$\triangle KAB$  равнобедренный (т.к.  $\angle KBA = \angle KBA$  по построению).

$$\text{Значит, } \angle KBA = \frac{180^\circ - \angle KAB}{2} = \frac{180^\circ - \angle ABC - \angle ACB}{2}.$$

$$\begin{aligned} \angle KBC &= \angle KBA + \angle ABC = \frac{180^\circ - \angle ABC - \angle ACB}{2} + \angle ABC = \\ &= \frac{180^\circ + \angle ABC - \angle ACB}{2}. \end{aligned}$$

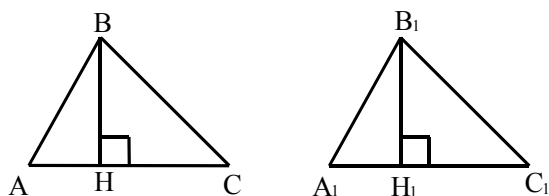
$\angle LBC = 2\angle KBC = 180^\circ + \angle ABC - \angle ACB$  (так как  $BK$  — биссектриса угла  $LBC$ ).

$$\begin{aligned} \angle PQR &= \angle XBL = 180^\circ - \angle LBC = 180^\circ - 180^\circ - \angle ABC + \angle ACB = \\ &= \angle ACB - \angle ABC. \end{aligned}$$

$AB = AK$ , так как  $\triangle KBA$  равнобедренный, значит,  $MN = KA + AC =$

$= AB + AC$  следовательно наши построения верны.

310.



Дано:  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Доказать:  $BH = B_1H_1$

Доказательство:

т.к.  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

то  $AB = A_1B_1$

$\angle A = \angle A_1$

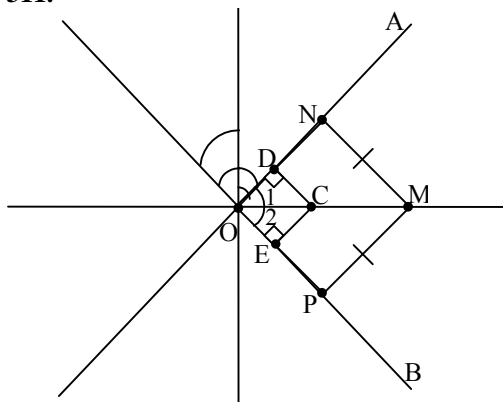
далее:  $AB = A_1B_1$

$\angle A = \angle A_1$

значит  $\triangle BHA = \triangle B_1H_1A_1$  (по гипотенузе и острому углу), тогда

$BH = B_1H_1$

311.



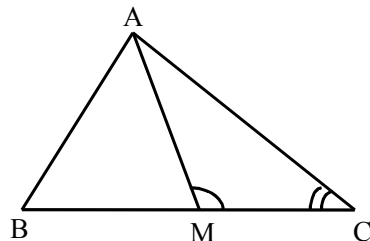
Построим биссектрисы углов, образованных при пересечении  $OA$  и  $OB$ . Возьмем любую точку  $C$  на биссектрисе. Тогда  $\triangle ODC = \triangle OEC$  ( $OC$  – общая гипотенуза) и ( $\angle 1 = \angle 2$ ), значит  $CD = CE$ .

Построим перпендикуляры  $MN$  и  $MP$  к  $OA$  и  $OB$ , тогда  $\triangle ONM = \triangle OPM$ , т.к. ( $OM$  – общая гипотенуза,  $MN = MP$ , по условию, что  $M$  равноудалена от  $OA$  и  $OB$ ).

Значит  $\angle NOP = \angle POM$ ,  $OM$  – биссектриса  $\angle AOB$ .

Значит, искомое множество, это две прямые, являющиеся биссектрисы углов, образованных при пересечении данных прямых.

**312.**



Доказать: если  $AC > AB$ , то  $AM < AC$

Доказательство:

$AC > AB$ , значит по теореме о соотношении между сторонами и углами и углами треугольника  $\angle B > \angle C$ .

$\angle AMC = \angle B + \angle BAM$  (т.к.  $\angle AMC$  - .....)

$\angle B > \angle C$ , значит

$\angle AMC > \angle C$

в  $\triangle ACM$   $\angle C < \angle M$ , значит по теореме  $AM < AC$ , что и требовалось доказать.

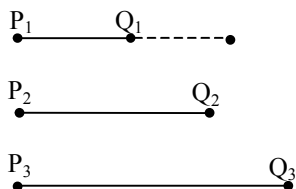
**313.**

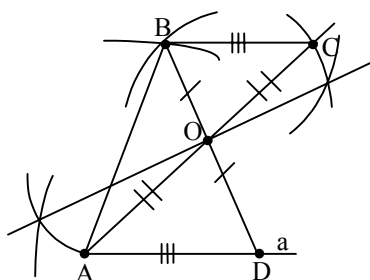
Дано:  $AB = P_3Q_3$

$BC = P_2Q_2$

$BO = P_1Q_1$  – медиана.

Построить  $\triangle ABC$ .

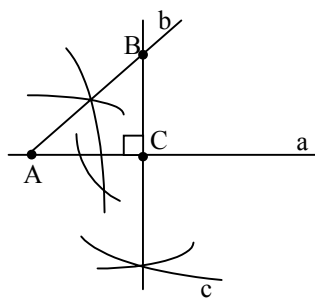
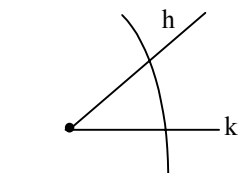
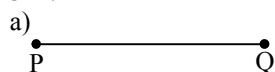




План построения:

- а) строим любую прямую  $a$  и точку  $A$  на этой прямой;
- б) строим точку  $D$ , что  $AD = P_2Q_2$  и  $D \in a$ ;
- в) строим окружность с центром в  $A$  радиусом  $P_3Q_3$  и окружность с центром в  $D$  радиусом  $2P_1Q_1$ ;
- г) окружности пересекаются в  $B$ ;
- д) строим  $O$  – середину отрезка  $BD$ ;
- е) строим прямую  $AO$ ;
- ж) строим  $C$ , что  $AO = OC$ ;
- з) получаем  $\triangle ABC$ .

**314.**

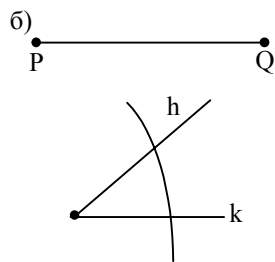


а) Построить:

$\triangle ABC$  прямоугольный  
 $\angle A = \angle hk$   
 $AB = PQ$

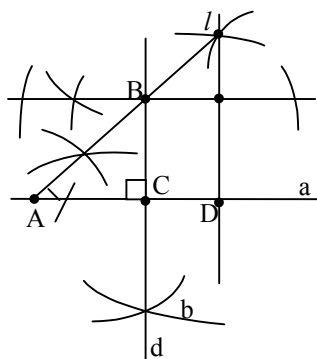
План построения:

- а) возьмем любую прямую  $a$  и произвольную точку  $A$  на прямой  $a$ ;
- б) строим  $\angle ab = \angle hk$  (задача о построении угла, равного данному);
- в) строим точку  $B$ , что  $B \in b$  и  $AB = PQ$  (задача об откладывании отрезка, равного данному отрезку);
- г) строим прямую  $c$ , что  $B \in c$  и  $c \perp a$ ;
- д) прямая  $c$  пересекает прямую  $a$  в точке  $C$ ;
- е) получаем  $\triangle ABC$ .



Построить:

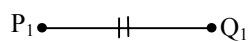
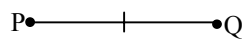
прямоугольный  $\triangle ABC$   
 $\angle A = \angle hk$   
 $BC = PQ$ .

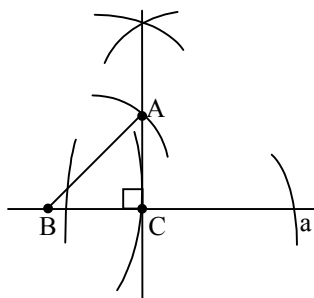


План построения:

- а) строим любую прямую  $a$  и произвольную точку  $A$  на прямой  $a$ ;
- б) строим  $\angle ab = \angle hk$ ;
- в) строим прямую  $c$ , чтобы  $c \parallel a$  и расстояние между  $a$  и  $c$  равно  $PQ$ ;
- г) прямая  $c$  пересекает прямую  $l$  в  $B$ ;
- д) строим прямую  $d$ ,  $B \in d$  и  $d \perp c$ ;
- е)  $d$  пересекает прямую  $a$  в  $C$ ;
- ж) получаем  $\triangle ABC$ .

в)





Построить:

прямоугольный  $\triangle ABC$

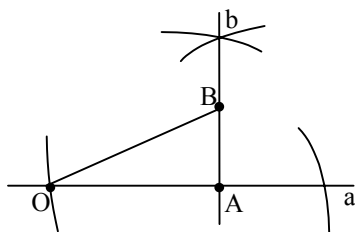
$AB=PQ$

$BC=P_1Q_1$ .

План построения:

- а) строим любую прямую  $a$  и произвольную точку  $B$  на прямой  $a$ ;
- б) находим точку  $C$ , что  $C \in a$  и  $BC=P_1Q_1$ ;
- в) строим прямую  $b$ , что  $C \in b$  и  $a \perp b$ ;
- г) строим окружность  $w$  с центром в  $B$  и радиусом  $PQ$ ;
- д) окружность  $w$  пересекает прямую  $b$  в точке  $A$ ;
- е) получаем  $\triangle ABC$ .

315.



Построить:

угол, равный:

- а)  $30^\circ$ ; б)  $60^\circ$ ; в)  $15^\circ$ ; г)  $120^\circ$ ;
- д)  $150^\circ$ ; е)  $135^\circ$ ; ж)  $165^\circ$ ; з)  $75^\circ$ ;
- и)  $105^\circ$ .

а) План построения:

- 1) строим произвольную прямую  $a$  и произвольную точку  $A$  на прямой  $a$ ;
- 2) строим прямую  $b$ , что  $A \in b$  и  $a \perp b$ ;
- 3) строим точку  $B$ , что  $B \in b$ ;

4) строим окружность  $w$  с центром в  $B$  и радиусом  $2AB$ ;

5) окружность  $w$  пересекает прямую  $a$  в точке  $O$ ;

$\triangle ABC$  – прямоугольный (по построению) и

$AB = \frac{1}{2} OB$  (по построению), значит

$\angle AOB = 30^\circ$  (т.к. катет противолежащий этому углу равен половине гипотенузы).

б) получаем  $\angle AOB = 30^\circ$ .

$\angle OBA = 60^\circ$  (т.к.  $\triangle AOB$  – прямоугольный и  $\angle AOB = 30^\circ$ ).

в)  $\angle AOB$  делим пополам, получаем  $15^\circ$ .

г) т.к.  $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$ , то этот угол построен в п.а) – это угол, смежный  $\angle ABO$ ;

д) т.к.  $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ , то этот угол построен в п.а) – это угол смежный  $\angle AOB$ ;

е) т.к.  $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$ , то строим две перпендикулярные прямые и один из полученных прямых углов делим пополам;

ж) т.к.  $165^\circ = 180^\circ - 15^\circ$ , то это угол, смежный построенному в п.в), т.е. углу в  $15^\circ$ .

з) т.к.  $75^\circ = 90^\circ - 15^\circ$ , то строим угол в  $15^\circ$ , потом строим перпендикуляр к одной из сторон построенного угла, проходящий через его вершину. Один из полученных углов будет  $75^\circ$ .

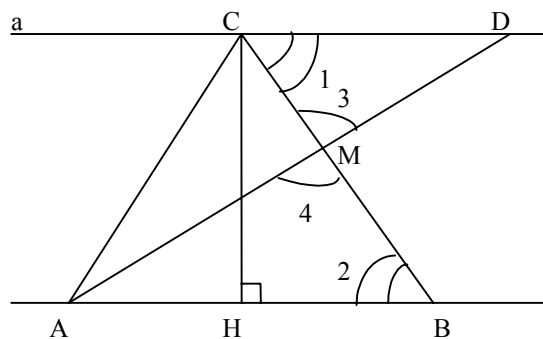
и) т.к.  $105^\circ = 90^\circ + 15^\circ$ , то это другой из углов, полученных в пункте

**316.**

$P_1$  \_\_\_\_\_  $Q_1$

$P_2$  \_\_\_\_\_  $Q_2$

$P_3$  \_\_\_\_\_  $Q_3$

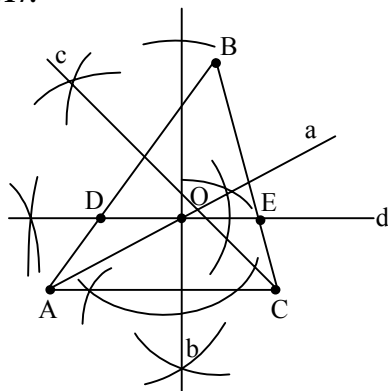


Построить:  $\triangle ABC$   
 $CH=P_2Q_2$ ,  $AM=P_3Q_3$ ,  $AB=P_1Q_1$

План построения:

Строим параллельные прямые на расстоянии, равном данной высоте треугольника. На одной из них отмечаем точку  $A$  и откладываем  $AB$ , равный стороне треугольника. Строим окружность с центром  $A$  и радиусом,  $2 P_3Q_3$ . Строим середину  $AD - M$ , где  $D$  – пересечение окружности и второй прямой, и строим прямую  $BM$ .  $\triangle ABC$  – иско-  
 мый.  $BM$  пересекается со второй из параллельных прямых в точке  $C$ . Получаем  $\triangle ABC$ .

317.



Построить:  $DE$   
 $DE \parallel AC$ ,  $D \in AB$ ,  $E \in BC$  и  
 $DE=AD+CE$

План построения:

- строим биссектрису  $\angle A$  – прямую  $a$ ;
- строим биссектрису  $\angle C$  – прямую  $c$ ;
- прямая  $a$  пересекается с прямой  $c$  в  $O$ ;
- строим прямую  $b$ , что  $O \in b$  и  $b \perp AC$ ;
- строим прямую  $d$ , что  $d \perp b$  и  $O \in d$ ;
- $a$  пересекается с  $AB$  в  $D$ ,  $a$  пересекается с  $CB$  в  $E$ ;
- получаем отрезок  $DE$ .

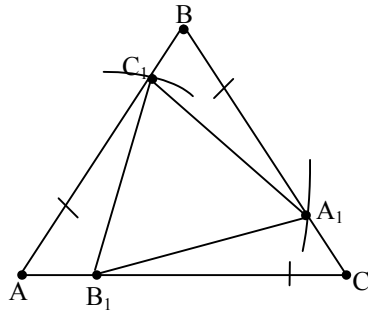
Доказательство:

$a$  – биссектриса  $\angle A$

$c$  – биссектриса  $\angle C$

$d \perp b$ ,  $b \perp AC$ , значит  $d \parallel AC$   
 $d \cap AB$  в  $D$ ,  $d \cap BC$  в  $E$ , следовательно  
 по задаче 245 имеем:  $DE = AD + CE$ .

**318.**



Дано:  $B_1 \in AC$ ,  $AB = BC = AC$

Построить:  $A_1 \in BC$ ,  $C_1 \in AB$ , что  $\triangle A_1B_1C_1$  – равносторонний

План построения:

- строим окружность  $w_1$  с центром в  $B$  радиусом  $B_1C$
- $w_1$  пересекает  $BC$  в  $A_1$
- строим окружность  $w_2$  с центром в  $A$  радиусом  $B_1C$
- $w_2$  пересекает  $AB$  в  $C_1$
- получаем  $\triangle A_1B_1C_1$ .

Доказательство:

$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$  (т.к.  $\triangle ABC$  – равносторонний)

и  $AB = BC = AC$

$AB_1 = AC - B_1C$

$B_1C = AB - AC_1$

$CA_1 = BC - BA_1$

$B_1C = AC_1 = BA_1$  (по построению), значит

$AB_1 = BC_1 = CA_1$ , значит

$\triangle AC_1B_1 = \triangle BA_1C = \triangle CB_1A_1$  (по 2-му признаку равенства треугольников).

Тогда  $B_1C_1 = A_1C_1 = A_1B_1$ , и значит  $\triangle A_1B_1C_1$  – равносторонний, что и требовалось доказать.