

Домашняя работа по геометрии за 11 класс

к учебному пособию
«Дидактические материалы по геометрии для 11 класса
Б.Г. Зив.
М.: Просвещение, 2002»

учебно-методическое пособие

Самостоятельные работы

Вариант 1

С—1

1. Дано: куб, $A(2; -2; 0)$. $DC_1 \cap D_1C = M$

Найти: 1) координаты всех остальных вершин. 2) Координаты векторов \overrightarrow{OD} ; \overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OM} и разложить их по векторам \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k} .

Решение:

1) Ребра куба равны 4 (по построению), значит, $B(-2; -2; 0)$; $C(-2; 2; 0)$; $D(2; 2; 0)$; $A_1(2; -2; 4)$; $B_1(-2; -2; 4)$; $C_1(-2; 2; 4)$; $D_1(2; 2; 4)$.

2) Координаты:

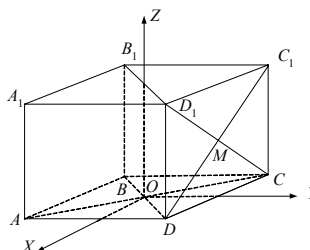
$$\overrightarrow{OD} \{2 - 0; 2 - 0; 0 - 0\}; \overrightarrow{OD} \{2; 2; 0\};$$

$$\overrightarrow{OD} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 0 \cdot \vec{k};$$

$$\overrightarrow{OC} \{-2; 2; 4\}; \overrightarrow{OC} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 4 \cdot \vec{k}.$$

Координаты точки $M(0; 2; 2)$:

$$\overrightarrow{OM} \{0; 2; 2\}; \overrightarrow{OM} = 0 \cdot \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$



2. Дано: векторы $\vec{a} \{2; -1; 3\}$, $\vec{b} \{-3; 2; 1\}$ и $\vec{c} \{-10; 6; -4\}$.

Будут ли коллинеарны векторы $\vec{a} - \vec{b}$ и \vec{c} ?

Решение:

$$(\vec{a} - \vec{b}) \{2 + 3; -1 - 2; 3 - 1\}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \{5; -3; 2\}$$

Векторы \vec{c} и $\vec{a} - \vec{b}$ коллинеарны, если существует такое k , что:

$$\begin{cases} 5k = -10 \\ -3k = 6 \\ 2k = -4 \end{cases}.$$

Очевидно, $k = -2$. Значит, векторы коллинеарны.

С—2

1. Дано: 2 вектора $\vec{a} \{-2; 1; -1\}$ и $\vec{b} \{1; -3; 2\}$.

Найти: $|\vec{a} + 2\vec{b}|$ и $|\vec{a}| + |2\vec{b}|$.

Решение:

$$\text{Итак, } (\vec{a} + 2\vec{b}) \{-2 + 2 \cdot 1; 1 + (-3) \cdot 2; -1 + 2 \cdot 2\}$$

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \{0; -5; 3\}$$

$$|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$|\vec{a}| + |2\vec{b}| = \sqrt{4+1+1} + \sqrt{(2 \cdot 1)^2 + (-3 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 2)^2} =$$

$$= \sqrt{6} + \sqrt{4} + 36 + \sqrt{16} = \sqrt{6} + \sqrt{56} = \sqrt{6} + 2\sqrt{14}.$$

2. Дано: В $\triangle ABCM$ — медиана; $A(-1; 2; 2)$, $B(2; -2; -6)$, $M(1; 1; -1)$.

1) Найти координаты C .

2) Найти длину BC .

3) Разложить \vec{BC} по векторам \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} .

Решение:

Пусть x, y, z — координаты т. C . Зная формулу середины отрезка, составим систему:

$$\begin{cases} \frac{-1+x}{2} = 1 \\ \frac{2+y}{2} = 1 \\ \frac{2+z}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = -4 \end{cases}.$$

Итак, $C(3; 0; -4)$.

Найдем длину DC , зная координаты:

$$|\vec{BC}| = \sqrt{(3-2)^2 + (0+2)^2 + (-4+6)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3.$$

$$\vec{BC} \{3-2; 0+2; -4+6\}$$

$$\vec{BC} \{1; 2; 2\} \Rightarrow \vec{BC} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

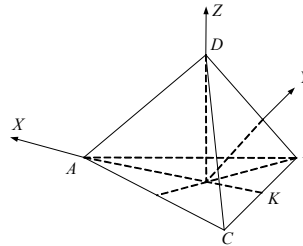
С—3

1. Дано: $DABC$ — тетраэдр, ребра равны, а $K \in BC$ $BK = KC$

Найти: 1) $\vec{DA} \cdot \vec{AK}$

2) $\vec{DA} \cdot \vec{BC}$

Решение: Поместим $DABC$ в прямоугольную систему координат, тогда



$$\vec{DA} \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}a; 0; 0 \right\}$$

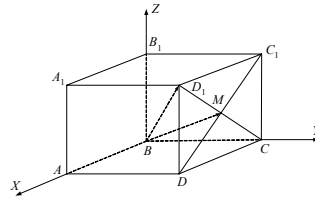
$$\vec{BC} \{0, -a, 0\}$$

$$\vec{DA} \cdot \vec{AK} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) a^2 = -\frac{a^2}{2} \quad \vec{DA} \cdot \vec{BC} = 0.$$

2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб $DC_1 \cap D_1 C = M$. Выяснить какова величина угла $\widehat{AMBD_1}$

Решение: Поместим куб в прямоугольную систему координат, как показано на рисунке.

Пусть $AB = 2$
 $\overrightarrow{AM} \{1; -2; 2\}; \overrightarrow{BD_1} \{-1; 2; 1\};$
 $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$
 $BD_1 \{2; 2; 2\}; |\overrightarrow{BD_1}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD_1} = -2 + 4 + 2 = 4$
 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD_1} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cos \alpha$
 $2\sqrt{18} \cos \alpha = 4$
 $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \alpha$ — острый.



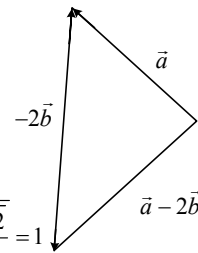
C—4

1. Дано: $|\vec{a}| = \sqrt{2}; |\vec{b}| = 1; \widehat{\vec{a}\vec{b}} = 135^\circ$.

Найти: $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b}) = \alpha$.

Решение: По т. косинусов

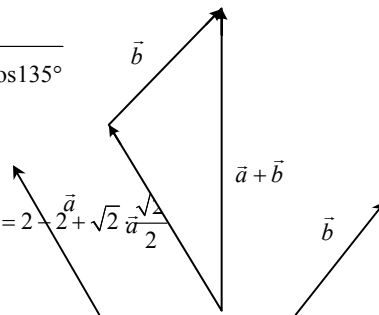
$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 45^\circ} = \sqrt{2 + 1 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$



$$|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |-2\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||2\vec{b}|\cos 135^\circ}$$

$$= \sqrt{2 + 4 + 2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{10}$$

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 2 - 2 + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

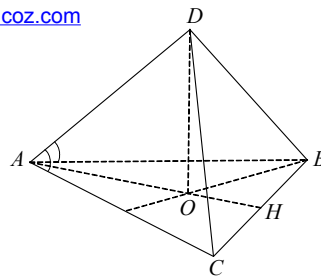


$$\cos \alpha = \frac{(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - 2\vec{b}|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

2. Дано: тетраэдр, $DABCAB = AC, \angle DAC = \angle DAB$.

Доказать: $AD \perp BC$.
 Решение: H — основание высоты AH $\triangle ABC$
 O — основание высоты DO тетраэдра



$$1) \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}$$

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{BC}$$

$$2) \text{ По теореме о трех перпендикулярах } \overrightarrow{HD} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}) = \\ = ((\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) \cdot \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{BC}) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow AD \perp BC$$

С—5.

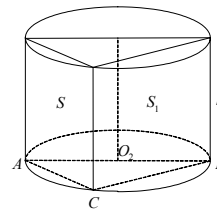
- Т. $A(100; 200; 1)$ переходит
 - в т. $A_1(-100; -200; -1)$ при центральной симметрии относительно начала координат.
 - в т. $A_2(100; 200; -1)$ при зеркальной симметрии относительно плоскости Oxy .
- Т.к. при движении отрезок отображается на равный ему отрезок, то треугольники получаются равные по третьему признаку, т.е. по 3-м сторонам.

С—6

- При движении углы сохраняются, следовательно, прямая перейдет в прямую. Так же если прямая была перпендикулярна любой прямой в плоскости, после движения эта прямая будет так же перпендикулярна любой прямой в плоскости.
- Пусть дана прямая, перпендикулярная плоскости, тогда движением мы получим прямую, параллельную данной, а по свойству, доказанному в задаче № 1, она будет так же перпендикулярна плоскости.

С—7

- Дано: цилиндр, два сечения S и S_1 площадь осевого сечения равна S , угол между сечениями $\alpha = 30^\circ$.



Найти: S_1 — площадь второго сечения
 Решение: Пусть образующая h .

$$1) S = AB \cdot h; S_1 = CB \cdot h \Rightarrow S_1 = CB \cdot \frac{S}{AB}$$

- Рассмотрим $\triangle ABC$. Он прямоугольный. Т.к. AB — диаметр окружности $\Rightarrow CB = AB \cdot \cos 30^\circ$.

$$3) S_1 = AB \cdot \cos 30^\circ \cdot \frac{S}{AB} = S \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} S$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}S$.

2. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, в призму вписан цилиндр, $AA_1 = 3$; $AB = 2\sqrt{3}$.

Найти: $S_{\text{пов. цил.}}$.

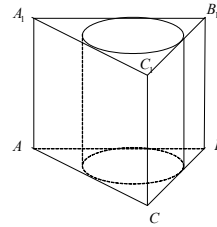
Решение:

1) Рассмотрим правильный $\triangle ABC$:

$$r = \frac{\sqrt{3}AB}{6} = 1.$$

$$2) S_{\text{цил.}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot AA_1 = 2\pi + 2\pi \cdot 3 = 8\pi.$$

Ответ: 8π .



С—8

1. Дано: конус, R — вершина, RIG — сечение, O — центр основания, SL — диаметр, $SL \parallel GI$, $\angle C_1OI = 90^\circ$, $\angle SRL = 60^\circ$, $GI = a$.

Найти: $S_{\text{бок.}}$ — ?

Решение:

$$1) \text{ Рассмотрим } \triangle OGI: \text{ он равнобедренный } (OG = OI = R) \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

$$2) \text{ Рассмотрим } \triangle LRS: SL = 2R = \sqrt{2}a; SR = RL = l, \text{ но } \angle SRL = 60^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SR = RL = SL = l = 2R = \sqrt{2}a.$$

$$3) S_{\text{бок.}} = \pi Rl = \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \sqrt{2}a = \pi a^2.$$

Ответ: πa^2 .

2. Дано: усеченный конус, длины окружностей оснований 4π и 10π , $h = 4$.

Найти: $S_{\text{поверх.}}$.

Решение:

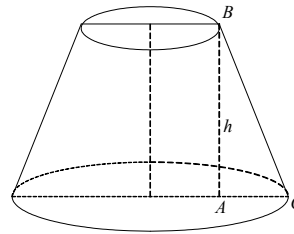
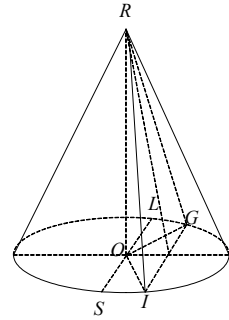
$$1) \text{ Рассмотрим верхнее основание: } d = 2\pi r; 4\pi = 2\pi r; r = 2.$$

$$2) \text{ Рассмотрим нижнее: } d_1 = 2\pi R \Rightarrow 10\pi = 2\pi R \Rightarrow R = 5.$$

$$3) \text{ Из } \triangle ABC: BC = 5 (BA = h = 4; AC = R - r = 3).$$

$$4) S_{\text{полн.}} = \pi r^2 + \pi R^2 + \pi(R + r)l = 4\pi + 25\pi + 35\pi = 64\pi.$$

Ответ: 64π .

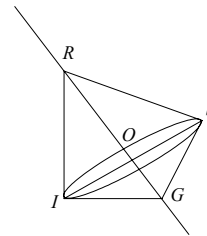


С—9.

1. Дано: $\triangle RIG$ вращается в круг RG ; $IR = 3$; $\angle RIG = 90^\circ$, $IG = 4$.

Найти: $S_{\text{тела вращ.}}$.

Решение: Пусть O — основание высоты IO $\triangle RIG$



1) Рассмотрим $\triangle RIG$: $\angle RIG = 90^\circ$, $RI = 3$; $IG = 4 \Rightarrow RG = 5$.

2) $RG \cdot IO = RI \cdot IG$; $5 \cdot IO = 12$; $IO = 2,4 = R$.

3) $S_{\text{тела вращения}} = S_{\text{бок IRS}} + S_{\text{бок IGS}} = \pi RL + \pi RI = \pi \cdot 3 \cdot 2,4 + \pi \cdot 2,4 \cdot 4 = 16,8\pi$.

Ответ: $16,8\pi$

2. Дано: $RABC$ — правильная пирамида, $AC = CB = BA = a$, RO — высота, боковые грани наклонены к основанию под углом 45° в $DABC$ вписан конус.

Найти: $S_{\text{впис конуса бок}}$.

Решение:

1) Рассмотрим $\triangle ABC$: $r = \frac{\sqrt{3}a}{6} = OS$.

2) Т.к. боковые грани равнонаклонены к оси, то вершина конуса проецируется в центр вписанной окружности.

3) Рассмотрим $\triangle SOR$: он равнобедренный ($\angle ROS = 90^\circ$, $\angle RSO = 45^\circ$) $\Rightarrow AO = R =$

$$SR = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$SR = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ — образующая конуса.

$$4) S_{\text{бок конус}} = \pi rl = \pi \cdot \frac{\sqrt{3}a}{6} \cdot \frac{\sqrt{6}a}{6} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{12}.$$

Ответ: $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{12}$

C—10

1. Дано: сфера (O, R) , $O(3, 0, 0)$, $A(0, \sqrt{2}, \sqrt{5}) \in$ сфера. Написать уравнение сферы. Выяснить принадлежит ли сфера точки $(5, 0, 2\sqrt{3})$; $(4, -1, 0)$.

Решение:

а) $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 16$

б) $(5-3)^2 + 0 + 12 = 16$

$16 = 16$

$T(5; 0; 2\sqrt{3})$

принадлежит

$(4-3)^2 + 1 + 0 \neq 16$

$T(4; -1; 0)$

не принадлежит.

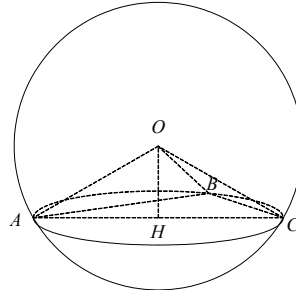
2. Дано: $\triangle ABC$, $A, B, C \in$ сфере с центром O , OH — расстояние от O до (ABC) $AB = 15$, $BC = \sqrt{351}$, $OH = 5$, $\angle ABC = 90^\circ$.

Найти: $OA = R$.

Решение: Т.к. $\triangle ABC$ — прямоугольный, то AC — диаметр сечения

1) Рассмотрим $\triangle ABC$:

Т.к. $\angle B = 90^\circ$; $AB = 15$ $BC = \sqrt{351} \Rightarrow AC = \sqrt{225 + 351} = 24$.



2) Т.к. $\triangle ABC$ — прямоугольный, H — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности, то $AH = \frac{AC}{2} = 12$, ее радиус.

3) Рассмотрим $\triangle AOH$:

$$OH = 5; AH = 12; \angle OHA = 90^\circ \Rightarrow OA = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{13}.$$

С—11

1. Дано: Плоскость пересекает сферу по окружности длина дуги 12π ; расстояние от плоскости дуги до центра шара $8 = AB$.

Найти: $S_{\text{сферы}}$.

Решение:

$$1) l = 2\pi r; 12\pi = 2\pi r; r = 6.$$

2) Рассмотрим $\triangle ABC$: он прямоугольный ($\angle B = 90^\circ, BC = r = 6$) $\Rightarrow AC = R = 10$.

$$3) S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 400\pi.$$

Ответ: 400π .

2. Дано: Плоскость пересекает шар с центром O . $\angle IRG = 45^\circ$ — угол между диаметром и секущей плоскостью, $RG = 4\sqrt{3}$ — диаметр.

Найти: $S_{\text{сечения}}$.

Решение:

Рассмотрим $\triangle RIG$: он равнобедренный и прямоугольный.

$$RI^2 + IG^2 = 42, \text{ но } RI = IG; 2RI^2 = 42;$$

$$RI = \sqrt{21} = 2\sqrt{6}.$$

Но RI — диаметр нужного круга $\Rightarrow R$

$$= \frac{RI}{2} = \sqrt{6}.$$

$$S = \pi R^2 = 6\pi.$$

С—12

1. Дано: пирамиды $DABC$, $AC = CB = BA =$

3. $\angle DAO = \angle DBO = \angle DCO = 60^\circ$. Около $DABC$ описана сфера.

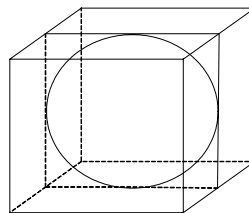
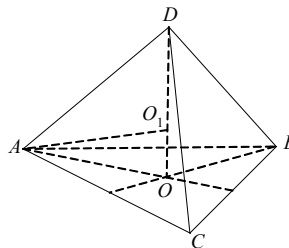
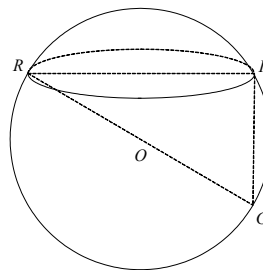
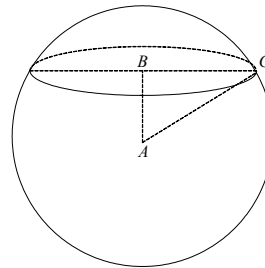
Найти: R .

Решение:

O — центр описанный около $\triangle ABC$ окружности

$$1) OA = \frac{\sqrt{3}AB}{3} = \sqrt{3} \text{ (из } \triangle ABC).$$

2) Рассмотрим $\triangle ADO$: он прямоугольный.



$$OA = \sqrt{3}; \angle ADO = 30^\circ. AD = 2\sqrt{3}$$

3) Рассмотрим $\triangle ADO_1$, (где O_1 — центр сферы) он равнобедренный.

$$O_1D = O_1A = r; \angle O_1DA = \angle DAO_1 = 30^\circ \Rightarrow \angle DO_1A = 120^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 120^\circ; AD = \sqrt{3}R; R = \frac{AD}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2.$$

2. Дано: в правильную четырехугольную призму вписана сфера.

Найти: $\frac{S_{\text{полн. пов. призмы}}}{S_{\text{сферы}}}.$

Решение:

1) Призма является кубом, т.к. в нее вписана сфера. Пусть сторона его равна $2a$, тогда

$$S_{\text{куба}} = 6 \cdot 4a^2 = 24a^2; S_{\text{сферы}} = 4\pi a^2 \Rightarrow \frac{S_{\text{куба}}}{S_{\text{сферы}}} = \frac{24a^2}{4\pi a^2} = \frac{6}{\pi}.$$

С—13

1. Дано: измерения прямого параллелепипеда относятся как $2 : 3 : 4$, $d = \sqrt{29}$ — диагональ.

Найти: V .

Решение:

Пусть стороны параллелепипеда $2x$, $3x$, $4x$ тогда

$$1) \sqrt{29} = \sqrt{4x^2 + 9x^2 + 16x^2}; \sqrt{29} = \sqrt{29x^2} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow V = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24.$$

Ответ: 24

2. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$, $CH = 6$ — расстояние от C до (AA_1BB_1) . $AA_1 = 6$

Найти: $V_{\text{призмы}}.$

Решение:

1) Рассмотрим прямоугольный $\triangle CHB$.

$$\angle HBC = 30^\circ, HC = 6 \Rightarrow CB = 12.$$

2) Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABC$:

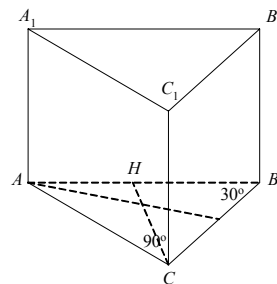
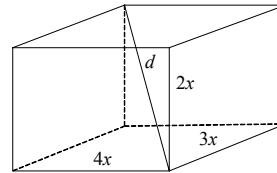
$$\angle ABC = 30^\circ, CB = 12 \Rightarrow \frac{AC}{CB} = \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow AC$$

$$= \frac{CB}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 12 = 24\sqrt{3}$$

Ответ: $144\sqrt{3}$.

С—14



1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $AC = 12$, $AB = CB = 10$, $E \in BB_1$, $EH \perp AC$, $\angle EHB = 60^\circ$, $B_1E = EB$.

Найти: $V_{\text{призмы}}$.

Решение:

Рассмотрим $\triangle ABC$. $AH = \frac{1}{2} AC = 6$. $HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 8$.

Из $\triangle HBE$: $EB = HB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 8\sqrt{3} \Rightarrow B_1B = 16\sqrt{3}$.

$$S(ABC) = AC \cdot \frac{1}{2} HB = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 48.$$

$$V_{\text{призмы}} = S(ABC) \cdot B_1B = 48 \cdot 16\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \cdot 256 = 768\sqrt{3}.$$

Ответ: $768\sqrt{3}$.

2. Дано: цилиндр, O_1O_2 — ось, $ABCD \parallel O_1O_2$, $\angle AO_1B = 120^\circ$, $O_1A = R$, угол между O_1O_2 и BD равен 90° .

Найти: $V_{\text{цилиндра}}$.

Решение:

Угол между O_1O_2 и BD равен $\angle ADB = 30^\circ$.

Из $\triangle AO_1B$: $AB^2 = 2R^2(1 - \cos 120^\circ)$; $AB^2 = 2R^2 \cdot \frac{3}{2}$; $AB = R\sqrt{3}$.

Из прямоугольного $\triangle ADB$: $AD = \frac{AB}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{R\sqrt{3}}{3} \cdot 3 = 3R$.

$$\Rightarrow V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 \cdot AD = 3\pi R^3.$$

Ответ: $3\pi R^3$.

С—15

1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная призма, $AB = BC = AC$, ACC_1A_1 — ромб, $A_1C = 6$, $AC_1 = 8$, угол между AA_1 и $(ABC) = 60^\circ$.

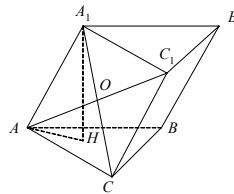
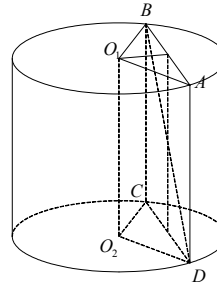
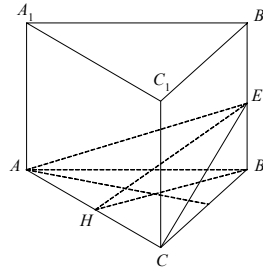
Найти: $V_{\text{призмы}}$.

Решение:

Пусть $A_1C \cap AC_1 = O \Rightarrow AC = \sqrt{AO^2 + OC^2} = 5 = AA_1$.

Опустим высоту A_1H на (ABC) .

Из прямоугольного $\triangle AHA_1$: $A_1H = AA_1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}$;



$$S(ABC) = AC^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\text{призмы}} = S(ABC) \cdot A_1H = \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{375}{8}.$$

Ответ: $\frac{375}{8}$.

2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — наклонный параллелепипед, $AA_1 = 10$, $AE \perp B_1B$, $E \in B_1B$, $AE = 5$, $AF = 12$, $F \in DD_1$, $AF \perp DD_1$, $G \in C_1C$, $AG \perp C_1C$, $AG = 13$.

Найти: $V_{\text{параллелепипеда}}$.

Решение:

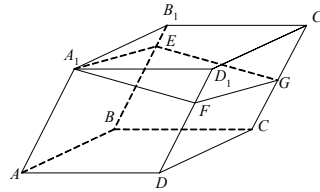
Сечение A_1EGF — параллелограмм, $(A_1EGF) \perp AA_1$.

$$S(A_1EG) = S(A_1FG) = \sqrt{\frac{5+12+13}{2}(15-5)(15-12)(15-13)} =$$

$$= \sqrt{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2} = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30.$$

$$V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1) = AA_1 \cdot 2S(A_1EG) = 10 \cdot 2 \cdot 30 = 600.$$

Ответ: 600.



С—16

1. Дано: $DABC$ — правильная пирамида, AH — высота $\triangle ABC$, DM — высота пирамиды, $\angle DAM = \alpha$.

Найти: $V(DABC)$.

Решение:

$$AM = \frac{2}{3}AH = \frac{2h}{3}; MH = \frac{h}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}AB = AH \Rightarrow$$

$$AB = \frac{2AH\sqrt{3}}{3} = \frac{2h\sqrt{3}}{3}.$$

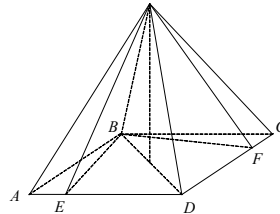
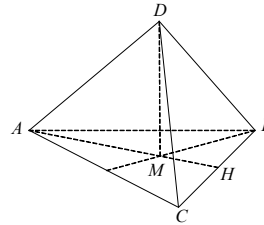
$$S(ABC) = AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4h^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Из } \triangle AMD: DM = AM \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{2htg\alpha}{3}.$$

$$V(DABC) = \frac{1}{3}DM \cdot S(ABC)$$

$$= \frac{2htg\alpha}{9} \cdot \frac{h^2\sqrt{3}}{3} = \frac{2h^3tg\alpha\sqrt{3}}{27}.$$

Ответ: $\frac{2h^3tg\alpha\sqrt{3}}{27}$



2. Дано: $MABCD$ — пирамида, $ABCD$ — ромб, $\angle BAD = \alpha$, $AB = a$, $E \in AD$, $ME \perp AD$, $BM \perp (ABCD)$, $F \in DC$, $MF \perp DC$, $\angle MEB = \angle MFB = \beta$.

Найти: $V(MABCD)$.

Решение:

$$S(ABD) = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} AD \cdot BE = \frac{a}{2} BE \Rightarrow BE = a \sin \alpha.$$

Из $\triangle MBE$: $MB = EB \cdot \operatorname{tg} \beta = a \sin \alpha \operatorname{tg} \beta$.

$$S(ABCD) = 2S(ABD) = a^2 \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(MABCD) = \frac{1}{3} MB \cdot S(ABCD) = \frac{a \sin \alpha \operatorname{tg} \beta}{3} \cdot a^2 \sin \alpha = \frac{a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \beta}{3}.$$

С—17

1. Дано: конус, OH — высота, $AB \perp EF$, HB — диаметр, EF — хорда, OEF — сечение, $AB \cap EF = K$, $\angle OKH = 60^\circ$, $OH = 4\sqrt{3}$, $\angle EMF = 60^\circ$.

Найти: $V_{\text{конуса}}$.

Решение:

$\triangle HEF$ — равносторонний.

$$\text{Из } \triangle OHK \text{ получим } HK = \frac{OH}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$$

$$\Rightarrow \text{в } \triangle HFE \quad \frac{\sqrt{3}}{2} EH = HK \Rightarrow EH$$

$$= \frac{2HK}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3} \cdot OH \cdot HE^2 = \frac{\pi}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{64}{3} = \frac{256\pi\sqrt{3}}{9}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{256\pi\sqrt{3}}{9}.$$

2. Дано: $MABCD$ — правильная пирамида. В $MABCD$ вписан конус.

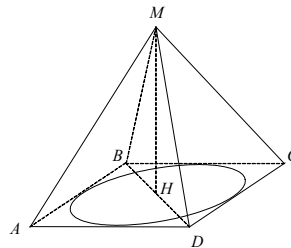
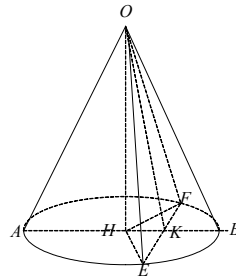
Найти: $\frac{V(MABCD)}{V_{\text{конуса}}}$.

Решение:

Высота конуса и пирамиды MH — общая, следовательно,

$$\frac{V(MABCD)}{V_{\text{конуса}}} =$$

$$\frac{S(ABCD)}{S_{\text{круга}}} = \frac{AB^2}{\pi r^2} = \frac{(2r)^2}{\pi r^2} = \frac{4}{\pi}.$$



С—18.

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — правильная усеченная пирамида, $AB = 4\sqrt{2}$, $A_1 B_1 = 6\sqrt{2}$, $S(A_1 ACC_1) = 90$.

Найти: $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$.

Решение:

$$AC = AB\sqrt{2} = 8, A_1 C_1 = A_1 B_1\sqrt{2} = 12.$$

$$S(A_1 ACC_1) = \frac{1}{2} (AC + A_1 C_1) O O_1 = 10 \cdot O O_1 = 90.$$

$$\begin{aligned} V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1) &= \frac{O O_1}{3} \cdot [AB^2 + A_1 B_1^2 + AB \cdot A_1 B_1] = \\ &= 3 \cdot [16 \cdot 2 + 36 \cdot 2 + 24 \cdot 2] = 3(104 + 48) \\ &= 456. \end{aligned}$$

2. Дано: усеченный конус, $\frac{BO_1}{AO_2} = \frac{1}{3}$, $AB = 4$, $\angle BAO_2 = 60^\circ$, $O_1 O_2$ — ось конуса.

Найти: $V_{\text{конуса}}$.

Решение:

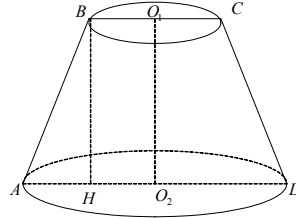
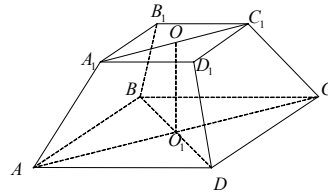
Рассмотрим осевое сечение $ABCD$. Опустим высоту BH . Из прямоугольного $\triangle AHB$:

$$\triangle AHB: AH = AB \cdot \cos 60^\circ = 2, BH = AB \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Т.к. } AD = 3BC, \text{ то } AH = BC = 2 \Rightarrow AD = 6 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{\text{конуса}} &= \frac{\pi}{3} BH (AO_2^2 + BO_1^2 + AO_2 \cdot BO_1) = \frac{\pi}{3} \cdot 2\sqrt{3} (9 + 1 + 3) = \\ &= \frac{26\pi\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{26\pi\sqrt{3}}{3}.$$



С—19

1. Дано: полушар, $S_{\text{полушара}} = 48\pi$.

Найти: $V_{\text{полушара}}$.

Решение:

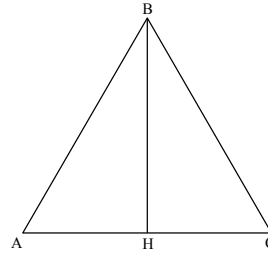
$$S_{\text{полушара}} = 2\pi R^2 = 48\pi \Rightarrow R^2 = 24; R = 2\sqrt{6}.$$

$$V_{\text{полушара}} = \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 8 \cdot 6\sqrt{6} = 32\pi\sqrt{6}.$$

2. Дано: конус, $\triangle ABC$ — осевое сечение, $AB = BC = AC$. В конус вписан шар.

Найти: $\frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{шара}}}$.

Решение:



Пусть $AC = a$, тогда высота $BH = AC \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$S(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}P \cdot r$, т.к. в осевое сечение вписан большой круг шара

$$\Rightarrow r = \frac{2S}{P} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2 \cdot 3a} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6a} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3} BH \cdot AH^2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{9 \cdot 6}.$$

$$\frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{\frac{\pi \cdot a^3 \sqrt{3}}{3 \cdot 8}}{\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{9 \cdot 6}} = \frac{9 \cdot 6}{3 \cdot 8} = \frac{9}{4}.$$

ДС

1. Дано: $M(2; -1; 3)$, плоскость α , $M \in \alpha$, плоскость β : $2x - 3y + z - 4 = 0$, $\alpha \parallel \beta$.

Написать уравнение плоскости α .

Решение:

Т.к. $\alpha \parallel \beta$, то уравнение α — $2x - 3y + z + S = 0$.

$M \in \alpha$: $4 - 3 + 3 + S = 0$, $S = -10$.

Окончательно α : $2x - 3y + z - 10 = 0$.

2. Дано: плоскость α : $2x + y - z + 1 = 0$; плоскость β : $x - 2y + 3z - 2 = 0$; угол между α и β равен γ .

Найти: γ .

Решение:

Угол между α и β равен $\pi - \gamma_1$, где γ_1 — угол между перпендикулярами.

$\vec{n}_\alpha(2, 1, -1) \perp \alpha$ и $\vec{n}_\beta(1, -2, 3) \perp \beta$ (т.к. γ_1 — тупой).

$$|\vec{n}_\alpha| = \sqrt{6}, |\vec{n}_\beta| = \sqrt{14}.$$

$$(\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta) = 2 - 2 - 3 = -3 = |\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta| \cdot \cos \gamma_1.$$

$$\cos \gamma_1 = -\frac{3}{\sqrt{6 \cdot 14}} = -\frac{3}{2\sqrt{21}}; \gamma_1 = \arccos\left(-\frac{3}{2\sqrt{21}}\right).$$

$$\gamma = \pi - \gamma_1 \text{ или } \gamma = \pi - \arccos\left(-\frac{3}{2\sqrt{21}}\right).$$

Вариант 2

С—1

1. Дано: куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $C(-2, 4, 0)$.

1) Найти координаты вершин куба.

Решение:

$B(-2, 0, 0)$; $A(2, 0, 0)$; $D(2, 4, 0)$, $B_1(-2, 0, 4)$; $A_1(2, 0, 4)$; $D_1(2, 4, 4)$; $C_1(-2, 4, 4)$.

- 2) Найти координаты \vec{OC} , $\vec{OB_1}$, \vec{OK} .

Решение:

$$\vec{OC}(-2, 4, 0) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$$

$$\vec{OB_1}(-2, 0, 4) = -2\vec{i} + 0\vec{j} + 4 \cdot \vec{k}$$

$$\vec{OK}(-2, 2, 2) = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

(K — середина $BC_1 \Rightarrow K(-2, 2, 2)$).

2. Дано: $\vec{a}(-1, 3, -2)$, $\vec{b}(2, -1, 3)$, $\vec{p}(-3, -1, -4)$.

Выяснить, будут ли коллинеарны $\vec{a} + 2\vec{b}$ и \vec{p} .

Решение:

$$(\vec{a} + 2\vec{b})\{3, 1, 4\}; \vec{p}\{-3, -1, -4\}.$$

Условие коллинеарности — $\vec{a} + 2\vec{b} = k\vec{p}$:

$$\begin{cases} 3 = -3k \\ 1 = -k \\ 4 = -4k \end{cases} \Rightarrow k = -1 \Rightarrow (\vec{a} + 2\vec{b}) \text{ и } \vec{p} \text{ коллинеарны.}$$

С—2

1. Дано: $\vec{m}(-2, 1, -1)$, $\vec{n}(1, 3, 2)$.

Найти: $|2\vec{m} - \vec{n}|$ и $|2\vec{m}| - |\vec{n}|$.

Решение:

$$|\vec{m}| = \sqrt{6}, |\vec{n}| = \sqrt{14}.$$

$$|2\vec{m} - \vec{n}|^2 = (2\vec{m} - \vec{n}, 2\vec{m} - \vec{n}) = 4|\vec{m}|^2 - 4(\vec{m} \cdot \vec{n}) + |\vec{n}|^2 =$$

$$= 24 + 4 + 14 = 42.$$

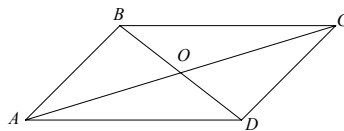
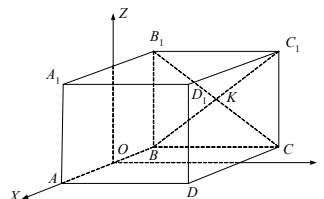
$$((\vec{m} \cdot \vec{n}) = -2 + 3 - 2 = -1) \Rightarrow |2\vec{m} - \vec{n}| = \sqrt{42}.$$

$$|2\vec{m}| - |\vec{n}| = 2\sqrt{6} - \sqrt{14}.$$

2. Дано: $ABCD$ — параллелограмм,
 $AC \cap BD = O$, $A(1, 3, -1)$, $B(-2, 1, 0)$,
 $O(0, 1, 5; 0)$.

1) Найти координаты C и D .

Решение:



$$\overrightarrow{AO}(-1; -1,5; 1), \overrightarrow{BO}(2; 0,5; 0).$$

Теперь отложим от точки O векторы $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} \Rightarrow$
 $\Rightarrow C(-1, 0, 1), D(2, 2, 0).$

2) Найти длину BC .

Решение:

$$\overrightarrow{BC}(1, -1, 1); |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3}.$$

3) Разложить \overrightarrow{AD} по $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Решение:

$$\overrightarrow{AD}(1, -1, 1) = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AD} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}.$$

С—3

1. Дано: $MABCD$ — правильная пирамида, $AB = AM = a$.

1) Найти $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Решение:

Введем полярную систему координат $HXYZ$ как показано на рисунке (H — основание перпендикуляра).

$$AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}; AM = a.$$

Из прямоугольного $\triangle AHM$: $HM = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

$$\text{Значит, } \overrightarrow{MA} = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = -a^2.$$

2) Найти $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{DB}$.

Решение:

$$\overrightarrow{DB}(-a, -a, 0); (\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{DB}) = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} =$$

0.

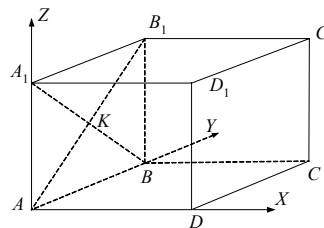
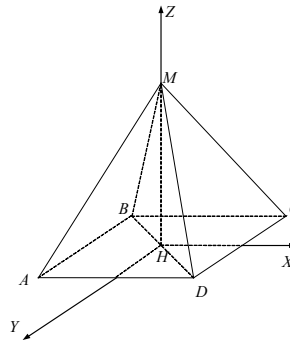
2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, $A_1 B \cap AB_1 = K$.

Какой угол между $\overrightarrow{A_1 C}$ и \overrightarrow{KD} .

Решение:

Поместим куб в полярную систему координат $AXYZ$.

$$\text{Пусть ребро куба равно } a. \text{ Тогда } \overrightarrow{A_1 C}(a, a, -a), \overrightarrow{KD}\left(a, -\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right).$$



Тогда $(\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{KD}) = a^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2 > 0 \Rightarrow$ угол между $\overrightarrow{A_1C}$ и \overrightarrow{KD} острый.

С—4

1. Дано: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\hat{\vec{a}\vec{b}} = 120^\circ$.

Найти угол между $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{a} + 2\vec{b}$.

Решение:

$$((\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})) = |\vec{a}|^2 - 2|\vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 4 - 2 - 1 = 3.$$

$$(\text{Т.к. } (\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \hat{\vec{a}\vec{b}} = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) = -1).$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 3 + 2 = 5.$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5}.$$

$$|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 6 - 4 = 2$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{2}.$$

$$\text{Окончательно } \cos \alpha = \frac{((\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}))}{|\vec{a} - \vec{b}| \cdot |\vec{a} + 2\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, $ABCD$ — ромб, $\angle A_1 A D = \angle A_1 A B = \alpha$.

Доказать: $BD \perp AA_1$.

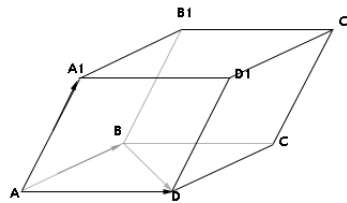
Доказательство:

$AB = AD$.

Но $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow$

$$(\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AA_1}) = (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1}) - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1}) =$$

$$= |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AA_1}| \cdot \cos \alpha - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AA_1}| \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow BD \perp AA_1.$$



С—5

1. Дано: $B(0,01; 0,02; -1)$, B_1 и B симметричны относительно

а) оси OZ . Найти координаты B_1 .

Решение:

$$B_1(-0,01; -0,02; -1).$$

б) $B \rightarrow B_2$ при переносе на вектор $\vec{p} \{0,09; 0,08; 1\}$.

Найти: координаты B_2 .

Решение:

$$B_2(0,1; 0,1; 0).$$

2. Доказать, что при движении угол переходит в равный ему угол.

Доказательство:

Возьмем две точки A и C на лучах $\angle B$. $\angle B \rightarrow L\angle E$, $A \rightarrow D$, $C \rightarrow F$.

Но расстояние сохранится $\Rightarrow AB = DE, AC = DF, BC = EF \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle DEF$ по трем сторонам. Значит, $\angle B = \angle E$.

С—6

1. Дано: $\alpha \perp a$, при движении $\alpha \rightarrow \beta, a \rightarrow b$.

Доказать: $\beta \perp b$.

Доказательство:

Нужно взять тетраэдр $DABC$; $D \in a, A \in a, B, C \in \alpha$.

$DABC \rightarrow HEFG$ ($HEFG = DABC$) $\Rightarrow HE \in \beta, HE \perp (EFG), (EFG) = \beta$.

2. Дано: $\alpha \perp a, \beta \parallel \alpha$.

Доказать: $\beta \perp a$.

Доказательство:

Возьмем движение, переводящее $\alpha \rightarrow \beta, a \rightarrow a$.

Из пункта (1) $\Rightarrow \beta \perp a$.

С—7

1. Дано: цилиндр, $ABCD$ — осевое сечение, $EBCF$ — сечение, $\angle ABE = 60^\circ, S(EBCF) = Q$.

Найти: $S(ABCD)$.

Решение:

Из прямоугольного $\triangle AEB$: $EB = \frac{1}{2} AB \Rightarrow$

$$\frac{S(ABCD)}{S(EBCF)} = \frac{AB}{EB} = 2 \Rightarrow$$

$$S(ABCD) = 2Q.$$

2. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, AH — высота $\triangle ABC, AH = 6, AA_1 = 4$, вокруг призмы описан цилиндр.

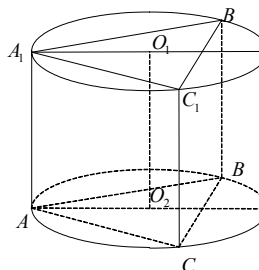
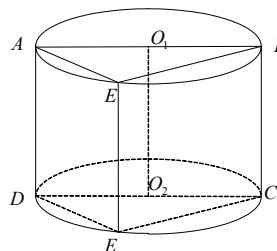
Найти: $S_{\text{цилиндра}}$.

Решение:

Точка оси O_2 лежит на $AH \Rightarrow AO_2 = R$

$$= \frac{2}{3} \cdot AH = 4.$$

$$S_{\text{цилиндра}} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot AA_1 = 32\pi + 32\pi = 64\pi.$$



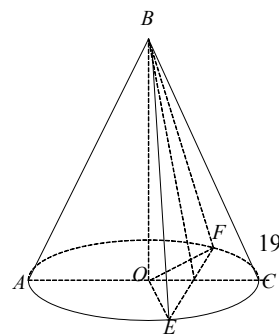
С—8

1. Дано: конус, ABC — осевое сечение, BEF — сечение, $\angle EBF = 90^\circ, AC \perp EC, EF = m, \angle ABC = 120^\circ$.

Найти: $S_{\text{бок конуса}}$.

Решение:

Из $\triangle EBF$ образующая $EB = \frac{m\sqrt{2}}{2} = AB = BC$



$$\Rightarrow \text{Из } \triangle ABO: BO = \frac{AB}{2} = \frac{m\sqrt{2}}{4}, AO = \frac{m\sqrt{6}}{4}.$$

$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot AB \cdot AO = \pi \cdot \frac{m\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{m\sqrt{6}}{4} = \frac{\pi m^2 \sqrt{3}}{4}.$$

2. Дано: конус усеченный, $S_{\text{бок}} = 208\pi$, образующая L , высота $h = 5$.

Найти: r_1 и r_2 .

Решение:

Рассмотрим осевое сечение трапеции $ABCD$. BH — высота.

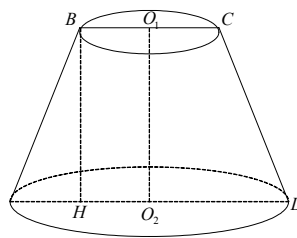
$$\text{Из } \triangle ABH: AH = \sqrt{h^2 - h^2} = \sqrt{169 - 25} = 12.$$

$$S_{\text{бок}} = \pi L(r_1 + r_2) = \pi \cdot 13(2r_1 + AH) = 208\pi.$$

$$2r_1 + 12 = 16, r_1 = 2;$$

$$r_1 + r_2 = 16, r_2 = 14.$$

Ответ: 2 и 14.



С—9

1. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = BC$, $AC = 4\sqrt{3}$, AC — ось вращения.

Найти: $S_{\text{тела вр}}$.

Решение:

Опустим высоту BH .

$$\text{В } \triangle ABH \angle H = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, AH = \frac{AC}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$AB = \frac{AH}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 4; BH = \frac{AB}{2} = 2; \triangle ABH = \triangle CBH$$

$$\Rightarrow S_{\text{тела вр}} = \pi [AB \cdot BH + BC \cdot BH] = \pi \cdot 2AB \cdot BH = 16\pi.$$

Ответ: 16π .

2. Дано: $DABC$ — правильная пирамида, вокруг $DABC$ описан конус, $AB = a$, DH — высота, $\angle DAH = 30^\circ$.

Найти: $S_{\text{бок конуса}}$.

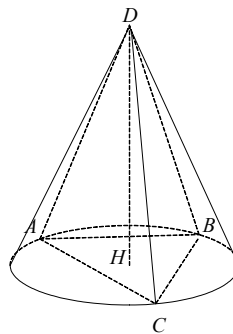
Решение:

$$\text{В } \triangle ABC \text{ } AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Из } \triangle AHD \text{ } AD = \frac{AH}{\cos 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2}{3\sqrt{3}} = \frac{2a}{3}; AH$$

$$= R_{\text{конуса}} \Rightarrow$$

$$S_{\text{бок конуса}} = \pi \cdot AD \cdot AH = \pi$$



$$\frac{2a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2a^2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

С—10

1. Дано: сфера, $O(0, 0, 4)$ — центр, $A(2\sqrt{2}, 0, 5) \in$ сфере.

1) Написать уравнение сферы.

Решение:

Уравнение сферы $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = R^2$.

$A \in$ сфере $\Rightarrow 8 + (5 - 4)^2 = R^2$; $8 + 1 = R^2 \Rightarrow R = 3$.

Уравнение сферы: $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 9$.

2) Выяснить, принадлежат ли сфере точки $B(3, 1, 5)$, $C(0, \sqrt{5}, 6)$.

Решение:

Подставим координаты точек в уравнение сферы:

B : $3^2 + 1^2 + (5 - 4)^2 = 10 + 1 = 11 \neq 9 \Rightarrow B \notin$ сфере.

C : $5 + (6 - 4)^2 = 5 + 4 = 9 \Rightarrow C \in$ сфере.

2. Дано: $ABCD$ — квадрат, AB , BC , CD ,

AD касаются сферы, $AC = 10\sqrt{2}$, O — центр сферы, $AC \cap BD = H$, $OH = 12$.

Найти: $R_{\text{сферы}}$.

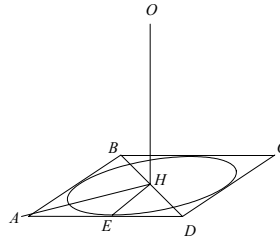
Решение:

$$AH = \frac{1}{2} AC = 5\sqrt{2}.$$

Из прямоугольного равнобедренного $\triangle AEN$ $EH = r = 5$.

Из прямоугольного $\triangle EHO$ $EO = r = \sqrt{EH^2 + HO^2} = 13$.

Ответ: 13.



С—11

1. Дано: шар(O , R), сечение(O_1 , r), $S((O_1r)) = 25\pi$, $OO_1 = 12$.

Найти: $S_{\text{шара}}$.

Решение:

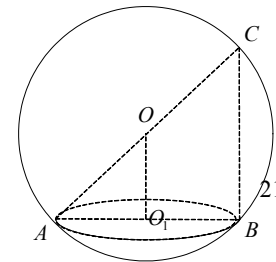
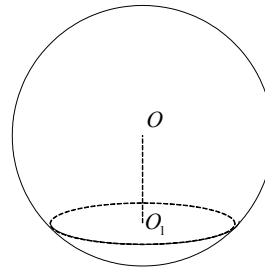
$R_{\text{шара}} = \sqrt{OO_1^2 + r^2}$. Но $S((O_1, r)) = \pi r^2 = 25\pi \Rightarrow r^2 = 25$.

$R_{\text{шара}} = \sqrt{144 + 25} = 13 \Rightarrow S_{\text{шара}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 169 = 676\pi$.

Ответ: 676π .

2. Дано: шар(O , R), плоскость $\alpha \cap$ шар = окружность(O_1 , r), AC — диаметр шара, $A \in$ окружности, AB — диаметр окружности, $\angle OAB = 45^\circ$, $AC = 4\sqrt{2}$.

Найти: $l_{\text{линии пересечения}}$.



Решение:

$$AO = R = AC \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}; \angle AOB = 2\angle ACB \text{ (т.к. центральный и вписанный)}$$

углы опираются на одну хорду AB).

Из $\triangle ACD$ $\angle ABC = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 45^\circ \Rightarrow \angle AOB = 90^\circ$.

$$\text{Из } \triangle AOB \text{ } AB = AO\sqrt{2} = 4 \Rightarrow AO_1 = 2 = r$$

$$\Rightarrow l_{\text{линии пересечения}} = 2\pi r = 2\pi \cdot AO_1 = 4\pi.$$

Ответ: 4π .

С—12

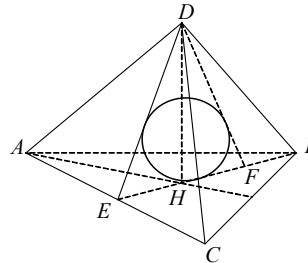
1. Дано: $DABC$ — правильная пирамида, $AC = 4$, $BE \perp AC$, $\angle DEB = 60^\circ$. В $DABC$ вписана сфера.

Найти: $r_{\text{сферы}}$.

Решение:

Опустим высоту DH . $\triangle DEH$ построим до равностороннего $\triangle DEF$.

$$\text{Из } \triangle ABC \text{ } BE = AC \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}. H —$$



$$\text{точка пересечения медиан } \triangle ABC \Rightarrow HB = EF = \frac{2}{3} FB = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

В $\triangle DEF$ вписан большой круг сферы.

$$S(EDF) = EF^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{16}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} P(EDF) \cdot r.$$

$$P(EDF) = 3EF = 4\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{2S}{P} = \frac{8\sqrt{3}}{3 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — правильная призма, $AB = 2$, $AA_1 = 2\sqrt{2}$. Вокруг призмы описана сфера.

Найти: $S_{\text{сферы}}$.

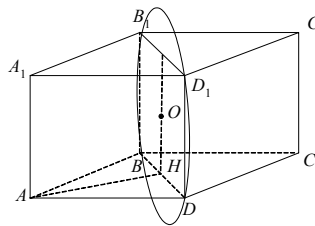
Решение:

Центр сферы — т. O — точка пересечения BD_1 и B_1D .

Опустим перпендикуляр OH на $ABCD$ ($H = AC \cap BD$).

$$OH = \frac{1}{2} A_1 A = \sqrt{2}; AC = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2};$$

$$AH = \frac{1}{2} AC = \sqrt{2}.$$



OA — радиус сферы.

$$\text{Из } \triangle AHO \quad AO = \sqrt{AH^2 + OH^2} = \sqrt{2 + 2} = 2$$

$$\Rightarrow S_{\text{сферы}} = 4\pi \cdot AO^2 = 16\pi.$$

Ответ: 16π .

С—13

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, $AB : AD : AC_1 = 1 : 2 : 3$, $AA_1 = 4$.

Найти: $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$.

Решение:

Пусть $AB = a$, тогда $AD = 2a$, $AC_1 = 3a$.

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA_1^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2 + 16} = 3a.$$

$$a^2 + 4a^2 + 16 = 9a^2; \quad 4a^2 = 16, \quad a = 2.$$

$$AB = 2, \quad AD = 4 \Rightarrow V = AB \cdot AD \cdot AA_1 = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32.$$

Ответ: 32.

2. Дано: $ABCA_1 B_1 C_1$ — прямая призма, $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle B_1 CB = 45^\circ$, $CB_1 = 12$.

Найти: $V_{\text{призмы}}$.

Решение:

$$\text{Из } \triangle B_1 BC \quad BB_1 = CB = \frac{CB_1}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}.$$

Проведем $AK \perp CB$.

$$\text{В } \triangle ABC \quad AK = CK = KB = \frac{1}{2} CB = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S(ABC) = \frac{1}{2} AK \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} =$$

18.

$$V_{\text{призмы}} = BB_1 \cdot S(ABC) = 6\sqrt{2} \cdot 18 = 108\sqrt{2}.$$

Ответ: $108\sqrt{2}$.

С—14

1. Дано: $ABCA_1 B_1 C_1$ — прямая призма, $AB = BC = 10$, $\angle ABC = 30^\circ$, $EF \perp AA_1$, $(A_1 EFA) \perp (BB_1 C_1 C)$, $\angle A_1 FA = 45^\circ$.

Найти: $V_{\text{призмы}}$.

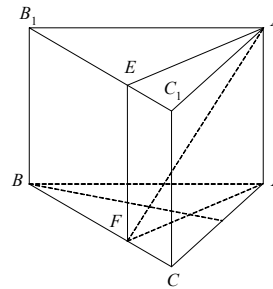
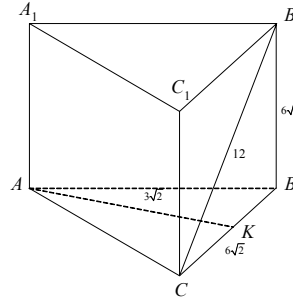
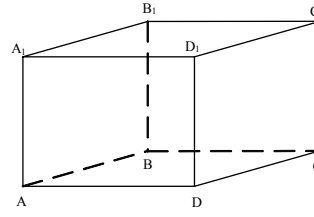
Решение:

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$25 = \frac{1}{2} BC \cdot AF = 5AF \Rightarrow AF = 5.$$

$$\text{Из } \triangle A_1 AF \quad A_1 A = AF = 5 \Rightarrow V_{\text{призмы}} = AA_1 \cdot S(ABC) = 5 \cdot 25 = 125.$$

Ответ: 125.



2. Дано: цилиндр, O_1O_2 — ось, $ABCD$ — сечение, $(ABCD) \parallel O_1O_2$, $O_1K \perp AB$, $O_1K = 15$, $BD = 20$, $O_1A = 17$.

Найти: $V_{\text{цилиндра}}$.

Решение:

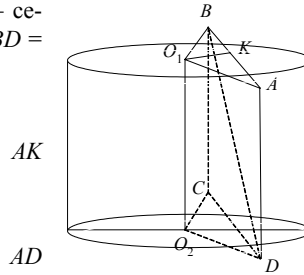
$$\text{Из } \triangle O_1AK \quad AK = \sqrt{O_1A^2 - O_1K^2} = \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64} = 8.$$

$$AB = 2AK = 16.$$

$$\text{Из } \triangle BAD \quad AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$$

$$\Rightarrow V_{\text{цил}} = \pi \cdot O_1A^2 \cdot AD = \pi \cdot 289 \cdot 12 = 3468\pi.$$

Ответ: 3468π .



С—15

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — наклонный параллелепипед, $ABCD$ — ромб, $BD = 6$, $A_1B \perp (ABCD)$, $A_1B = 5\sqrt{3}$, $\angle A_1AB = 60^\circ$.

Найти: $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$.

Решение:

Из прямоугольного $\triangle A_1BA$ $AB = A_1B \cdot \cos 60^\circ$.

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{A_1B}{AB} \Rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = 15.$$

$$\text{Из } \triangle AOB \quad AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{225 - 9} = 16 \quad \left(BO = \frac{BD}{2} = 3 \right);$$

$$AC = 2AO = 32 \Rightarrow S(ABCD) = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 32 = 96.$$

$$V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1) = A_1B \cdot S(ABCD) = 5\sqrt{3} \cdot 96 = 480\sqrt{3} \quad (A_1B \text{ — высота параллелепипеда}).$$

Ответ: $480\sqrt{3}$.

2. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — призма, $E \in CC_1$, $F \in BB_1$, $AE \perp CC_1$, $AF \perp BB_1$, $K \in EF$, $A_1K \perp (BB_1CC_1)$, $A_1E = A_1F = 13$, $A_1K = 5$, $AA_1 = 10$.

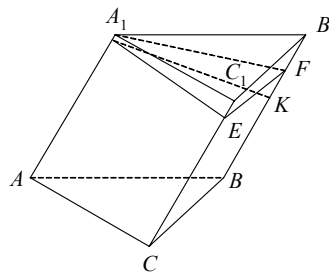
Найти: $V_{\text{призмы}}$.

Решение:

Докажем, что $K \in EF$. По теореме о трех перпендикулярах $KF \perp BB_1$ и CC_1 и $KE \perp CC_1$ и $BB_1 \Rightarrow EK$ и KF — одна прямая $\Rightarrow K \in EF$. Причем $\triangle EA_1F$ — равнобедренный.

$$\text{Из прямоугольного } \triangle EKA_1: EK = \sqrt{A_1E^2 - A_1K^2} = \sqrt{169 - 25} = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EF = 2EK = 24.$$



$$S(A_1EF) = \frac{1}{2} EF \cdot A_1K = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60.$$

$$V_{\text{призмы}} = AA_1 \cdot S(A_1EF) = 10 \cdot 60 = 600.$$

Ответ: 600.

С—16

1. Дано: $MABCD$ — правильная пирамида, $AC = d$, MH — высота, $MK \perp AD$, $\angle MKH = \alpha$.

Найти: $V(MABCD)$.

Решение:

$$AH = \frac{1}{2} AC = \frac{d}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle AKH \text{ } AK = KH = \frac{d\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Из } \triangle KHM \text{ } HM = KH \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{d\sqrt{2}}{4} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} d^2.$$

$$V(MABCD) = \frac{1}{3} MH \cdot S(ABCD) = \frac{1}{3} \cdot \frac{d\sqrt{2}}{4} \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{2} d^2 = \frac{d^3 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{2}}{24}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{d^3 + \operatorname{tg} \alpha \sqrt{2}}{24}.$$

2. Дано: $DABC$ — пирамида, $AB = BC = a$, $\angle ABC = \alpha$, $BD \perp (ABC)$, $DE \perp AC$, $\angle BED = \beta$.

Найти: $V(DABC)$.

Решение:

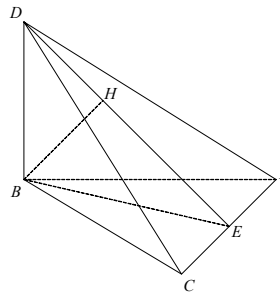
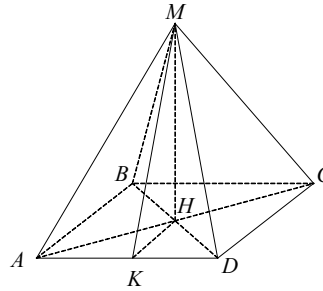
$$S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \alpha = \frac{a^2 \sin \alpha}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle BEC \text{ } BE = BC \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = a \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle DBE \text{ } DB = BE \cdot \operatorname{tg} \beta = a \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$$

$$\Rightarrow V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} DB \cdot S(ABC) = \frac{1}{3} \cdot a \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{a^2 \sin \alpha}{2} =$$

$$= \frac{a^3 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \operatorname{tg} \beta}{6}.$$



Ответ: $\frac{a^3 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \operatorname{tg} \beta}{6}$

С—17

1. Дано: конус, D — вершина, DH — высота, DAB — сечение, $AB = 6\sqrt{3}$, $\angle AHB = 120^\circ$, $K \in AB$, $AK = KB$, $\angle HKD = 45^\circ$.

Найти: $V_{\text{конуса}}$.

Решение:

$$AK = \frac{AB}{2} = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{Из } \triangle AKN \quad AH = \frac{AK}{\cos 30^\circ} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 6 = R.$$

$$HK = \frac{1}{2} AH = 3.$$

$$\text{Из } \triangle HKD \quad HD = HK = 3 \Rightarrow V_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3} \cdot DH \cdot$$

$$AH^2 = \frac{\pi}{3} \cdot 3 \cdot 36 = 36\pi.$$

Ответ: 36π .

2. Дано: $MABCD$ — правильная пирамида. Вокруг $MABCD$ описан конус.

Найти: $\frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{пирамиды}}}$.

Решение:

$$\text{Пусть } AB = a \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{2}}{2} = R \Rightarrow$$

$$\frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{пирамиды}}} = \frac{S_{\text{круга}}}{S(ABCD)} = \frac{\pi \frac{a^2}{2}}{a^2} = \frac{\pi}{2}.$$

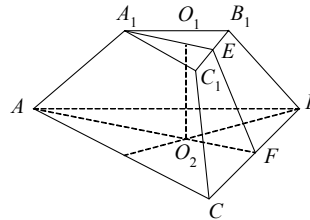
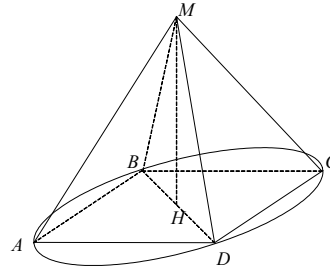
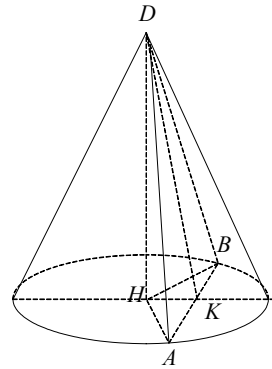
Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

С—18

1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная усеченная пирамида, $A_1B_1 = 4\sqrt{3}$, $AB = 8\sqrt{3}$, $E \in C_1B_1$, $F \in CB$, $S(AA_1EF) = 54$, $C_1E = EB_1$, $CF = FB$.

Найти: $V_{\text{пирамиды}}$.

Решение:



Пусть O_1, O_2 — центры $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$; O_1O_2 — высота.

$$\text{В } \triangle A_1B_1C_1 \quad A_1E = A_1B_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6.$$

$$\text{В } \triangle ABC \quad AF = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12.$$

$$S(AA_1EF) = \frac{1}{2} (A_1E + AF) \cdot O_1O_2 = 9 \cdot O_1O_2 = 54 \Rightarrow O_1O_2 = 6.$$

$$S(ABC) = AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 64 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 48\sqrt{3}.$$

$$S(A_1B_1C_1) = A_1B_1^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 16 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3} \Rightarrow V(ABCA_1B_1C_1) =$$

$$= \frac{1}{3} O_2O_1 \cdot (S(ABC) + S(A_1B_1C_1) + \sqrt{S(A_1B_1C_1) \cdot S(ABC)}) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot (48\sqrt{3} + 12\sqrt{3} + \sqrt{3 \cdot 48 \cdot 12}) = 2 \cdot (60 + 24) \sqrt{3} = 168\sqrt{3}.$$

Ответ: $168\sqrt{3}$.

2. Дано: усеченный конус, $ABCD$ — осевое сечение, O_1O_2 — ось, $O_1O_2 = 5$, $BD = 13$, $BO_1 : AO_2 = 1 : 2$.

Найти: $V_{\text{конуса}}$.

Решение:

$$S(ABCD) = S(ABD) + S(BCD) = \frac{1}{2} O O_1$$

$$\cdot AD + \frac{1}{2} O_1O_2 \cdot BC =$$

$$= O O_1 (BO_1 + AO_2) = O O_1 \cdot 3BO_1.$$

Опустим высоту BH . Из прямоугольного $\triangle BHD$:

$$HD = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{169 - 25} = 12 \quad (BH = O_1O_2).$$

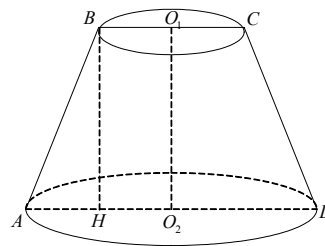
$$\text{Но } HD = BC + AH = BC + \frac{AD - BC}{2} = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2} = 12 = \frac{3BC}{2} = 12 \Rightarrow BC =$$

$$8 \Rightarrow AD = 2BC = 16; BO_1 = \frac{1}{2} BC = 4, AO_2 = \frac{AD}{2} = 8$$

$$\Rightarrow V_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3} O_2O_1 \cdot (BO_1^2 + AO_2^2 + BO_2 \cdot AO_2) = \frac{\pi}{3} \cdot 5(16 + 64 + 32) =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot 5 \cdot 112 = \frac{560\pi}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{560\pi}{3}.$$



1. Дано: шар, $V_{\text{шара}} = \frac{32\pi}{3}$.

Найти: $S_{\text{полушара}}$.

Решение:

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{32\pi}{3} \Rightarrow R^3 = 8 \Rightarrow R = 2.$$

$$S_{\text{полушара}} = 2\pi R^2 = 8\pi.$$

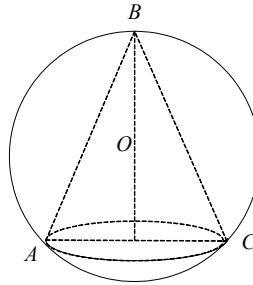
Ответ: 8π .

2. Дано: конус, $\triangle ABC$ — осевое сечение, $AB = BC = AC$. Вокруг конуса описан шар.

Найти: $\frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{шара}}}$.

Решение:

Опустим высоту BH . Пусть $AB = a \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Если O — центр $\triangle ABC$, то $BO = \frac{2}{3} BH = \frac{a\sqrt{3}}{3} = R$. $AH = \frac{a}{2}$.

$$V_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3} \cdot BH \cdot AH^2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24},$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{4\pi}{3} \cdot BO^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{a^3 \cdot 3\sqrt{3}}{27} = \frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{27}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3} \cdot 27}{24 \cdot 4\pi a^3 \sqrt{3}} = \frac{9}{32}.$$

Ответ: $\frac{9}{32}$.

ДС

1. Дано: $A(2, m, -1)$, $B(1, 2, m)$, плоскость α : $2x - 3y + z - 1 = 0$.

Найти: m такое, что $\alpha \parallel AB$.

Решение:

$$\vec{AB}(-1, 2 - m, m + 1), \vec{n}(2, -3, -1) \perp \alpha \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{AB}, \text{ т.е.}$$

$$(\vec{n} \cdot \vec{AB}) = -2 - 6 + 3m + m + 1 = 0; 4m = 7, m = \frac{7}{4}.$$

Ответ: при $m = \frac{7}{4}$.

2. Дано: плоскость β : $2x - 2y + z - 3 = 0$; $A(-1, 2, 1)$, $B(2, -1, -2)$.

Найти: угол α между AB и β .

Решение:

Искомый угол α равен $\frac{\pi}{2} - \gamma$, где γ — угол между AB и $\vec{n} (2, -2, 1) \perp \beta$.

$$\overrightarrow{AB} (3, -3, -3); |\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{3}; |\vec{n}| = 3;$$

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}) = 6 + 6 - 3 = 9 = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \gamma$$

$$\Rightarrow \cos \gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}, \gamma = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Вариант 3

С—1

1. Дано: тетраэдр $DABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $AB = 10$, $DB \perp ABC$, $\angle ADC = 60^\circ$.

1) Найти: вершины — ?

Решение:

$$C = (0, 0, 0).$$

$$BC = AB \cdot \sin \angle BAC = 5 \Rightarrow B = (-5, 0, 0).$$

$$AC = AB \cdot \cos \angle BAC = 5\sqrt{3} \Rightarrow A = (0, -5\sqrt{3}, 0).$$

$\angle DCB = 60^\circ$ (по теореме о трех перпендикулярах)

$$\Rightarrow DB = CB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 5\sqrt{3} \Rightarrow D = (-5, 0, 5\sqrt{3}).$$

2) Найти: CM — ? (M — точка пересечения медиан $\triangle ADB$)

Решение:

Найдем середину стороны AB (т. M_1).

$$M_1 = \left(-\frac{5}{2}; -\frac{5\sqrt{3}}{2}; 0 \right) \Rightarrow \overrightarrow{DM_1} = \left(\frac{5}{2}; -\frac{5\sqrt{3}}{2}; -5\sqrt{3} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \overrightarrow{DM_1} = \left(\frac{5}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3}; -\frac{10\sqrt{3}}{3} \right) \Rightarrow M = \left(-\frac{10}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CM} = \left(-\frac{10}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3}; \frac{5\sqrt{3}}{3} \right) = -\frac{10}{3} \vec{i} - \frac{5\sqrt{3}}{3} \vec{j} + \frac{5\sqrt{3}}{3} \vec{k}.$$

2. Дано: $\overrightarrow{OA} = (1; -1; 2)$, $\overrightarrow{OB} = (3; -2; 4)$, $\overrightarrow{OC} = (5; -3; 6)$.

Найти: лежат ли точки A, B, C на одной прямой.

Решение:

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (-2; 1; -2) = \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = (-2; 1; -2) = \overrightarrow{CB}$$

\overrightarrow{BA} коллинеарен $\overrightarrow{CB} \Rightarrow B, A$ и C лежат на одной прямой.

С—2

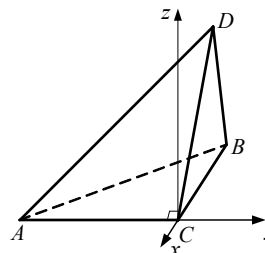
1. Дано: $\triangle ABC$ — равнобедренный ($AC = CB$), $A = (1, -2, 1)$, $B = (3, 2, -3)$, $C \in$ оси ординат.

Найти: $S_{\triangle ABC}$.

Решение:

$$\text{Т к } C \in Oy \Rightarrow C = (0, y, 0) \Rightarrow \sqrt{1 + (y + 2)^2 + 4} = \sqrt{9 + (y - 2)^2 + 9}, y = 2.$$

$$C = (0, 2, 0).$$



$H \in AB, CH \perp AB \Rightarrow CH = \sqrt{4+4+1} = 3$ (H совпадает с серединой AB , т.к. $\triangle ABC$ — равнобедренный).

$$AB = \sqrt{4+16+16} = 6 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot CH}{2} = 9.$$

Ответ: 9.

2. Дано: \vec{a} сонаправлен $\vec{b} = (-2, 2, 1)$.

Найти: \vec{a} , если $|\vec{a}| = 12$.

Решение:

$\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, где k — действительное число, $\in R$.

$|k| \sqrt{4+4+1} = 12 \Rightarrow |k| = 4, k = \pm 4$, но т.к. \vec{a} сонаправлен \vec{b} , то $k = 4 \Rightarrow \vec{a} = (-8, 8, 4)$.

Ответ: $\vec{a} = (-8, 8, 4)$.

С—3

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямой параллелепипед, все ребра равны a , $\angle BAD = 60^\circ$.

Найти:

1) $\overrightarrow{C_1 D} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Решение:

$$\overrightarrow{C_1 D} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; a; \frac{a}{2} \right); \overrightarrow{AC} = (a\sqrt{3}; 0; 0).$$

$$\overrightarrow{C_1 D} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2} a^2.$$

2) $\overrightarrow{B_1 D} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Решение:

$$\overrightarrow{B_1 D} = (0, a, a); \overrightarrow{AC} = (a\sqrt{3}; 0; 0). \overrightarrow{B_1 D} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

2. Дано: $A(1, 1, 5), B(4, 7, 5), C(8, 5, 5), D(5, -1, 5)$ — вершины прямоугольника.

Найти: больший угол между диагоналями.

Решение:

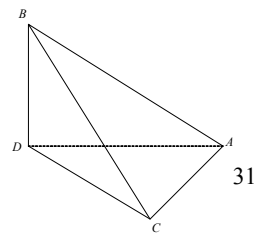
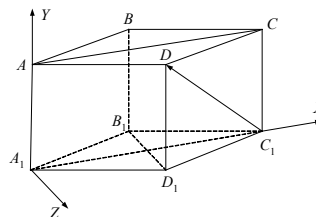
$$\overrightarrow{AC} = (7, 4, 0); \overrightarrow{BD} = (1, -8, 0).$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -25 = |\sqrt{65}| \cdot |\sqrt{65}| \cdot \cos \alpha = 65 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{5}{13}.$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{5}{13}\right) = 180^\circ - \arccos\left(\frac{5}{13}\right).$$

С—4

1. Дано: $BACD$ — тетраэдр, $\angle BDC = \angle BDA = \angle DCA = 90^\circ, BC = 3, AC = 4$.



Найти: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ — ?

Решение:

$\angle BCA = 90^\circ$, т.к. имеет место теорема о трех перпендикулярах ($DC \perp AC, BD \perp$ плоскости DCA) $\Rightarrow BA = 5$. Тогда

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \\ &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = AB^2 + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 25 + 0 = 25 \text{ (т.к. } CA \perp CB\text{)}.\end{aligned}$$

Ответ: 25.

2. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, $\triangle ABC$ — равнобедренный, $AC = CB = a$, $\angle ACB = 120^\circ$, $AA_1 = a$, E — середина CA , F — середина BB_1 .

Найти: 1) EF ; 2) угол между EF и AA_1 .

Решение:

1) Введем систему координат: A — начало координат, AB — первый базисный вектор, AA_1 — второй, третий перпендикулярен AA_1B .

$$\text{Тогда } E = \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}; 0; \frac{a}{4} \right), \quad F = \left(a\sqrt{3}; \frac{a}{2}; 0 \right)$$

$$(AB = 2AC \cdot \cos \angle CAB = a\sqrt{3}).$$

$$\text{Тогда } EF = \sqrt{\left(a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{4} \right)^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(-\frac{a}{4} \right)^2} = a\sqrt{2}.$$

$$2) \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AA_1} = |\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{AA_1}| \cdot \cos \alpha, \text{ где } \alpha \text{ — искомый угол} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AA_1}}{|\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{AA_1}|}.$$

$$\overrightarrow{EF} = \left(\frac{3\sqrt{3}a}{4}; \frac{a}{2}; -\frac{a}{4} \right); \quad \overrightarrow{AA_1} = (0, a, 0).$$

$$\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{EF} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AA_1}}{|\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{EF}|} = \frac{\frac{a^2}{2}}{a \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \cos \alpha \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

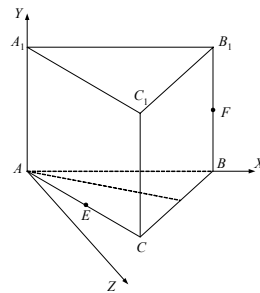
$$\text{Ответ: 1) } a\sqrt{2}; \text{ 2) } \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

С—5

а) Доказать, что $A(1, 2, 3)$ и $B(-1, -2, -3)$ симметричны относительно $O(0, 0, 0)$.

б) Доказать, что $B(3, -4, 5)$ и $C(3, 4, 5)$ симметричны относительно Oxz .

Доказательство:



а) середина отрезка $AB = (0, 0, 0) = \text{т. } O \Rightarrow A$ симметрична B относительно т. $O(0, 0, 0)$.

б) середина отрезка $BC = (3, 0, 5) = A \in Oxz$.

Докажем, что $BC \perp Oxz$.

$\overrightarrow{BC} = (0, 8, 0)$, в то же время любой вектор, принадлежащий Oxz , имеет координаты $(x, 0, z) = l$, где $x, z \in R \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \vec{l} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{BC} \perp \vec{l}$, где l — любой вектор, принадлежащий $Oxz \Rightarrow \overrightarrow{BC} \perp Oxz \Rightarrow B$ симметрична C относительно Oxz .

2. Доказать, что при движении двугранный угол отображается на равный ему двугранный угол.

Доказательство:

Рассмотрим двугранный угол, образованный полуплоскостями α и β с границей a и линейным углом lk , где l и k — лучи, принадлежащие α и β соответственно и перпендикулярные a .

Пусть при движении $a \rightarrow a_1, \alpha \rightarrow \alpha_1, \beta \rightarrow \beta_1, k \rightarrow k_1, l \rightarrow l_1$. Очевидно, что a_1 — граница полуплоскостей α_1 и β_1 , в которых лежат лучи l_1 и k_1 соответственно. А т.к. при движении углы сохраняются, то $l_1 \perp a_1$ и $k_1 \perp a_1$, и $\angle lk = \angle l_1 k_1 \Rightarrow$ двугранный угол при движении отображается на равный ему. Ч.т.д.

С—6

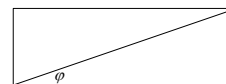
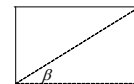
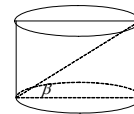
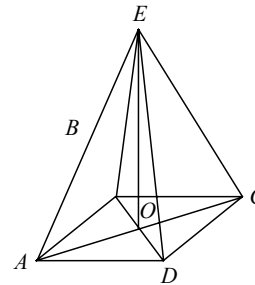
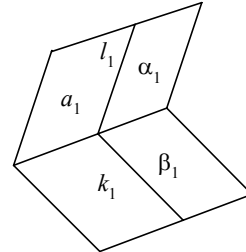
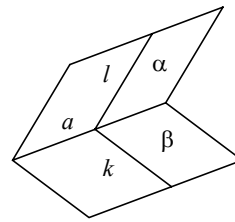
1. Пусть дана правильная четырехугольная пирамида $EABCD$ с высотой EO . При симметрии относительно EO $E \rightarrow E, A \rightarrow C, C \rightarrow A, B \rightarrow D, D \rightarrow B \Rightarrow ABCD \rightarrow ABCD \Rightarrow EO$ — ось симметрии пирамиды.

2. Пусть H — произвольная точка пирамиды. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью EOH . Очевидно, оно треугольное. По доказанному в п. 1) $H \rightarrow H_1 \in$ пирамиде. Но очевидно, что треугольник, полученный в сечении, отображается на себя при симметрии относительно EO , проходящей через одну из его вершин \Rightarrow треугольник — равнобедренный. Ч.т.д.

С—7

1. Дано: цилиндр, γ — угол между диагональю и образующей развертки, β — угол между диагональю осевого сечения и плоскостью основания

Найти: $\beta = ?$



Решение:

R — радиус основания, тогда рассмотрим сечение и развертку: высота одинакова и равна h , основание развертки равно $2\pi R$, а основание сечения равно $2R$. Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{2\pi R}; \operatorname{tg} \beta = \frac{h}{2R} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \pi \operatorname{tg} \varphi. \beta = \operatorname{arctg}(\pi \operatorname{tg} \varphi).$$

Ответ: $\operatorname{arctg}(\pi \operatorname{tg} \varphi)$.

2. Дано: $EABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $AB = 10$, боковые грани наклонены к основанию под углом $\alpha = 60^\circ$, $r = 2$. В $EABCD$ вписан цилиндр.

Найти: $S_{\text{бок}}$.

Решение:

Рассмотрим сечение, проходящее через высоту EO и перпендикулярное AB .

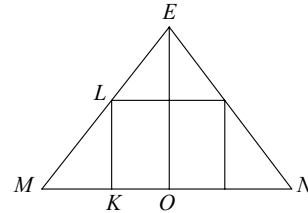
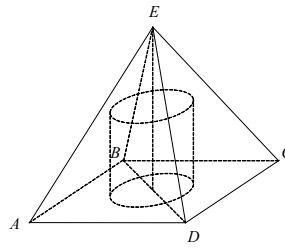
$\triangle EMN$ — равнобедренный, $\angle EMN = \alpha$.

Найдем высоту цилиндра.

$$KL = MK \cdot \operatorname{tg} \alpha; MK = \frac{MN}{2} - r = 3 \Rightarrow KL = 3\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\text{бок}} = 2\pi r \cdot KL = 12\sqrt{3}\pi.$$

Ответ: $12\sqrt{3}\pi$.



C—8

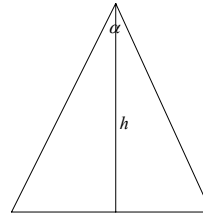
1. Дано: конус $S_{\text{бок}} = 12\pi$, $\alpha = 120^\circ$ — центральный угол в развертке.

Найти: $S_{\text{сеч}}$.

Решение:

Площадь боковой поверхности конуса $S = \pi r L = 12\pi$. Площадь развертки

$$S = \frac{\alpha}{2} \cdot L^2 = \pi r L = 12\pi(1) \Rightarrow \frac{2\pi}{3 \cdot 2} L^2 = 12\pi \Rightarrow L^2 = 36$$

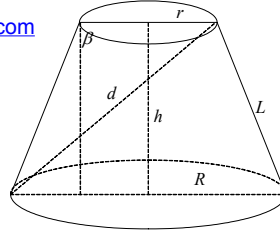


Площадь осевого сечения $S = L^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi$. φ — угол при вершине в осевом сечении.

$$\text{Из (1)} \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{r}{L} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{4\sqrt{2}}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{4\sqrt{2}}{9} \Rightarrow S_{\text{ос.с.}} = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} = 8\sqrt{2}.$$

Ответ: $8\sqrt{2}$.



2. Дано: L — образующая, β — плоскость осевого сечения, α — угол, который составляет L и плоскость основания, d — диагональ осевого сечения, $d \perp L$.

Найти: $S_{\text{бок}}$.

Решение:

$d = L \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Рассмотрим осевое сечение β . Обозначим длину оси как h .

$$S_{\text{бок}} = S_{\text{пов. вр.}}$$

Площадь боковой поверхности конуса есть площадь боковой поверхности фигуры, образованной вращением сечения β относительно h .

$$S_{\text{бок}} = \pi L(R + r).$$

$$R = \frac{L}{2 \cos \alpha}; r = R - h \cdot \operatorname{ctg} \alpha = L \cdot \cos \alpha.$$

$$S_{\text{бок}} = \pi L \left(\frac{L}{\cos \alpha} - L \cdot \cos \alpha \right) = \pi L^2 \cos \alpha \left(-1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) = \pi L^2 \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = \\ = \pi L^2 \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Ответ: $\pi L^2 \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$.

С—9

1. Дано: $ABCD$ — прямоугольная трапеция, $\angle BAD = 90^\circ$, $BC = AB = a$, $AD = 2a$.

Найти: $S_{\text{пов.}}$.

Решение:

$$S_{\text{пов.}} = S_1 + S_2.$$

S_1 — от вращения $ABCM$.

S_2 — от вращения CMD .

$$S_1 = 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3 \cdot \pi a^2; S_2 = \pi a \cdot CD; CD = a\sqrt{2} \Rightarrow S_2 = \pi a^2 \sqrt{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{\text{бок}} = 3\pi a^2 + \pi a^2 \sqrt{2} = \pi a^2(3 + \sqrt{2}).$$

Ответ: $\pi a^2(3 + \sqrt{2})$.

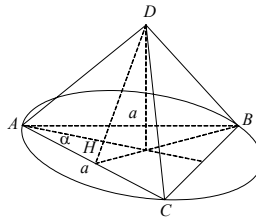
2. Дано: $DABC$ — пирамида, ABC — равнобедренный треугольник, $AC = AB = a$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle DAC = \beta$.

Найти: $S_{\text{конуса}}$.

Решение:

Найдем радиус r основания. Основание описано вокруг $\triangle ABC$.

$$\angle ABC = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}; \frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2r \Rightarrow r = \\ = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$



Теперь будем искать образующую конуса. Т.к. вершина конуса совпадает с вершиной пирамиды, ребра DA , DB и DC будут образующими, а зна-

чит, будут равны, т.е. $DA = DB = DC \Rightarrow$ боковые грани есть равнобедренные треугольники $\Rightarrow \angle DCA = \beta$. Опустим высоту DH на сторону AC . Она также и медиана, и биссектриса (т.к. $\triangle ADC$ — равнобедренный) $\Rightarrow DA = \frac{a}{2\cos\beta}$, а

$$\begin{aligned} \text{т.к. } S_{\text{конуса}} &= \pi r \cdot DA \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{\text{конуса}} &= \frac{\pi a^2}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi a^2}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta}.$$

С—10

1. Дано: $r = 2$, $O_1 \in Oxz$ (O_1 — центр сферы), $O \in$ сфере, $A(1, 1, 0) \in$ сфере.

Составить уравнение сферы.

Решение:

Уравнение сферы имеет вид: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$, где (a, b, c) — координаты центра, r — радиус. Но т.к. $O_1 \in Oxz$, то $b = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x - a)^2 + y^2 + (z - c)^2 = 4$.

Т.к. $O(0, 0, 0)$ и $A(1, 1, 0) \in$ сфере, имеем:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 4 \\ (a - 1)^2 + 1 + c^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 4 \\ (a - 1)^2 + c^2 = 3 \end{cases}$$

$4 - a^2 = 3 - a^2 - 1 - 2a$; $2a = -2$, $a = -1 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3} \Rightarrow$ имеем 2 варианта уравнения сферы:

$$(x - 1)^2 + y^2 + (z - \sqrt{3})^2 = 4,$$

$$(x - 1)^2 + y^2 + (z + \sqrt{3})^2 = 4.$$

Ответ: $(x - 1)^2 + y^2 + (z - \sqrt{3})^2 = 4$ или $(x - 1)^2 + y^2 + (z + \sqrt{3})^2 = 4$.

2. Дано: сторона ромба равна a , острый угол равен α . Все стороны касаются шара.

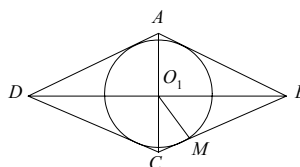
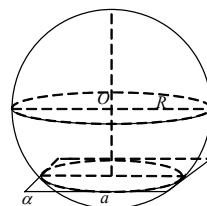
Площадь большого круга равна $\frac{\pi a^2}{8}$.

Найти: расстояние от центра шара до плоскости ромба.

Решение:

$$S = \frac{\pi a^2}{8} = \pi R^2; h = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Рассмотрим сечение по плоскости ромба.



Обозначим ромб $ABCD$. Центр вписанной окружности — как O_1 . Найдём радиус r .

$$O_1C = a \cdot \sin \frac{\alpha}{2}; O_1B = a \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

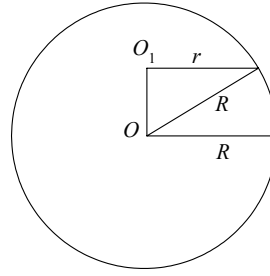
$$O_1B \cdot O_1C = BC \cdot r.$$

$$a^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = a \cdot r; r = \frac{a}{2} \cdot \sin \alpha.$$

Рассмотрим сечение, перпендикулярное плоскости ромба, проходящее через OO_1 .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } OO_1 &= \sqrt{R^2 - r^2} = a \sqrt{\frac{2}{16} - \frac{\sin^2 \alpha}{4}} = a \sqrt{\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{8}} = a \sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{8}} = \\ &= \frac{a}{4} \sqrt{2 \cos 2\alpha} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{a}{4} \sqrt{2 \cos 2\alpha}.$$



С—11

1. Дано: $\alpha \parallel \beta$, $S_\alpha = 144\pi$, $S_\beta = 25\pi$, $p =$
17.

Найти: $S_{\text{шара}}$.

Решение:

$$S = 4\pi R^2. \text{ Найдём } R.$$

Рассмотрим сечение, перпендикулярное α . Найдём r_α и r_β . $S = \pi r^2$.

$$r_\alpha = \sqrt{\frac{S_\alpha}{\pi}} = 12; r_\beta = \sqrt{\frac{S_\beta}{\pi}} = 5.$$

$$\text{Пусть } O_\alpha O = x \Rightarrow O_\beta O = 17 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt{x^2 + r_\alpha^2} = \sqrt{x^2 + 144} \\ R = \sqrt{(17 - x)^2 + r_\beta^2} = \sqrt{x^2 + 289 + 25 - 34x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 144 = 314 - 34x; 34x = 170 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow R = \sqrt{25 + 144} = 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 4\pi \cdot 169 = 676\pi.$$

Ответ: 676π .

2. Дано: $C \in \alpha$, $C \in \beta$, $B \in \beta$, $B \in$
сфере O , $A \in \alpha$, $A \in$ сфере O , $S = 32\pi$, $\varphi = 60^\circ$.

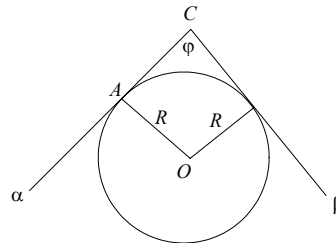
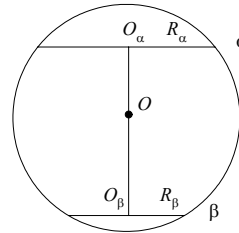
Найти: $p = OC$

Решение:

Построим сечение, проходящее через т. $O \perp \alpha \cap \beta$ (прямая l).

$$S = 32\pi = 4\pi R^2 \Rightarrow R = 2\sqrt{2}.$$

$$CO \text{ делит } \varphi \text{ пополам} \Rightarrow CO$$



$$= \frac{R}{\sin \frac{\varphi}{2}} = 4\sqrt{2}.$$

Ответ: $4\sqrt{2}$.

С—12

1. Дано: $ABCD$ — пирамида, $AB = 4$, $\triangle ABC$ — основание, $\angle ACB = 30^\circ$, $DA = DB = DC = 5$.

Найти: r .

Решение:

Рассмотрим сечение по плоскости основания.

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2r \Rightarrow r = 4.$$

Пусть OH — перпендикуляр из центра шара на плоскость основания. Заметим, что т. H совпадает с т. O_1 . DO_1 будет высотой пирамиды. $R_{\text{ш}} = \frac{L^2}{2H}$, где L — длина бокового ребра, а H — высота пирамиды. $H = \sqrt{L^2 - r^2} = 3$

$$\Rightarrow R_{\text{ш}} = \frac{25}{6}. \text{ Но } H = 3 \Rightarrow p = R_{\text{ш}} - H = \frac{7}{6}.$$

Ответ: $\frac{7}{6}$.

2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — ромб, $\angle DAB = \alpha$.

Найти: угол между большей диагональю параллелепипеда и плоскостью основания.

Решение:

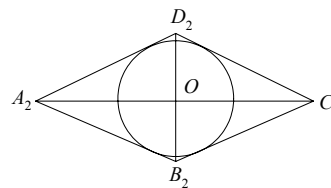
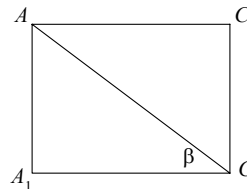
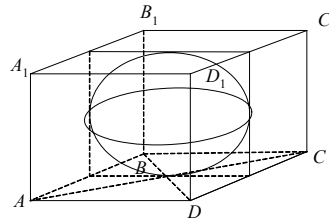
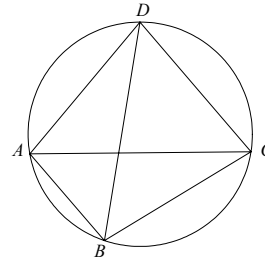
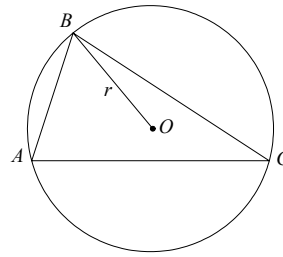
Пусть сторона ромба равна a , высота равна h , $AC = 2a \cos \frac{\alpha}{2}$, $BD = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$. Рассмотрим сечение, проходящее через AC перпендикулярно $ABCD$.

$A_1 C$ — большая диагональ. Тогда искомый угол — β .

$A_1 C$ — большая диагональ. Тогда искомый угол — β .

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{AA_1}{AC}, \quad A_1 A = 2r.$$

Найдем r . Возьмем сечение, параллельное $ABCD$ и проходящее через т. O (центр шара). В сечении получится ромб,



равный $ABCD$. Обозначим его как $A_2B_2C_2D_2$.

Рассмотрим $\triangle A_2OD_2$, $\angle A_2OD_2 = 90^\circ$.

$$S_{A_2OD_2} = \frac{1}{2} r \cdot A_2D_2 = \frac{1}{2} OA_2 \cdot D_2O.$$

$$\text{Тогда } r = \frac{OA_2 \cdot D_2O}{A_2D_2} = \frac{a^2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{a} = a \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Тогда } \operatorname{tg} \beta = \frac{AA_1}{AC} = \frac{2r}{AC} = \frac{2a \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2a \cos \frac{\alpha}{2}} = \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

С—13

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — квадрат, $A_1C = d$, $\angle A_1CB_1 = 30^\circ$.

Найти: V .

Решение:

$$\triangle A_1CB_1 \text{ — прямоугольный. Тогда } A_1B_1 = A_1C \cdot \sin 30^\circ = \frac{d}{2}.$$

$$CB_1 = A_1C \cdot \cos 30^\circ = \frac{d\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Но } CC_1 = \sqrt{CB_1^2 - B_1C_1^2} = \sqrt{\frac{3d^2}{4} - \frac{d^2}{4}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Но } V = A_1B_1^2 \cdot CC_1 = \frac{d^2}{4} \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} = d^3 \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

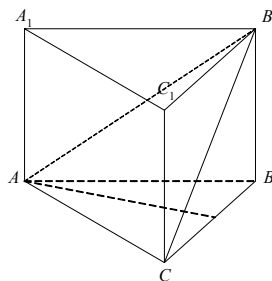
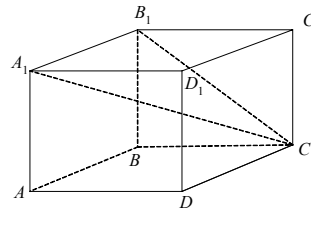
$$\text{Ответ: } d^3 \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

2. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $\triangle ABC$ — прямоугольный (основание), $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 2\sqrt{3}$, $\angle AB_1C = 30^\circ$.

Найти: V .

Решение:

$$B_1C \perp AC_1 \Rightarrow B_1C = AC \operatorname{ctg} 30^\circ = 4\sqrt{3} \Rightarrow B_1B = 6 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow V = \frac{1}{2} AC \cdot CB \cdot B_1B = 24\sqrt{3}.$$

Ответ: $24\sqrt{3}$.

С—14

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — ромб, $AC = 8$, $BD = 6$, $\angle \beta = 60^\circ = \angle C_1 HC$, $C_1 H$ и CH — высоты.

Найти: V .

Решение:

Т.к. $AC = 8$, $DB = 6 \Rightarrow AD = 5$. Найдем высоту CH .

$$S_{ABCD} = CH \cdot AB = \frac{1}{2} AC \cdot DB = 24 \Rightarrow CH = \frac{24}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CC_1 = CH \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{24\sqrt{3}}{5}.$$

$$V = CC_1 \cdot S_{ABCD} = \frac{576\sqrt{3}}{5}.$$

Ответ: $\frac{576\sqrt{3}}{5}$.

2. Дано: $R = 4$, $H = 10$, осевое сечение цилиндра — квадрат.

Найти: V .

Решение:

Рассмотрим осевое сечение. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{H} = \frac{2}{5}$.

Пусть r — радиус основания цилиндра. Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{H - 2r} = \frac{2}{5}.$$

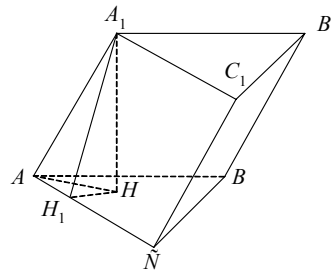
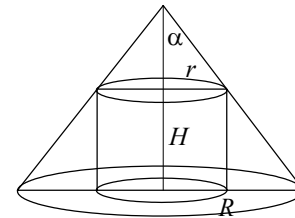
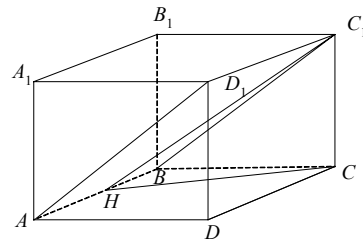
$$5r = 20 - 4r, 9r = 20 \Rightarrow r = \frac{20}{9}.$$

$$V = \pi r^2 \cdot 2r = \frac{400}{81} \cdot \frac{40}{9} \cdot \pi = \frac{16000\pi}{729}.$$

Ответ: $\frac{16000\pi}{729}$.

С—15

1. Дано: $ABCA_1 B_1 C_1$ — наклонная призма, основание ABC — правильный тре-



угольник, $\angle AA_1C = \angle A_1AB = 60^\circ$, $AB = a$, $AA_1 = b$.

Найти: V .

Решение:

$$S_{\text{осн}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ \right).$$

A_1H — высота призмы.

$$A_1H_1 = A_1A \cdot \sin 60^\circ = b \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$AH_1 = A_1A \cdot \cos 60^\circ = \frac{b}{2}.$$

$$H_1H = AH_1 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{b}{2\sqrt{3}} \quad (\text{т.к. } \triangle ABC \text{ — правильный}).$$

$$AH_1 = \sqrt{A_1H_1^2 - H_1H^2} = b \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot AH_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot b \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^2 b \sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{a^2 b \sqrt{2}}{4}$.

2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — наклонный параллелепипед, A_1H — высота, $\angle A_1AH = 60^\circ$, $A_1H = 5\sqrt{3}$, $E \in AA_1$, $F \in D_1D$, $K \in B_1B$, $EF \perp AA_1$, $KE \perp AA_1$, $\angle FEK = 45^\circ$, $S(AA_1 D_1 D) = 60$, $S(AA_1 B_1 B) = 40$.

Найти: $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$.

Решение:

$$S(AA_1 B_1 B) = AA_1 \cdot EK = 40 = 10 \cdot EK \\ \Rightarrow EK = 4.$$

$$(\text{Из } \triangle AHA_1 \quad AA_1 = \frac{A_1H}{\sin 60^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot 2 = 10)$$

$$\text{Аналогично } S(AA_1 D_1 D) = AA_1 \cdot EF = 10 \cdot EF = 60 \Rightarrow EF = 6.$$

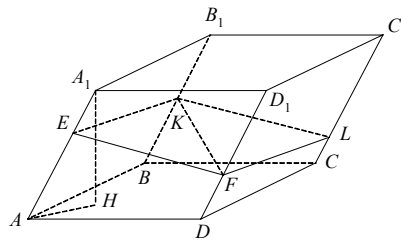
Достроим $\triangle EFK$ до перпендикулярного сечения $EFLK$.

$$S(EFLK) = EF \cdot EK \cdot \sin 45^\circ = 24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}.$$

$$V = AA_1 \cdot S(EFLK) = 10 \cdot 12\sqrt{2} = 120\sqrt{2}.$$

Ответ: $120\sqrt{2}$.

C—16



1. Дано: $ABCDE$ — правильная четырехугольная пирамида, EH — высота, равная h , $\angle BEC = \alpha$.

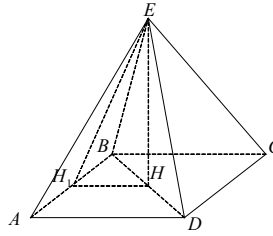
Найти: V .

Решение:

Пусть $AB = a$. $\triangle AEB$ — равнобедренный.
 $EH_1 \perp AB$.

$$EH_1 = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Найдем HH_1 . Т.к. $ABCD$ —



$$\text{квадрат, то } HH_1 = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{4} + h^2 = \frac{a^2}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha} \Rightarrow a^2 = 4h^2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} \Rightarrow V$$

$$= \frac{4}{3} h^3 \cdot \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{4}{3} h^3 \cdot \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

2. Дано: $DABC$ — пирамида, $AB = AC = \sqrt{5}$, $CB = 4$, DH — высота, $\angle DAH = \angle DBH = \angle DCH = 45^\circ$.

Найти: $V(DABC)$.

Решение:

$$P = AB + BC + AC = 2\sqrt{5} + 4; p = \frac{P}{2} = \sqrt{5} + 2.$$

$$S(ABC) = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{(\sqrt{5}+2) \cdot 4 \cdot (\sqrt{5}-2)} = \sqrt{(5-4) \cdot 4} = 2.$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AM \cdot CB \text{ (AM — высота)} \Rightarrow AM = \frac{2S}{CB} = 1.$$

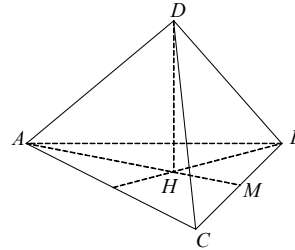
$\triangle AHD = \triangle CHD = \triangle BHD$ по катету и противоположному углу $\Rightarrow AH = HB = HC = R \Rightarrow H$ — центр описанной окружности.

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{5 \cdot 4}{4 \cdot 2} = \frac{5}{2} = AH.$$

$$\text{Из } \triangle AHD: AH = HD = \frac{5}{2}.$$

$$V(DABC) = \frac{1}{3} \cdot DH \cdot S(ABC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2 = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{5}{3}.$$



1. Дано: $\alpha = 120^\circ$, $S_{\text{бок}} = 3\pi$.

Найти: V .

Решение:

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}; S_{\text{бок}} = \frac{\alpha}{2} \cdot R^2; R^2 = 9, R = 3, \text{ где } R$$

— образующая конуса.

$$L = \alpha \cdot R, \text{ где } L \text{ — длина дуги. } L = 2\pi.$$

$$2\pi = 2\pi r, \text{ где } r \text{ — радиус основания конуса } \Rightarrow r = 1 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 h, \text{ где } h$$

— высота конуса.

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = 2\sqrt{2}.$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

2. Дано: $ABCD$ — правильная треугольная пирамида, $AB = 10\sqrt{3}$, $p = \frac{30}{13} =$

OM . В $DABC$ вписан конус.

DH — высота $DO = OH$.

Найти: $V_{\text{конуса}}$.

Решение:

Найдем r — радиус основания.

Рассмотрим плоскость ABC .

$$BH_2 = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot 3 = 15;$$

$$HH_2 = r = \frac{1}{3} BH_2 = 5.$$

Рассмотрим сечение, перпендикулярное ABC , проходящее через высоту $ABCD$ (DH) (заметим, что DH совпадает с осью симметрии конуса) и проходящее через DB (т. O — середина DH).

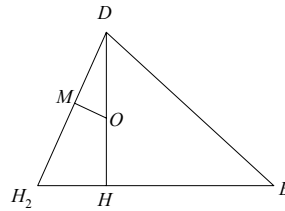
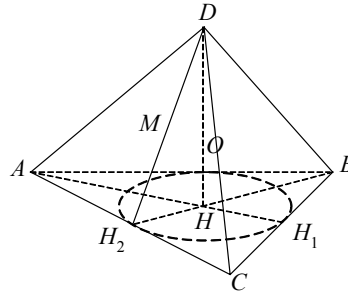
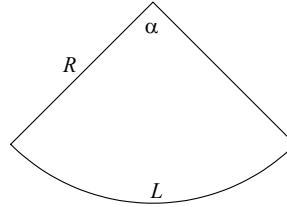
$$\text{Пусть } DO = x, \frac{x}{p} = \frac{DH_2}{H_2H} \text{ (т.к. } \triangle DOM \sim$$

$\triangle DHH_2$, т.к. $\angle HDH_2$ — общий, $\angle DMO = \angle DHH_2 = 90^\circ$).

$$5x = p \cdot DH_2, \text{ но } DH_2 = \sqrt{25 + 4x^2}.$$

$$25x^2 = p^2 \cdot (25 + 4x^2);$$

$$x^2(25 - 4p^2) = 25p^2;$$



$$x^2 \left(25 - 4 \cdot \frac{900}{169} \right) = 25 \cdot \frac{900}{169};$$

$$\frac{x^2 \cdot 25}{169} = \frac{5^2 \cdot 30^2}{13^2};$$

$$x = \frac{5 \cdot 30}{25 \cdot 13} = 6.$$

$$V = V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot DH = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 25 \cdot 6 = 100\pi.$$

Ответ: 100π .

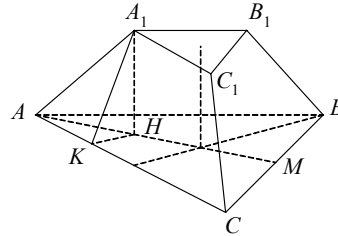
С—18

1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная усеченная пирамида, $AC = a$, $A_1C_1 = b$, $AA_1 = a - b$ ($a > b$).

Найти: $V(ABCA_1B_1C_1)$.

Решение:

Опустим высоту A_1H . Проведем $HK \perp AC$.



$$AK = \frac{AC - A_1C_1}{2} = \frac{a - b}{2}.$$

$\triangle AKH \sim \triangle AMC$ (M — середина CB) (по двум углам).

$$CM = \frac{a}{2}; AC = a; AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{AK}{AH} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AH = \frac{AK \cdot AC}{AM} = \frac{(a - b) \cdot a \cdot 2}{2 \cdot a\sqrt{3}} = \frac{(a - b)\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Из } \triangle AHA_1: A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = \sqrt{(a - b)^2 - \frac{(a - b)^2}{3}} = (a - b)\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$S(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; S(A_1B_1C_1) = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

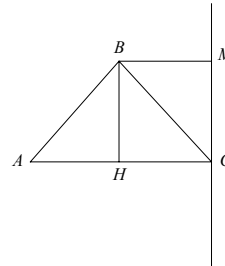
$$\Rightarrow V_{\text{пирамиды}} = \frac{A_1H}{3} (S(ABC) + S(A_1B_1C_1) + \sqrt{S(ABC) \cdot S(A_1B_1C_1)}) =$$

$$= \frac{(a - b)\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{ab\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{(a - b)\sqrt{2}}{3 \cdot 4} (a^2 + b^2 + ab) =$$

$$= (a^2 + b^2 + ab) \frac{(a - b)\sqrt{2}}{12} = \frac{(a^3 - b^3)\sqrt{2}}{12}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{(a^3 - b^3)\sqrt{2}}{12}.$$

2. Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC = 10$, $AC = 12$, $CM \perp AC$, CM — ось вращения.



Найти: $V_{\text{т. вр.}}$.

Решение:

Опустим высоту BH . $AH = HC = 6$. Если $BM \perp MC$, то $BM = AH = 6$.

Из $\triangle ABH$: $BH = MC = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 8$

$$\Rightarrow V_{\text{т. вр.}} = \frac{\pi}{3} \cdot BH(AC^2 + BM \cdot AC) = \frac{\pi}{3} \cdot 8 \cdot (144 + 6 \cdot 12) =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot 8 \cdot (144 + 72) = \frac{8 \cdot 216 \cdot \pi}{3} = 8 \cdot 72\pi = 576\pi.$$

Ответ: 576π .

С—19

1. Дано: шар (O, R) , $R = 5$, плоскость α касается шара в точке H , $H \in$ плоскости β , угол между α и β равен $\arccos \frac{3}{5}$, $\beta \cap$ шар.

Найти: $V_{\text{меньшего сегмента}}$.

Решение:

Рассмотрим сечение фигуры плоскостью, проходящей через т. H , перпендикулярной α и β .

В равнобедренном $\triangle OHM$ $\angle OHM = \angle OMH$
 $= \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{3}{5}$.

Опустим перпендикуляр HK в $\triangle OHM$.

$$OK = OH \cdot \sin \angle OHM = 5 \cos \left(\arccos \frac{3}{5} \right) = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3 \Rightarrow \text{высота сегмента } H =$$

$$R - OK = 2.$$

$$\text{Значит, } V_{\text{сегмента}} = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right) = \pi \cdot 4 \left(5 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4\pi \cdot 13}{3} = \frac{52\pi}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{52\pi}{3}.$$

2. Дано: конус, L — образующая, $L = 10$, $S_{\text{бок}} = 60\pi$. В конус вписан шар.

Найти: $V_{\text{шара}}$.

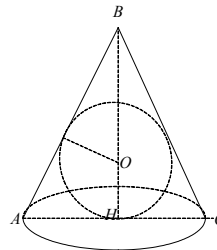
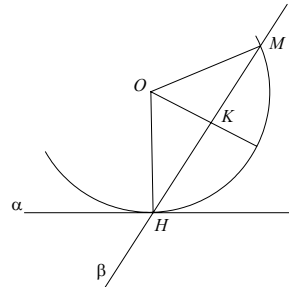
Решение:

Рассмотрим $\triangle ABC$ — осевое сечение конуса $AB = L$, $AH = R$.

$$S_{\text{бок}} = \pi RL = 10R = 60 \Rightarrow R = 6.$$

В $\triangle ABC$ вписан большой круг шара. В $\triangle ABC$ $BH = 8$.

$$S(ABC) = AC \cdot BH \cdot \frac{1}{2} = 48 = \frac{1}{2} P \cdot r.$$



$$P = AB + BC + AC = 20 + 12 = 32 \Rightarrow r = \frac{2S}{P} = \frac{48 \cdot 2}{32} = \frac{12}{4} = 3.$$

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 27 = 36\pi.$$

Ответ: 36π .

ДС

1. Дано: шар: $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 1$, плоскость α : $2x - y + 2z - 1 = 0$.

Пересекает ли α шар; найти площадь сечения.

Решение:

Центр шара $O(-1, 3, 2)$, $\vec{n}(2, -1, 2)$. Опустим OH — перпендикуляр на

α . $\vec{OH} = k\vec{n} = (2k, -k, 2k)$.

Пусть $H(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow \vec{OH}(x_0 + 1, y_0 - 3, z_0 - 2) = k\vec{n}$.

$$\begin{cases} x_0 + 1 = 2k \\ y_0 - 3 = -k \\ z_0 - 2 = 2k \end{cases}; \begin{cases} x_0 = 2k - 1 \\ y_0 = 3 - k \\ z_0 = 2k + 2 \end{cases}.$$

$$H \in \alpha \Rightarrow 2(2k - 1) - 1 \cdot (3 - k) + 2(2k + 2) - 1 = 0; 8k + k - 2 = 0; k = \frac{2}{9}.$$

$$\vec{OH}\left(\frac{4}{9}; -\frac{2}{9}; \frac{4}{9}\right); |\vec{OH}| = \sqrt{\frac{16+4+16}{81}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

$OH < R \Rightarrow$ плоскость α пересекает сферу.

$$\text{Радиус сечения } r = \sqrt{R^2 - OH^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$S_{\text{сечения}} = \pi r^2 = \frac{5\pi}{9}.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{9}$.

2. Дано: $A(1, 0, -2)$, $B(0, 3, 1)$, $A, B \in \alpha$, $\alpha \parallel Oz$.

Найти: уравнение α .

Решение:

Выберем точку C так, что $\vec{AC} = \vec{k}(0, 0, 1) \Rightarrow C(1, 0, -1)$.

Уравнение α : $Px + Qy + Rz + S = 0$; $A \in \alpha$, $B \in \alpha$.

$$\begin{cases} P - 2R + S = 0 \\ 3Q + R + S = 0 \\ P - R + S = 0 \end{cases}; \begin{cases} R = 0 \\ Q = -\frac{S}{3} \\ P = -S \end{cases}.$$

$$\text{Уравнение } \alpha: x + \frac{y}{3} - 1 = 0 \text{ или } 3x + y - 3 = 0.$$

Ответ: $3x + y - 3 = 0$.

Вариант 4

С—1

1. Дано: $DABC$ — тетраэдр, $\angle ACD = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle DCB = 60^\circ$, $AB = 8$, $DB \perp ABC$.

1) Найти координаты вершин.

Решение:

$$A(0, 0, 0), C(0, 4, 0), \text{ т.к. } AC = \frac{1}{2} AB$$

(AC лежит против угла $= 30^\circ$);

$$CB = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ из } \triangle ABC \Rightarrow B(-4\sqrt{3},$$

4, 0).

$$\text{Из } \triangle DBC: DB = CB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12 \Rightarrow D(-4\sqrt{3}, 4, 12).$$

2) Найти \overrightarrow{AK} , K — точка пересечения медиан $\triangle DBC$.

Решение:

Возьмем медиану CE : $E(-4\sqrt{3}, 4, 6)$; $\overrightarrow{CE}(-4\sqrt{3}, 0, 6)$

$$\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CE} = \left(-\frac{8\sqrt{3}}{3}, 0, 4\right) \Rightarrow K\left(-\frac{8\sqrt{3}}{3}, 4, 4\right) \Rightarrow \overrightarrow{AK}\left(-\frac{8\sqrt{3}}{3}, 4, 4\right)$$

$$\overrightarrow{AK} = -\frac{8\sqrt{3}}{3} \vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}.$$

2. Дано: A, B, C , $\overrightarrow{AB}(2, 3, -1)$, $\overrightarrow{AC}(-4, m, n)$.

Найти, при каких m, n A, B, C лежат на одной прямой.

Решение:

Если $A, B, C \in a$, то $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$

$$\begin{cases} 2 = -k \cdot 4 \\ 3 = km \\ -1 = kn \end{cases}; \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ m = -6 \\ n = 2 \end{cases}.$$

Ответ: при $m = -6, n = 2$.

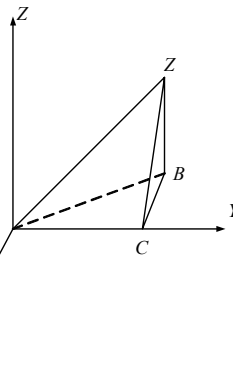
С—2

1. Дано: $\triangle ABC$, $BC = AC\sqrt{3}$, $A(1, -1, 1)$, $B(-1, -1, 3)$, $C(0, 0, -z_0) \in Oz$, $z_0 > 0$.

Найти CM (CM — медиана).

Решение:

$$\overrightarrow{BC}(1, 1, -z_0 - 3), \overrightarrow{AC}(-1, 1, -z_0 - 1)$$



$$\overrightarrow{BC} = \sqrt{1+1+(z_0-3)^2}; \overrightarrow{AC} = \sqrt{1+1+(z_0-1)^2}$$

$$\Rightarrow 2+(z_0-3)^2 = 3(2+(z_0-1)^2)$$

$$2+z_0^2-6z_0+9 = 6+3z_0^2-6z_0+3$$

$$z_0^2 = 1; z_0 = 1, \text{ т.к. } z_0 > 0$$

$$M(0, -1, 2); C(0, 0, -1); \overrightarrow{CM} (0, -1, 3)$$

$$|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

Ответ: $\sqrt{10}$.

$$2. \text{ Дано: } \vec{p}(-1, 2, 1), m \uparrow \downarrow \vec{p}, |\vec{m}| = 3\sqrt{6}.$$

Найти координаты \vec{m} .

Решение:

$$\vec{m} = k \vec{p}; |\vec{p}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \Rightarrow k = -3; \vec{m}(3, -6, -3).$$

Ответ: $(3, -6, -3)$.

С—3

1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, $AB = AA_1$, $P \in A_1B_1$, $A_1P = PB_1$.

1) Найти: $\overrightarrow{C_1P} \cdot \overrightarrow{B_1C}$.

Решение:

Поместим призму в полярную систему координат $Hxyz$. В ней

$$C_1\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{3}, a\right), P\left(0, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, a\right),$$

$$B_1\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, a\right), C\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{3}, 0\right)$$

$$\overrightarrow{C_1P}\left(0, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right), \overrightarrow{B_1C}\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, -a\right)$$

$$(\overrightarrow{C_1P} \cdot \overrightarrow{B_1C}) = \frac{-3a^2}{4}.$$

2) Найти $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PC_1}$.

Решение:

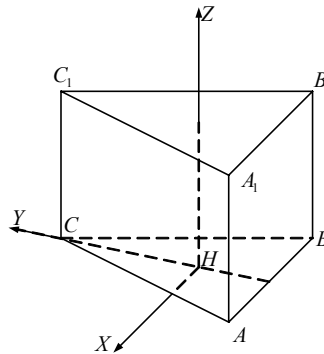
$$\overrightarrow{AP}\left(\frac{a}{2}, 0, a\right), \overrightarrow{PC_1}\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right); (\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PC_1}) = 0.$$

2. Дано: $A(14, -8, -1)$, $B(7, 3, -1)$, $C(-6, 4, -1)$, $D(1, -7, -1)$, $ABCD$ — ромб.

Найти острый угол ромба.

Решение:

$$\overrightarrow{AB}(-7, 11, 0), \overrightarrow{AD}(-13, 1, 0)$$



$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{49 + 121} = \sqrt{170} = |\overrightarrow{AD}|$$

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) = 91 + 11 = 102 = 170 \cos \angle BAD$$

$$\cos \angle BAD = \frac{102}{170} = \frac{51}{85} = \frac{3}{5}, \angle BAD = \arccos \frac{3}{5}.$$

Ответ: $\arccos \frac{3}{5}$.

С—4

1. Дано: $PMHK$ — пирамида, $\angle PKN = 90^\circ$, $PM \perp MHK$, $MK = 6$, $KH = 8$.

Найти: $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KH}$.

Решение:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KH} = \\ & \overrightarrow{MH}(\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{HK}) + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KH} = \\ & = (\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MH}) + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KH} = \\ & |\overrightarrow{MH}|^2 + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KH} \end{aligned}$$

$\triangle MKH$ — прямоугольный по теореме о трех перпендикулярах \Rightarrow

$$MH = \sqrt{MK^2 + HK^2} = 10 \Rightarrow KM \perp KH, (\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KH}) = 0$$

\Rightarrow искомое выражение равно $|\overrightarrow{MH}|^2 = 100$.

Ответ: 100.

2. Дано: $MACB$ — пирамида, $MC \perp ACB$, $\angle ACB = 135^\circ$, $AC = a\sqrt{2}$, $BC = MC = a$, $E \in CA$, $CE = EA$, $F \in BM$, $BF = FM$.

1) Найти EF .

Решение:

Поместим пирамиду в полярную систему координат $Cxyz$.

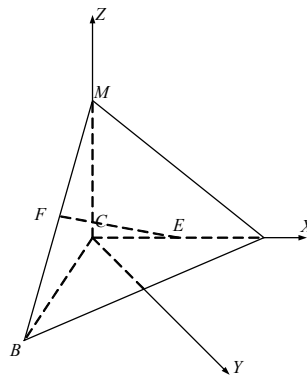
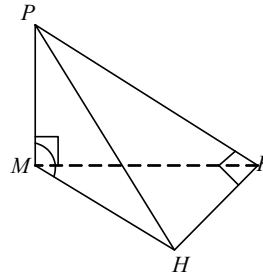
$$\begin{aligned} & \text{В } \triangle ABC: AB^2 = a^2 + 2a^2 \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; AB \\ & = a\sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A(a\sqrt{2}, 0, 0), B\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right), C(0, 0, 0), M(0, 0, a), \\ & E\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), F\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4}, \frac{a\sqrt{2}}{4}, \frac{a}{2}\right); \overrightarrow{EF}\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}a, \frac{a\sqrt{2}}{4}, \frac{a}{2}\right); \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{EF}| = a\sqrt{\frac{9}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

2) Найти угол α между EF и CM .

Решение:



$$\overrightarrow{CM} (0, 0, a), |\overrightarrow{CM}| = a; |\overrightarrow{EF}| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$(\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{CM}) = \frac{a^2}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2} \cos\alpha; \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

С—5

1. Дано: \vec{p} , $A(1, 2, 3)$, $B(4, 5, 6)$, $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$.

1) Найти \vec{p} .

Решение:

$$\vec{p} (3, 3, 3).$$

2) Доказать: $A(5, 6, 7)$ и $B(-5, -6, -7)$ симметричны относительно Oy .

Доказательство:

$O_1(0, 6, 0)$ — середина AB , лежит на Oy и $\overrightarrow{AB} (-10, 0, -14) \perp Oy \Rightarrow A$ и B симметричны относительно Oy .

2. Доказать, что при движении прямая и плоскость, составляющие угол φ , отобразятся на прямую и плоскость, составляющие угол φ .

Доказательство:

Опустим из точки прямой перпендикуляр на плоскость. При движении перпендикуляр, наклонная и ее проекция сохраняют свои длины, а следовательно, сохранится и угол φ в этом прямоугольном треугольнике.

С—6

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AD_1 \cap A_1 D = O_1$, $B_1 C \cap B C_1 = O_2$.

Доказать: $O_1 O_2$ — ось симметрии.

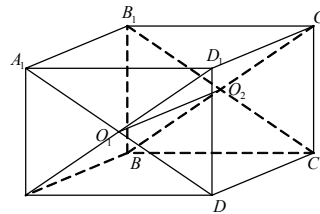
Доказательство:

При отображении относительно $O_1 O_2$ вершины переходят в вершины, ребра в ребра, грани в грани $\Rightarrow O_1 O_2$ — ось симметрии.

2. Доказать, что любая плоскость α ($O_1 O_2 \in \alpha$) является прямоугольником.

Доказательство:

Сечениями линий в гранях $AA_1 B_1 B$, $A_1 B_1 C_1 D_1$, $DD_1 C_1 C$, $ABCD$ параллельны $O_1 O_2$, а следовательно, перпендикулярны любым прямым в плоскостях $AA_1 D_1 D$ и $B_1 B C C_1 \Rightarrow$ любое сечение плоскостью α — прямоугольник.



С—7

1. Дано: цилиндр, O_1O_2 — ось, $ABCD$ — осевое сечение, $\angle ACD = \alpha$.

Найти угол φ между диагональю и основанием развертки боковой поверхности.

Решение:

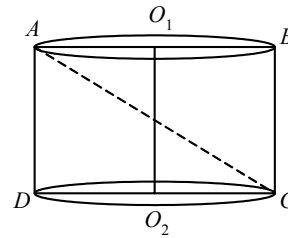
Из $\triangle ACD$ заключаем: $AD = DC \cdot \operatorname{tg} \alpha$, $H = 2R \cdot \operatorname{tg} \alpha$ — I сторона;

$L = 2\pi R$ — II сторона развертки

$$\Rightarrow d = \sqrt{H^2 + L^2} = \sqrt{4R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 4\pi^2 R^2} = 2R \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \pi^2}.$$

$$\text{Значит, } \operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{L} = \frac{2R \operatorname{tg} \alpha}{2\pi R} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pi}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pi} \right).$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pi} \right).$$



2. Дано: $PABC$ — правильная пирамида, PH — высота, $AB = 8\sqrt{3}$, $E \in AC$, $AE = EC$, $\angle PEH = 45^\circ$, KH — высота цилиндра, $KH = 2$.

Найти $S_{\text{бок. цил.}}$.

Решение:

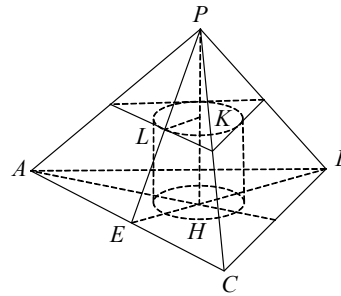
$$EH = \frac{AB\sqrt{3}}{6} = \frac{24}{6} = 4 = PH = 2KH$$

$$\Rightarrow \text{Из } \triangle LKP \sim \triangle EHP: R = LK = \frac{1}{2} EH =$$

2

$$\Rightarrow S_{\text{бок}} = 2\pi R \cdot KH = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 = 8\pi.$$

Ответ: 8π .



С—8

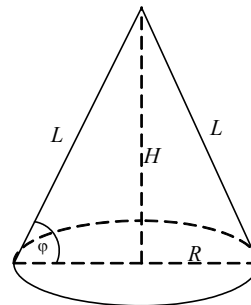
1. Дано: конус, центральный угол в развертке $\alpha = 240^\circ$, высота конуса $h = 5\sqrt{5}$.

Найти: $S_{\text{бок.}}$.

Решение:

$S_{\text{бок}} = \frac{\alpha}{2} \cdot L^2$. Если угол наклона образующей φ , то $L = \frac{h}{\sin \varphi}$, $R = \frac{h}{\operatorname{tg} \varphi}$.

$$\text{Длина окружности основания } l = 2\pi R \\ = \frac{2\pi h}{\operatorname{tg} \varphi} = \alpha \cdot L = \alpha \frac{h}{\sin \varphi} \Rightarrow$$



$$\cos \varphi \cdot 2\pi = \alpha \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{2 \cdot 2\pi}{3 \cdot 2\pi} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$S_{\text{бок}} = \pi R \cdot L = \pi \pi \frac{h^2}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\pi h^2 \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{\pi \cdot 125 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} = 25\pi \cdot 2 \cdot 3 = 150\pi.$$

Ответ 150π .

2. Дано: усеченный конус, $ABCD$ — осевое сечение, $\angle BAO_2 = \varphi$, $AB \perp BD$, $2\pi BO_1 + 2\pi AO_2 = 2\pi m$.

Найти $S_{\text{бок}}$.

Решение:

$BO_1 + AO_2 = m$. Пусть $AB = a$, тогда $BH = a \sin \varphi$, $AH = a \cos \varphi$.

$$\triangle AHB \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AD = \frac{AB^2}{AH} = \frac{a^2}{a \cos \varphi} = \frac{a}{\cos \varphi}.$$

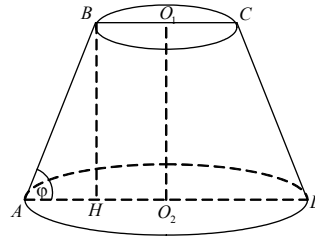
$$BC = AD - 2AH = \frac{a}{\cos \varphi} - 2a \cos \varphi = \frac{a(1 - 2\cos^2 \varphi)}{\cos \varphi} = \frac{-a \cos 2\varphi}{\cos \varphi}.$$

$$BC + AD = \frac{a}{\cos \varphi} - \frac{a \cos 2\varphi}{\cos \varphi} = \frac{a(1 - \cos 2\varphi)}{\cos \varphi} = 2m \Rightarrow a = AB =$$

$$= \frac{2m \cos \varphi}{1 - \cos 2\varphi} = \frac{m \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$$

$$\Rightarrow S_{\text{бок}} = \pi \cdot AB \cdot \frac{1}{2} (BC + AD) = \frac{\pi m^2 \cos \varphi}{(1 - \cos 2\varphi)} = \frac{\pi m^2 \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Ответ: $\frac{\pi m^2 \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$.



С—9

1. Дано: $ABCD$ — ромб, $AC = 8$, $BD = 6$, AC — ось вращения.

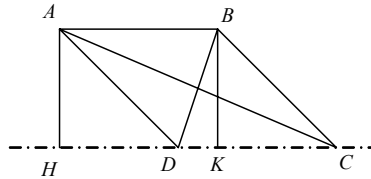
Найти $V_{\text{т. вр.}}$.

Решение:

Опустим перпендикуляры $BK = AH$ на AC . Сторона ромба равна:

$$AB = \sqrt{\frac{AC^2}{4} + \frac{BD^2}{4}} = 5.$$

$$S(BCD) = \frac{1}{4} BD \cdot AC = 12 = \frac{1}{2} DC \cdot BK = \frac{5}{2} BK \Rightarrow BK = \frac{24}{5} = AH.$$



$$S_{\text{т. вр}} = \pi[BK \cdot BC + 2AB \cdot BK + AD \cdot AH] = \pi[2BK \cdot BC + 2AB \cdot BK] = \\ = 2\pi \cdot BK[BC + AB] = 2\pi \cdot \frac{24}{5} \cdot 10 = 96\pi.$$

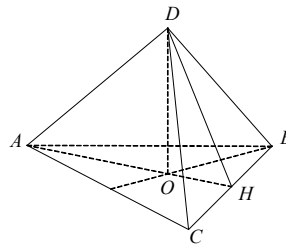
Ответ: 96π .

2. Дано: $DABC$ — пирамида, $AC = AB = a$, $\angle ACB = \alpha$, DO — высота, AH — высота $\triangle ABC$, $\angle DHO = \varphi$, (CDB) (ADC) и (ADB) наклонены к (ABC) также под углом φ , в $DABC$ вписан конус.

Найти $S_{\text{бок конуса}}$.

Решение:

Из $\triangle AHC$: $AH = AC \cdot \sin \alpha = a \sin \alpha$, $CH = a \cos \alpha$.



$$S(ABC) = \frac{1}{2} CB \cdot AH = \frac{1}{2} (2a \cos \alpha) \cdot a \sin \alpha = a^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (CB = 2a \cos \alpha).$$

$$r = \frac{2S}{P} = \frac{2a^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2a + 2a \cos \alpha} = \frac{a \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

$$\text{Из прямоугольного } \triangle DOH: DO = OH \cdot \operatorname{tg} \varphi = r \operatorname{tg} \varphi = \frac{a \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi}{1 + \cos \alpha}.$$

$$DH = \frac{OH}{\cos \varphi} = \frac{a \sin \alpha \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha) \cos \varphi}.$$

$$S_{\text{бок}} = \pi r \cdot l = \pi DH \cdot OH = \pi \cdot \frac{a \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{a \sin \alpha \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha) \cos \varphi} =$$

$$= \frac{\pi a^2 \sin^2 2\alpha}{4(1 + \cos \alpha)^2 \cos \varphi}.$$

С—10

1. Дано: $R = 3$, $O \in Oz$, $K(-2, -2, 1) \in$ сфере.

Найти уравнение сферы.

Решение:

Уравнение сферы: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 9$,

т.к. $O \in Oz$, то $x_0 = y_0 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = 9$.

$K \in$ сфере: $4 + 4 + (1 - z_0)^2 = 9$; $z_0 = 0$ или $z_0 = 2$.

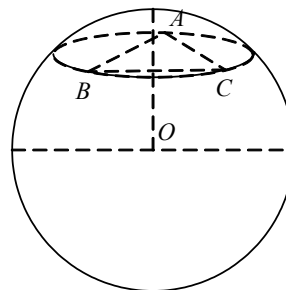
Уравнение сферы: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ или $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 9$.

2. Дано: $A, B, C \in$ сфере, $AB = BC =$

$$a, \triangle ABC = \alpha, S_{\text{большого круга}} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

На каком расстоянии от центра находится (ABC) ?

Решение:



$$\text{Т.к. } S_{\text{больш. круга}} = \frac{\pi a^2}{2}, \text{ то } R = \frac{a\sqrt{2}}{2}; S(ABC) = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha;$$

$$AC = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos \alpha}.$$

r — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

$$r = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{a^3 \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos \alpha}}{2a^2 \sin \alpha} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}.$$

OH — высота пирамиды $OABC$, искомое расстояние

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2(1 - \cos \alpha)}{2 \sin^2 \alpha}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \\ &= \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha - 1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{a\sqrt{2} \sqrt{(1 - \cos \alpha) \cos \alpha}}{2 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \\ &= \frac{a\sqrt{2} \sqrt{\cos \alpha}}{2 \sqrt{1 + \cos \alpha}} = \frac{a\sqrt{2} \sqrt{\cos \alpha}}{2 \sqrt{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

С—11

1. Дано: сфера, $\alpha \parallel \beta$ — секущие плоскости, $l_\alpha = 10\pi$, $l_\beta = 24\pi$, $O_1O_2 = 7$.

Найти $S_{\text{сферы}}$.

Решение:

Проведем плоскость через центры окружностей, получим сечение $ABCD$ ($O, O_1, O_2 \in (ABCD)$). Поместим сферу в полярную систему координат O_2xyz .

В ней $A(-12, 0, 0)$, $D(12, 0, 0)$, $B(-5, 0, 7)$, $C(5, 0, 7)$.

Уравнение сферы: $x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

$$\begin{aligned} A: 144 + z_0^2 &= R^2 \\ B: 25 + (7 - z_0)^2 &= R^2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 144 + z_0^2 = R^2 \\ 25 + (7 - z_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

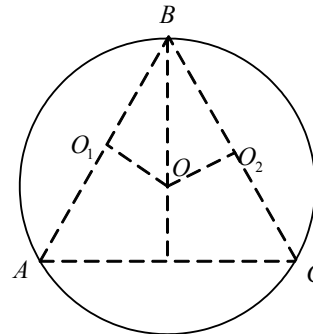
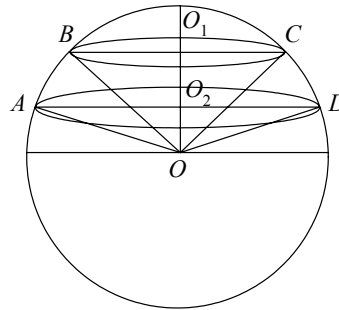
$$119 - 49 + 14z_0 = 0; 70 = -14z_0 \Rightarrow z_0 = -5; R = 13$$

$$\Rightarrow S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4 \cdot 169 \cdot \pi = 676\pi.$$

Ответ: 676π .

2. Дано: шар, α, β — секущие плоскости, $B \in \alpha, \beta$, сфере, O_1, O_2 — центры сечений, O — центр шара, $O_1O = OB_2$
 $= 2\sqrt{3}$, $\angle ABC = 60^\circ$.

Найти: $S_{\text{сечений}}$.



Решение:

$\triangle ABC$ — равносторонний, $O_1O_2 = AB \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow AB = 12 \Rightarrow$

$AO_1 = CO_2 = 6 \Rightarrow S_{\text{сеч}} = \pi \cdot AO_1^2 = 36\pi.$

Ответ: 36π .

С—12

1. Дано: $DABC$ — пирамида, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 4$, $BC = 3$, DH — высота, вершина D удалена от AB , AC , BC на расстояние 3. В $DABC$ вписан шар.

Найти $r_{\text{шара}}$.

Решение:

H — центр вписанной окружности $\triangle ABC$. $AC = 5$.

Проведем перпендикуляр DK к BC . HK также перпендикулярно BC (по теореме о трех перпендикулярах); $DK = 3$; HK — радиус вписанной окружности $\triangle ABC$.

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = 6; P(\triangle ABC) = AB + BC + AC = 12.$$

$$HK = \frac{2S}{P} = \frac{12}{12} = 1$$

$$\Rightarrow \text{из } \triangle DHK: DH = \sqrt{DK^2 - HK^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}.$$

Достроим $\triangle DKH$ до равнобедренного $\triangle DKL$ ($PK = DL$), в него вписан большой круг шара.

$$LK = 2, DH = 2\sqrt{2}, S(\triangle DKL) = \frac{1}{2} DH \cdot LK = 2\sqrt{2},$$

$$P = DK + DL + LK = 6 + 2 = 8. S = (\triangle DKL) = \frac{1}{2} LK \cdot DH = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{2S(\triangle DKL)}{DK + DL + LK} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

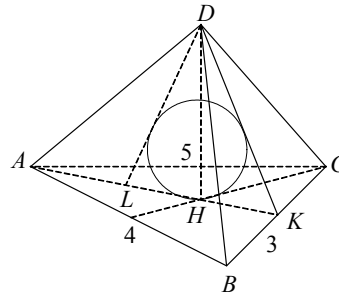
2. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $A_1C_1 = 5$, $\angle A_1B_1C_1 = 150^\circ$, $AA_1 =$

24. Около призмы описана сфера.

Найти $S_{\text{сферы}}$.

Решение:

r — радиус окружности, описанной около $\triangle A_1B_1C_1$



$$= \frac{r}{4 \cdot \frac{1}{2} A_1 B_1 \cdot B_1 C_1 \cdot \sin 150^\circ} = \frac{A_1 C_1}{2 \sin 150^\circ} = \frac{5}{2 \sin 150^\circ}$$

$$R = \sqrt{r^2 + \frac{AA_1^2}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4 \sin^2 150^\circ} + 144}$$

$$\sin^2 150^\circ = \frac{1 - \cos 300^\circ}{2}; \quad \cos 300^\circ =$$

$$\cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 150^\circ = \frac{1}{4}.$$

$$R = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4 \cdot 169 \cdot \pi = 676\pi.$$

Ответ: 676π .

С—13

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $ABCD$ — квадрат, $AB = a$, $\angle C_1 A B_1 = 30^\circ$.

Найти $V_{\text{параллелепипеда}}$.

Решение:

Из $\triangle A B_1 C$: $AC_1 = 2B_1 C_1 = 2a$. Но

$$AC_1 = \sqrt{a^2 + a^2 + h^2} \Rightarrow h = a\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow V = AB \cdot AD \cdot AA_1 = a^2 \cdot a\sqrt{2} = a^3 \sqrt{2}.$$

Ответ: $a^3 \sqrt{2}$.

2. Дано: $ABCA_1 B_1 C_1$ — прямая призма, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 5$, $B_1 H \perp AC$, $\angle B_1 H B = 45^\circ$,

$BK \perp HB_1$, $BK = 2\sqrt{2}$.

Найти: $V_{\text{призмы}}$.

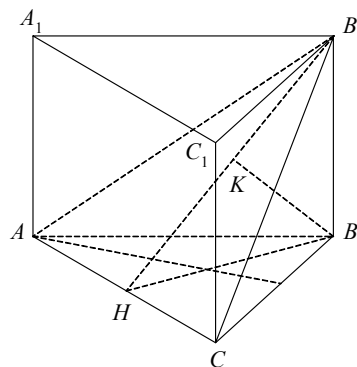
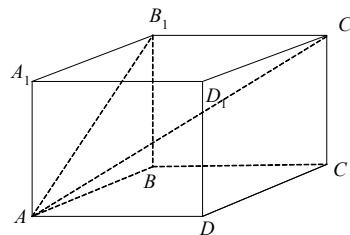
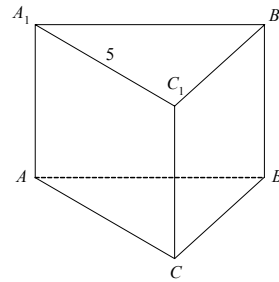
Решение:

$$\text{В } \triangle H B B_1: HK = BK = B_1 K = 2\sqrt{2} \Rightarrow HB_1 = 4\sqrt{2}, HB = BB_1 = 4;$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BH = 10.$$

$$V(ABCA_1 B_1 C_1) = S(ABC) \cdot BB_1 = 10 \cdot 4 = 40.$$

Ответ: 40.



С—14

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямая призма, $ABCD$ — параллелограмм, $BD = 6$, $\angle ABD = 90^\circ$, $\angle BDA = 30^\circ$, $B_1 H \perp AD$, $\angle B_1 H B = 30^\circ$.

Найти: V .

Решение:

$$\text{В } \triangle ABD: AB = BD \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow AD = 4\sqrt{3}.$$

$$S(ABD) = \frac{1}{2} AB \cdot BD = 6\sqrt{3} = \frac{1}{2} AD \cdot BH \\ = 2\sqrt{3} BH \Rightarrow BH = 3.$$

$$\text{Из } \triangle B_1 B H: BB_1 = BH \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

$$S(ABCD) = 2S(ABD) = 12\sqrt{3}.$$

$$V = BB_1 \cdot S(ABCD) = \sqrt{3} \cdot 12\sqrt{3} = 36.$$

Ответ: 36.

2. Дано: $MABCD$ — правильная пирамида, $AB = 8$, MH — высота, $MH = 16$. В $MABCD$ вписан цилиндр, осевое сечение цилиндра — квадрат.

Найти: $V_{\text{цилиндра}}$.

Решение:

E, F — середины AD и BC . Рассмотрим сечение EMF , внутри которого лежит квадрат $KLMN$: $EF = 4$, $MH = 16$, $LK = 2LP$.

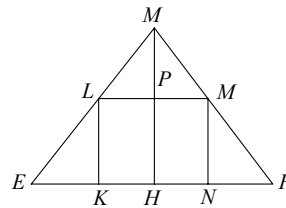
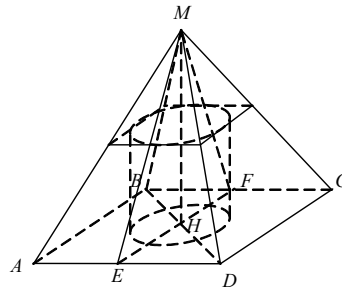
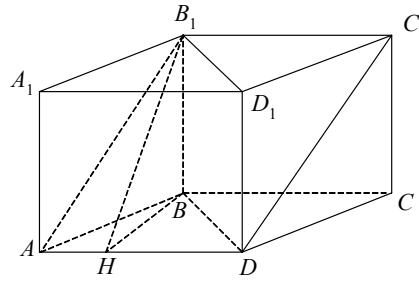
$$\text{Из подобия } \triangle EKL, \triangle LPM \text{ и } \triangle EHM \\ \frac{EK}{KL} = \frac{EH}{HM} = \frac{1}{4} = \frac{LP}{PM};$$

$$\frac{EK}{2LP} = \frac{LP}{PM} = \frac{1}{4}; EK = \frac{LP}{2}; EK + LP =$$

$$EH \Rightarrow \frac{3LP}{2} = EH = 4; LP = \frac{8}{3}; LK = \frac{16}{3}.$$

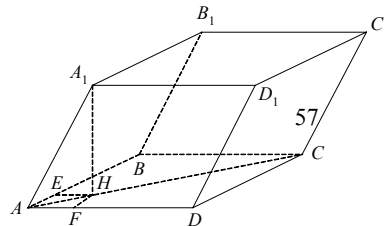
$$V = LK \cdot \pi \cdot LP^2 = \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot \frac{64}{9} = \frac{1024\pi}{27}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1024\pi}{27}.$$



С—15

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — наклонный параллелепипед, $ABCD$ — прямоугольник,



$AB = a, AD = b, AA_1 = c, \angle A_1AB = \angle A_1AD = 60^\circ$.

Найти $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$.

Решение:

Опустим высоту AH . Проведем $EH \parallel AD, E \in AB, FH \parallel AB, F \in AD$,

$AENF$ — квадрат, $AF = \frac{c}{2} = AE = FH, A_1F = A_1E = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Из } \triangle A_1FH: A_1H = \sqrt{A_1F^2 - FH^2} = \sqrt{\frac{3}{4}c^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{c\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow V = A_1H \cdot AB \cdot AD = \frac{c\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot b.$$

$$\text{Ответ: } \frac{abc\sqrt{2}}{2}.$$

2. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная призма, AH — высота, $\angle A_1AH = 45^\circ, AH = 10\sqrt{2}, S(A_1C_1CA) = 200, S(A_1B_1BA) = 100, KL \perp AA_1, KM \perp AA_1, L \in C_1C, M \in B_1B, \angle LKM = 120^\circ$.

Найти $V_{\text{призмы}}$.

Решение:

Из прямоугольного $\triangle A_1HA: AA_1 = A_1H\sqrt{2} = 20$.

$$S(A_1ACC_1) = AA_1 \cdot KL = 20KL = 200 \Rightarrow KL = 10.$$

$$S(A_1B_1BA) = AA_1 \cdot KM = 20KM = 100 \Rightarrow KM = 5$$

$$\Rightarrow S(KLM) = \frac{1}{2} KL \cdot KM \cdot \sin 120^\circ = 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}.$$

$$V_{\text{призмы}} = S(KLM) \cdot AA_1 = 20 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{2} = 250\sqrt{3}.$$

Ответ: $250\sqrt{3}$.

С—16

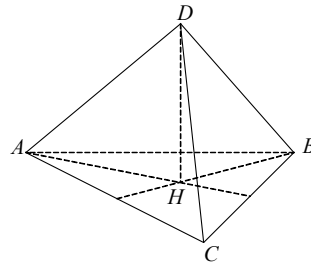
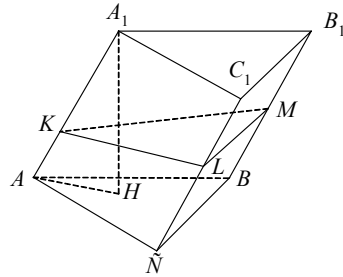
1. Дано: $DABC$ — правильная пирамида, DH — высота, $DH = h, \angle ADB = \alpha$.

Найти $V(DABC)$.

Решение:

$$\text{Пусть } AB = a, \text{ тогда } AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Из } \triangle AHD: AD^2 = AH^2 + DH^2; AD^2 = h^2 + \frac{a^2}{3}; AD = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}}.$$



В $\triangle ADB$ по теореме косинусов $AB^2 = 2AD^2(1 - \cos \alpha)$.

$$a^2 = 2 \left(h^2 + \frac{a^2}{3} \right) (1 - \cos \alpha); a^2 - \frac{2}{3} a^2 (1 - \cos \alpha) = 2h^2(1 - \cos \alpha);$$

$$a^2 = \frac{2h^2(1 - \cos \alpha)}{1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cos \alpha} = \frac{6h^2(1 - \cos \alpha)}{1 + 2 \cos \alpha} \Rightarrow a = h \sqrt{\frac{6(1 - \cos \alpha)}{1 + 2 \cos \alpha}}.$$

$$S(ABC) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6h^2 \sqrt{3}(1 - \cos \alpha)}{4(1 + 2 \cos \alpha)}.$$

$$V(DABC) = \frac{1}{3} h \cdot S = \frac{2h^3 \sqrt{3}(1 - \cos \alpha)}{4(1 + 2 \cos \alpha)} = \frac{h^3 \sqrt{3}(1 - \cos \alpha)}{2(1 + 2 \cos \alpha)} =$$

$$= \frac{h^3 \sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \alpha + 1}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{h^3 \sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \alpha + 1}.$$

2. Дано: $PABCD$ — пирамида, $AD \parallel$

BC , DH — высота, $BH = 3\sqrt{3}$, $AB = CD$, $\angle BAD = 30^\circ$, боковые грани наклонены к основанию под углом 60° .

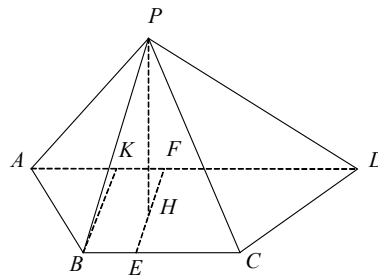
Найти $V(PABCD)$.

Решение:

В трапецию можно вписать окружность $\Rightarrow AD + BC = AB + CD$,

$EF \perp AD$, $E \in BC$, $F \in AD$, $H \in EF$.

$$\text{Из } \triangle EHP: EH = r = \frac{PH}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} =$$



3.

Начертим перпендикуляр $BK \perp EF$.

$BK = EF = 2EH = 6 \Rightarrow AB = 2BK = 12$ (из $\triangle BKA$); $AB = CD$

$\Rightarrow P(ABCD) = 4AB = 48$.

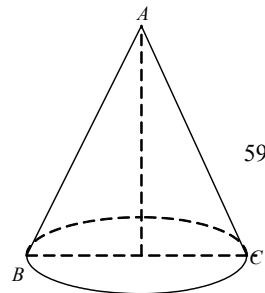
$$S(ABCD) = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BK = AB \cdot BK = 12 \cdot 6 = 72.$$

$$V(PABCD) = \frac{1}{3} PH \cdot S(ABCD) = \sqrt{3} \cdot 72 = 72\sqrt{3}.$$

Ответ: $72\sqrt{3}$.

C—17

1. Дано: развертка конуса, $AB = 6 = AC$, $BC = 6\sqrt{3}$.



Найти $V_{\text{конуса}}$.

Решение:

В $\triangle ABC$ по теореме косинусов $BC^2 = 2AB^2(1 - \cos \alpha)$

$$3 \cdot 36 = 2 \cdot 36(1 - \cos \alpha); 1 - \cos \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120^\circ \text{ — угол в}$$

развертке.

$$S_{\text{бок}} = L^2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \pi RL; R = \frac{\alpha}{2\pi} L = \frac{1}{3} AB = 2$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{AB^2 - R^2} = \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi h R^2 = \frac{1}{3} \pi \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4 = \frac{16\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$.

2. Дано: $DABC$ — правильная пирамида, $AB = 6\sqrt{3}$, AH — высота, DK — высота $\triangle DCB$, $AM \perp DK$, $AM = \sqrt{56}$. В $DABC$ вписан конус.

Найти $V_{\text{конуса}}$.

Решение:

$$AK = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9; HK = r = \frac{AK}{3} = 3.$$

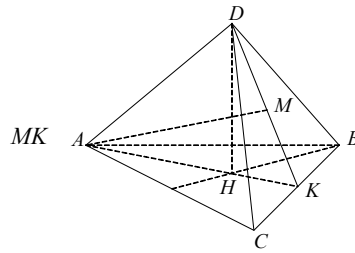
Из $\triangle AMK$: $\sqrt{AK^2 - AM^2} = \sqrt{81 - 56} = 5$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle AKM = \frac{AM}{MK} = \frac{\sqrt{56}}{5}.$$

Из $\triangle HDK$: $DH = HK \cdot \operatorname{tg} \angle AKM = 3 \cdot \frac{\sqrt{56}}{5}$

$$\Rightarrow V_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3} H \cdot r^2 = \frac{\pi}{3} DH \cdot KH^2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3\sqrt{56}}{5} \cdot 9 = \frac{9\sqrt{56}}{5} \pi = \frac{18\sqrt{14}}{5} \pi.$$

Ответ: $\frac{18\sqrt{14}}{5} \pi$.



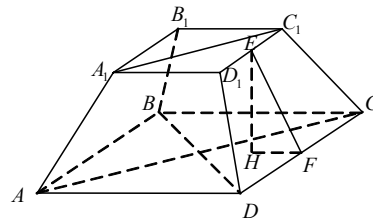
С—18

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — правильная пирамида, $A_1 B_1 = m$, $AB = 2m$, $E \in D_1 C_1$, $F \in DC$, $D_1 E = EC_1$, $DF = FC$, $EF = \frac{m\sqrt{3}}{2}$.

Найти $V_{\text{пирамиды}}$.

Решение:

Опустим высоту EH . HF



$$= \frac{AB - A_1B_1}{2} = \frac{m}{2}.$$

$$\text{Из прямоугольного } \triangle EHF: EH = \sqrt{EF^2 - HF^2} = \frac{m\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} EH \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2});$$

$$V = \frac{m\sqrt{2}}{6} (m^2 + 4m^2 + m^2) = \frac{7m^3\sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{7m^3\sqrt{2}}{6}.$$

2. Дано: $\triangle ABC$, $AC = CB = 25$, $AB = 48$, $l \perp AB$, $B \in l$, l — ось вращения.

Найти $V_{\text{т. вр.}}$.

Решение:

$$p(ABC) = \frac{AB + BC + AC}{2} = 49.$$

$$S(ABC) = \sqrt{49(49 - 25)^2(49 - 48)} = 7 \cdot 24$$

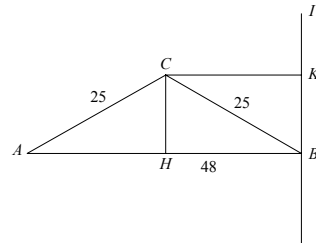
$$= \frac{1}{2} AB \cdot CH$$

$$\Rightarrow CH = \frac{2S}{AB} = \frac{7 \cdot 48}{48} = 7.$$

$$V_{\text{т. вр.}} = \pi \frac{CH}{3} [AB^2 + CK^2 - CK^2 + AB \cdot CK] =$$

$$= \frac{\pi \cdot 7}{3} [48^2 + 24^2 - 24^2 + 48 \cdot 24] = \frac{7\pi}{3} [48(24 + 48)] = 7\pi \cdot 16 \cdot 72 = 8064\pi.$$

Ответ: 8064π .



С—19

1. Дано: шаровой сегмент и конус, высота сегмента $H = 1$, $V_{\text{конуса}} = 12\pi$.

Найти $V_{\text{сектора}}$.

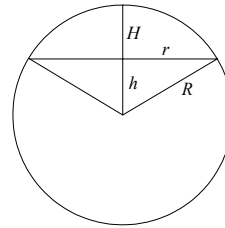
Решение:

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h_{\text{кон}}; \quad h_{\text{кон}} + H = R; \quad V_{\text{сегмента}} =$$

$$\pi H^2 \left(-\frac{H}{3} \right), \text{ но } r^2 + h^2 = R^2, \quad H + h = R, \quad r^2 = R^2 - (R -$$

$$H)^2, \quad h = R - H; \quad V_{\text{сектора}} = \frac{2}{3} \pi R^2 H.$$

$$\Rightarrow V_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3} (R^2 - (R - H)^2)(R - H) = 12\pi;$$



$$\begin{aligned}(R^2 - R^2 + 2RH - H^2)(R - H) &= 36; \\ (2R - 1)(R - 1) &= 36; 2R^2 - 3R + 1 = 36; \\ 2R^2 - 3R - 35 &= 0; D = 9 + 8 \cdot 35 = 289; \\ R &= \frac{3 \pm 17}{4}; R_1 = 5, R_2 = -\frac{7}{2} \text{ — невозможно} \Rightarrow R = 5.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{\text{сектора}} = \frac{2}{3} \pi R^2 H = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 25 \cdot 1 = \frac{50\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{50\pi}{3}$.

2. Дано: $V_{\text{конуса}} = 128\pi$, $H = 6$. Около конуса описан шар.

Найти $V_{\text{шара}}$.

Решение:

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi \cdot H \cdot r^2 = 2\pi r^2 = 128\pi \Rightarrow r^2 = 64, r = 8.$$

Вокруг осевого сечения конуса описан большой круг шара.

$$S_{\text{ос сеч}} = rH = 48, \text{ образующая } L = \sqrt{H^2 + r^2} = 10.$$

$$R = \frac{L^2 \cdot 2r}{4S} = \frac{100 \cdot 16}{4 \cdot 48} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}.$$

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4 \cdot 5\pi \cdot 625}{81} = \frac{62500\pi}{81}.$$

Ответ: $\frac{62500\pi}{81}$.

ДС

1. Дано: плоскость α : $x - 2y + 2z - 9 = 0$,

сфера: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 36$.

Доказать, что α касается сферы.

Доказательство:

$$\vec{n} (1, -2, 2) \perp \alpha; |\vec{n}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3.$$

Опустим из центра $O(3, 2, -4)$ перпендикуляр ON на α . $\overrightarrow{ON} = k\vec{n}$.

$$\begin{cases} x_0 - 3 = k \\ y_0 - 2 = -2k \\ z_0 + 4 = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = k + 3 \\ y_0 = 2 - 2k \\ z_0 = 2k - 4 \end{cases}.$$

$$N(x_0, y_0, z_0) \in \alpha: (k + 3) - 2(2 - 2k) + 2(2k - 4) - 9 = 0.$$

$$9k - 9 - 9 = 0, k = 2.$$

$\overrightarrow{ON} (2, -4, 4), |\overrightarrow{ON}| = 6 \Rightarrow \overrightarrow{ON}$ — радиус, проведенный в точку касания

$\Rightarrow \alpha$ касается сферы.

2. Дано: $E(-1, 2, 0), F(1, 0, -2), E, F \in \alpha, \alpha \parallel Ox$.

Найти уравнение α .

Решение:

Возьмем точку $G(x_0, y_0, z_0)$ такую, что $\overrightarrow{EG} = \vec{i} (1, 0, 0)$

$$\begin{cases} x_0 + 1 = 1 \\ y_0 - 2 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \\ z_0 = 0 \end{cases}; G(0, 2, 0).$$

Уравнение α : $Px + Qy + Rz + S = 0$

$$\begin{matrix} E \in \alpha: \\ F \in \alpha: \\ G \in \alpha: \end{matrix} \begin{cases} -P + 2Q + S = 0 \\ P - 2R + S = 0 \\ 2Q + S = 0 \end{cases}; \begin{cases} P = 0 \\ R = \frac{S}{2} \\ Q = -\frac{S}{2} \end{cases}$$

\Rightarrow Уравнение плоскости α : $\frac{y}{2} - \frac{z}{2} - 1 = 0$ или $y - z - 2 = 0$.

Ответ: $y - z - 2 = 0$.

Вариант 5

С—1

1. Дано: тетраэдр $DABC$, $AB = AC = 25$, $BO = OC$, $BC = 30$, $OR \in (ABC)$, $OR \perp AC$, $\angle ORD = 45^\circ$, OK — перпендикуляр к ACD .

Найти: координаты вершин $DABC$, координаты \vec{OK} , разложить \vec{OK} по \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} .

Решение:

1) $CO = BO = 15$. $\triangle ORC$, $\triangle AOC$ — прямоугольные и подобные (по двум углам). $AO = \sqrt{AC^2 - CO^2} = \sqrt{625 - 225} = 20$.

$$\text{Из подобия} \quad \frac{AO}{OR} = \frac{AC}{CO}; \quad OR = \frac{AO \cdot CO}{AC} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12.$$

$\triangle ROD$ — прямоугольный, равнобедренный ($\angle R = \angle D = 45^\circ$) $\Rightarrow DO = 12$. Значит, координаты вершин $C(15, 0, 0)$, $B(-15, 0, 0)$, $A(0, -20, 0)$, $D(0, 0, 12)$.

2) Перпендикуляр OK лежит в плоскости ROD . Т.к. $\triangle ROD$ — равнобедренный, то OK — высота, биссектриса и медиана.

$$OK = \sin 45^\circ \cdot RO = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

$$\text{Проекция } KO \text{ на } (yOx) \text{ } K_1O \text{ равна } KO \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

6.

$\triangle K_1Ox_1$ — прямоугольный, подобен $\triangle CRO$.

$$\sin \angle K_1Ox_1 = \frac{3}{5}; \quad \cos \angle K_1Ox_1 = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Проекция } K_1O \text{ на } Ox: Ox_1 = K_1O \cdot \cos \angle K_1Ox_1 = 6 \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{5}.$$

$$\text{Проекция } K_1O \text{ на } Oy: y_1O = K_1O \cdot \sin \angle K_1Ox_1 = 6 \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{5}.$$

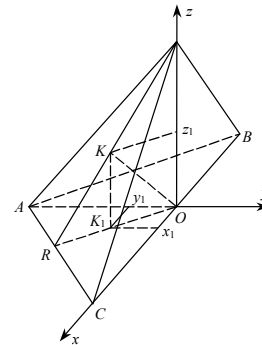
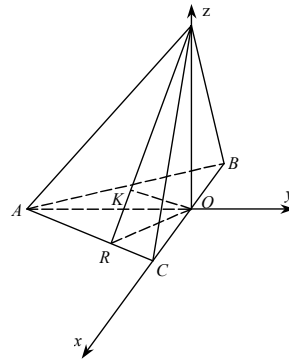
$$\text{Проекция } OK \text{ на } Oz: Oz_1 = OK \cdot \sin 45^\circ = 6.$$

$$\text{Координаты } K \left(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, 6 \right).$$

$$\vec{OK} = 4,8\vec{i} - 3,6\vec{j} + 6\vec{k}.$$

2. Дано: $\vec{a} \{2, -1, 3\}$, $\vec{b} \{1, 3, -2\}$, $\vec{c} \{m, 2, 1\}$.

При каком значении m векторы компланарны.



Решение:

Условие компланарности запишем в следующем виде: $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

$$\begin{cases} m = 2x + y \\ 2 = -x + 3y \\ 1 = 3x - 2y \end{cases}; \begin{cases} x = 3y - 2 \\ 1 = 9y - 6 - 2y \\ m = 2x + y \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ m = 3 \end{cases}.$$

Ответ: при $m = 3$.

С—2

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — правильная призма, $AB = 2$, $AA_1 = 4$, $E \in DC$, $DE = EC$, $K \in CC_1$, $CK = C_1K$, $DK \cap D_1C = P$.

Найти: расстояние $|MP|$.

Решение:

Докажем, что $P \in C_1E$.

В плоскости DD_1C_1C введем систему координат $Oxyz$ так, что $DC \in Dx$, $DA \in Dz$, $DD_1 \in Dy$. Тогда уравнение прямых DK и D_1C запишется в виде $y = x, z = 0$ и $y = -2x + 4, z = 0$, их общая точка P $x = \frac{4}{3}, y = \frac{4}{3}, z = 0$ принадлежит уравнению $y = 4x - 4, z = 0$ прямой C_1E .

Вычислим длины отрезков C_1D , C_1E .

Даны координаты точек $E(1, 0, 0)$, $C_1(2, 4, 0)$, $P\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 0\right)$.

$$C_1P = \sqrt{\left(2 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(4 - \frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{64}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{17}.$$

$$C_1E = \sqrt{(2-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{17}.$$

Координаты точки $M\left(\frac{3}{2}, 2, 1\right)$.

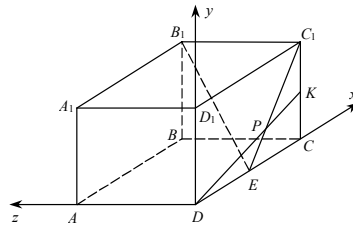
$$\text{Длина } |PM| = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{4}{9} + 1} = \frac{\sqrt{53}}{6}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{53}}{6}$.

2. Дано: $A(-1, 2, 1)$, $B(2, 1, -1)$, $M \in AB$, $AM = 3\sqrt{14}$.

Найти: координаты точки M .

Решение:



Направляющий вектор прямой AB $\vec{a} = (3, -1, -2)$. Единичный направляющий вектор $\vec{\tau} = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}} \right)$. А ответ неоднозначен: отрезок

длины $3\sqrt{14}$ можно отложить в обе стороны от A :

- 1) $M(-1+9, 2-3, 1-6) = M_1(8, -1, -5)$
- 2) $M(-1-9, 2+3, 1+6) = M_2(-10, 5, 7)$

С—3

1. Дано: вектор \vec{a} образует с \vec{i} угол 120° , и с \vec{k} угол 135° .

Найти: угол между \vec{a} и \vec{j} .

Решение:

Пусть $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то

$$1) (\vec{a}, \vec{i}) = x = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{i})$$

$$2) (\vec{a}, \vec{j}) = y = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{j})$$

$$3) (\vec{a}, \vec{k}) = z = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{k})$$

Но $|\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, а сложив 1)–3), возведенные в квадраты, получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 = |\vec{a}|^2 [\cos^2(\vec{a}, \vec{i}) + \cos^2(\vec{a}, \vec{j}) + \cos^2(\vec{a}, \vec{k})].$$

$$\text{Имеем } \cos^2(\vec{a}, \vec{j}) = 1 - \cos^2(\vec{a}, \vec{i}) - \cos^2(\vec{a}, \vec{k}) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$(\vec{a}, \vec{j}) = 60^\circ, 120^\circ.$$

Ответ: $60^\circ, 120^\circ$.

2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, M — середина грани $AA_1 B_1 B$, $K \in AD$, $AK = AD$, $AB = 1$.

Найти: $S(MC_1 K)$.

Решение:

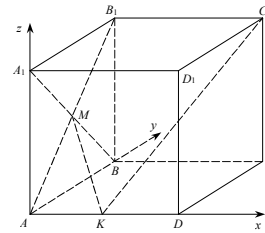
Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. Тогда $K\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$,

$$M\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), C_1(1, 1, 1).$$

$$KM = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; KC_1 = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} = \frac{3}{2}; MC_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$\triangle MC_1 K$ — прямоугольный: $KC_1^2 = MC_1^2 + KM^2$.

$$\text{Значит, } S(MC_1 K) = \frac{1}{2} KM \cdot MC_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$



Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

С—4

1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $AB = AC$, $BD \perp AC$, $BD = AC = 4$, $BB_1 = 2$, $M \in B_1C$, $B_1M = MC$. Плоскость $\alpha \perp B_1C$, $M \in \alpha$.

Найти: угол между α и B_1A .

Решение:

Введем систему координат $Dxyz$, как показано на рисунке.

Координаты точек $A(0, -2, 0)$, $B_1(-4, 0, 2)$, $B(-4, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $C_1(0, 2, 2)$, векторов $\overrightarrow{AB_1}(-4, 2, 2)$, $\overrightarrow{CB}(-4, -2, 0)$, $\overrightarrow{CC_1}(0, 0, 2)$, $\overrightarrow{CB_1}(-4, -2, 2)$, $\overrightarrow{MB_1}(-2, -1, 1)$.

Т.к. угол φ между плоскостью α и прямой AB_1 равен 90° вычсть угол между перпендикуляром $\overrightarrow{MB_1}$ и прямой AB_1 .

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{MB_1}) &= |\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\overrightarrow{MB_1}| \cdot \cos(\widehat{AB_1MB_1}) \\ (-4) \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 &= 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cos(\widehat{AB_1MB_1}) \\ \cos(\widehat{AB_1MB_1}) &= \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

$$\text{Значит, } \sin \varphi = \frac{2}{3}; \varphi = \arcsin \frac{2}{3} \approx 41^\circ 49'.$$

2. Дано: $ABCD$ — тетраэдр, $BD = BC = BA$. $\angle ABD = \angle ABC = 60^\circ$, $\angle CBD = 90^\circ$.

Доказать: $(DAC) \perp (DBC)$.

Доказательство:

Пусть E — середина DC .

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$$

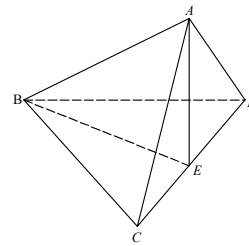
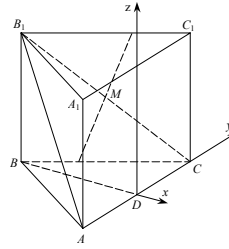
$$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|^2 - (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) =$$

$$0 + \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) - (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$AE \perp BC$, $BD, AE \in CAD \Rightarrow (CAD) \perp (BCD)$.

С—5



1. Дано: прямая, содержит биссектрису угла xOy , $A(10, 20, 0)$, $AA_1 \cap a = M$, $AM = AM_1$.

Найти: координаты A_1 .

Решение:

Пусть направляющий вектор прямой AA_1 есть вектор $\vec{n}(x, y)$, он перпендикулярен направляющему вектору $\tau(1, 1)$ прямой a . Значит, $\vec{n}(1, -1)$. Уравнение прямой AA_1 есть $(x - 10) + (y - 20) = 0$, $z = 0$

$$y = -x + 30$$

Прямая AA_1 пересекает прямую a в точке

$$\begin{cases} x = y \\ y = -x + 30 \\ z = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = y \\ x = -x + 30 \\ z = 0 \end{cases}, \begin{cases} y = 15 \\ x = 15 \\ z = 0 \end{cases} \quad M(15, 15, 0).$$

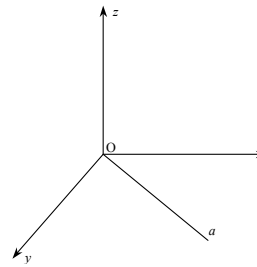
$$\vec{AM} = (5, -5, 0) = \vec{MA_1} \Rightarrow A_1(20, 10, 0).$$

2. Дано: (x, y, z) переходит в $(2x, 2y, 2z)$.

Определить, является ли это отображение движением.

Решение:

При данном отображении произвольные точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ переходят в точки $A_1(2x_1, 2y_1, 2z_1)$ и $B_2(2x_2, 2y_2, 2z_2)$, но $AB \neq A_1B_1 \Rightarrow$ это отображение не является движением.



С—6

1. Дано: $DABC$ — правильный тетраэдр, $N \in AD$, $AN = ND$, $M \in CB$, $CM = MB$.

Доказать: MN — ось симметрии $DABC$.

Доказательство:

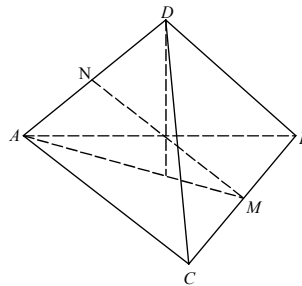
При симметрии относительно MN $C \rightarrow B$, $B \rightarrow C$ и $A \rightarrow D$, $D \rightarrow A$ (т.к. $\triangle AMD$ — равнобедренный, MN — высота, биссектриса и медиана) $\Rightarrow MN$ — ось симметрии.

2. Дано: через MN проведена плоскость α .

Доказать, что α делит $DABC$ на две равные части.

Доказательство:

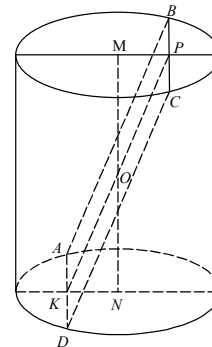
Каждой точке тетраэдра, лежащей по одну сторону α , соответствует асимметричная ей, лежащая по другую сторону. Следовательно, части тетраэдра, лежащей по одну сторону от α , соответствует равная ей часть, лежащая по другую сторону.



С-7

1. Дано: цилиндр, высота MN равна a , $ABCD$ — прямоугольник, $AD = a$, угол между AB и основанием равен 60° .

Найти: площадь осевого сечения.



Решение:

Проведем среднюю линию $KP \cap MN = O$. $\triangle ONK$ — прямоугольный, $ON = \frac{a}{2}$, $\angle OKN = 60^\circ \Rightarrow KN = ON \cdot \operatorname{ctg} \angle OKN = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{6}$.

В равнобедренном $\triangle AND$ $AD = a$, $NK = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow$

$$\Rightarrow ND = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12}} = \frac{2a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = R.$$

Площадь осевого сечения $2R \cdot MN$

$$= \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot a = \frac{2a^2\sqrt{3}}{3}.$$

2. Дано: $DABC$ — правильная призма, все ребра равны a , DA , DB , DC — оси цилиндрических поверхностей радиуса a .

Найти: площадь поверхности тела, ограниченного цилиндрическими поверхностями и плоскостями оснований призмы.

Решение: Боковая поверхность состоит из трех частей, которые вместе составляют половину площади боковой поверхности цилиндра с высотой a и радиусом основания a .

$$S = \frac{1}{2} \cdot (2\pi \cdot a \cdot a) = \pi a^2.$$

Ответ: πa^2 .

С—8

1. Дано: конус, центральный угол в развертке боковой поверхности равен 270° . Через вершину проведено сечение наибольшей площади.

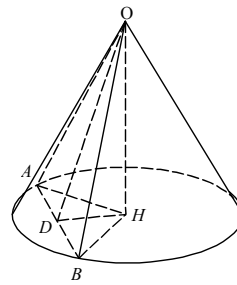
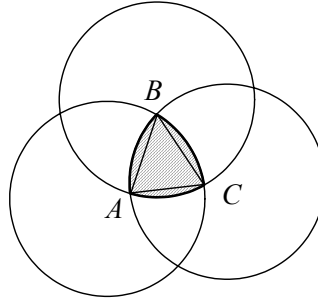
Найти: угол между сечением и основанием.

Решение:

Т.к. α — центральный угол развертки, то $\alpha = \frac{R}{L} \cdot 2\pi = \frac{2\pi \cdot 3}{4}$, $\frac{R}{L} = \frac{3}{4}$.

Наибольшее сечение — треугольник с углом между образующими, синус которого наибольший, т.е. равен 90° . Значит, угол AOB равен 90° . Гипотенуза $AB = \sqrt{2}L$. Высота $\triangle AOB$ $OD = \frac{\sqrt{2}}{2}L$.

А из прямоугольного $\triangle OHB$:



$$OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{L^2 - R^2} = \sqrt{L^2 - \frac{9}{16}L^2} = L \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Окончательно имеем из $\triangle OHD$ (синус искомого угла)

$$\sin(\angle ODH) = \frac{OH}{OD} = \frac{\sqrt{7} \cdot 2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}; \angle ODH = \arcsin \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

2. Дано: конус, OH — высота, $H_1 \in OH$, $OH_1 = H_1H$, $\alpha \parallel$ основанию, $H_1 \in \alpha$. Отношение полных поверхностей образовавшихся фигур равно 3 : 1.

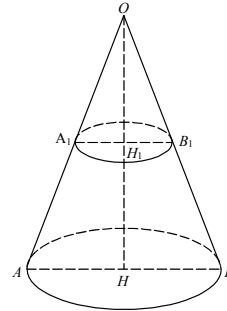
Найти: $\angle OAH$.

Решение:

Обозначим усеченный конус цифрой II, а верхний конус цифрой I.

$$S_{\text{бок конуса}} = \pi L \cdot R; S_{\text{бок I}} = \pi \frac{L}{2} \cdot \frac{R}{2}$$

$$S_{\text{конуса}} = \pi LR + \pi R^2; S_I = \frac{\pi}{4} hL + \frac{\pi}{4} R^2, \text{ где } R, L —$$



образующая и высота цилиндра.

$$S_{II} = S_{\text{конуса}} - S_{\text{бок I}} + \frac{\pi}{4} R^2 = \pi LR + \pi R^2 - \frac{\pi LR}{4} + \frac{\pi}{4} R^2 = \frac{3\pi LR}{4} + \frac{5\pi R^2}{4}.$$

$$\text{Причем } \cos \angle OAH = \frac{R}{L}.$$

$$\text{Тогда } S_I = \frac{\pi}{4} R^2 \cos \alpha + \frac{\pi}{4} R^2, S_{II} = \frac{3}{4} \pi R^2 \cos \alpha + \frac{5}{4} \pi R^2.$$

$$\frac{S_I}{S_{II}} = \frac{\frac{\pi}{4} R^2 \cos \alpha + \frac{\pi}{4} R^2}{\frac{3}{4} \pi R^2 \cos \alpha + \frac{5}{4} \pi R^2} = \frac{3}{11}, \frac{\cos \alpha + 1}{3 + 5 \cos \alpha} = \frac{3}{11}$$

$$11 \cos \alpha + 11 = 9 + 15 \cos \alpha; \cos \alpha = \frac{1}{2}; \angle OAH = \alpha = 60^\circ.$$

Ответ: 60° .

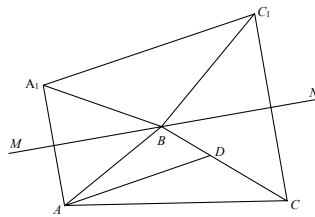
С—9

1. Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC = a$, $\angle B = 120^\circ$, AD — биссектриса, $MN \parallel AD$, $B \in MN$, $\triangle ABC$ вращается вокруг MN .

Найти: площадь поверхности тела вращения.

Решение:

Поверхность тела вращения состоит из поверхностей усеченного конуса и двух конусов. Обозначим поверхность усеченного конуса I, ее площадь равна (см. рисунок)



$$S_1 = \pi \cdot AC \cdot (AK + CP).$$

$$\text{Площади двух конусов: } S_{II} = \pi \cdot KA \cdot AB; S_{III} = \pi \cdot BC \cdot PC.$$

Из равнобедренного $\triangle ABC$:

$$AC^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos 120^\circ = 2a^2 + a^2 = 3a^2; AC = \sqrt{3} \cdot a.$$

$$\text{В } \triangle ABC: \angle A = 30^\circ \Rightarrow \angle BAD = \angle KBA = 15^\circ$$

$$\angle PBC = 180^\circ - \angle KBA - \angle ABC = 180^\circ - 15^\circ - 120^\circ = 45^\circ$$

$$\text{Из прямоугольного } \triangle BPC: BP = PC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Из прямоугольного } \triangle BKA: KA = a \sin 15^\circ.$$

$$S = S_1 + S_{II} + S_{III} = \pi \cdot a\sqrt{3} \left(a \sin 15^\circ + \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) + \left(\pi a \sin 15^\circ \cdot a + \pi \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) =$$

$$= \pi a^2 (\sqrt{3} + 1) \left(\sin 15^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

$$\text{Ответ: } \pi a^2 (\sqrt{3} + 1) \left(\sin 15^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

2. Дано: $OABCDE$ — правильная пятиугольная пирамида, $HF \perp CD$, $OF \perp CD$. $\angle HCO = \varphi$. В $OABCDE$ вписан конус, образующая $OF = m$.

Найти: площадь осевого сечения конуса.

Решение:

$$\angle CHF = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} = \beta$$

Пусть $\angle HOF = \alpha$, тогда из $\triangle OH = m \cos \alpha$

$$HF = m \sin \alpha$$

$$\text{Из } \triangle HFC \quad HC = \frac{HF}{\cos \beta} = \frac{m \sin \alpha}{\cos \beta}$$

$$FC = HF \cdot \operatorname{tg} \beta = m \sin \alpha \operatorname{tg} \beta$$

Из прямоугольного $\triangle OHC$

$$OC = \frac{OH}{\sin \varphi} = \frac{m \cos \alpha}{\sin \varphi} \quad (1)$$

Из прямоугольного $\triangle OCF$

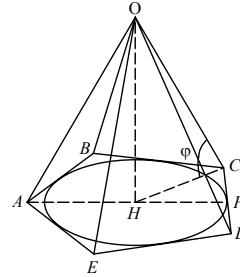
$$OC = \sqrt{OF^2 + FC^2} = \sqrt{m^2 + m^2 \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta} \quad (2)$$

Приравняв (1) и (2) имеем

$$\frac{m^2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \varphi} = m^2 (1 + \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \varphi} = 1 + \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta$$

$$\sin^2 \alpha \left(\operatorname{tg}^2 \beta + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \right) = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}$$



$$\sin^2 \alpha = \frac{\cos^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \varphi + 1} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \varphi + 1}$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{m^2}{2} \cdot \sin(2\angle HOF) = \frac{m^2}{2} \sin 2\alpha =$$

$$= m^2 \sqrt{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \frac{m^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{(\operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \varphi + 1)} = \frac{m^2 \cos \varphi \sin \varphi}{\left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{5} \sin^2 \varphi + 1\right) \cos \frac{\pi}{5}}$$

Ответ: $\frac{m^2 \cos \varphi \sin \varphi}{\left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{5} \sin^2 \varphi + 1\right) \cos \frac{\pi}{5}}.$

С—10

1. Дано: сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $A \in$ сфере, $A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, z)$, $B(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $AB \cap$ сферу = A, C .

Найти: координаты точек A, C .

Решение:

Условие того, что $A \in$ сфере, равносильно условию

$$(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + z^2 = 4 \text{ или } z = 0.$$

$$A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

C лежит на прямой $AB \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$. Пусть $M(x, y, z)$

$$\begin{cases} x - \sqrt{2} = -2k\sqrt{2} \\ y - \sqrt{2} = k\sqrt{2} \\ z = k\sqrt{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt{2} - 2k\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} + k\sqrt{2} \\ z = k\sqrt{2} \end{cases}.$$

C также лежит на сфере \Rightarrow

$$(\sqrt{2} - 2k\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} + k\sqrt{2})^2 + (k\sqrt{2})^2 = 4;$$

$$2 - 8k + 8k^2 + 2 + 4k + 2k^2 + 2k^2 = 4; 12k^2 - 4k = 0; 3k^2 - k = 0;$$

$$k = 0, k = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ y = \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ z = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}; C\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right); A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0).$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ и $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$.

2. Дано: $A, B, C \in \alpha$, $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, 1)$, сфера $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{169}$.

Определить, пересекает ли α сферу.

Решение:

$$\overrightarrow{AB}(-3, 4, 0), \overrightarrow{AC}(-3, 0, 1).$$

Найдем координаты вектора $\vec{n} \perp \alpha$.

α .

$$(\vec{n}, \overrightarrow{AB}) = -3x + 4y = 0; (\vec{n}, \overrightarrow{AC}) = -3x + z = 0.$$

$$\vec{n}\left(1, \frac{3}{4}, 3\right); |\vec{n}| = \frac{13}{4}.$$

$$\vec{n}_1\left(\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{12}{13}\right); |\vec{n}_1| = 1.$$

\vec{n} и \vec{n}_1 сонаправлены.

Радиус сферы $\overrightarrow{O_1N}$ имеет длину $\frac{7}{13}$.

Опустим перпендикуляр OK из начала координат на плоскость α .

$$\overrightarrow{OK} = k\vec{n}_1 = \left(k\frac{4}{13}, k\frac{3}{13}, k\frac{12}{13}\right).$$

Точки A, B, C принадлежат плоскости α , заданной уравнением $Px + Qy + Rz = S$.

$$\begin{matrix} A: \\ B: \\ C: \end{matrix} \begin{cases} 3P = S \\ 4Q = S \\ R = S = 12T \end{cases}; \begin{cases} P = \frac{S}{3} = 4T \\ Q = \frac{S}{4} = 3T \\ R = S = 12T \end{cases}.$$

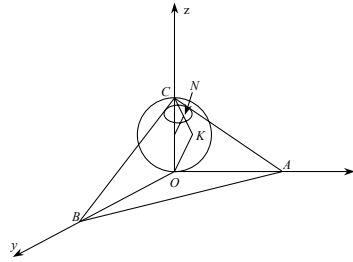
Значит, уравнение плоскости: $4x + 3y + 12z = 12$.

Точка K принадлежит α :

$$4k \cdot \frac{4}{13} + k \frac{9}{13} + k \frac{144}{13} = 12.$$

$$13k = 12; k = \frac{12}{13} \text{ — длина } \overrightarrow{OK}.$$

Следовательно, средняя линия $O_1K_1 \triangle OKC$: $O_1K_1 = \frac{6}{13} < \frac{7}{13} = O_1N \Rightarrow$ плоскость α пересекает окружность.



$$\text{Получившееся сечение — круг с радиусом } r = \sqrt{\left(\frac{7}{13}\right)^2 - \left(\frac{6}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{13} \Rightarrow$$

$$\text{линия пересечения — окружность, длина ее равна } l = 2\pi \frac{\sqrt{13}}{13}.$$

С—11

1. Дано: шар (O, R) , два его сечения (O_1, R_1) , (O_2, R_2) , $(O_1, R_1) \perp (O_2, R_2)$, $S((O_1, R_1)) = 100\pi$, $S((O_2, R_2)) = 64\pi$, сечения имеют общую хорду $MN = 12$.

Найти: R .

Решение:

$$R_1 = \sqrt{100} = 10; R_2 = \sqrt{64} = 8.$$

В прямоугольном $\triangle O_2PM$ катет O_2P равен:

$$O_2P = \sqrt{O_2M^2 - MP^2} = \sqrt{64 - 36} = 2\sqrt{7}.$$

Из прямоугольного $\triangle O_1PM$ находим катет O_1P :

$$O_1P = \sqrt{OM^2 - O_1P^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 = OO_2 \text{ (т.к. } OO_2PO_1 \text{ — прямоуголь-}$$

ник) \Rightarrow в прямоугольном $\triangle AOO_2$ катеты $OO_2 = 2$, $AO_2 = 8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow R = AO = \sqrt{64 + 64} = 8\sqrt{2}.$$

2. Дано: конус и полушар с общим основанием, плоскость $\alpha \parallel$ основанию, $OA = R$, площадь сечения (кольца) наибольшая, $\angle ABC = 90^\circ$.

Найти: h — расстояние от α до основания.

Решение:

Высота конуса $BH = R = HC$.

Введем прямоугольную систему координат и рассмотрим осевое сечение фигуры плоскостью xOy .

Найдем площади S_1 и S_2 кругов с радиусами PR и PN . $PR = PB = R - h$.

Точка N лежит на круге радиуса R , тогда $PN^2 + h^2 = R^2$, $PN^2 = R^2 - h^2$.

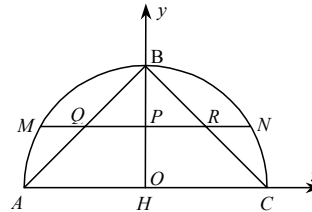
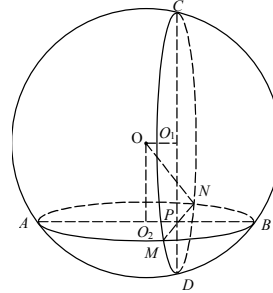
Площадь кольца равна:

$$S = S_2 - S_1 = \pi(R^2 - h^2) - \pi(R - h)^2 = \pi R^2 - \pi h^2 - \pi R^2 + 2\pi Rh - \pi h^2 = 2\pi Rh - 2\pi h^2, 0 < h < R.$$

$S = 2\pi h(R - h)$ — найдем максимум этой величины:

$$S'(h) = 2\pi(R - h) - 2\pi h = 2\pi R - 4\pi h.$$

$$S'(h) = 0; R = 2h \text{ — точка максимума } \Rightarrow h = \frac{R}{2}.$$



C—12

1. Дано: шар (O, R) . В шар вписана пирамида $EABCD$, $ABCD$ — квадрат, $EA \perp (ABCD)$, $\angle ECA = 30^\circ$.

Найти: S боковой поверхности $EABCD$.

Решение:

$\triangle EAC$ — прямоугольный $\Rightarrow \angle EAC$ опирается на диаметр $EC = 2R$, $\angle ECA = 30^\circ \Rightarrow AE = R$;

$$AC = 2R \cos 30^\circ = 2R \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}R.$$

$$\text{Площадь } S(ABCD) = \frac{1}{2} AC^2 = \frac{3}{4} R^2. \quad AB = AC$$

$$\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} R.$$

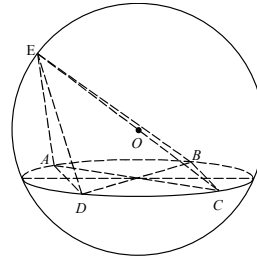
Из равных прямоугольных $\triangle EAD = \triangle EAB$:

$$ED = EB = \sqrt{R^2 + \frac{6}{4} R^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} R \Rightarrow S(EDC) = S(EBC) = \frac{1}{2} DC \cdot ED =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} R = \frac{2\sqrt{15}}{8} R^2 = \frac{\sqrt{15}}{4} R^2.$$

$$S_{\text{бок}} = 2S(EDC) + 2S(EAD) = \frac{\sqrt{15}}{2} R^2 + \frac{2}{2} EA \cdot AD =$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{2} R^2 + R \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} R = R^2 \left(\frac{\sqrt{15} + \sqrt{6}}{2} \right) = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} (\sqrt{5} + \sqrt{2}).$$



2. Дано: около шара описана правильная треугольная усеченная пирамида $ABCA_1B_1C_1$, $AB = a$, $A_1B_1 = b$.

Найти: $S_{\text{бок}}(ABCA_1B_1C_1)$.

Решение:

Рассмотрим сечение MNB , образованное двумя высотами C_1M и BN равнобедренных $\triangle A_1C_1B_1$ и $\triangle ACB$. Т.к. B_1M и BN — медианы, высоты и биссектрисы, то точки O_2 и O_1 делят их в отношении $2 : 1 \Rightarrow$ т.к.

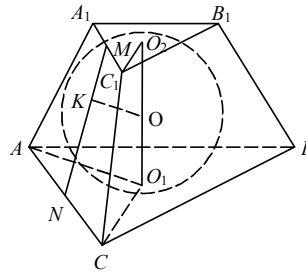
$$B_1M = \frac{b\sqrt{3}}{2}, \quad BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad \text{то } MO_2 = \frac{b\sqrt{3}}{6},$$

$$O_1N = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Проведем перпендикуляр OK к стороне MN трапеции O_2MNO_1 .

$MO_2 = MK$, $KN = NO_1$ (как отрезки касательных) \Rightarrow

$$MN = MO_2 + NO_1 = (a + b) \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad MN \text{ — высота трапеции } AA_1C_1C \Rightarrow$$



$$S_{\text{бок}}(ABCA_1B_1C_1) = \frac{3}{2}(a+b) \cdot MN = \frac{3}{2}(a+b)(a+b) \frac{\sqrt{3}}{6} = (a+b)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $(a+b)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$.

С—13

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $E, F \in BB_1$, $(AFC) \parallel B_1 D$, $AB = 6$, $BC = 8$. $FH \perp AC$, $\angle FHB = 45^\circ$.

Найти: $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$.

Решение:

$$AC \cap BD = E$$

Из

$$BH = \frac{2S(ABC)}{AC} = \frac{AB \cdot BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{48}{10} = 4,8$$

$$\text{Из } \triangle FBH \text{ } FB = BH = 4,8$$

Но в $\triangle B_1 BD$ FE — средняя линия $\Rightarrow B_1 B = 2BF = 9,6 \Rightarrow V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1) = AB \cdot BC \cdot BB_1 = 6 \cdot 8 \cdot 9,6 = 48 \cdot 48 \cdot 0,2 = 460,8$

Ответ: 460,8.

2. Дано: $ABCA_1 B_1 C_1$ — прямая призма, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = a = CB$, $CD \perp AB$, $\angle CB_1 D = \alpha$.

Найти: $V(ABCA_1 B_1 C_1)$.

Решение:

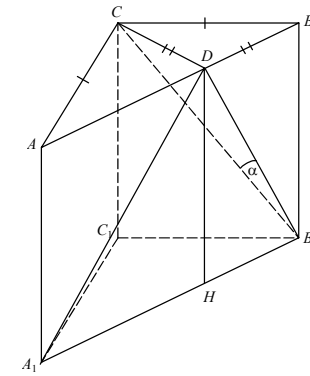
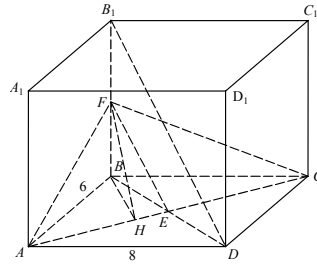
α — угол между CB_1 и $AA_1 B_1 B$, т.к. CD — перпендикуляр к $ABB_1 A_1$ ($CD \perp$ линии AB пересечения перпендикулярных плоскостей CAB и $AA_1 B_1 B$).

$$CD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + CB^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a = BD = B_1 H, \text{ где } DH \text{ — высота } \triangle A_1 D B_1.$$

$$\text{Из прямоугольного } \triangle CDB_1: DB_1 = \frac{CD}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{a\sqrt{2}}{2\operatorname{tg} \alpha}.$$

$$\text{Из прямоугольного } \triangle DHB_1: DH = \sqrt{DB_1^2 - HB_1^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2\operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{a^2}{2}} =$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{-\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}{\operatorname{tg} \alpha} = BB_1.$$



$$V(ABCA_1B_1C_1) = \frac{1}{2} AC \cdot CB \cdot BB_1 = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha} \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{a^3 \sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha}}{\sin \alpha}.$$

C-14.

1. Дано: $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ — правильная шестиугольная призма, $B_1 F = 24$, $B_1 E = 25$.

Найти: $V(ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1)$.

Решение:

Пусть высота пирамиды h , а стороны основания a , тогда в осевом сечении $E_1 E B_1 B$ имеем

$$25 = B_1 E = \sqrt{h^2 + 4a^2} \quad (1)$$

Из равнобедренного $\triangle BOF$:

$$BF^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos 120^\circ = 2a^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3a^2.$$

Из сечения $B_1 B F F_1$:

$$24 = B_1 F^2 = BF^2 + h^2 = 3a^2 + h^2$$

(2)

Составим систему (1):

$$\begin{cases} 25^2 = h^2 + 4a^2; \\ 24^2 = h^2 + 3a^2; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 25^2 - 24^2; \\ h^2 = 24^2 - 3a^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 7 \\ h = \sqrt{429} = \sqrt{143 \cdot 3}. \end{cases}$$

$$V = 6 \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot h = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot h = \frac{9}{2} \cdot 49 \cdot \sqrt{143} = \frac{441\sqrt{143}}{2}.$$

2. Дано: цилиндр, сечение $AA_1 BB_1 \parallel$ оси $O_1 O_2$, $\angle BO_1 A = 120^\circ$.

Найти: отношение объемов частей цилиндра.

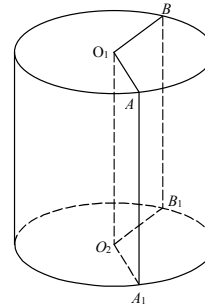
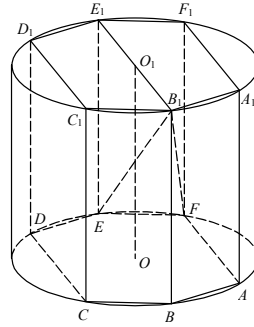
Решение:

Найдем площадь большего сегмента.

$$S_1 = \frac{2\pi - \frac{2\pi}{3}}{2\pi} \cdot R^2 \pi + \frac{1}{2} R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R^2 \left(\frac{2}{3} \pi R^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

$$S_2 = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{3} \pi R^2 - \frac{1}{2} R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{2}{3} \pi + \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}}.$$



С—15

1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная призма, $\triangle ABC$ — равносторонний, $AA_1 = AB$, $\angle AA_1C_1 = 45^\circ$, $S_{\text{бок}}(ABCA_1B_1C_1) = 4(1 + \sqrt{2})$.

Найти: $V(ABCA_1B_1C_1)$.

Решение:

Пусть сторона призмы равна a , тогда

$$S_{\text{бок}} = S(A_1ACC_1) + S(A_1ABB_1) + S(BB_1C_1C) = \\ = a^2 \sin 45^\circ + a^2 \sin 45^\circ + a^2.$$

$$S_{\text{бок}} = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} + a^2 = a^2 \left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right)$$

(BB_1C_1C — квадрат).

$$\text{Значит, } a^2 \left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = 4(1 + \sqrt{2}); a^2 = 4,$$

$$a = 2.$$

Проведем C_1E и $B_1E \perp A_1A$. Сечение $C_1EB_1 \perp A_1A$.

$$\text{Из прямоугольного } \triangle A_1EC_1: C_1E = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$B_1E = \sqrt{2}.$$

Вычислим по формуле Герона $S(B_1EC_1)$

$$p = \sqrt{2} + 1;$$

$$S(A_1EC_1) = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} \cdot 1 = 1.$$

$$V = A_1A \cdot S(A_1EC_1) = 2.$$

Ответ: 2.

2. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная треугольная призма. Расстояние от B_1B до A_1C равно 5, $S(AA_1C_1C) = 40$.

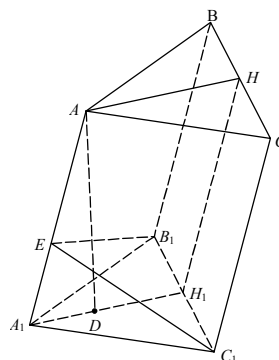
Найти: $V(ABCA_1B_1C_1)$.

Решение:

Расстояние от B_1B до A_1C есть расстояние от B_1B до (AA_1C_1C) , т.к. $A_1C \in (AA_1C_1C)$ и $AA_1C_1C \parallel B_1B$.

Пусть d — расстояние от B_1B до AA_1C_1C , $BB_1 = l$. Построим сечение призмы, перпендикулярное B_1B . Пусть сторона сечения, противолежащая B_1B , равна m , тогда

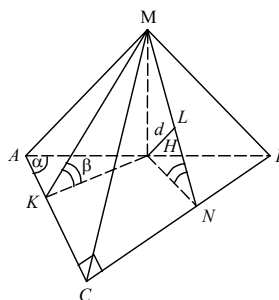
$$V = S_{\text{перп сеч}} \cdot l = \frac{1}{2} d \cdot m \cdot l = \frac{1}{2} d S(AA_1C_1C) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 40 = 100.$$



С—16

1. Дано: $MABC$ — пирамида, $\angle ACB = 90^\circ$, $(MAB) \perp (ABC)$, $MH \perp (ABC)$, $H \in AB$, $MK \perp AC$, $MN \perp CB$, $K \in AC$, $N \in CB$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle MKH = \angle MNH = \beta$, $HL \perp MCB$, $L \in (MCB)$, $LH = d$.

78



Найти: $V(MABC)$.

Решение:

$L \in MN$, т.к. HL — перпендикуляр к (MCB) и $(MHN) \perp (MCB)$ (т.к. $\angle MNH$ — угол между плоскостями) \Rightarrow из $\triangle LHN$ (прямоугольного)

$$HN = \frac{HL}{\sin \beta} = \frac{d}{\sin \beta} = KH. \text{ Т.к. } \triangle KHM = \triangle NHM.$$

$$\text{Из прямоугольного } \triangle MHN: MH = HN \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{d}{\cos \beta}.$$

$\triangle AKH \sim \triangle ACB \sim \triangle HNB$ по двум углам, поскольку $(HK \perp AC, HN \perp CB, AC \perp CB \Rightarrow KH \parallel CB, HN \parallel AC)$, а также $KC = CN = NH = HK$.

$$\text{Из прямоугольного } \triangle AKH: AK = KH \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{d}{\sin \beta} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\Rightarrow AC = AK + KC = \frac{d}{\sin \beta} (\operatorname{ctg} \alpha + 1).$$

$$\text{Из прямоугольного } \triangle ACB: CB = AC \cdot \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \frac{d}{\sin \beta} (\operatorname{ctg} \alpha + 1) \operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{\sin \beta} (1 + \operatorname{tg} \alpha)$$

$$\Rightarrow V(MABC) = \frac{1}{3} \cdot MH \cdot S(ABC) = \frac{1}{3} \cdot MH \cdot \frac{1}{2} AC \cdot CB =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{d}{\cos \beta} \cdot \frac{d}{\sin \beta} (\operatorname{ctg} \alpha + 1) \cdot \frac{d}{\sin \beta} (1 + \operatorname{tg} \alpha) =$$

$$= \frac{d^3}{6} \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha + 1}{\cos \beta \sin^2 \beta} = \frac{d^3}{6} \frac{2 + \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}}{\cos \beta \sin^2 \beta} = \frac{d^3 (\sin 2\alpha + 1)}{3 \cos \beta \sin^2 \beta \sin 2\alpha}$$

$$\text{Ответ: } \frac{d^3 (\sin 2\alpha + 1)}{3 \cos \beta \sin^2 \beta \sin 2\alpha}.$$

2. Дано: $DABC$ — правильная пирамида, $AB = a$, $H \in AD$, $BH \perp AD$, $CH \perp AD$, $\angle BHC = \alpha$.

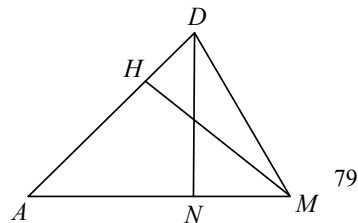
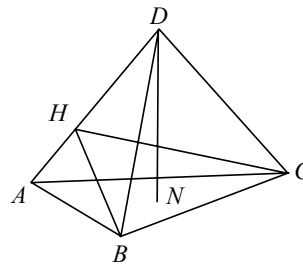
Найти: $V(DABC)$.

Решение:

$\triangle AHB = \triangle AHC$ (по катету и гипотенузе) $\Rightarrow HB = HC$.

Из равнобедренного $\triangle BHC$ по теореме косинусов:

$$a^2 = HB^2 (2 - 2 \cos \alpha); \quad HB^2 = \frac{a^2}{2(1 - \cos \alpha)}.$$



$$S(BHC) = \frac{1}{2} HB^2 \cdot \sin \alpha = \frac{a^2 \sin \alpha}{4(1 - \cos \alpha)} =$$

$$= \frac{1}{2} BC \cdot HM \Rightarrow HM = \frac{a \sin \alpha}{2(1 - \cos \alpha)}$$

Объем пирамиды равен сумме объемов пирамид $AHBC$ и $DHBC$.

$$V = V(AHBC) + V(DHBC) = \frac{1}{3} AH \cdot S(HBC) + \frac{1}{3} DH \cdot S(HBC) = \frac{1}{3} S(HBC) \cdot$$

AD .

Рассмотрим сечение ADM пирамиды, проходящей через высоту DN . Точка M — середина BC , т.к. $\triangle ABC$ — равносторонний, AM — высота

$$\triangle ABC, AM = \frac{\sqrt{3}}{2} a. N — \text{также точка пересечения медиан } \triangle ABC \Rightarrow AN =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} a, NM = \frac{\sqrt{3}}{6} a.$$

$$\text{Из прямоугольного } \triangle AHM: AH^2 = AM^2 - HM^2 =$$

$$= \frac{3}{4} a^2 - \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{4(1 - \cos \alpha)^2} = \frac{a^2}{4} \frac{3 - 6 \cos \alpha + 3 \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2} =$$

$$= \frac{a^2}{4} \frac{(2 - 6 \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha)}{(1 - \cos \alpha)^2} = \frac{a^2}{2} \frac{1 - 3 \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2}.$$

$$AH = \frac{a \sqrt{2} \sqrt{1 - 3 \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}}{2(1 - \cos \alpha)}.$$

$$\triangle AHM \sim \triangle AND \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{AH}{AN} \Rightarrow AD = \frac{AM \cdot AN}{AH} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} a \cdot \sqrt{3} a \cdot 2(1 - \cos \alpha)}{2 \cdot 3 \cdot a \sqrt{2} \sqrt{1 - 3 \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}} = \frac{a(1 - \cos \alpha)}{\sqrt{2} \sqrt{1 - 3 \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}}.$$

$$\text{Из прямоугольных } \triangle AHM \text{ и } \triangle AND: \operatorname{tg} \angle A = \frac{HM}{AH} = \frac{DN}{AN} \Rightarrow$$

$$DN = \frac{HM \cdot AN}{AH} = \frac{\sqrt{\frac{a^2}{2(1 - \cos \alpha)} - \frac{a^2}{4}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} a}{\sqrt{\frac{a^2(1 - 2 \cos \alpha)}{2(1 - \cos \alpha)}}} = \frac{\sqrt{3}}{3} a \frac{\sqrt{2 \cos \alpha}}{\sqrt{1 - 2 \cos \alpha}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6 \cos \alpha}}{3 \sqrt{1 - 2 \cos \alpha}} \cdot a.$$

Теперь из прямоугольного $\triangle AND$:

$$AD = \sqrt{AN^2 + DN^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{6 \cos \alpha \cdot a^2}{9(1 - 2 \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{2a^2 \cos \alpha}{3(1 - 2 \cos \alpha)}} =$$

$$= a \sqrt{\frac{3}{3(1-2\cos\alpha)}} = a \frac{1}{\sqrt{1-2\cos\alpha}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Окончательно } V &= \frac{1}{3} S(HBC) \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sin\alpha}{4(1-\cos\alpha)} \cdot \frac{a}{\sqrt{1-2\cos\alpha}} = \\ &= \frac{a^3 \sin\alpha}{12(1-\cos\alpha)\sqrt{1-2\cos\alpha}}. \end{aligned}$$

С—17

1. Дано: два конуса, основания параллельны, вершины каждого лежат в центре основания другого, образующая первого равна $a = O_2C$, $\angle O_1O_2C = \beta$, $\angle AO_1D = \alpha$.

Найти: объем общей части конусов.

Решение:

Искомый объем равен сумме объемов, получившихся при пересечении поверхностей конусов

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_{\text{круга}} \cdot O_1P + \frac{1}{3} S_{\text{круга}} \cdot O_2P \\ &= \frac{1}{3} S_{\text{круга}} (O_1P + O_2P) = \frac{1}{3} S_{\text{круга}} \cdot O_1O_2, \text{ где под кругом понимается круг, полу-} \\ &\text{ченный при пересечении конических поверхностей.} \end{aligned}$$

Радиус основания первого конуса $O_1C = O_2C \cdot \sin\beta = a \sin\beta$, а высота $O_1O_2 = a \cos\beta$.

Наибольший угол между образующими второго конуса — угол между образующими в осевом его сечении.

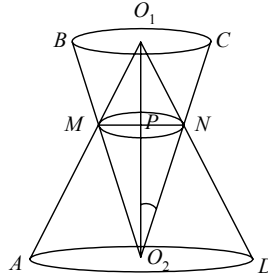
Рассмотрим осевое сечение нашей фигуры: в нем первая образующая $O_1D \cap O_2D$, вторую образующую — в т. N .

$$\begin{aligned} \text{В } \triangle O_1O_2N \angle O_1O_2N = \beta, \angle O_2O_1N = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle O_1NO_2 = 180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2}, O_1O_2 = \\ = a \cos\beta. \end{aligned}$$

По теореме синусов имеем:

$$\begin{aligned} \frac{O_1N}{\sin\beta} &= \frac{O_1O_2}{\sin\left(180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2}\right)} \\ \Rightarrow O_1N &= \frac{O_1O_2 \cdot \sin\beta}{\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a \cos\beta \sin\beta}{\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Из прямоугольного $\triangle O_1PN$:



$$PN = O_1N \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a \cos \beta \sin \beta \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right)} = R.$$

Окончательно получим:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot O_1O_2 = \frac{1}{3} \pi \frac{a^2 \cos^2 \beta \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right)} \cdot a \cos \beta =$$

$$= \frac{\pi a^3 \sin^2 \beta \cos^3 \beta \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3 \sin^2 \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{\pi a^3 \sin^2 2\beta \cdot \cos \beta \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{12 \sin^2 \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

2. Дано: $EABCD$ — пирамида

$ABCD$ — трапеция

$AD \parallel BC$ $AD = 10$

$BC = 20$

$AB = DC = 10$

Около $EABCD$ описан конус, $V_{\text{конуса}}$

$$= \frac{1000\pi\sqrt{3}}{3}$$

EO — высота

Найти $\alpha = \angle EAO = \angle EBO$

Решение:

$$V_{\text{конуса}} = \frac{\pi h}{3} \cdot R^2 = \frac{1000\pi\sqrt{3}}{3}$$

$$hR^2 = 1000\sqrt{3}$$

$$\text{Опустим на } BC \text{ высоту } AH, BH = \frac{BC - AD}{2} = 5 \Rightarrow$$

В прямоугольном $\triangle AHB$ $\angle BAH = 30^\circ$

$$\Rightarrow AH = 10 \cdot \cos 30^\circ = 5\sqrt{3} \Rightarrow \angle HBA = 60^\circ$$

$$\text{В } \triangle HAC \quad HC = BC - BH = 15 \Rightarrow AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} =$$

$$= \sqrt{100 + 225} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$$

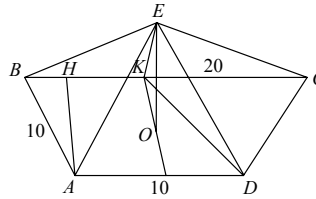
$$S(ABC) = \frac{1}{2} BC \cdot AH = 50\sqrt{3} = \frac{abc}{4R}$$

Но тогда, трапеция $ABCD$ составлена из трех равносторонних $\triangle BAK$, $\triangle AKD$, $\triangle KDC$. $\Rightarrow BK = AK = KD = KC = 10 = R$

K — центр основания конуса.

$$\text{В } \triangle EKA \quad EK = h = R \tan \alpha \Rightarrow hR^2 = R^3 \tan \alpha = 1000\sqrt{3} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{3}$$

$$\alpha = 60^\circ.$$



Ответ: 60° .

C—18

1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — усеченная призма, $AB = BC = CA = 12$, $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1 = 4$, $(AA_1B_1B) \perp (ABC)$, $D \in BC$, $E \in AC$, $C_1D \perp BC$, $C_1E \perp AC$, $H \in (ABC)$, $\angle C_1DH = \angle C_1EH = 60^\circ$, $C_1H \perp (ABC)$.

Найти: $V_{\text{пирамиды}}$.

Решение:

Проведем высоту FG через середины F и G сторон A_1B_1 и AB . Проведем также $FI \perp B_1C_1$, $GJ \perp BC$. $\angle IJG$ — угол между (B_1C_1CB) и (ABC) , равный 60° . $FB_1 = 2$, $GB = 6$.

Из прямоугольных $\triangle FIB_1$ и $\triangle GJB$:

$$FI = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \quad GJ = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

В прямоугольной трапеции $FGJI$ опустим высоту IL , тогда $LJ = 2\sqrt{3}$. Высота $IL = LJ \cdot \sqrt{3} = 6$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{\text{конуса}} &= \frac{1}{3}LI(S(A_1B_1C_1) + S(ABC)) \\ &+ \sqrt{S(A_1B_1C_1) \cdot S(ABC)} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 6(2\sqrt{3} \cdot 2 + 6\sqrt{3} \cdot 6 + \sqrt{6^2 \cdot 2^2 \cdot 3}) = 2(4 \\ &+ 36 + 12)\sqrt{3} = 104\sqrt{3}. \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $104\sqrt{3}$.

2. Дано: $ABCD$ — параллелограмм,
 $AK \parallel BD$ — ось вращения, $\angle BAD = 60^\circ$,
 $AB = 6$, $BD \perp BC$.

Найти: $V_{\text{тела вращения}}$.

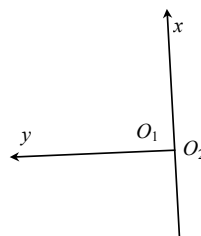
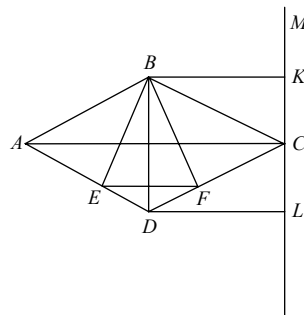
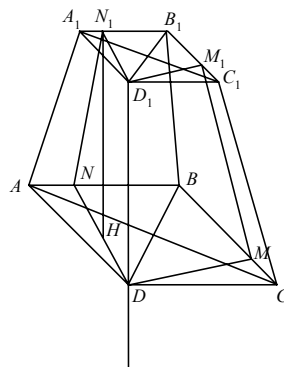
Решение:

Из прямоугольного $\triangle ABD$:

$$\angle ABD = 30^\circ, AD = 3, BD = 3\sqrt{3}, AD = BK = BC = 3.$$

Искомый объем равен разности объемов усеченного конуса с радиусами оснований $AD = 3$ и $KC = 6$ и конуса с вершиной A и радиусом основания KD .

$$\begin{aligned} V_{\text{т. вр}} &= \frac{1}{3} BD(\pi \cdot AD^2 + \pi \cdot KC^2 + \pi \cdot AD \cdot KC \\ &- \pi \cdot KB^2) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \pi(9 + 36 + 18 - 9) = 54\sqrt{3}\pi. \end{aligned}$$



Ответ: $54\sqrt{3}\pi$.

С—19

1. Дано: шар (O_1, R_1) , (O_2, R_2) , $R_1 = 13$, $R_2 = 20$, $O_1O_2 = 21$.

Найти: объем общей части шаров.

Решение:

Пусть точка M принадлежит обеим сферам.

В $\triangle O_1MO_2$: $O_1M = 13$, $O_2M = 20$, $O_1O_2 = 21$.

$$P = \frac{20 + 13 + 21}{2} = 27.$$

$$S(O_1MO_2) = \sqrt{27 \cdot 6 \cdot 14 \cdot 7} = 7 \cdot 9 \cdot 2 = 126 = \frac{1}{2} O_1O_2 \cdot MH = \frac{21}{2} MH \Rightarrow MH = \frac{126}{21} \cdot 2 = 12.$$

$$\text{В прямоугольном } \triangle O_1HM: \sin \angle HO_1M = \frac{MH}{O_1M} = \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow \cos \angle HO_1M = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow O_1H = O_1M \cdot \cos \angle HO_1M = 13 \cdot \frac{5}{13} = 5$$

$$\Rightarrow HO_2 = O_1O_2 - O_1H = 21 - 5 = 16.$$

Найдем теперь объемы шаровых сегментов и сложим их.

$$V_1 = \pi(13-5)^2 \left(13 - \frac{8}{3}\right) = 64\pi \frac{31}{3}.$$

$$V_2 = \pi(5-1)^2 \left(20 - \frac{4}{3}\right) = 16\pi \frac{56}{3}.$$

$$V = \frac{\pi}{3} (64 \cdot 31 + 16 \cdot 56) = 16\pi \cdot 60 = 960\pi.$$

Ответ: 960π .

2. Дано: в конус вписан шар, $\frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{шара}}} = 2\frac{1}{4}$.

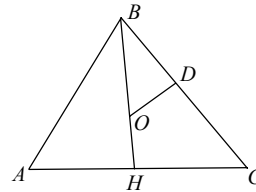
Найти: угол наклона образующей.

Решение:

Рассмотрим $\triangle ABC$ — осевое сечение конуса.

$\triangle AHB \sim \triangle DMB$. Пусть $AH = r$, $OM = OH = R$, $BH = H$.

Пусть φ — величина угла между образующей конуса и основанием, тогда $H = R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi$, $V = R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$.



$$\text{Тогда } V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{\pi R^3 \operatorname{tg} \varphi}{3 \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2}} = \frac{2\pi R^3}{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3, \text{ т.к. } \frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{9}{4}, \text{ то } \frac{2\pi R^3}{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3.$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = x > 0, \text{ тогда } 9x^2 - 9x + 2 = 0; x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ значит, } \varphi = 60^\circ \text{ и } \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

ДС

1. Дано: плоскость $\alpha: x + y - z - 2 = 0$, точка $A(1, 1, 1)$, A_1 симметрична A относительно α .

Найти: координаты A_1 .

Решение:

Возьмем точки B, C, D в α :

$B(0, 2, 0), C(2, 0, 0), D(0, 0, -2), \overrightarrow{BC}(2, -2, 0), \overrightarrow{BD}(0, -2, -2)$, вектор $\vec{n} \perp$

$\alpha \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{BC}, \vec{n} \perp \overrightarrow{BD}, \vec{n}(x, y, z)$.

$$\begin{cases} (\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC}) = 0 \\ (\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD}) = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = y \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow \vec{n}(1, 1, -1).$$

$$\overrightarrow{AA_1} \parallel \vec{n}, \overrightarrow{AA_1} = k \cdot \vec{n},$$

пусть $A_1(x_0, y_0, z_0)$, тогда $\overrightarrow{AA_1}(x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 - 1)$

$$\begin{cases} x_0 - 1 = k \cdot 1 \\ y_0 - 1 = k \cdot 1 \\ z_0 - 1 = k \cdot (-1) \end{cases}, \begin{cases} x_0 = k + 1 \\ y_0 = k + 1 \\ z_0 = 1 - k \end{cases}.$$

Точка $O(x_1, y_1, z_1)$ — середина отрезка AA_1 , $O \in$ плоскости α .

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} k \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} k \cdot \overrightarrow{AA_1}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} k + 1 \\ y_1 = \frac{1}{2} k + 1 \\ z_1 = 1 - \frac{1}{2} k \end{cases}.$$

Координаты O удовлетворяют уравнению плоскости α

$$\left(\frac{1}{2} k + 1\right) + \left(\frac{1}{2} k + 1\right) - \left(1 - \frac{1}{2} k\right) - 2 = 0$$

$$\frac{3}{2}k - 1 = 0, k = \frac{2}{3}. \text{ Значит,}$$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{2}{3} + 1 \\ y_0 = \frac{2}{3} + 1 \\ z_0 = 1 - \frac{2}{3} \end{cases}, \begin{cases} x_0 = 1 - \frac{2}{3} \\ y_0 = 1 - \frac{2}{3} \\ z_0 = \frac{1}{3} \end{cases}, A_1 \left(1 - \frac{2}{3}, 1 - \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

2. Дано: плоскость α , $M \in \alpha$, $M(1, 1, -2)$, $\alpha \cap xOy = \text{прямая } a \begin{cases} y - x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

Написать уравнение плоскости α .

Решение:

Возьмем на прямой a две точки $P(1, 2, 0)$ и $Q(0, 1, 0)$.

Как известно, точки M, P, Q удовлетворяют уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$ плоскости.

$$\begin{cases} 1 \cdot A + 1 \cdot B - 2C + D = 0 \\ 1 \cdot A + 2B + D = 0 \\ B + D = 0 \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} C = \frac{1}{2}D \\ A = \frac{2}{2}D \\ B = -D \end{cases}.$$

Значит, уравнение плоскости α :

$$Dx - Dy + \frac{1}{2}Dz + D = 0 \text{ или}$$

$$2x - 2y + z + 2 = 0.$$

Вариант 6

С—1

1. Дано: $DABC$ — правильная пирамида, $AB = 2$, $\angle DEO = 60^\circ = \beta$.

Найти: 1) координаты точек D, A, B, C ; 2) координаты вектора \overrightarrow{OK} и разложить его по $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Решение:

1) Точки $A, B, C, \in xOy \Rightarrow z = 0$. $BE = AB \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Точка O делит BE в отношении 2 : 1
 $\Rightarrow OB = \frac{2\sqrt{3}}{3}, EO = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Значит, $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1, 0\right), C\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, 0\right), B\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right)$.

Из прямоугольного $\triangle EOD$: $OD = EO \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 1 \Rightarrow D(0, 0, 1)$.

2) Точка $O(0, 0, 0)$, $\overrightarrow{AD} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, 1\right), AD = \sqrt{\frac{1}{3} + 1 + 1} = \sqrt{\frac{7}{3}}$,

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \sqrt{\frac{4}{3}}, \triangle AKO \sim \triangle AOD \text{ (по двум углам)} \Rightarrow \frac{AK}{AO} = \frac{AO}{AD} \Rightarrow AK = \frac{AO \cdot AO}{AD} = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}.$$

Но \overrightarrow{AK} и \overrightarrow{AD} коллинеарны $\Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{3} \overrightarrow{AD} = \frac{4}{7} \overrightarrow{AD} =$

$$= \left(-\frac{4\sqrt{3}}{21}, \frac{4}{7}, \frac{4}{7}\right) \Rightarrow K\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{21}, -1 + \frac{4}{7}, \frac{4}{7}\right), K\left(\frac{\sqrt{3}}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right).$$

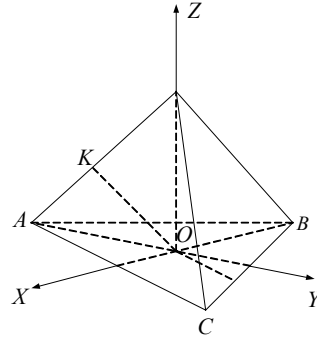
$$\overrightarrow{OK} = \left(\frac{\sqrt{3}}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right) = \frac{\sqrt{3}}{7} \vec{i} - \frac{3}{7} \vec{j} + \frac{4}{7} \vec{k}.$$

2. Дано: $\vec{m} \{2, -1, 3\}, \vec{n} \{3, 4, -2\}, \vec{p} \{10, y, 2\}$.

Найти y , при котором m, n, p — компланарны.

Решение:

Если m, n, p — компланарны, то $\vec{p} = a\vec{m} + b\vec{n}$, т.е.:



$$\begin{cases} 10 = 2a + 3b \\ y = -a + 4b \\ 2 = 3a - 2b \end{cases}; \begin{cases} b = \frac{3}{2}a - 1 \\ 10 = 2a + \frac{9}{2}a - 3 \\ y = -a + 4b \end{cases}; \begin{cases} b = \frac{3}{2}a - 1 \\ 13a = 26 \\ y = -a + 4b \end{cases}; \begin{cases} b = 2 \\ a = 2 \\ y = 6 \end{cases}.$$

Ответ: $y = 6$.

С—2

1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 6$, $BC = 8$, $BB_1 = 8$, $P \in BB_1$, $BP = PB_1$, $Q \in CC_1$, $(APQ) \parallel BC$, K — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, M — точка пересечения медиан $\triangle APQ$.

Найти: KM .

Решение:

Во-первых, $PQ \parallel BC$, $Q \in CC_1$, $CQ = QC_1$ (т.к. $(APQ) \parallel BC$).

Введем прямоугольную систему координат $Bxyz$, как показано на рисунке.

K — середина AC — гипотенузы \Rightarrow т.к. $A(0, 6, 0)$, $C(8, 0, 0)$, $K(4, 3, 0)$, $BP = CQ = \frac{1}{2}BB_1 = 4 \Rightarrow P(0, 0, 4)$, $Q(8, 0, 4)$.

R — середина PQ ; $R(4, 0, 4)$, $\overrightarrow{AR} = (4, -6, 4)$.

M — точка пересечения медиан $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AR} = \left(\frac{8}{3}, -4, \frac{8}{3}\right)$.

Значит, точка M имеет координаты: $M\left(\frac{8}{3}, 2, \frac{8}{3}\right)$. Отсюда

$$\overrightarrow{KM} \left(4 - \frac{8}{3}, 3 - 2, -\frac{8}{3} \right), \overrightarrow{KM} \left(\frac{4}{3}, 1, -\frac{8}{3} \right);$$

$$|\overrightarrow{KM}| = \sqrt{\frac{16}{9} + 1 + \frac{64}{9}} = \frac{\sqrt{89}}{3}.$$

2. Дано: $E(-1, 2, 2)$, $F(2, 1, 3)$, P лежит на луче, противоположном лучу EF , $EP = 5\sqrt{11}$.

Найти: координаты точки P .

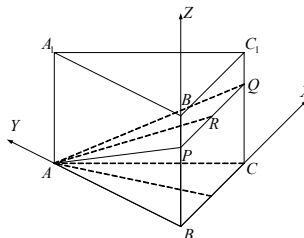
Решение:

$$\overrightarrow{EF} (3, -1, 1), |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}, |\overrightarrow{EP}| = 5\sqrt{11},$$

$$\overrightarrow{EP} = -5 \cdot \overrightarrow{EF} = (-15, 5, -5) \Rightarrow P(-1-15, 2+5, 2-5), P(-16, 7, -3).$$

С—3

1. Дано: $\alpha = \hat{mi} = \beta = \hat{mj} = 60^\circ$.



Найти: $\vec{m} \cdot \vec{k} = \gamma$.

Решение:

$$(\vec{m} \cdot \vec{i}) = |\vec{m}| \cdot 1 \cdot \cos \alpha = x = \frac{1}{2} |\vec{m}|$$

$$(\vec{m} \cdot \vec{j}) = |\vec{m}| \cdot 1 \cdot \cos \beta = y = \frac{1}{2} |\vec{m}|$$

$$(\vec{m} \cdot \vec{k}) = |\vec{m}| \cdot 1 \cdot \cos \gamma = z =$$

Но с другой стороны

$$\sqrt{(\vec{m} \cdot \vec{m})} = |\vec{m}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\vec{m}| \cdot x$$

$$x \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = |\vec{m}| \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

$$\cos^2 \gamma = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}; \cos^2 \gamma = \frac{1}{2}; \cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ я};$$

$$\gamma = \frac{\pi}{4} \text{ или } \gamma = \frac{3\pi}{4}.$$

2. Дано: $A_1B_1C_1D_1ABCD$ — куб, $E \in AA_1$, $AE = AE_1$, $D_1C \cap C_1D = F$, $AB = 1$.

Найти: $S(EB_1F)$.

Решение:

В прямоугольном $\triangle EA_1B_1$ $EA_1 = \frac{1}{2}$,

$$A_1B_1 = 1 \Rightarrow$$

$$EB_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}.$$

Аналогично в прямоугольном $\triangle EGF$ $EF = \sqrt{\frac{5}{4}}$.

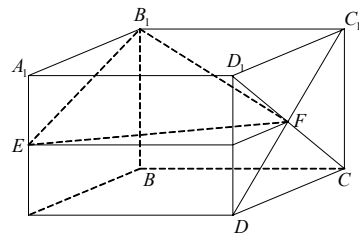
В прямоугольном $\triangle B_1C_1F$ $B_1C_1 = 1$, $C_1F = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B_1F = \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Найдем $S(EB_1F)$ по формуле Герона

$$p = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$S = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt{21}}{8}.$$



С—4

1. Дано: $DABC$ — пирамида, $\angle BCA = 90^\circ$, $BC = AC = 1$, $BD = 2$, $BD \perp (ABC)$, $E \in DC$, $DE = EC$, GEF — сечение, $GEF \perp DC$.

Найти: угол между AD и GEF .

Решение:

$DC \perp CA$ по теореме о трех перпендикулярах, $DC \perp EF$ по построению $\Rightarrow EF \parallel CA$, EF — средняя линия прямоугольного $\triangle DCA$.

$$EF = \frac{1}{2} CA = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad DE = EC = \frac{1}{2} CD$$

$= \frac{1}{2} \sqrt{BD^2 + BC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (из прямоугольного $\triangle DBC$ по теореме Пифагора).

Угол между DA и плоскостью (GEF) равен $\angle DFE = \angle DAC$.

Из прямоугольного $\triangle DEF$

$$\operatorname{tg} \angle DFE = \frac{\sqrt{5} \cdot 2}{2 \cdot 1} = \sqrt{5}; \quad \angle DFE = \operatorname{arctg} \sqrt{5}.$$

2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AB = 2$, $BC = AA_1 = 1$.

Доказать, что BD_1 и $(A_1 C_1 D)$ не перпендикулярны.

Доказательство:

Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. В ней координаты точек: $B(0, 0, 0)$, $A_1(0, 2, 1)$, $C_1(1, 0, 1)$, $D(1, 2, 0)$, $D_1(1, 2, 1)$;

векторов: $\overrightarrow{BD_1}(1, 2, 1)$, $\overrightarrow{A_1 D}(1, 0, -1)$, $\overrightarrow{C_1 D}(0, 2, -1)$.

Убедимся, что $\overrightarrow{BD_1}$ не перпендикулярен всем векторам из плоскости $(A_1 C_1 D)$: $(\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{C_1 D}) = 0 + 4 - 1 = 3 \neq 0$, значит, BD_1 и $(A_1 C_1 D)$ не перпендикулярны.

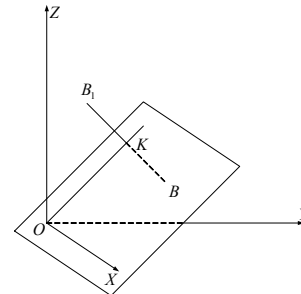
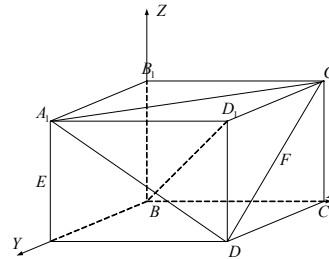
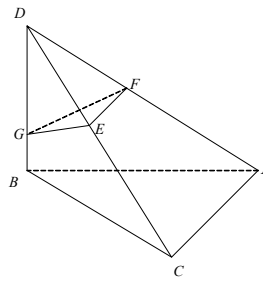
С—5

1. Дано: плоскость α , $Ox \in \alpha$, прямая $\begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases} \in \alpha$, B_1 и $B(0, 20, 10)$ зеркально симметричны относительно α .

Найти: координаты B_1 .

Решение:

Плоскости α перпендикулярен вектор $\vec{n}(0, 1, -1)$.



Пусть K — основание перпендикуляра KB к α , тогда

$$\overrightarrow{BK} = (x_0, y_0 - 20, z_0 - 10) = k \cdot \vec{n} = (0, k, -k) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 - 20 = k \\ z_0 - 10 = -k \end{cases}; \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = k + 20 \\ z_0 = 10 - k \end{cases} \Rightarrow$$

$K \in$ плоскости Oyz , значит, и прямой $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$, поэтому $k + 20 = 10 - k$, $k =$

-5 , $K(0, 15, 15)$, $\overrightarrow{BK} = (0, -5, 5)$. Но $BB_1 = 2 \overrightarrow{BK} \Rightarrow \overrightarrow{BB_1} = (0, -10, 10)$ и $B_1(0, 20 - 10, 10 + 10)$, $B_1(0, 10, 20)$.

2. Дано: отображение \forall точка $(x, y, z) \rightarrow (x - 5, y + 3, z - 7)$.

Решение:

Возьмем две точки $A(x_0, y_0, z_0)$ и $B(x_1, y_1, z_1)$.

$A \rightarrow A_1(x_0 - 5, y_0 + 3, z_0 - 7)$

$B \rightarrow B_1(x_1 - 5, y_1 + 3, z_1 - 7)$

$$\overrightarrow{AB} (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = \overrightarrow{A_1B_1}$$

и значит, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A_1B_1}|$, т.е. данное отображение сохраняет расстояние между точками \Rightarrow оно — движение.

С—6

1. Дано: параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $AC_1 \cap BD_1 = O$.

Доказать: O — центр симметрии $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Доказательство:

Все вершины параллелепипеда переходят в вершины при симметрии относительно точки O — пересечения диагоналей, аналогично все ребра переходят в противоположные и грани переходят в противоположные грани. Следовательно, O — центр симметрии.

2. Дано: параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $AC_1 \cap BD_1 = O$.

Доказать: \forall плоскость α такая, что $O \in \alpha$, делит $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на две равные части.

Доказательство:

Т.к. O — центр симметрии, а центральная симметрия переводит все точки, лежащие по одну сторону от плоскости, данной в условии, в точки, лежащие по другую сторону, сохраняя расстояния, имеем, что \forall плоскость делит параллелепипед на равные части.

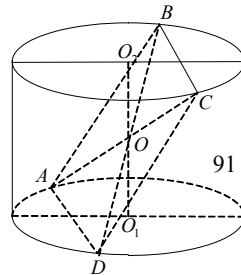
С—7

1. Дано: цилиндр, $ABCD$ — прямоугольник, $AB = 2 \cdot AD$, $AD, BC \in$ основаниям цилиндра, $O_1 O_2$ — высота и ось цилиндра, $O_1 O_2 = 5$, $O_1 A = 2\sqrt{5}$, $(ABCD) \cap O_1 O_2$.

Найти: $S(ABCD)$.

Решение:

$(ABCD) \cap O_1 O_2 = O$ — середина $O_1 O_2$ (других случаев нет) и $O = AC \cap BD$.



В прямоугольном $\triangle AO_1O$ $AO_1 = 2\sqrt{5}$, $O_1O = \frac{5}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow AO = \sqrt{\frac{25}{4} + 4 \cdot \frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{105}{4}}.$$

Т.к. в $\triangle AOD$ и $\triangle AOB$ $AB = 1 \cdot AD$ и $\angle AOD + \angle AOB = \pi$, то по теореме косинусов:

$$AD^2 = 2AO^2 - 2AO^2 \cos \angle AOD,$$

$$4AD^2 = 2AO^2 - 2AO^2 \cos(\pi - \angle AOD).$$

Домножим первое равенство на 4 и вычтем из второго. Имеем

$$2(AO)^2(1 - \cos(\pi - \angle AOD)) = 8(AO)^2(1 - \cos \angle AOD)$$

$$1 - \cos(\pi - \angle AOD) = 4 - 4\cos(\angle AOD)$$

$$1 + \cos \angle AOD = 4 - 4\cos \angle AOD$$

$$\cos \angle AOD = \frac{3}{5}$$

$$\sin \angle AOD = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$S(ABCD) = 4S(AOD) = 4 \cdot \frac{1}{2} AO^2 \cdot \sin \angle AOD = 4 \cdot \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{105}{4}}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} =$$

$$= 2 \cdot \frac{105}{4} \cdot \frac{4}{5} = 2 \cdot 21 = 42.$$

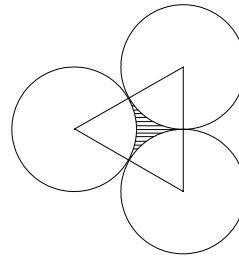
2. Дано: правильная треугольная призма, все ребра равны a , боковые ребра — оси цилиндров радиуса $\frac{a}{2}$.

Найти: $S_{\text{бок}}$ тела, ограниченного цилиндрическими поверхностями внутри призмы.

Решение:

Площадь искомой поверхности равна половине площади боковой поверхности одного из цилиндров

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} a \cdot 2\pi \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi a^2}{2}.$$



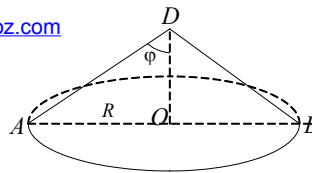
С—8

1. Дано: конус, угол при центральной развертке $200^\circ = \alpha$. Через вершину D проведено сечение наибольшей площади.

Найти: угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

Решение:

$$S_{\text{бок конуса}} = \frac{\alpha}{2\pi} L^2 \pi \text{ через центральный угол развертки.}$$



$S_{\text{бок конуса}} = \pi R \cdot L = \pi L^2 \sin \varphi$ (через угол между образующей и высотой $\angle \varphi = \angle ODB$)

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2\pi} L^2 \pi = \pi L^2 \sin \varphi; \frac{200^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot L^2 = \pi L^2 \sin \varphi;$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{5}{9} = \sin \varphi \Rightarrow \angle \varphi < 45^\circ.$$

Значит, $\angle ADB = 2\varphi < 90^\circ$ — угол при осевом сечении.

Т.к. $S_{\text{сечения}} = \frac{1}{2} L^2 \cdot \sin \beta$ — наибольшая, то сечение — осевое, т.к. угол при осевом сечении наибольший.

Таким образом угол между плоскостью сечения и основанием равен $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

2. Дано: усеченный конус, O_1O_2 — ось, $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$, $O \in O_1O_2$, $O_1O = OO_2$, через O проведено сечение, параллельное основаниям. Полные поверхности частей относятся как 23 : 29.

Найти: $\angle BAO_1 = \alpha$ (угол наклона образующей).

Решение:

В трапеции AO_1O_2B (прямоугольной) CO — средняя линия.

$$\text{Пусть } BO_2 = r, AO_1 = R \Rightarrow CO = \frac{r+R}{2},$$

Достроим конус до полного с вершиной D . Т.к. $\frac{BO_2}{AO_1} = \frac{1}{2}$, то $\frac{BD}{AD} = \frac{1}{2}$

$$2BD = AD = \frac{R}{\cos \alpha}, \quad BD = AB = \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Т.к. CO — средняя линия трапеции AO_1O_2B , то

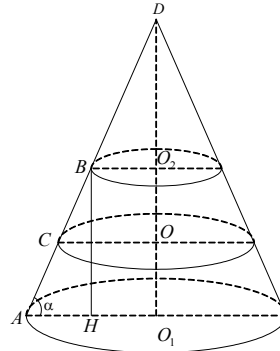
$$AC = BC = \frac{AB}{2} = \frac{R}{4} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$

Тогда получаем следующие формулы:

$$S_{\text{полн1}} = \pi BC \cdot (BO_2 + CO) + \pi BO_2^2 + \pi CO^2 =$$

$$= \pi \cdot \frac{R}{4} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \left(r + \frac{R+r}{2} \right) + \pi r^2 + \pi \left(\frac{R+r}{2} \right)^2.$$

$$S_{\text{полн2}} = \pi \cdot AC(CO + AO_1) + \pi CO^2 + \pi AO_1^2 =$$



$$= \pi \cdot \frac{R}{4} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \left(\frac{R+r}{2} + R \right) + \pi \left(\frac{R+r}{2} \right)^2 + \pi R^2.$$

Учитывая, что $R = 2r$ получим:

$$\frac{S_{\text{полн1}}}{S_{\text{полн2}}} = \frac{\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \left(r + \frac{3r}{2} \right) + \pi r^2 + \frac{9\pi r^2}{4}}{\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \left(2r + \frac{3r}{2} \right) + \frac{9\pi r^2}{4} + 4\pi r^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{5}{4} + \frac{13}{4}}{\frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{7}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{\frac{5}{\cos \alpha} + 13}{\frac{7}{\cos \alpha} + 25} = \frac{23}{39}$$

$$\frac{195}{\cos \alpha} + 507 = \frac{161}{\cos \alpha} + 575, \quad \frac{35}{\cos \alpha} = 70, \quad \frac{1}{\cos \alpha} = 2, \quad \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 60^\circ.$$

Ответ: 60° .

С—9

1. Дано: $ABCD$ — параллелограмм,
 $P(ABCD) = P$, $BD = d$, $l \perp BD$, $D \in l$, l —
ось вращения.

Найти: $S_{\text{пов. тела вращения}}$.

Решение:

$$S_{\text{т. вр}} = \pi AD \cdot AK + \pi \cdot DC \cdot CL + \pi AB(AK + BD) + \pi BC(BD + CL).$$

$$\text{Но } AB + BC = \frac{P}{2} = AD + DC \text{ и } AK = ND, CL = MD, AK + CL = d.$$

$$\begin{aligned} S_{\text{т. вр}} &= \pi \cdot \left[\left(\frac{P}{2} - AB \right) \cdot AK + AB \cdot (d - AK) + AB(AK + d) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{P}{2} - AB \right) (d + d - AK) \right] = \pi \cdot \left[\frac{P}{2} AK - AB \cdot AK + AB \cdot d - AB \cdot AK + \right. \\ &+ AB \cdot AK + AB \cdot d + P \cdot d - \frac{P}{2} AK - 2d \cdot AB + AB \cdot AK \left. \right] = \pi \cdot P \cdot d. \end{aligned}$$

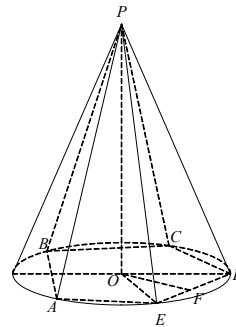
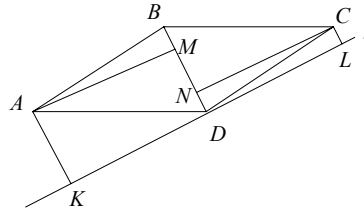
2. Дано: $PABCDE$ — правильная пирамида, $F \in ED$, $EF = FD$, $\angle OFP = \varphi$, конус описан вокруг $PABCDE$, $PA = L$.

Найти: S осевого сечения конуса.

Решение:

В равнобедренном $\triangle EOD$ $\angle EOD = 72^\circ \Rightarrow \angle EOF = 36^\circ$.

Пусть $OE = R \Rightarrow$ из прямоугольного $\triangle OFE$:



$$OF = \frac{R}{\cos \frac{\pi}{5}}, \quad EF = \frac{R}{\cos \frac{\pi}{5}}$$

Из прямоугольного $\triangle OFP$:

$$PF = OF \cdot \cos \alpha = \frac{R \cos \alpha}{\cos \frac{\pi}{5}} \quad OP = OF \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{\cos \frac{\pi}{5}}.$$

Из прямоугольного $\triangle PFE$:

$$PE^2 = PF^2 + EF^2$$

$$L^2 = \frac{R^2 \cos^2 \varphi}{\cos^2 \frac{\pi}{5}} + \frac{R^2}{\sin^2 \frac{\pi}{5}}, \quad R^2 = \frac{L^2 \cos^2 \frac{\pi}{5} \sin^2 \frac{\pi}{5}}{\cos^2 \varphi \sin^2 \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{\pi}{5}}$$

$$S_{\text{ос сеч}} R \cdot OP = 2S(POE) = \frac{R^2 \operatorname{tg} \varphi}{\cos \frac{\pi}{5}} = \frac{L^2 \cos^2 \frac{\pi}{5} \sin^2 \frac{\pi}{5} \operatorname{tg} \varphi}{\cos \frac{\pi}{5} \left(\cos^2 \varphi \sin^2 \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{\pi}{5} \right)} =$$

$$= \frac{L^2 \cos \frac{\pi}{5} \operatorname{tg} \varphi}{\cos^2 \varphi + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{5}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{L^2 \cos \frac{\pi}{5} \operatorname{tg} \varphi}{\cos^2 \varphi + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{5}}.$$

С—10

1. Дано: $A(1, 2, -1)$, $B(3, 0, 2)$, прямая $AB \cap$ сферу $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = \frac{17}{4} = C, D$.

Найти: координаты C, D .

Решение:

Как видно из уравнения окружности, точка A — центр окружности радиуса $\frac{\sqrt{17}}{2}$. $\overrightarrow{AB}(2, -2, 3)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$,

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{AC}\left(1, -1, \frac{1}{2}\right), \quad \overrightarrow{AD}\left(-1, 1, -\frac{3}{2}\right).$$

$$C\left(2, 1, \frac{1}{2}\right), \quad D\left(0, 3, -2\frac{1}{2}\right).$$

2. Дано: $A(2, 0, 0)$, $B(0, 0, 3)$, $C(0, 1, 0)$, сфера $x^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + z^2 = R^2$.

Выяснить взаимное расположение плоскости (ABC) и сферы в зависимости от R .

Решение:

$\overrightarrow{AB}(-2, 0, 3)$, $\overrightarrow{AC}(-2, 1, 0)$, вектор $\vec{n} \perp (ABC)$, $\vec{n}(x, y, z)$

$$\begin{cases} (\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}) = 0 \\ (\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}) = 0 \end{cases} \begin{cases} -2x + 3z = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{3}{2}z \\ y = 2x \end{cases}.$$

$$\vec{n}(3, 6, 2), |\vec{n}| = \sqrt{9 + 36 + 4} = 7.$$

Точки A, B, C удовлетворяют уравнению $Px + Qy + Rz + S = 0$.

$$\begin{cases} 2P + S = 0 \\ 3R + S = 0 \\ Q + S = 0 \end{cases}, \begin{cases} P = -\frac{S}{2} = 3T \\ R = -\frac{S}{3} = 2T \\ Q = -S = 6T \end{cases}.$$

Значит, уравнение плоскости ABC $3x + 6y + 2z - 6 = 0$.

Точка $D\left(0, \frac{2}{3}, 0\right)$ — центр сферы.

Пусть N — основание перпендикуляра DN , опущенного на (ABC) .

$$\overrightarrow{DN} = k \cdot \vec{n}, N(x_0, y_0, z_0)$$

$$\overrightarrow{DN}\left(x_0, y_0 - \frac{2}{3}, z_0\right) = (3k, 6k, 2k).$$

$$\begin{cases} x_0 = 3k \\ y_0 = 6k + \frac{2}{3} \\ z_0 = 2k \end{cases}.$$

$$\text{Но } N \text{ лежит в } (ABC) \Rightarrow 3(3k) + 6\left(6k + \frac{2}{3}\right) + 2z - 6 = 0,$$

$$(9 + 36 + 4) \cdot k = 2, k = \frac{2}{49}.$$

$$\text{Значит, } |\overrightarrow{DN}| = k \cdot 7 = \frac{2}{7}.$$

Поэтому при $R < \frac{2}{7}$ сфера не пересекает плоскость;

при $R = \frac{2}{7}$ сфера и плоскость касаются;

при $R > \frac{2}{7}$ сфера и плоскость пересекаются по окружности.

C—11

1. Дано: сфера (O, R) , $S_{\text{большого круга}} = 50\pi$, два сечения $(O_1, R_1) \perp (O_2, R_2)$, $(O_1, R_1) \cap (O_2, R_2) = AB$, $AB = 6$, $S((O_1, R_1)) = 25\pi$.

Найти: OO_1 , OO_2 .

Решение:

$C \in AB$, $AC = CB = 3$, OO_1CO_2 — прямоугольник.

$$S(O, R) = R^2\pi = 50\pi \Rightarrow R^2 = 50; R = 5\sqrt{2} = OA.$$

$$S(O_1R_1) = 25\pi; R_1 = 5 = O_1A.$$

\Rightarrow Из прямоугольного $\triangle OO_1A$:

$$O_1O = \sqrt{OA^2 - O_1A^2} = \sqrt{50 - 25} = 5.$$

$O_1C = OO_2$ находим из прямоугольного $\triangle O_1CA$

$$O_1C = \sqrt{O_1A^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

2. Дано: полушар, α параллельна основанию, пересекает полушар сечение — верхнее основание цилиндра, нижнее лежит на основании полушара, $S_{\text{бок}}$ цилиндра наибольшая.

Найти: O_1O .

Решение:

Пусть радиус шара равен R , $O_1O = h$, $0 <$

$$h < R, CO_1 = \sqrt{R^2 - h^2}.$$

$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot O_1O \cdot CO_1 = \pi h \sqrt{R^2 - h^2}.$$

$$S'(h) = \pi \sqrt{R^2 - h^2} - \frac{\pi h^2}{\sqrt{R^2 - h^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{R^2 - h^2}} (R^2 - h^2 - h^2),$$

$$S'(h) = \frac{\pi}{\sqrt{R^2 - h^2}} (R^2 - 2h^2) = 0.$$

$$h^2 = \frac{R^2}{2}, h = R \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

С—12

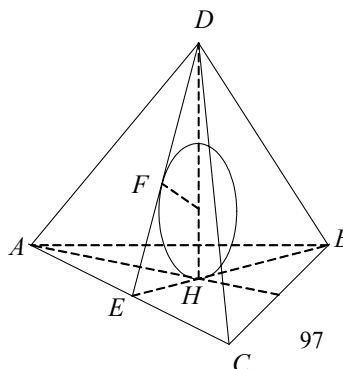
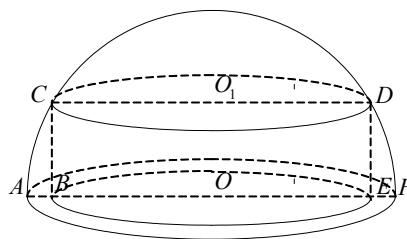
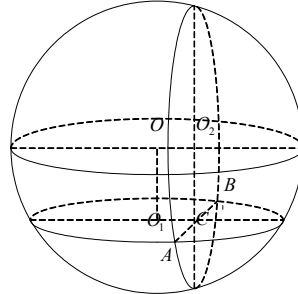
1. Дано: $DABC$ — правильная пирамида, $AB = a$. В $DABC$ вписан шар, DH — высота $DABC$, $K \in$ шару, $K \in DH$, $DK = KH$.

Найти: DA .

Решение:

Рассмотрим сечение DBE пирамиды, проходящее через высоту DH .

$BE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, H — точка пересечения медиан $\triangle ABC \Rightarrow$



$$\Rightarrow EH = \frac{1}{3} BE = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Построим $\triangle EDG$ так, что окружность из сечения будет вписана в $\triangle EGD$.

$$\text{В } \triangle EGD \quad DH = 4r, \quad EG = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad ED = \sqrt{16r^2 + \frac{a^2}{12}}.$$

$$S(\triangle EGD) = \frac{1}{2} P \cdot r = \frac{1}{2} EG \cdot DH.$$

$$\left(\sqrt{16r^2 + \frac{a^2}{12}} + \frac{a\sqrt{3}}{6} \right) \cdot r = 2r \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$\sqrt{16r^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad 16r^2 = \frac{a^2 \cdot 3}{4} - \frac{a^2}{12}; \quad 16r^2 = \frac{2a^2}{3}; \quad r^2 = \frac{a^2}{4}; \quad r = \frac{a}{2\sqrt{6}} \Rightarrow$$

$$DH = \frac{2a}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{В прямоугольном } \triangle DHA \quad AH = HB = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad DH = \frac{2a}{\sqrt{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{DH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{4a^2}{6}} = a.$$

2. Дано: шар (O, R) , $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ — вписанная в шар правильная призма, $\angle OFA_1 = 45^\circ$.

Найти: $S_{\text{бок призмы}}$.

Решение:

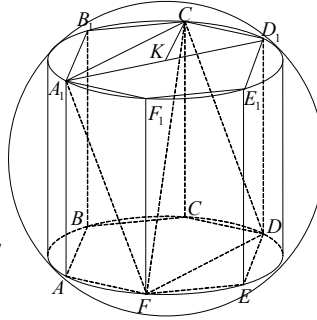
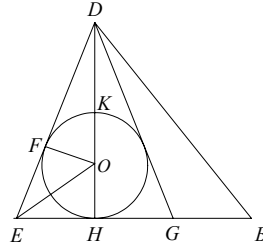
В равнобедренном $\triangle A_1 OF$ $\angle A_1 OF = 90^\circ$, $A_1 F = R\sqrt{2}$. Сечение $FA_1 C_1 D$ призмы — квадрат (диагонали равны $2R$ и перпендикулярны) $\Rightarrow A_1 C_1 = A_1 F = R\sqrt{2}$, K — центр грани $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$.

В $\triangle A_1 K C_1$ $\angle A_1 K C_1 = 120^\circ \Rightarrow$ по теореме косинусов

$$A_1 C_1^2 = 2A_1 K^2 \cdot \frac{1}{2}, \quad 3A_1 K^2 = 2R \Rightarrow A_1 K = \sqrt{\frac{2}{3}} R = A_1 B_1.$$

Из прямоугольного $\triangle A_1 K O$

$$KO = \sqrt{A_1 O^2 - A_1 K^2} = \sqrt{R^2 - \frac{2}{3} R^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} R \Rightarrow AA_1 = 2KO = \frac{2}{\sqrt{3}} R.$$



$$S_{\text{бок призмы}} = 6 \cdot A_1A \cdot A_1B_1 = 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} R \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} R = 4\sqrt{2} R^2.$$

С—13

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AB = 6$, $BC = \frac{12}{\sqrt{5}}$, расстояние от B до (AB_1C) равно 2,4.

Найти: $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$.

Решение:

Построим сечение B_1AC и опустим перпендикуляр BK на (B_1AC) . $BK = 2,4$

$B_1K \cap AC = L$. B_1L — линия пересечения перпендикулярных плоскостей (B_1LB) и (AB_1C) .

Но плоскость $(B_1BL) \perp (ABC)$ (т. к. $B_1B \perp (ABC) \Rightarrow BL \perp AC$). Из трех последних умозаключений приходим к выводу, что $\overline{BB_1} \perp \overline{AC}$ и $\overline{BK} \perp \overline{AC}$. Но $\overline{BL} = r \cdot \overline{BB_1} + K \overline{BK}$ т. к. \overline{BL} , $\overline{BB_1}$, и \overline{BK}

— компланарны \Rightarrow

$$(\overline{BL} \cdot \overline{AC}) = ((r \cdot \overline{BB_1} + K \overline{BK}) \cdot \overline{AC}) = r(\overline{BB_1} \cdot \overline{AC}) + K(\overline{BK} \cdot \overline{AC}) = 0$$

$$\Rightarrow BL \perp AC. \text{ И из теоремы о трех } B_1K \perp AC.$$

$$\text{В } \triangle ABC \quad S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} AC \cdot BL \Rightarrow$$

$$BL = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{6 \cdot \frac{12}{\sqrt{5}}}{\sqrt{36 + \frac{144}{5}}} = \frac{72\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{180+144}} = \frac{7}{\sqrt{324}} = \frac{7}{18} = 4.$$

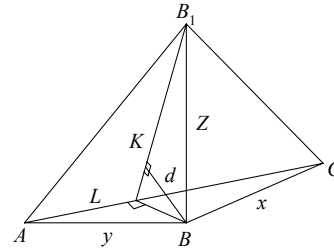
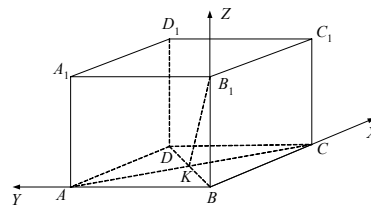
Из прямоугольного $\triangle BKL$ $LK = \sqrt{BL^2 - BK^2} = \sqrt{16 - 5.76} = 3,2$.
 $\triangle BKL \sim \triangle B_1BL$ (по двум углам) \Rightarrow

$$\frac{B_1L}{LB} = \frac{LB}{LK} \quad B_1L = \frac{LB^2}{LK} = \frac{16}{3,2} = 5.$$

$$S(ACB_1) = \frac{1}{2} AC \cdot B_1L = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{\sqrt{5}} \cdot 5 = \frac{45}{\sqrt{5}} = 9\sqrt{5}$$

$$V(B_1ABC) = \frac{1}{3} \cdot B_1B \cdot S(ABC) = \frac{1}{6} B_1B \cdot AB \cdot BC =$$

$$\frac{1}{3} BK \cdot S(ACB_1) = 2,4 \cdot 3\sqrt{5}$$



$$BB_1 \cdot \frac{12}{3 \cdot 2} = 2,4 \cdot 3\sqrt{5}$$

$$BB_1 = \frac{2,4}{24} \cdot 15 \cdot 2 = 1,5 \cdot 2 = 3$$

$$\Rightarrow V_{\text{параллел}} = BA \cdot BC \cdot BB_1 = 6 \cdot \frac{12}{\sqrt{5}} \cdot 3 = \frac{216}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{216\sqrt{5}}{5}.$$

2. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $\angle BSA = 90^\circ$, $\angle ABC = \beta$, $B_1CH \perp (AA_1B_1B)$, $\angle B_1HB = \alpha$, $B_1B = h$.

Найти: $V(ABCA_1B_1C_1)$.

Решение:

Из прямоугольного $\triangle B_1BH$: $BH = h \operatorname{tg} \alpha$.

Из прямоугольного $\triangle BHC$:

$$BC = \frac{BH}{\cos \beta} = \frac{h \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}, \quad HC = BH \cdot \operatorname{tg} \beta =$$

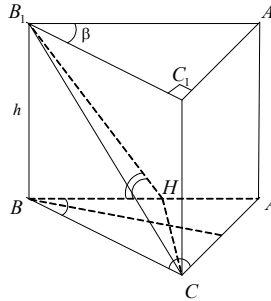
$$h \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

$\triangle BHC \sim \triangle BSA$ по двум углам \Rightarrow

$$\frac{BH}{HC} = \frac{BC}{CA}$$

$$CA = \frac{HC \cdot BC}{BH} = \frac{h \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{h \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}}{h \operatorname{tg} \alpha} = \frac{h \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}.$$

$$V_{\text{призмы}} = \frac{1}{2} BC \cdot CA \cdot B_1B = \frac{1}{2} \cdot \frac{h \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} \cdot \frac{h \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} \cdot h = \frac{h^3}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \beta}.$$



С—14

1. Дано: $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ — правильная призма, $C_1E = 3$, $\angle FC_1E =$

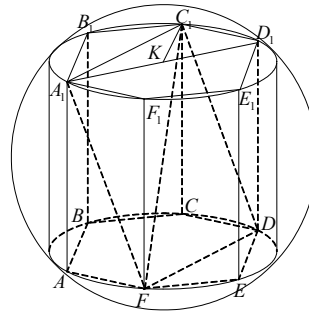
$$\arctg \frac{1}{3}.$$

Найти: $V_{\text{призмы}}$.

Решение:

$\angle FEC = 90^\circ$ опирается на диаметр описанной около основания окружности. По теореме о трех перпендикулярах $\angle C_1EF = 90^\circ$

$$\frac{FE}{C_1E} = \operatorname{tg}(\angle FC_1E) = \frac{1}{3} \Rightarrow FE = \frac{C_1E}{3} = 1.$$



$$C_1F = \sqrt{EF^2 + C_1E^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

$$FC = 2FE = 2.$$

$$\text{Из прямоугольного } \triangle C_1CF \text{ } C_1C = \sqrt{C_1F^2 - CF^2} = \sqrt{10-4} = \sqrt{6}.$$

$$S(ABCDEF) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot FE^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$V_{\text{призмы}} = S \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

2. Дано: цилиндр, O_1O_2 — ось, $ABCD \parallel O_1O_2$, $ABCD \cap$ цилиндр, $\angle BO_1C = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$.

Найти: $\frac{V_1}{V_2}$.

Решение:

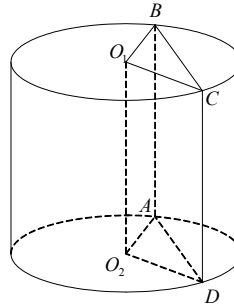
Площадь сегментов в верхнем основании

$$S_1 = \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$S_2 = \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Отношение объемов равно отношению площадей сегментов

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}r^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\frac{1}{2}r^2 \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}}.$$



С—15

1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная призма, $\angle BAC = 90^\circ$, $(AA_1C_1C) \perp (ABC)$, $\angle C_1CA = 60^\circ$, $C_1C = CB = CA$, $S_{\text{бок}} = 2(\sqrt{7} + \sqrt{3} + 2)$.

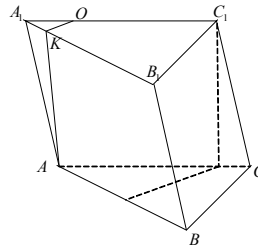
Найти: $V_{\text{призмы}}$.

Решение:

CBB_1C_1 — квадрат, пусть $CB = a$, $S(CBB_1C_1) = a^2$,

$$S(CC_1A_1A) = 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

В грани CC_1A_1A проведем перпендикуляр AO к C_1A_1 , из точки O опустим перпендикуляр OK к $A_1B_1 \Rightarrow AK \perp A_1B_1$.



Из прямоугольного $\triangle O A_1$: $O A_1 = \frac{a}{2}$, $A O = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Из прямоугольного $\triangle O K A_1$: $O K = O A_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

А из прямоугольного $\triangle A O K$

$$A K = \sqrt{A O^2 + O K^2} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot 3}{4} + \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}.$$

В грани $B B_1 A_1 A$ $A B = a\sqrt{2}$.

$$S(B B_1 A_1 A) = A B \cdot K A = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{a^2\sqrt{7}}{2}.$$

$$S_{\text{бок}} = a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2\sqrt{7}}{2} = 2(\sqrt{7} + \sqrt{3} + 2).$$

$$a^2 = 4, a = 2.$$

$$\Rightarrow V_{\text{призмы}} = \frac{1}{2} C B \cdot C A \cdot O A = 2$$

$$\cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

2. Дано: $A B C A_1 B_1 C_1$ — призма, $\angle A_1 A C = 45^\circ$, $A A_1 = 5$, $A C = 6$, $B_1 H \perp (A A_1 C_1 C)$, $H \in (A A_1 C_1 C)$, $B_1 H = 4$.

Найти: $V(A B C A_1 B_1 C_1)$.

Решение:

Достроим призму до четырехугольной $A C D B A_1 C_1 D_1 B_1$.

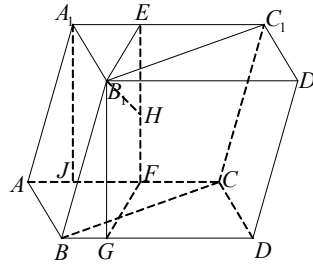
Через перпендикуляр $B H$ проведем секущую плоскость $B_1 E F G$ так, что $A_1 C_1 \perp (B_1 E F G)$.

$$\text{Опустим в грани } A A_1 C_1 C \text{ высоту } A J = A A_1 \cdot \sin 45^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{2} = E F$$

$$\Rightarrow S(B_1 E F G) = E F \cdot B_1 H = 4 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}.$$

$$V(A C D B A_1 C_1 D_1 B_1) = S(B_1 E F G) \cdot A C = 10\sqrt{2} \cdot 6 = 60\sqrt{2}.$$

$$V(A B C A_1 B_1 C_1) = \frac{1}{2} V(A C D B A_1 C_1 D_1 B_1) = 30\sqrt{2}.$$

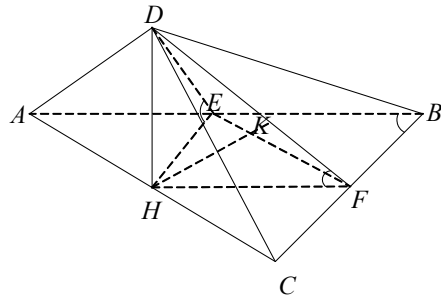


С—16

1. Дано: $D A B C$ — пирамида, $A B = B C$, $\angle A B C = \alpha$, $(A D C) \perp (A B C)$, $D H \perp (A B C)$, $H \in (A B C)$, $D E \perp A B$, $D F \perp C B$, $\angle D E H = \angle D F H = \beta$, $D F \perp H K$, $K \in D F$, $H K = d$.

Найти: $V(D A B C)$.

Решение:



Из $\triangle HKF$: $HF = \frac{d}{\sin \beta}$, $KF = d \operatorname{ctg} \beta$. $\triangle DHF \sim \triangle HKF$ (по двум углам) \Rightarrow

$$\frac{DH}{HF} = \frac{HK}{KF}, DH = \frac{HF \cdot HK}{KF} = \frac{d^2}{\sin \beta \cdot d \cdot \operatorname{ctg} \beta} = \frac{d}{\sin \beta \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

Из прямоугольного $\triangle HFB$: $HB = \frac{HF}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{\sin \beta \sin \frac{\alpha}{2}}$.

Из $\triangle BHC$: $HC = HB \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{\sin \beta \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{\sin \beta \cos \frac{\alpha}{2}}$.

$$V(DABC) = \frac{1}{6} \cdot AC \cdot HB \cdot DH = \frac{HC \cdot HB \cdot DH}{3} =$$

$$= \frac{d}{3 \cdot \sin \beta \cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{d}{\sin \beta \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{d}{\sin \beta \operatorname{tg} \beta} = \frac{2d^3}{3 \sin^2 \beta \cos \beta \sin \alpha}.$$

Ответ: $\frac{2d^3}{3 \sin^2 \beta \cos \beta \sin \alpha}$.

2. Дано: $PABCD$ — правильная пирамида, $AB = a$, $BK \perp PC$, $K \in PC$, $K \in PC$, $\angle BKD = \alpha$.

Найти: $V(PABCD)$.

Решение:

$$BD = a\sqrt{2} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Из $\triangle BKH$: $HK = BH \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

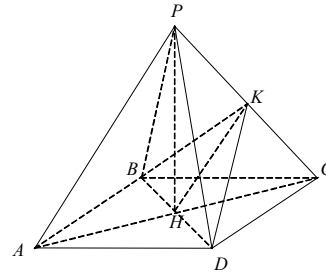
$$\text{Из } \triangle HKC: \frac{KC}{HK} = \frac{HC}{HK} =$$

$$= \sqrt{HC^2 - HK^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} =$$

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$\triangle PHC \sim \triangle HKC$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{PH}{HC} = \frac{HK}{KC}$, $PH = \frac{HK \cdot HC}{KC} =$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$



$$V(PABCD) = a^2 \cdot \frac{PH}{3} = \frac{\frac{a^3 \sqrt{2}}{6} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a^3 \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{6 \sqrt{-\cos \alpha}} = \frac{a^3 \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{6 \sqrt{-\cos \alpha}}.$$

С—17

1. Дано: два конуса, основания параллельны, вершины каждого лежат в центре основания другого, радиусы оснований равны 4 и 6, общая высота равна 15.

Найти: объем общей части конусов.

Решение:

Рассмотрим осевое сечение фигуры $AO = 4$, $DO_2 = 6$, $O_1O_2 = 15$.

Введем прямоугольную с.к. O_2XY как показано на рисунке.

$$\text{Уравнение } CO_1: y = -\frac{15}{6}x + 15$$

$$C_2B: y = -\frac{15}{4}x$$

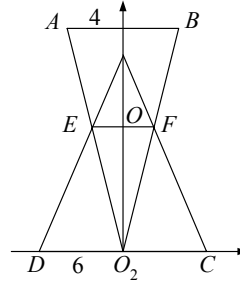
$$CO_1 \cap O_2B = F: -\frac{15}{6}x + 15 = \frac{15}{4}x$$

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)x = 1; x = \frac{12}{5}$$

$$\text{Значит } OF = \frac{12}{5}$$

$$V = \frac{\pi}{3} OF^2 \cdot OO_1 + \frac{\pi}{3} OF^2 \cdot OO_2 = \frac{\pi}{3} \cdot OF^2 \cdot O_1O_2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{144}{25} \cdot 15 = \frac{144\pi}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{144\pi}{5}.$$



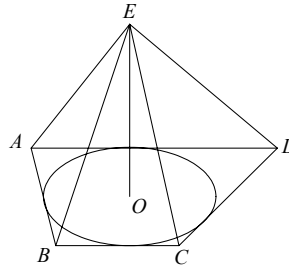
2. Дано: в пирамиду $EABCD$ вписан конус, $ABCD$ — трапеция, $\angle BAD = 90^\circ$, $AD = 2$, $BC = 4$, $V_{\text{конуса}} = \frac{64\pi}{81}$.

Найти: угол наклона боковых граней пирамиды.

Решение:

Т.к. основание конуса вписано в трапецию, то $AB + DC = AD + BC$. AB — высота трапеции, равна диаметру круга, т.е. $AB = 2r$.

$$\begin{aligned} \text{Площадь трапеции } S &= \frac{1}{2} AB(AD + BC) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2r(2 + 4) = 6r = \\ &= S(AOB) + S(BOC) + S(COD) + S(DOA). \end{aligned}$$



Но высоты треугольников все равны r , а суммы противоположных сторон равны $\Rightarrow DC = AD + BC - AB = 6 - 2r$, $HC = BC - AD = 2$, $DH = 2r$.

По теореме Пифагора $DH^2 + HC^2 = DC^2$.

$$4r^2 + 4 = 36 - 24r + 4r^2; 32 = 24r, r = \frac{4}{3}.$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{\pi \cdot EO}{3} \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot EO \cdot 16}{27} = \frac{64\pi}{81}, EO = \frac{4}{3}$$

\Rightarrow углы наклона боковых граней равны 45° .

С—18

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — усеченная пирамида, $ABCD$, $A_1 B_1 C_1 D_1$ — ромбы, $AC = 16$, $BD = 12$, $A_1 C_1 = 8$, $B_1 D_1 = 6$, $(AA_1 D_1 D) \perp (ABCD)$, $(DD_1 C_1 C) \perp (ABCD)$, $DM \perp BC$, $M \in BC$, $D_1 N_1 \perp B_1 C_1$, $N_1 \in B_1 C_1$, $\angle M_1 M D = \angle N_1 N D = 45^\circ$.

Найти: $V_{\text{пирамиды}}$.

Решение:

Сторона нижнего основания $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$,

верхнего $A_1 B_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

$$S(ABD) = \sqrt{\left(\frac{10+10+12}{2}\right)(16-10) \cdot 6(16-12)} = 48 = \frac{1}{2} AB \cdot DN = 5 \cdot DN \Rightarrow$$

$$DN = \frac{48}{5}.$$

$$\text{Аналогично } D_1 N_1 = \frac{24}{5}.$$

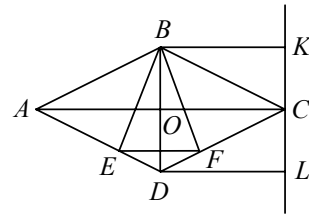
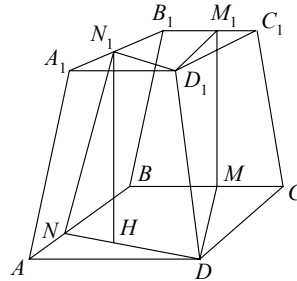
В сечении $D N N_1 D_1$ (проекция) опустим высоту $N_1 H$, $\angle H N N_1 = 45^\circ$, а $NH = ND - N_1 D_1 = \frac{24}{5}$. Тогда из прямоугольного равнобедренного $\Delta N H N_1$ полу-

чим $N_1 H = \frac{24}{5}$.

$S_2(ABCD) = 96$; $S_1(A_1 B_1 C_1 D_1) = 24$, $N_1 H$ — высота усеченной пирамиды.

$$V = \frac{N_1 H}{3} (S_2 + S_1 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{24}{15} \cdot (96 + 24 + \sqrt{96 \cdot 24}) = \frac{24}{15} (96 + 24 + 48) = \frac{24}{15} \cdot 168 = \frac{8}{5} \cdot 168 = 268,8.$$

2. Дано: $ABCD$ — ромб, $\angle BAD = 60^\circ$, BE , BF — высоты, $EF = 20$, $MC \perp AC$, MC — ось вращения.



Найти: объем тела вращения.

Решение:

В равностороннем $\triangle ABD$ BE — высота, биссектриса и медиана $\Rightarrow \angle EBD = 30^\circ$, значит, $\angle EBF = 60^\circ = 2\angle EBD$.

$\triangle EBF$ — равнобедренный и $\angle EBF = 60^\circ \Rightarrow \triangle EBF$ — равносторонний и $EB = EF = 20$.

Значит, сторона ромба из $\triangle ABD$:

$$AB = \frac{EB}{\sin 60^\circ} = \frac{20\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{40\sqrt{3}}{3} = BD.$$

$$BO = \frac{20\sqrt{3}}{3}; AO = OC = BK = DL = EF = 20.$$

$$\begin{aligned} V_{\text{т. вр}} &= \frac{BO \cdot \pi}{3} [AC^2 + BK^2 + AC \cdot BK - BK^2] + \\ &+ \frac{OD \cdot \pi}{3} [AC^2 + DL^2 - DL^2 + AC \cdot DL] = \frac{2BO \cdot \pi}{3} [AC^2 + AC \cdot BK] = \\ &= \frac{2}{3} \pi \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} [40^2 + 40 \cdot 20] = \frac{2}{3} \pi \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} [1600 + 800] = \frac{32000\sqrt{3}\pi}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{32000\sqrt{3}\pi}{3}$.

С—19

1. Дано: шар $(O_1, 25)$, шар $(O_2, 29)$, $O_1O_2 = 6$.

Найти: объем линзы.

Решение:

Введем систему координат O_2xyz , как показано на рисунке.

Тогда уравнение первой сферы $x^2 + (y - 6)^2 + z^2 = 25^2$;

второй $x^2 + y^2 + z^2 = 29^2$.

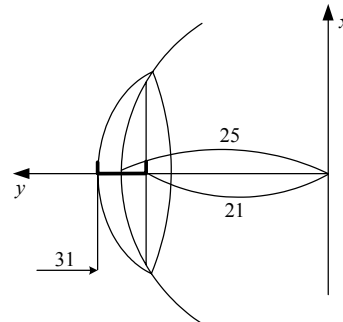
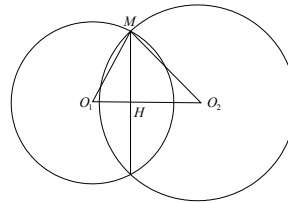
Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$-(y - 6)^2 + y^2 = 29^2 - 25^2 \text{ или } -36 + 12y = 841 - 625 = 216;$$

$$12y = 252, y = 21.$$

\Rightarrow высота первого сегмента $h_1 = 31 - 21 = 10$, высота второго $h_2 = 29 - 21 = 8$

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi h_1^2 \left(R_1 - \frac{h_1}{3} \right) = \pi \cdot 100 \left(25 - \frac{10}{3} \right) \\ &= 100 \cdot \frac{65}{3} \pi = \frac{6500\pi}{3}. \end{aligned}$$



$$V_2 = \pi h_2^2 \left(R - \frac{h_2}{3} \right) = \pi \cdot 64 \cdot \left(29 - \frac{8}{3} \right) = \pi \cdot 64 \cdot \frac{79}{3} = \frac{5056\pi}{3}.$$

$$V_{\text{линзы}} = V_2 - V_1 = \pi(6500 - 5056) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1444\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{1444\pi}{3}$.

2. Дано: в конус вписан шар,

$$\frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{8}{3}.$$

Найти: $\angle BAC$.

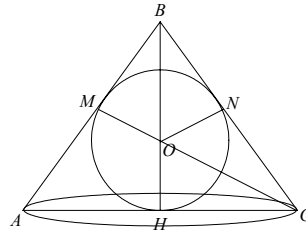
Решение:

Построим осевое сечение конуса ABC .

Пусть $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$, $OH = r$.

Из прямоугольного $\triangle OHC$: $HC = OH$.

$$\text{ctg} \frac{\alpha}{2} = r \text{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$



Из прямоугольного $\triangle BHC$: $BH = HO \cdot \text{tg} \alpha = r \text{ctg} \frac{\alpha}{2} \text{tg} \alpha$

$$\Rightarrow V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

$$V_{\text{конуса}} = \pi \cdot \frac{BH}{3} \cdot HC^2 = \frac{\pi}{3} \cdot r \text{ctg} \frac{\alpha}{2} \text{tg} \alpha \cdot r^2 \text{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3} r^3 \text{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \text{tg} \alpha.$$

$$\frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{\frac{\pi}{3} r^3 \text{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \text{tg} \alpha}{\frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{\text{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \text{tg} \alpha}{4} = \frac{8}{3}.$$

$$\text{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \text{tg} \alpha = \frac{32}{3}$$

$$\frac{\cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha}{\sin^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha} = \frac{\cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha} = \frac{2 \cos^4 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha} =$$

$$= \frac{2(\cos \alpha + 1)^2 \cdot 2}{4(1 - \cos \alpha) \cos \alpha} = \frac{(\cos \alpha + 1)^2}{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)} = \frac{32}{3}.$$

$$3 \cos^2 \alpha + 6 \cos \alpha + 3 = 32 \cos \alpha - 32 \cos^2 \alpha$$

$$35 \cos^2 \alpha - 26 \cos \alpha + 3 = 0$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{3}{5}; \\ \cos \alpha = \frac{1}{7} \end{cases} \begin{cases} \alpha = \arccos \frac{3}{5}; \\ \alpha = \arccos \frac{1}{7}. \end{cases}$$

ДС

1. Дано: $E(1, -2, 1)$, $F(2, -1, 3)$, $\alpha: x - 2y + z - 3 = 0$, $EF \cap \alpha = M$.

Найти: координаты M .

Решение:

$$\overrightarrow{EF} (1, 1, 2).$$

Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$, тогда $\overrightarrow{EM} (x_0 - 1, y_0 + 2, z_0 - 1) = k \cdot \overrightarrow{EF}$.

$$\begin{cases} x_0 - 1 = k \\ y_0 + 2 = k \\ z_0 - 1 = 2k \end{cases}; \begin{cases} x_0 = k + 1 \\ y_0 = k - 2 \\ z_0 = 2k + 1 \end{cases}.$$

А также эти координаты удовлетворяют уравнению плоскости α
 $(k + 1) - 2(k - 2) + (2k + 1) - 3 = 0$

$$k + 2 = 0, k = -3$$

$$M(-3 + 1, -3 - 2, -6 + 1); M(-2, -5, -5).$$

2. Дано: $A(1, -1, 1)$, $B(2, 1, -1)$, $\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$, $\beta \perp \alpha$, $A, B \in \beta$.

Написать уравнение β .

Решение:

$$\vec{n} (1, -2, 1) \perp \alpha \text{ и пусть } \overrightarrow{BN} \perp \alpha, N \in \alpha,$$

$$N(x_0, y_0, z_0), \overrightarrow{BN} (x_0 - 2, y_0 - 1, z_0 + 1), \overrightarrow{BN} = k \cdot \vec{n}.$$

$$\begin{cases} x_0 - 2 = k \\ y_0 - 1 = -2k \\ z_0 + 1 = k \end{cases}; \begin{cases} x_0 = k + 2 \\ y_0 = 1 - 2k \\ z_0 = k - 1 \end{cases}.$$

Координаты N удовлетворяют уравнению плоскости α

$$(k + 2) - 2(1 - 2k) + (k - 1) - 1 = 0.$$

$$6k - 2 = 0, k = \frac{1}{3}; N\left(2\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

β содержит точки $A, B, N \Rightarrow$ уравнение $\beta Px + Qy + Rz + S = 0$.

$$\begin{array}{l} A: \\ B: \\ N: \end{array} \begin{cases} P - Q + R + S = 0 \\ 2P + Q - R + S = 0 \\ \frac{7}{3}P + \frac{Q}{3} - \frac{2R}{3} + S = 0 \end{cases}; \begin{cases} P - Q + R + S = 0 \\ 2P + Q - R + S = 0 \\ 7P + Q - 2R + 3S = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3P + 2S = 0 \\ 0,5P + Q - R = 0 \\ 4P + S + Q - 2R = 0 \end{cases}; \begin{cases} P = -\frac{2}{3}S \\ 0,5P + Q - R = 0 \\ 2,5P + Q - 2R = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} P = -\frac{2}{3}S \\ 0,5P + Q - R = 0 \\ 2P - R = 0 \end{cases}; \begin{cases} P = -\frac{2}{3}S \\ Q = 1,5P \\ R = 2P \end{cases}; \begin{cases} P = -\frac{2}{3}S \\ Q = -S \\ R = -\frac{4}{3}S \end{cases}.$$

Уравнение β : $-\frac{2}{3}x - y - \frac{4}{3}z + 1 = 0$; $2x + 3y + 4z - 3 = 0$.

Вариант 7

С—1

1. Дано: $AF = A_1F$, $BK = KC$, $A_1M = MB_1$, $B_1E = EC_1$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AA_1 = AB = BC$.

Найти: F, M, E, K — лежат ли в одной плоскости? (метод координат).

Решение:

Возьмем т. B за начало координат координатные оси:

$BA \sim x$, $BC \sim y$, $BB_1 \sim z$, длина катета — a .

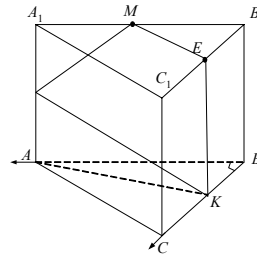
Тогда $F \left\{ a, 0, \frac{a}{2} \right\}$, $M \left\{ \frac{a}{2}, 0, a \right\}$, $K \left\{ 0, \frac{a}{2}, 0 \right\}$,

$E \left\{ 0, \frac{a}{6}, a \right\}$.

Уравнение плоскости: $R_1x + R_2y + R_3z + R_4 = 0$.

Если все точки лежат в одной плоскости, то при подстановке их координат в уравнение должно получиться верное равенство:

$$\begin{cases} R_1a + R_3\frac{a}{2} + R_4 = 0 \\ R_1\frac{a}{2} + R_3 \cdot a + R_4 = 0 \\ R_2\frac{a}{2} + R_4 = 0 \\ R_2 \cdot \frac{a}{6} + R_3 \cdot a + R_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aR_1 + \frac{a}{2}R_3 + R_4 = 0 \\ \frac{aR_1}{2} + R_3a + R_4 = 0 \\ \frac{a}{2}R_2 = -R_4 \\ \frac{a}{6}R_2 + aR_3 = -R_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aR_1 + \frac{a}{2}R_3 - \frac{a}{2}R_2 = 0 \\ \frac{aR_1}{2} + aR_3 - \frac{a}{2}R_2 = 0 \\ R_4 = -\frac{a}{2}R_2 \\ \frac{a}{6}R_2 + aR_3 = \frac{a}{2}R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aR_1 + \frac{a}{6}R_2 - \frac{a}{2}R_2 = 0 \\ \frac{aR_1}{2} + \frac{a}{3}R_2 - \frac{a}{2}R_2 = 0 \\ aR_3 = \frac{a}{3}R_2 \\ R_4 = -\frac{a}{2}R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aR_1 = \frac{a}{3}R_2 \\ aR_1 = \frac{a}{2}R_2 \\ R_3 = \frac{R_2}{3} \\ R_4 = -\frac{a}{2}R_2 \end{cases} \quad (2) \quad (4)$$



Нетрудно видеть, система совместна и уравнение плоскости будет выглядеть так:

$$x + 3y + z - \frac{3}{2}a = 0 \quad (\text{где } a \text{ — длина бокового ребра}). \text{ Значит данные точки}$$

в одной плоскости

2. Дано: $\vec{p}(1, -2, 1)$, $\vec{q}(2, 0, -1)$, $\vec{m}(-1, 1, 2)$, $\vec{a} = x \cdot \vec{p} + y \cdot \vec{q} + z \cdot \vec{m}$, $\vec{a}(1, 2, -2)$.

Найти: x, y, z .

Решение:

$$\begin{cases} 1 = x + 2y - z \\ 2 = -2x + z \\ -2 = x - y + 2z \end{cases}; \begin{cases} 1 = x + 2y - 2 - 2x \\ z = 2 + 2x \\ -2 = x - y + 4 + 4x \end{cases}; \begin{cases} 3 = 2y - x \\ z = 2 + 2x \\ y = 6 + 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = 12 + 10x - x \\ z = 2 + 2x \\ y = 6 + 5x \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = -\vec{p} + \vec{q} + 0 \cdot \vec{m}.$$

Дано: $\vec{p}\{1, -2, 1\}$, $\vec{q}\{2, 0, -1\}$, $\vec{m}\{-1, 1, 2\}$.

Разложить $\vec{a}\{1, 2, -2\}$ по \vec{p} , \vec{q} и \vec{m} .

Решение:

$$R_1 \vec{p} + R_2 \vec{q} + R_3 \vec{m} = \vec{a} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} R_1 + 2R_2 + R_3(-1) = 1 & (\text{по координате } x) \\ R_1(-2) + R_2 \cdot 0 + R_3 = 2 & (\text{по координате } y) \\ R_1 - R_2 + 2R_3 = -2 & (\text{по координате } z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1 + 2R_2 - R_3 = 1 \\ -2R_1 + R_3 = 2 \\ R_1 - R_2 + 2R_3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_3 = 2(R_1 + 1) \\ 2R_1 - R_2 + 2R_3 = -2 \\ 3R_2 - 3R_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} R_1 + 2R_2 - 2R_1 - 2 = 1 \\ R_3 = 2R_1 + 2 \\ R_1 - R_2 + 4R_1 + 4 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = 2R_2 - 3 \\ R_3 = 2R_1 + 2 \\ 10R_2 - 15 - R_2 + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} R_1 = -1 \\ R_3 = 0 \\ R_2 = 1 \end{cases}. \text{ Значит } \vec{a} = (-1)\vec{p} + 1\vec{q} + 0\vec{m}.$$

С—2

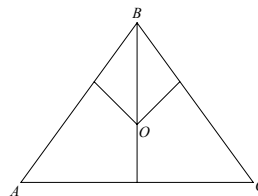
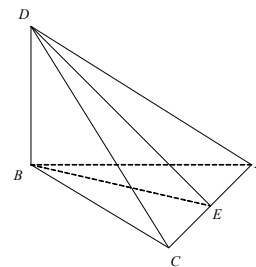
1. Дано: $DB \perp ABC$, $DB = 4$, $AB = BC$, $BE \perp AC$, $BE = AC = 4$. Т. P равноудалена от вершин.

Найти расстояние: $AP_1 = BP_1 = CP = DP$.

Решение:

$AB = BC \Rightarrow \triangle ABC$ равнобедренный $\Rightarrow BE$ — и высота ($BE \perp AC$), и медиана $\Rightarrow AE = EC = 2$.

Тогда центр описанной окружности (около ABC) O лежит на BE .



Пусть $OB = x$. Тогда

$$(4-x)^2 + 2^2 = x^2; 16 + x^2 - 8x + 4 = x^2; 8x = 20, x = \frac{5}{2}.$$

Точки, равноудаленные от вершин A, B и C лежат на перпендикулярной к ABC прямой, проходящей через т. O . DB тоже перпендикулярно $ABC \Rightarrow OP \parallel DB$.

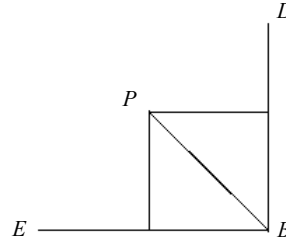
Рассмотрим плоскость, проходящую через DB и OP .

По условию $PD = PB$. Тогда высота PK в равнобедренном $\triangle PDB$ — медиана, по длине равна OB . Таким образом,

$$PD^2 = OB^2 + 2^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 = \frac{25}{4} + 4 = \frac{41}{4},$$

$$PD = PB = PA = PC = \frac{\sqrt{41}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{41}}{2}$.



2. Решить уравнение $\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} = 1$.

Решением является множество точек, сумма расстояний от которых до точек $A\{1, 0, 0\}$ и $B\{0, 1, 0\}$ равна единице. Но расстояние между точками A и B равно $\sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$. Значит, сумма расстояний от любой точки до них не может быть меньше этого значения. Стало быть, множество решений пусто.

С—3

1. Дано: $MABC$ — пирамида, $ABCD$ — ромб, $A(-3, 10, -5)$, $C(3, 4, 1)$, $M(5, 8, -3)$, $\angle MAD = \angle MAB$, MH — высота.

Найти: MH .

Решение:

Условие $\angle MAD = \angle MAB$ дает, что $H \in AC$, $\overrightarrow{AC} (6, -6, 6)$.

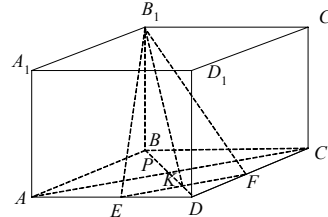
Пусть $H(x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{MH} (x_0 - 5, y_0 - 8, z_0 + 3)$,

$$\overrightarrow{AH} (x_0 + 3, y_0 - 10, z_0 + 5), \overrightarrow{AH} = k \cdot \overrightarrow{AC} = (6k, -6k, 6k)$$

$$\begin{cases} x_0 + 3 = 6k \\ y_0 - 10 = -6k \\ z_0 + 5 = 6k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 6k - 3 \\ y_0 = 10 - 6k \\ z_0 = 6k - 5 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AH} (6k, -6k, 6k),$$

$$\overrightarrow{MH} (6k - 3 - 5, 10 - 6k - 8, 6k - 5 + 3),$$

$$\overrightarrow{MH} (6k - 8, 2 - 6k, 6k - 2).$$



$$\overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow (\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AC}) = 6(6k - 8) - 6(2 - 6k) + 6(6k - 2)$$

$$6k + 6k + 6k - 8 - 2 - 2 = 0$$

$$18k = 12, k = \frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{MH}(4 - 8, -2, 2 - 2) \overrightarrow{MH}(-4, -2, 2);$$

$$(|\overrightarrow{MH}| = \sqrt{16 + 8} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Ответ: $2\sqrt{6}$.

$$2. \text{ Дано: } S = \sqrt{\sin^2 x + 0,5} + \sqrt{\cos^2 x - 0,5} + \sqrt{0,5}.$$

Найти: $S_{\text{наибольшее}}, x_{\text{макс}}.$

Решение:

$$\text{Рассмотрим векторы } \vec{a}(\sqrt{\sin^2 x + 0,5}, \sqrt{\cos^2 x - 0,5}, \sqrt{0,5}) \text{ и } \vec{b}(1, 1, 1).$$

$$\text{Тогда } (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \sqrt{\sin^2 x + 0,5} + \sqrt{\cos^2 x - 0,5} + \sqrt{0,5} = S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

где $\varphi = \angle \vec{a} \cdot \vec{b}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{\sin^2 x + 0,5 + \cos^2 x - 0,5 + 0,5} = \sqrt{\frac{3}{2}}; |\vec{b}| = \sqrt{3}.$$

$$S = (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{3} \cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos \varphi.$$

Наибольшее значение S достигается при $\varphi = 0, \cos \varphi = 1$.

$$S_{\text{наиб}} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \text{ оно достигается при } x = \pi k, k \in Z.$$

С—4

1. Дано: $MABC$ — пирамида,
 $\angle BCA = 90^\circ, AC = 3, BC = 5, AM \perp$
 $AC, AM = 4, MB = \sqrt{30}.$

Найти: MH — высоту.

Решение:

$$\text{В } \triangle ABC \quad AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{34}.$$

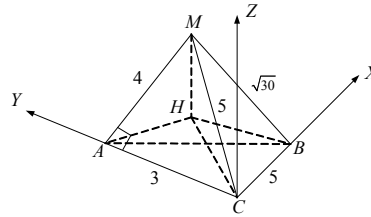
Соединим точки A и C с точкой

H .

$$\text{Из прямоугольного } \triangle MAC: MC = \sqrt{AM^2 + AC^2} = 5.$$

Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат $Cxyz$. В ней $C(0, 0, 0), A(0, 3, 0), B(5, 0, 0)$.

Пусть $M(x_0, y_0, z_0), \overrightarrow{CM}(x_0, y_0, z_0), |\overrightarrow{CM}| = 5, \overrightarrow{AM}(x_0, y_0 - 3, z_0), \overrightarrow{BM}(x_0 - 5, y_0, z_0).$



$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CM}| &= 5 & \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 25 & \text{I} \\ x_0^2 + (y_0 - 3)^2 + z_0^2 = 16 & \text{II} \\ (x_0 - 5)^2 + y_0^2 + z_0^2 = 30 & \text{III} \end{cases} \\ |\overrightarrow{AM}| &= 4 \\ |\overrightarrow{BM}| &= \sqrt{30} \end{aligned}$$

$$\text{I} - \text{II}: y_0^2 - (y_0 - 3)^2 = 9; 6y_0 - 9 = 9, y_0 = 3$$

$$\text{III} - \text{I}: (x_0 - 5)^2 - x_0^2 = 5; 10x_0 + 25 = 5, x_0 = -2.$$

$$\text{из (I)} \Rightarrow 9 + 4 + z_0^2 = 25, z_0^2 = 12$$

$$\Rightarrow \text{Высота } MH = |z_0| = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Ответ: } 2\sqrt{3}.$$

2. Дано: $DABC$ — тетраэдр, $\angle ADC, \angle ADB, \angle CDB$ — тупые, $AD = DB = DC$.

Доказать: $\triangle ABC$ — остроугольный.

Доказательство:

Опустим высоту DH ; $\triangle ADH = \triangle BDH = \triangle CDH$ по гипотенузе и катету $\Rightarrow H$ — центр описанной окружности $\triangle ABC$.

Катеты $AH = HC < AD = DC$ гипотенуз \Rightarrow

$$\text{из } \triangle ADC: AC^2 = 2AD^2(1 - \cos \angle ADC),$$

$$\text{из } \triangle AHC: AC^2 = 2AH^2(1 - \cos \angle AHC),$$

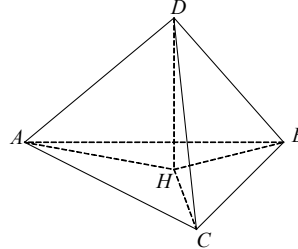
$$2AD^2(1 - \cos \angle ADC) = 2AH^2(1 - \cos \angle AHC)$$

$$\Rightarrow 1 - \cos \angle ADC > 1 - \cos \angle AHC \Rightarrow$$

$$\cos \angle ADC < \cos \angle AHC$$

$$\Rightarrow \angle AHC > \angle ADC \text{ и тупой.}$$

Аналогично, $\angle AHB$ и $\angle CHB$ — тупые $\Rightarrow H$ лежит внутри $\triangle ABC$. А центр описанной окружности лежит внутри остроугольного треугольника. Итак $\triangle ABC$ — остроугольный.



С—5

1. Дано: $m_1 \perp m_2, m_1 \cap m_2 = O, m_3 \perp m_1, m_3 \perp m_2, O \in m_3, A$ и A_1 — симметричны относительно m_1, A_1 и A_2 — симметричны относительно m_2 .

Доказать, что A и A_2 — симметричны относительно m_3 .

Доказательство:

Введем полярную систему координат $Oxyz$ так, что $Ox \parallel m_1, Oy \parallel m_2, Oz \parallel m_3$. Пусть $A(x_0, y_0, z_0)$, тогда $A_1(x_0, -y_0, -z_0), A_2(-x_0, -y_0, z_0)$.

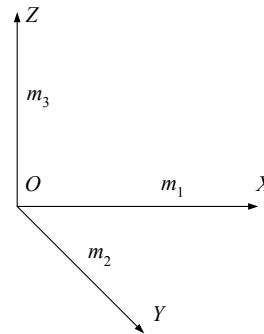
Видно, что A и A_2 — симметричны относительно Oz или m_3 .

2. Дано: отображение $A(x, y, z) \rightarrow A_1(-x + 2, -y - 3, -z + 1)$.

Является ли отображение движением?

Решение:

Возьмем произвольные точки $B(x_1, y_1, z_1)$ и $C(x_2, y_2, z_2)$.



$$B \rightarrow B_1(-x_1 + 2, -y_1 - 3, -z_1 + 1)$$

$$C \rightarrow C_1(-x_2 + 2, -y_2 - 3, -z_2 + 1)$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = |\overrightarrow{BC_1}|$$

\Rightarrow это движение. Оно может быть получено симметрией относительно начала координат и переносом на вектор $\vec{p}(2, -3, 1)$.

С—6

1. Дано: S_p и S_q — симметрии p, q -оси симметрии, $p \neq q$, $S_p \circ S_q$ и $S_q \circ S_p$ — совпадают.

Доказать: $p \cap q = O$ (точка).

Доказательство:

Допустим, p, q не пересекаются.

Пусть $p \parallel q$. $S_p \circ S_q$ дает параллельный перенос на вектор $2\overrightarrow{AB}$, который отображает т. X на т. X_2 .

$S_q \circ S_p$ дает параллельный перенос на вектор $2\overrightarrow{BA}$, который отображает точку X_2 на т. $X \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 0$ (противоречие условию).

Если p и q — скрещивающиеся, $S_q \circ S_p$ отображает общий перпендикуляр прямых p и q на себя, причем это отображение — перенос на вектор $\vec{e} \neq \vec{0}$, но тогда $S_p \circ S_q \neq S_q \circ S_p$ (противоречие условию).

Значит, p и q — пересекаются.

2. Дано: прямая l , точка A , точка A_1 , плоскость α , $A_1 \in l$, $\alpha \cap l = M$, A и A_1 симметричны относительно O , $O \in \alpha$.

Найти: т. A_1 .

Решение:

Через т. A и прямую в l проводим плоскость β . $\alpha \cap \beta = p$ (прямая).

В плоскости β строим прямую $m \parallel l$, $m \cap p = L$.

Через середину O отрезка ML и точку A проводим прямую AO .

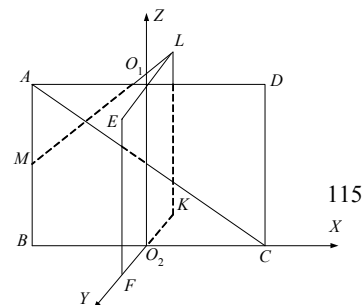
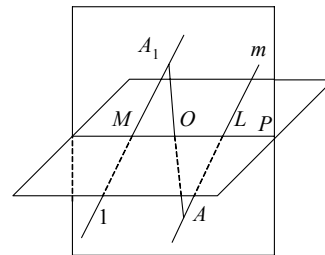
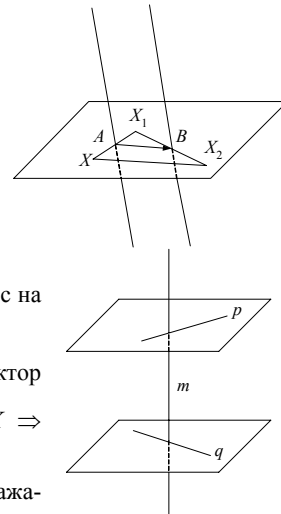
$AO \cap l = A_1$, A_1 — искомая.

С—7

1. Дано: цилиндр, O_1O_2 — ось, $ABCD, EFKL$ — осевые сечения, $M \in AB$, $AM = MB$, $ML \perp AC$, $S(ABCD) = 4$.

Найти: $S_{\text{цилиндра}}$.

Решение:



Поместим цилиндр в полярную систему координат O_2xyz .
 Пусть $BC = 2r$, $AB = 2h$, тогда $M(-r, 0, h)$, $L(0, -r, 2h)$, $A(-r, 0, 2h)$, $C(r, 0, 0)$,
 $\overrightarrow{AC} (2r, 0, -2h)$, $\overrightarrow{ML} (r, -r, h)$.
 $(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{ML}) = 2r^2 - 2h^2 = 0 \Rightarrow r = h$.
 Но $S(ABCD) = AB \cdot BC = 4hr = 4 \Rightarrow h = r = 1$.
 Значит, $S_{\text{цилиндра}} = 2\pi(r \cdot 2h) + 2\pi r^2 = 4\pi + 2\pi = 6\pi$.
 2. Дано: $MABCD$ — правильная пирамида, $AB = a$, $E \in AB$, $AE = EB$, MH — высота, $\angle MEH = \varphi = \arctg 2$. В $MABCD$ вписан цилиндр $PRST$ — осевое сечение, $PRST$ — квадрат.

Найти: $S_{\text{бок цилиндра}}$.

Решение:

$$AE = EH = AB \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}.$$

Из прямоугольного $\triangle EHM$:

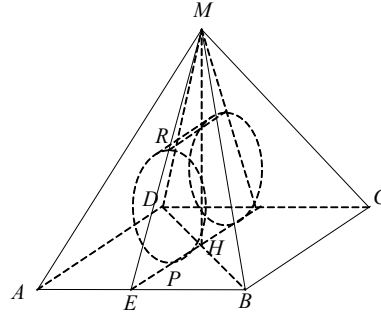
$$\frac{MH}{EH} = \operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow MH = 2EH = a.$$

В осевом сечении $PRST$ $PH = 2RP = EP$
 (т.к. $\triangle EPR \sim \triangle EHM$)

$$\Rightarrow PH = EP = \frac{EH}{2} = \frac{a}{4}; RP = 2r = 2PH = \frac{a}{2}$$

$$= \frac{a}{2} \Rightarrow r = \frac{a}{4}; PT = 2PH = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot r \cdot PT = 2\pi \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$



С—8

1. Дано: конус, $A(1, 2, -2)$, $B(4, 2, -2)$, $C(3, 4, -2)$, $A, B, C \in$ окружности основания, высота конуса равна 3, конус \cap плоскость $z = 0$.

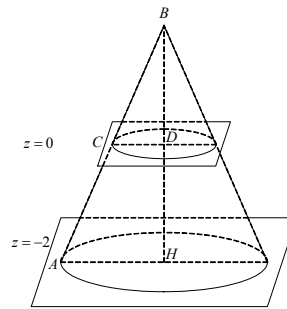
Найти: $S_{\text{сечения}}$, координаты вершины конуса, $S_{\text{бок конуса}}$.

Решение:

Из координат точек видно, что основание конуса задается уравнениями

$$\begin{cases} z = -2 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

C, B, A принадлежат основанию



$$\begin{cases} z = -2 \\ (1-x_0)^2 + (2-y_0)^2 = R^2 \\ (4-x_0)^2 + (2-y_0)^2 = R^2 \\ (3-x_0)^2 + (4-y_0)^2 = R^2 \end{cases}; \begin{cases} z = -2 \\ (1-x_0)^2 - (4-x_0)^2 = 0 \\ \frac{9}{4} + (2-y_0)^2 = R^2 \\ \frac{1}{4} + (4-y_0)^2 = R^2 \end{cases};$$

$$(1-x_0)^2 = (4-x_0)^2; \begin{cases} 1-x_0 = 4-x_0 \\ 1-x_0 = x_0-4 \end{cases}; x_0 = \frac{5}{2}$$

$$2+4-4y_0+y_0^2-16+8y_0-y_0^2=0, y_0 = \frac{5}{2}$$

$$\frac{9}{4} + \frac{1}{4} = R^2, R = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\begin{cases} z = -2 \\ x_0 = \frac{5}{2} \\ y_0 = \frac{5}{2} \\ R = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}.$$

Значит, координаты $M\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$.

Рассмотрим осевое сечение и $\triangle AHM \sim \triangle PDM$. $DM = HB - HD = 1 \Rightarrow$

$$\frac{DM}{PD} = \frac{HM}{AH} \Rightarrow PD = \frac{AH \cdot DM}{HM} = \frac{1}{3} AH = \frac{\sqrt{10}}{6}.$$

$$S_{\text{сечения}} = \pi PD^2 = \pi \cdot \frac{10}{36} = \frac{5\pi}{18}.$$

$$\text{Образующая } L = AM = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{\frac{10}{4} + 9} = \sqrt{\frac{46}{4}} = \frac{\sqrt{46}}{2}.$$

$$S_{\text{бок конуса}} = \pi AH \cdot AM = \pi \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{46}}{2} = \frac{\pi\sqrt{115}}{2}.$$

2. Дано: усеченный конус, $ABCD$ — осевое сечение, CH — высота, второй конус с образующей AC и радиусом CH ,

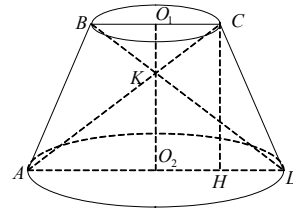
$$\frac{S_{\text{бок. ус. кон.}}}{S_{\text{бок. кон. II}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Найти: $\angle BAD$.

Решение:

Пусть $\angle BAD = \varphi = \angle CDH$. Пусть также $BO_1 = r$, $AO_2 = R$, тогда $HD = R - r$. Из $\triangle CHD$: $CH = HD \cdot \operatorname{tg} \varphi = (R - r) \operatorname{tg} \varphi$.

Но с другой стороны из $\triangle CO_1K$ и $\triangle DO_2K$: $O_1O_2 = r + R = CH$.



Значит, $(R-r)\operatorname{tg}\varphi = r + R$.

$AH = R + r$. Из $\triangle ACH$: $AC = (R+r)\sqrt{2}$.

Из $\triangle CHD$: $CD = \frac{HD}{\cos\varphi} = \frac{R-r}{\cos\varphi}$.

$$S_{\text{бок ус кон}} = \pi \cdot CD \cdot (R+r) = \frac{\pi(R-r)(R+r)}{\cos\varphi}.$$

$$S_{\text{бок кон II}} = \pi \cdot AC \cdot CH = \pi(R+r)^2\sqrt{2}.$$

$$\frac{S_{\text{бок ус кон}}}{S_{\text{бок кон II}}} = \frac{\pi(R-r)(R+r)}{\cos\varphi \cdot \pi(R+r)^2\sqrt{2}} = \frac{(R-r)}{(R+r)\cos\varphi \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow$$

$$3(R-r) = 2\cos\varphi(R+r)\sqrt{3}.$$

$$\text{Значит, } \begin{cases} (R-r)\operatorname{tg}\varphi = R+r \\ 3(R-r) = 2\cos\varphi(R+r)\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\frac{3(R+r)}{\operatorname{tg}\varphi} = 2\cos\varphi(R+r)\sqrt{3}$$

$$3 = 2\sin\varphi\sqrt{3} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

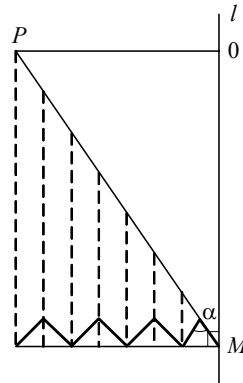
С—9

1. Дано: ломаная линия из 8 звеньев, все звенья равны a , угол между звеньями α , l — ось.

Найти: S поверхности, которая образуется при вращении этой ломаной вокруг оси l .

Решение:

Продлим отрезок, составляющий первое звено. Проведем через концы остальных звеньев прямые, параллельные прямой l . Мы видим, что соответствующие сегменты фигуры вращения, которую нужно обчислить, равны кускам конуса (нечетные просто равны, а четные симметричны относительно некоторой плоскости). Поэтому искомая площадь равна площади конуса с образующей $8a$ и углом между образующей и осью вращения $\frac{\alpha}{2}$.



$$S_{\text{пов}} = \pi r l = \pi \cdot \left(8a \sin \frac{\alpha}{2}\right) = 64\pi a^2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

2. Дано: правильная треугольная призма, все ребра равны a . Четыре вершины призмы лежат в плоскости основания конуса, а две другие — на его боковой поверхности. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол φ .

Найти: $S_{\text{ос сеч кон}}$ и ее наименьшее значение; при каком значении φ это достигается.

Решение:

Проведем сечение через вершину конуса и вершины призмы, которые лежат на боковой поверхности конуса (считаем, что центр квадрата — грани призмы, лежащей на основании конуса, совпадает с центром основания конуса. В противном случае данных для решения задачи недостаточно). Это осевое сечение. Здесь $A_1K_1 = AK$ — есть высота в грани призмы, которая представляет собой равносторонний треугольник.

$$AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AA_1 = a, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$K_1M = A_1K \cdot \operatorname{ctg}\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg}\varphi; ON = \frac{a}{2} \operatorname{tg}\varphi.$$

Площадь сечения есть

$$\begin{aligned} S_{\Delta LOM} &= \frac{1}{2} LM \cdot (ON + AK) = \frac{1}{2} (a + 2K_1M)(ON + AK) = \\ &= \frac{1}{2} (1 + a\sqrt{3} \operatorname{ctg}\varphi) \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2} \operatorname{tg}\varphi \right) = \frac{a^2}{4} (1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg}\varphi)(\sqrt{3} + \operatorname{tg}\varphi) = \\ &= \frac{a^2}{4} (2\sqrt{3} + 3\operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi) = f(\varphi). \end{aligned}$$

Наименьшее значение достигается в нуле производной по φ

$$f'(\varphi) = \frac{a^2}{4} \left(-\frac{3}{\sin^2 \varphi} + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right); \quad \frac{3}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \varphi};$$

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi = \frac{1}{3}; \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}; \varphi = 60^\circ.$$

$$S_{\min} = \frac{a^2}{4} (2\sqrt{3} + 3 + \sqrt{3}) = a^2 \sqrt{3}.$$

С—10

1. Дано: сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 3 = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2z - 6 = 0$ пересекаются.

Найти: длину линии пересечения этих сфер.

Решение:

Преобразуем уравнения сфер:

$$\text{а) } x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - z = (x-1)^2 + y^2 (2+1)^2 = 4$$

$$\text{в) } x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2z - 6 = (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 9 = 0$$

Сфера а) имеет центр в т. А {1, 0, -1} и радиус 2.

Сфера в) имеет центр в т. В {-1, 1, 1} и радиус 3.

Если мы проведем сечение через прямую АВ, то получим такую картинку:

Здесь: $OB = R_b = 3$, $OA = R_a = 2$, а высота $\triangle OAB_1$, опущенная на AB , равна радиусу окружности пересечения сфер.

$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + 1 + (1-1)^2} = 3.$$

Пусть $OK = h$ — высота, $KA = x$. Тогда:

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = OA^2 = 4 \\ h^2 + (AB - x)^2 = OB^2 = 9 \end{cases}; \begin{cases} h^2 + x^2 = 4 \\ h^2 + (3 - x)^2 = 9 \end{cases}.$$

$$9 - 6x + x^2 - x^2 = 5$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$h = \sqrt{4 - \frac{4}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Значит, искомая длина окружности пересечения

$$2\pi h = 8\pi \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

2. Дано: точки $A(2; 0; 0)$, $B(-4; 0; 0)$.

Найти: множество точек, расположенных вдвое ближе к точке A , чем к точке B .

Решение:

Запишем условие аналитически. Координаты искомых точек должны удовлетворять равенству

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x-2)^2 + 4y^2 + 4z^2 = (x+4)^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 16x + 16 + 3y^2 + 3z^2 = x^2 + 8x + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 3y^2 + 3z^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 8x + y^2 + z^2 = (x-4)^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0.$$

Значит, искомое множество точек — сфера с центром в т. $\{4, 0, 0\}$ и радиусом 4.

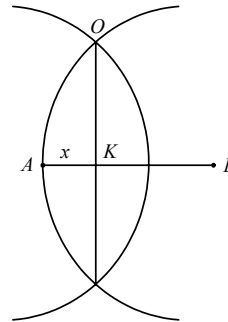
С—11

1. Дано: из точки поверхности шара проведены три равные хорды под углом α одна к другой, радиус шара равен R .

Найти: длину хорд.

Решение:

Соединим попарно концы хорд. Получим вписанную в шар треугольную пирамиду. Поскольку боковые грани — равные треугольники (по 2 сторонам и углу между ними), то в основании пирамиды — равносторонний треугольник. Высота пирамиды падает в центр (т. пересечения высот, медиан, биссектрис) этого треугольника, т.к. вся фигура при повороте вокруг высоты на 120° переходит в себя же. Проведем сечение сферы и пирамиды плоскостью, проходящей через одну из хорд и высоту. Она пройдет



также через центр сферы (см. замечание о сдвиге на 120°). Получим такой рисунок:

Здесь AA_1 — хорда, O — центр шара, A_1B — пересечение с основанием пирамиды (совпадает с высотой, медианой, биссектрисой этой грани, т.к. высота падает эту ...), AK — высота пирамиды и ΔA_1AB .

Пусть $AA_1 = x$. Тогда сторона основания пирамиды будет $2x \sin \frac{\alpha}{2}$ — из равнобедренного треугольника каждой грани, где боковые стороны x , а угол при вершине — α .

$$AB \text{ — (высота и медиана основания)} = 2x \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Поскольку K — точка пересечения медиан, то по свойству медианы

$$A_1K = \frac{2}{3} AB = \frac{2\sqrt{3}}{3} x \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$AK = \sqrt{x^2 - A_1K^2} = x \sqrt{1 - \frac{12}{9} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Радиус сферы равен радиусу окружности, описанной около ΔA_1AA_2 , сечение проходит через центр сферы.

$$\text{Значит, } R = \frac{A_1A \cdot AA_2 \cdot A_1A_2}{4S_{\Delta A_1AA_2}} = \frac{x \cdot x \cdot 2 \cdot AK}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot A_1K \cdot AK} =$$

$$= \frac{x^2 \cdot x \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot x^2 \sqrt{1 - \frac{12}{9} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{x}{2 \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

$$\text{Отсюда } x = 2R \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 2R \sqrt{1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} R \sqrt{1 + 2 \cos \alpha}.$$

$$\text{Ответ: длина хорды } \frac{2\sqrt{3}}{3} R \sqrt{1 + 2 \cos \alpha}.$$

2. Дано: из одной точки сферы проведены три попарно перпендикулярные хорды длиной a , b , и c .

Найти: $S_{\text{сферы}}$.

Решение:

Построим точки, симметричные данным в условии (исходной к концам хорд), относительно центра сферы. Получим вершины вписанного в сферу параллелограмма со сторонами a , b и c . Центр сферы окажется на середине «длиной» диагонали параллелепипеда. Отсюда радиус сферы

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \text{ Площадь сферы}$$

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4\pi \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2) = \pi(a^2 + b^2 + c^2).$$

C—12

1. Дано: все ребра четырехугольной пирамиды равны по a . Высота пирамиды является диаметром шара.

Найти: длину линии пересечения поверхностей этих тел.

Решение:

Пирамида является правильной. Линия пересечения состоит из 4 дуг окружностей, получив линия пересечением боковыми гранями поверхности сферы.

На рисунке $PK \perp (MDC)$ $OO_1 \perp (MDC)$

$$OO_1 = \frac{1}{2} PK$$

$$PK = \frac{MP \cdot PE}{ME}, ME = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$PE = \frac{a}{2} MP = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$PK = \frac{a\sqrt{2}a \cdot 2}{2 \cdot 2a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$OO_1 = \frac{a\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$$

$$R = MO_1 = \sqrt{MO^2 - OO_1^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{16} - \frac{2a^2}{16 \cdot 3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

$$\text{Градусная мера каждой из дуг равна } 120^\circ. \text{ Тогда } l = \frac{\pi a \cdot 120}{2\sqrt{3} \cdot 180} = \frac{\pi a}{3\sqrt{3}}.$$

$$\text{А вся линия пересечения имеет длину } l = \frac{4\pi a}{3\sqrt{3}}.$$

2. Дано: в куб с ребром, равным a , вписан шар. Затем в один из трехгранных углов при вершине куба, вписан второй шар, касающийся первого шара.

Найти: радиус второго шара.

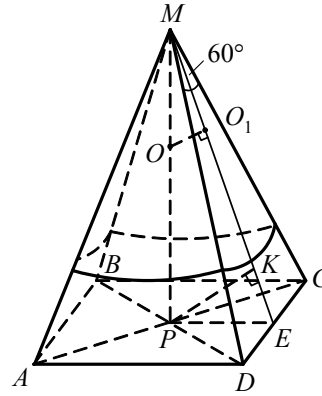
Решение:

Рассмотрим сечение, проходящее через диагональ одной из принадлежащих ко второму шару граней. Центры обоих шаров лежат на этом сечении — на диагонали куба AC_1 .

Из $\triangle AO_1A'$ имеем:

$$AO_1^2 = r^2 + AA'^2, \quad (1)$$

$$AO_1 = \frac{AC_1}{2} - \frac{a}{2} - r = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{a}{2} - r = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a - r$$



$\triangle AO_1A'$ подобен $\triangle AC_1C$ — оба прямоугольные с одинаковым углом при A . Значит,

$$\frac{AA'}{AC} = \frac{r}{CC_1} \Leftrightarrow \frac{AA'}{\sqrt{2}a} = \frac{r}{a} \Leftrightarrow AA' = \sqrt{2}r.$$

Подставим в равенство (1)

$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}a - r \right)^2 = r^2 + (\sqrt{2}r)^2;$$

$$r^2 - (\sqrt{3}-1)ar + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)^2 a^2 = 3r^2;$$

$$r^2 - (\sqrt{3}-1)ar - \frac{2-\sqrt{3}}{2}a^2 = 0 \quad \text{или} \quad 2\left(\frac{r}{a}\right)^2 + (\sqrt{3}+1)\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Решив квадратное относительно $\frac{r}{a}$ уравнение, получим

$$\frac{r}{a} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \quad \text{или} \quad r = \frac{2-\sqrt{3}}{2}a \quad (\text{второй корень — отрицательный}).$$

С—13

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AB = 6$, $AD = 8$, $E \in AD$, $AE = ED$, $F \in CD$, $CF = FD$, $B_1 K \perp EF$, $\angle KBK_1 = 45^\circ$.

Найти: $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$.

Решение:

EF — средняя линия $\triangle ACD$. $BD = AC$
 $= \sqrt{AD^2 + AB^2} = 10 \Rightarrow EF = 5$.

Высота BP $\triangle ABC$ равна $BP = \frac{2S}{AC} = \frac{AB \cdot BC}{AC} = 4,8$.

$$BK = \frac{3}{2}BP = \frac{3}{2} \cdot \frac{24}{5} = \frac{36}{5} = 7,2.$$

Из прямоугольного $\triangle B_1 BK$: $B_1 B = BK = 7,2$

$$\Rightarrow V_{\text{параллелепипеда}} = BB_1 \cdot AB \cdot AD = 7,2 \cdot 6 \cdot 8 = 48 \cdot 7,2 = 345,6.$$

2. Дано: $ABCA_1 B_1 C_1$ — прямая призма, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 4$, $BB_1 = 3$.

Угол между AC_1 и CB_1 равен $\arccos \frac{3\sqrt{2}}{10}$.

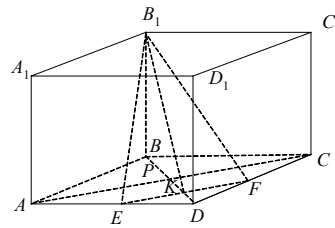
Найти: $V(ABCA_1 B_1 C_1)$.

Решение:

Поместим призму в полярную систему координат S_{xyz} .

Пусть $AC = y_0$, тогда $\overrightarrow{AC_1} (0, -y_0, 3)$, $\overrightarrow{CB_1} (4, 0, 3)$,

$$|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{9 + y_0^2}, \quad |\overrightarrow{CB_1}| = 5,$$



$$(\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{CB_1}) = 9 = \sqrt{9 + y_0^2} \cdot 5 \cdot \cos\left(\arccos \frac{3\sqrt{2}}{10}\right);$$

$$\sqrt{9 + y_0^2} = \frac{9 \cdot 10}{5 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{18}{3\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2}.$$

$$V_{\text{призмы}} = S(ABC) \cdot BB_1 = \frac{1}{2} AC \cdot CB \cdot BB_1 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18.$$

С—14

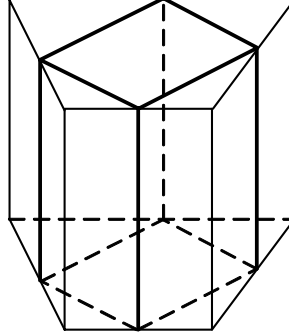
1. Дано: около куба описана призма так, что все вершины куба являются серединами сторон оснований призмы. Основанием призмы служит трапеция, основания которой равны a и b .

Найти: $V_{\text{призмы}}$.

Решение:

Высотой призмы является сторона куба. Найдем ее. Для этого рассмотрим расположение грани куба на основании призмы.

По условию две вершины куба попадают на боковые стороны трапеции основания призмы. Значит, диагональ грани куба совпадает со средней линией трапеции. Но средняя линия трапеции параллельна основаниям. Вторая диагональ квадрата (грани куба) перпендикулярна первой и, стало быть, является высотой трапеции.



Пусть сторона куба — x , тогда диагональ грани $x\sqrt{2} = \frac{a+b}{2}$ (длина средней линии) = высоте трапеции. Отсюда $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

$$V_{\text{призмы}} = S_{\text{трап}} \cdot x = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b) = \sqrt{3} \left(\frac{a+b}{2} \right)^3.$$

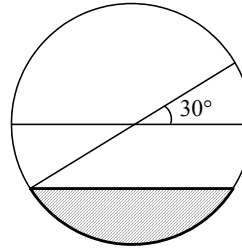
2. Дано: корыто полуцилиндрической формы наполнено до краев жидкостью.

Сколько процентов жидкости выльется, если корыто наклонить на 30° так, чтобы образующие цилиндра оставались горизонтальными?

Решение:

Объем жидкости в корыте пропорционален площади смачивания его боковой грани.

$$\text{Площадь смачивания до поворота} = \frac{\pi r^2}{2}.$$



Площадь смачивания после поворота есть площадь сектора KOA минус площадь ΔKOA . Поскольку KO и OA образуют с горизонталью угол 30° , $\Delta KOA = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$. Отсюда

$$S_{\text{сект}} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2, S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \cos 30^\circ \cdot r \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2.$$

Процент вылитой жидкости есть

$$\frac{\frac{\pi r^2}{2} - \frac{1}{3} \pi r^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} r^2}{\frac{\pi r^2}{2}} \cdot 100 = \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right) \cdot 100 \approx 60\%.$$

С—15

1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная призма, $AB = BC = AC = a$, $A_1A = b$, $\angle A_1AC = 60^\circ$, $\angle A_1AB = 45^\circ$.

Найти: $V_{\text{призмы}}$.

Решение:

Опустим из т. A перпендикуляры A_1E и A_1F на CC_1 и BB_1 .

Из ΔA_1EC_1 : $A_1E = A_1C_1 \cdot \sin 60^\circ = a \frac{\sqrt{3}}{2}$; $C_1E = \frac{a}{2}$.

Из ΔA_1B_1F : $A_1F = B_1F = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

В прямоугольной трапеции EC_1B_1K проведем высоту C_1K .

В ΔC_1KB_1 : $B_1K = B_1F - EC_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2}$; $C_1B_1 = a$

$$\Rightarrow C_1K = \sqrt{C_1B_1^2 - B_1K^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}(2+1-2\sqrt{2})} = a\sqrt{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= a\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{1+2\sqrt{2}}.$$

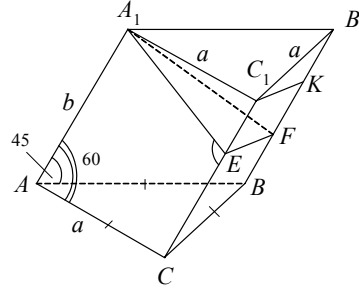
$$EF = C_1K = \frac{a}{2}\sqrt{1+2\sqrt{2}}.$$

По т. $\cos EF^2 = A_1E^2 + A_1F^2 - 2A_1E \cdot A_1F \cos \angle EA_1F$

$$\frac{a^2}{4}(1+2\sqrt{2}) = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} - 2\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cos \angle EA_1F$$

$$1+2\sqrt{2} = 3+2-2\sqrt{6} \cos \angle EA_1F$$

$$2\sqrt{6} \cdot \cos \angle EA_1F = 4-2\sqrt{2}$$



$$\begin{aligned}\cos \angle EA_1F &= \frac{2-2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \quad \sin \angle EA_1F = \sqrt{1-\cos \angle EA_1F} = \\ &= \sqrt{1-\frac{(2-2\sqrt{2})^2}{6}} = \sqrt{\frac{6-4-2+4\sqrt{2}}{6}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{\text{призмы}} = AA_1 \cdot \frac{1}{2} A_1E \cdot A_1F \cdot \sin \angle EA_1F =$$

$$= \frac{1}{2} b \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{2} = \frac{a^2b}{4} \sqrt[4]{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^2b}{4} \sqrt[4]{2}.$$

2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — наклонная призма, $AC \perp BD$, $AC = 5$, $BD = 4$, $BB_1 D_1 D$ — прямоугольник, $S(AA_1 C_1 C) = 30$.

Найти: $V_{\text{призмы}}$.

Решение:

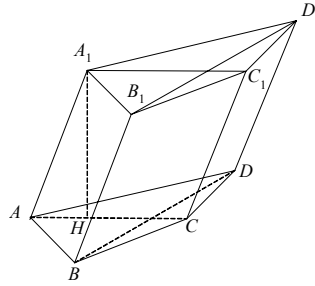
$B_1 B \perp BD \Rightarrow AA_1 \perp BD$, а $BD \perp AC$ по условию \Rightarrow

$(ABCD) \perp (AA_1 C_1 C)$. Значит, высота $A_1 H$ призмы лежит в плоскости $(A_1 C_1 C A)$.

$$A_1 H = \frac{S(AA_1 C_1 C)}{AC} = \frac{30}{5} = 6.$$

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 10.$$

$$V_{\text{призмы}} = S(ABCD) \cdot A_1 H = 60.$$



С—16

1. Дано: $MABC$ — призма, $AB = BC = AC = \sqrt{2}$, $MA = \sqrt{2}$, $S(MAC) = S(MBC) = S(MAB)$.

Найти: $V(MABC)$.

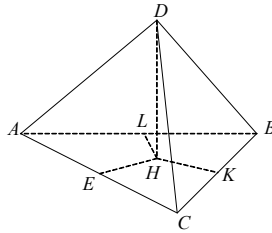
Решение:

Т.к. боковые грани имеют равные площади, то апофемы равны:

$ME = MK = ML \Rightarrow \triangle LHM = \triangle EHM = \triangle KHM$ (H — основание перпендикуляра MH) $\Rightarrow H$ — центр вписанной окружности

$$r = HE = AC \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Из } \triangle AME, \text{ где } AE = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2} : AM = \sqrt{2}, EM = \sqrt{AM^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$



$$\text{Из } \triangle MHE: MH = \sqrt{ME^2 - EH^2} = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow V(MABC) = \frac{1}{3} \cdot MH \cdot S(ABC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3}.$$

2. Дано: $DABC$ — тетраэдр, $M \in AB$, $AM = \frac{1}{3}AB$, $P \in AF$, AF — медиана $\triangle ABC$, $AP =$

PF , $K \in AL$, AL — медиана $\triangle ADB$, $AK = KL$.
Плоскость (MKP) — секущая.

В каком отношении (MKP) делит объем пирамиды?

Решение:

Покажем, что т. M, P, C лежат на одной прямой.

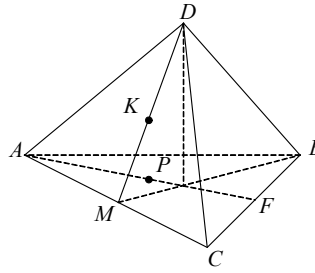
$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} =$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AB} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \quad (2)$$

Значит, $\overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{MP} \Rightarrow M, P$ и C .

Объемы получившихся пирамид относятся как площади оснований (имеют общую высоту). В свою очередь площади относятся как отрезки AM и MB , т.е. как 1 : 2.



С—17

1. Дано: конус, DH — высота, ADB — сечение, $S(ADB)$ — площадь наибольшего сечения, проходящего через вершину, $HE \perp AB$,

$$\angle HED = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}, AD = L.$$

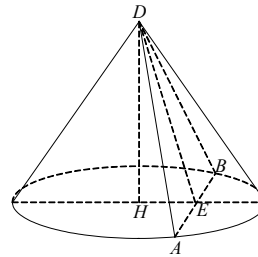
Найти: объем меньшей получившейся части.

Решение:

Т.к. $S(ADB)$ — наибольшая, то $\angle ADB = 90^\circ \Rightarrow AB = AD\sqrt{2} = L\sqrt{2}$,

$$AE = \frac{AB}{2} = L \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle DEA: DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = L \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = L \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



$$\text{Из } \triangle DHE: HE = DE \cdot \cos \angle HED = L \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{L\sqrt{6}}{6};$$

$$DH = \sqrt{DE^2 - HE^2} = L \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} L.$$

$$\text{Из } \triangle DHA: HA = R = \sqrt{AD^2 - DH^2} = L \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = L \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Из } \triangle AHB: AB^2 = 2AH^2(1 - \cos \angle AHB); 2L^2 = 2 \cdot \frac{2}{3} L^2(1 - \cos \angle AHB);$$

$$\frac{3}{2} = 1 - \cos \angle AHB; \cos \angle AHB = -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle AHB = \frac{2\pi}{3}.$$

$$S_{\text{сегмента}} = \frac{\angle AHB}{2} \cdot AH^2 - \frac{1}{2} AH^2 \sin \angle AHB = \frac{\pi}{3} \cdot L^2 \cdot \frac{2}{3} - L^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= L^2 \left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right).$$

$$V = \frac{1}{3} DH \cdot S_{\text{сегмента}} = \frac{1}{3} \cdot L \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot L^2 \left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{9} L^3 \left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{18} \right) =$$

$$= \frac{L^3 (4\pi\sqrt{3} - 9)}{162}.$$

2. Дано: $DABC$ — правильная пирамида, $AB = 12$, $DA = 10$. Вокруг $\triangle ADB$ описана окружность — основание конуса, $DC \in$ образующей конуса DF .

Найти: $V_{\text{конуса}}$.

Решение:

$$S(ADB) = \sqrt{16 \cdot 36 \cdot 4} = 8 \cdot 6 = 48.$$

$$DK = R_{\text{конуса}}$$

$$= \frac{AD \cdot DB \cdot AB}{4S} = \frac{12 \cdot 100}{192} = \frac{100}{16} = \frac{25}{4}.$$

$$\text{Высота } DH = \frac{2S}{AB} = \frac{96}{12} = 8.$$

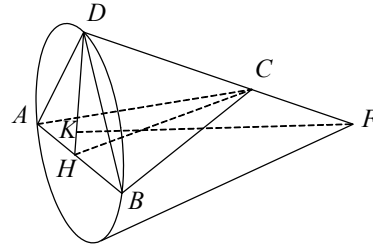
$$\text{В } \triangle ABC \text{ } CH = AC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

$$\text{Из } \triangle DHC: CH^2 = HD^2 + DC^2 = HD^2 + DC^2 - 2HD \cdot DC \cdot \cos \angle HDC$$

$$36 \cdot 3 = 64 + 100 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos \angle HDC$$

$$2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos \angle HDC = 14 - 108 = 56$$

$$\cos \angle HDC = \frac{7}{20} \Rightarrow \sin \angle HDC = \sqrt{1 - \cos \angle HDC} = \sqrt{\frac{400}{400} - \frac{49}{400}} = \frac{3\sqrt{39}}{20}$$



$$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle HDC = \frac{3\sqrt{39}}{7}.$$

Из $\triangle DKF$, где DK — радиус конуса, DF — образующая, KF — высота:

$$KF = DK \cdot \operatorname{tg} \angle HDC = \frac{25}{4} \cdot \frac{3\sqrt{39}}{7} = \frac{75\sqrt{39}}{28}.$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi \cdot KF \cdot KD^2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{625}{16} \cdot \frac{75\sqrt{39}}{28} = \frac{15625\pi\sqrt{39}}{448}.$$

С—18

1. Дано: стороны основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны a и b ($a > b$). Через противоположные стороны верхнего и нижнего оснований проведена плоскость.

В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Решение:

Пусть высота усеченной пирамиды равна h . Найдем объем нижней части, полученной после сечения. Для этого построим эту часть до прямой призмы, продлив верхнее ребро до пересечения с плоскостями, проведенными через ребра основания перпендикулярно плоскости основания.

См. рисунок а) — сечение построенной призмы через верхнее ребро перпендикулярно основанию.

$V_{\text{ниж}} = V_{\text{призмы}} - 2V_{\text{пир}}$ (при достраивании призма оказывается составленной из двух треугольных пирамид и нашей нижней части).

$$V_{\text{ниж}} = S_{\Delta_1} \cdot a - 2 \cdot \frac{1}{3} S_{\Delta_1} \cdot \frac{a-b}{2} = S_{\Delta_1} \left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b \right) = \frac{1}{6} h \cdot a(2a+b).$$

Аналогично для верхней части проведем две плоскости через ребра верхней грани фигуры:

$$V_{\text{верх}} = S_{\Delta_2} \cdot b + 2 \cdot \frac{1}{3} S_{\Delta_2} \cdot \frac{a-b}{2} = S_{\Delta_2} \left(\frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a \right) = \frac{1}{6} h \cdot b(2b+a).$$

$$\frac{V_{\text{ниж}}}{V_{\text{верх}}} = \frac{\frac{1}{6} ha(2a+b)}{\frac{1}{6} hb(2b+a)} = \frac{a(2a+b)}{b(2b+a)}.$$

2. Дано: прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), у которого катет $BC = a$ и $\angle A = 60^\circ$, вращается вокруг прямой, проходящей через вершину A и перпендикулярной биссектрисе угла A .

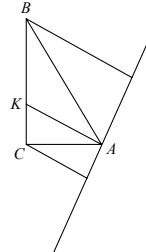
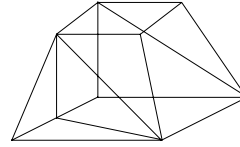
Найти: $V_{\text{тела вращения}}$.

Решение:

$\angle KAC = \angle KAB = 30^\circ$, т.к. AK — биссектриса

$\angle ABC = 90^\circ - \angle BAC = 30^\circ$, $CC' \parallel BB' \parallel AK$

$\angle OAC = 90^\circ - \angle KAC = 60^\circ = \angle BAB'$



$$\angle AOC = 90^\circ - \angle OAC = 30^\circ = \angle B'BA$$

$$\triangle ABC = \triangle CAO \Rightarrow CO = BC = a$$

$$V_{\text{фиг}} = V_{\text{окн } OBB'} - V_{\text{кон } OCC'} - V_{\text{кон } ACC'} - V_{\text{кон } ABB'}$$

$$V_{\text{конуса } OBB'} = \pi(BB')^2 \cdot BO = \pi(2a \cdot \sin 30^\circ)^2 \cdot 2a \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} \pi a^3.$$

$$V_{\text{конуса } OCC'} = \frac{1}{8} V_{\text{конуса } OBB'} = \frac{\sqrt{3}}{8} \pi a^3 \text{ (конусы гомотетичны с коэффициентом)}$$

ТОМ

$$V_{\text{конуса } ACC'} = \pi(CC')^2 \cdot AC' = \pi(asin30^\circ)^2 \cdot \left(\frac{a}{\cos 30^\circ} - a \cos 30^\circ \right) = \pi a^3 \frac{1}{8\sqrt{3}}$$

$$V_{\text{конуса } ABB'} = \pi(BB')^2 \cdot AB' = \pi(2a \sin 30^\circ)^2 \cdot \left(2a \cos 30^\circ - \frac{a}{\cos 30^\circ} \right) = \pi a^3 \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$V_{\text{фигуры}} = \pi a^3 \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \pi a^3 \cdot \frac{12}{8\sqrt{3}} = \pi a^3 \cdot \frac{3}{2\sqrt{3}} = \pi a^3 \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

С—19

1. Дано: $MABC$ — пирамида, $AB = BC = AC = 1$, O — центр $\triangle ABC$, $K \in$ прямой AO ,

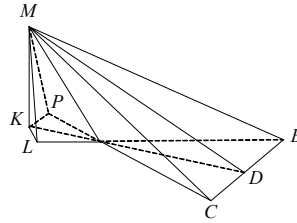
$OK = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, MK — высота, $MK = \sqrt[4]{\frac{4}{3}}$. В

$MABC$ вписан шар.

Найти: $S_{\text{пов шара}}$.

Решение:

Если соединить центр шара с вершинами M, A, B, C , получим четыре пирамиды с высотами $r \Rightarrow V(MABC) = S(ABCM) \cdot \frac{1}{3} r$.



Будем вычислять радиус по формуле $r = \frac{3V}{S}$.

Из точки K опустим перпендикуляр на BC и продолжим стороны AC и AB . Тогда по теореме о трех перпендикулярах $MD \perp AB$, $ML \perp AC$ и $MP \perp BC$;

$$KD = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$KA = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$KP = \frac{1}{2} KA = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Из } \triangle MKD: MD = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} + \left(4 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{36} \right)} = \frac{7\sqrt{3}}{6}.$$

$$S(BMC) = \frac{7\sqrt{3}}{12}.$$

$$\Delta MKL: ML = MP = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} + \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{9}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$S(MAC) = S(MAB) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

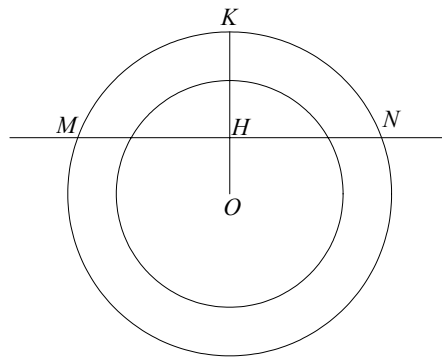
$$S = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{7\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{3}}.$$

$$R = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot 2}{4 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{3^5}}.$$

$$S_{\text{шара}} = 4\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{3^5}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

2. Дано: шар (O, R) , шар (O, r) , $R - r = 3$, $R = 9$, $OK \perp MN$, $OK \cap MN = H$, $KH = 6$.



Найти: ρ материала.

Решение:

Объем полого шара $V = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3)$, $r = 6 \Rightarrow$

$$V = \frac{4}{3} \pi (729 - 216) = 684\pi \text{ см}^3.$$

Вес шара $P = V_{\text{ш}} \cdot \rho \cdot g$.

Погруженная в воду часть — сегмент.

$$V_{\text{сегмента}} = \pi \cdot (R + OH)^2 \left(R - \frac{R + OH}{3} \right) = \pi \cdot 144 \cdot 5 = 720\pi \text{ см}^3.$$

Выталкивающая сила $F = V_{\text{сегмента}} \cdot \rho_{\text{воды}} \cdot g = 720\pi \rho_{\text{воды}} \cdot g$;

$$\rho_{\text{воды}} = \frac{12}{1 \text{ см}^3}.$$

По закону Архимеда $P = F$, т.е. $684\pi\rho_{\text{ш}} \cdot g = 720\pi\rho_{\text{в}} \cdot g$

$$\rho_{\text{ш}} = \frac{720}{684} = \frac{180}{171} = \frac{20}{19} \text{ г/см}.$$

ДС

1. Дано: $MABCD$ — правильная пирамида, $AB = 2$, MH — высота, $MH = 1$.

Найти: угол φ между AM и (DMC) .

Решение:

Проведем $HE \perp AD$; HE

$$= \frac{1}{2}AD = 1.$$

Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат $Hxyz$.

В ней $\overrightarrow{AM} (1, -1, 1)$.

Найдем угол $\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi$ между

\overrightarrow{AM} и $\vec{n} (1, 0, 1)$, $\vec{n} \perp (DMC)$,

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{3}, |\vec{n}| = \sqrt{2}.$$

$$(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}) = 1 + 1 = 2 = \sqrt{6} \cos \gamma, \cos \gamma = \frac{2\sqrt{6}}{6};$$

$$\gamma = \arccos \frac{2\sqrt{6}}{6}; \varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma.$$

2. Дано: $A(1, -1, 1)$, $B(2, 0, -1)$, $A, B \in \alpha$, $\alpha \parallel \vec{m} (3, 1, -1)$.

Найти: уравнение α .

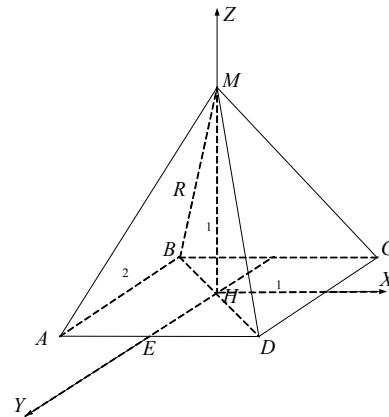
Решение:

Отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{m} \Rightarrow C(4, 0, 0)$.

Уравнение α : $Px + Qy + Rz + S = 0$.

$$\begin{cases} A \in \alpha: P - Q + R + S = 0 \\ B \in \alpha: 2P - R + S = 0 \\ C \in \alpha: 4P + S = 0 \end{cases}; \begin{cases} Q = \frac{5S}{4} \\ R = \frac{S}{2} \\ P = -\frac{S}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{уравнение } \alpha: -\frac{x}{4} + \frac{5y}{4} + \frac{z}{2} + 1 = 0 \text{ или } x - 5y - 2z - 4 = 0.$$



Вариант 8

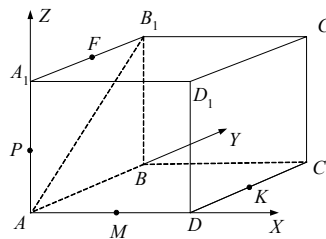
С—1

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, $M \in AD$, $AM = MD$, $P \in AA_1$, $AP = PA_1$, $F \in A_1 B_1$, $A_1 F = FB_1$, $K \in CC_1$, $C_1 K = KC$.

Выяснить, лежат ли точки P, M, F, K в одной плоскости.

Решение:

Пусть ребро куба $2a$. Поместим куб в полярную систему координат $Axyz$. В ней $P(0, 0, a)$, $M(a, 0, 0)$, $F(0, a, 2a)$, $K(2a, 2a, a)$.



Уравнение плоскости (PMF) : $Qx + Ry + Sz + T = 0$.

$$\begin{aligned} P \in (PMF): & \begin{cases} aS + T = 0 \\ aQ + T = 0 \end{cases} ; & \begin{cases} aS - T \\ aQ = -T \end{cases} \\ M \in (PMF): & \begin{cases} aQ + T = 0 \\ aR + 2aS + T = 0 \end{cases} ; & \begin{cases} aQ = -T \\ aR = T \end{cases} \\ F \in (PMF): & \begin{cases} aR + 2aS + T = 0 \\ aR = T \end{cases} \end{aligned}$$

Уравнение (PMF) : $x - y + z - a = 0$.

Подставляя координаты т. K в уравнение (PMF) : $2a - 1a + a - a = 0$, получаем тождество $\Rightarrow K \in (PMF)$.

Все четыре точки лежат в одной плоскости.

2. Дано: $\vec{m}(1, 1, 1)$, $\vec{a}(1, 1, -2)$, $\vec{b}(1, -1, 0)$, $\vec{c}(0, 2, 3)$, $\vec{m} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$.

Найти: p, q, r .

Решение:

$$\begin{cases} 1 = p + q \\ 1 = p - q + 2r \\ 1 = -2p + 3r \end{cases} ; \begin{cases} p = 1 - q \\ 1 = 1 - 2q + 2r \\ 1 = -2 + 2q + 3r \end{cases} ; \begin{cases} p = 1 - q \\ q = r \\ r = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = \frac{2}{5} \\ q = \frac{3}{5} \\ r = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \vec{m} = 0,4\vec{a} + 0,6\vec{b} + 0,6\vec{c}.$$

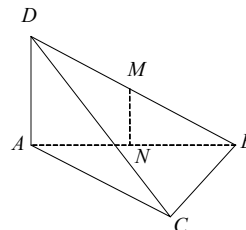
С—2

1. Дано: $DABC$ — тетраэдр, $AD \perp (ABC)$, $AD = 2$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = CB = 4$, $AM = BM = CM = DM$.

Найти: AM .

Решение:

Точки, равноудаленные от A, C, B , лежат на перпендикуляре HM ; $H \in AB$, $AH = HB$.



$$= 2\sqrt{2}.$$

$\triangle DAB$ также прямоугольный, значит, точки, равноудаленные от A, D, B , лежат на перпендикуляре к (ADB) , проведенном из т. M .

Значит, искомый центр описанного шара — точка M .

$$AM = DM = MB = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2}}{2} = \frac{\sqrt{32 + 4}}{2} = 3.$$

2. Укажите в пространственной системе координат все решения уравнения $\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$.

Решение:

Решение — множество точек, сумма расстояний от которых до точек $A\{0, 0, 1\}$ и $B\{1, 0, 0\}$ равна $\sqrt{2}$.

$$\text{Но расстояние } AB = \sqrt{(0-1)^2 + 0^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}.$$

Значит, нам годятся все точки, лежащие на отрезке AB .

С—3

1. Дано: $DABC$ — тетраэдр, DM — высота $\triangle ADC$, $DN \perp AB$, $N \in AB$, $AB = AC$, $A(1, 0, -2)$, $D(2, -1, 1)$, $K \in BC$, $BK = KC$, $K(0, 1, -1)$, DH — высота.

Найти: DH .

Решение:

Основание H высоты DH лежит на AK .

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

$$|\overrightarrow{AK}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$|\overrightarrow{DK}| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$$

$$P(AKD) = \frac{AD + AK + DK}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2}.$$

$$S(AKD) = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2}\right)\left(\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{11}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(27-11)(11-3)} = \frac{1}{4} \sqrt{16 \cdot 8} = 2\sqrt{2}.$$

$$DH = \frac{2S(AKD)}{AK} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

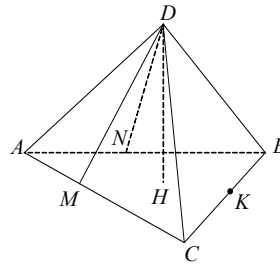
2. Дано: $S(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 1$.

Найти: $S(x_0)$ — наибольшее, x_0 .

Решение:

Рассмотрим векторы $\vec{a}(\sqrt{1+x}, \sqrt{1-x}, 1)$ и $\vec{b}(1, 1, 1)$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+x+1-x+1} = \sqrt{3}; |\vec{b}| = \sqrt{3}.$$



$$S(x) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 1 = 3 \cdot \cos \hat{\vec{a}\vec{b}}.$$

$S(x)$ наибольшее при $\cos \hat{\vec{a}\vec{b}} = 1$ или $\hat{\vec{a}\vec{b}} = 0$
 $S(x_0)_{\text{наиб}} = 3; x_0 = 0.$

С—4

1. Дано: $DABC$ — тетраэдр, $DB = DC = CB = AC = 3\sqrt{2}$, $AD = 3$, $\angle ACB = 90^\circ$, DH — высота.

Найти: DH .

Решение:

Поместим тетраэдр в полярную систему координат $Sxyz$. Т.к. $CD = DB$, то $H \in EK$, средней линии $\triangle ABC$;

$$CB = 3\sqrt{2}, CE = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Пусть $DH = z_0$, тогда

$$\overrightarrow{CD} \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, y_0, z_0 \right), \overrightarrow{BD} \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, y_0, z_0 \right), \overrightarrow{AD} \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, y_0 - 3\sqrt{2}, z_0 \right).$$

$$\begin{cases} |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{\frac{9}{2} + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{18} \\ |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{\frac{9}{2} + (y_0 - 3\sqrt{2})^2 + z_0^2} = \sqrt{9} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{9}{2} + y_0^2 + z_0^2 = 18 \\ \frac{9}{2} + (y_0 - 3\sqrt{2})^2 + z_0^2 = 9 \end{cases}.$$

$$y_0^2 - (y_0 - 3\sqrt{2})^2 = 9; 2 \cdot 3y_0 \cdot \sqrt{2} - 18 = 9;$$

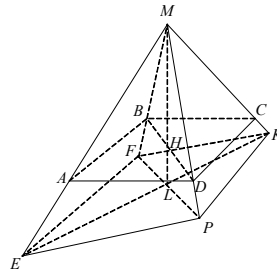
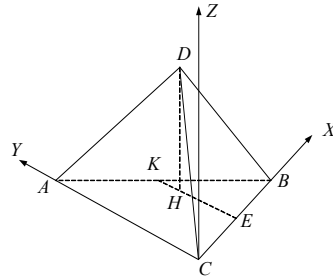
$$y_0 = \frac{27}{6\sqrt{2}} = \frac{9}{2\sqrt{2}} \Rightarrow |z_0| = \sqrt{18 - \frac{9}{2} - \frac{81}{8}} = \frac{3\sqrt{6}}{4}.$$

2. Дано: $MEFKP$ — пирамида, $\angle EMP = \angle PMK = \angle KMF = \angle FME = \alpha$.

Найти: $\angle EMK = \beta$.

Решение:

Грани (FMP) и (EMK) перпендикулярны и пересекаются по прямой ML . Построим сечение $(ABCD) \perp ML$; $ML \cap (ABCD) = H$; $ABCD$ — квадрат. Пусть $AM = a$, тогда



$$AB = AD = 2a \cdot \sin \frac{\alpha}{2}; AC = 2a \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{2}.$$

$$\text{Из } \triangle AMC: AC^2 = 2AM^2(1 - \cos \angle AMC); 8a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2a^2(1 - \cos \beta);$$

$$\cos \beta = 1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}; \beta = \arccos \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right).$$

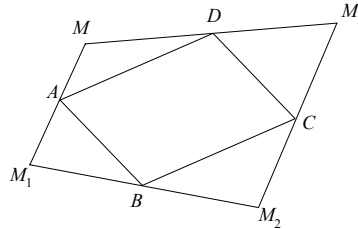
С—5

1. Дано: S_A, S_B, S_C — центральные симметрии, A, B, C — не лежат на одной прямой, $ABCD$ — параллелограмм.

Доказать: $S_A \circ S_B \circ S_C = S_O$.

Доказательство:

При симметрии относительно A $M \rightarrow M_1$, при симметрии относительно B $M_1 \rightarrow M_2$, при симметрии относительно C $M_2 \rightarrow M_3$.



Образовался пространственный четырехугольник $MM_1M_2M_3$. M и M_3 симметричны относительно точки D . Проследим за изменением первой координаты $M(a, b, c)$,

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, \dots), C(x_3, \dots).$$

$$S_A: M \rightarrow M_1(2x_1 - a, \dots)$$

$$S_B: M_1 \rightarrow M_2(2x_2 - 2x_1 + a, \dots)$$

$$S_C: M \rightarrow M_3(2(x_3 - x_2 + x_1) - a, \dots)$$

симметрия относительно $D(x_3 - x_2 + x_1, \dots)$, которая получена откладыванием вектора $\overrightarrow{AD}(x_3 - x_2, \dots) = \overrightarrow{BC}$ от точки $D \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм.

2. Дано: отображение, переводящее $A(x, y, z) \rightarrow A_1(x - 1, -y - 2, z + 1)$.

Является ли отображение симметрией?

Решение:

Возьмем $B(x_1, y_1, z_1)$.

$$\overrightarrow{AB}(x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z) \rightarrow \overrightarrow{A_1B_1}(x_1 - x, y - y_1, z_1 - z).$$

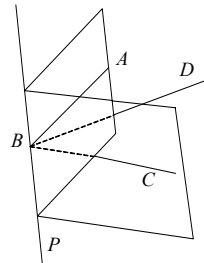
$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A_1B_1}| \Rightarrow \text{отображение — движение.}$$

Оно может быть получено симметрией относительно плоскости xOz и последующим сдвигом на вектор $\vec{p}(-1, -2, 1)$.

С—6

1. Дано: α, β — плоскости, $\alpha \cap \beta = p$ (прямая), $B \in p, A \in \alpha, AB \perp p, C \notin \beta, CB \perp p, BD$ — биссектриса $\angle ABC$.

Доказать: BD — ось симметрии двугранного

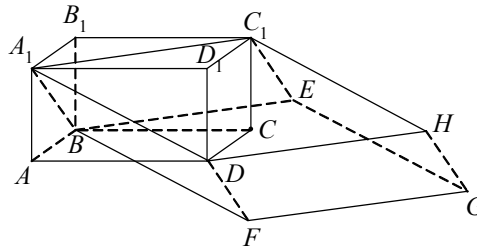


угла.

Доказательство:

При симметрии относительно BD прямая $AB \rightarrow BC, p \rightarrow p, \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow BD$ — ось симметрии двугранного угла.

2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, $A_1 B E C_1 D F G H$ — параллелепипед.



Доказать: C — центр симметрии $A_1 B E C_1 D F G H$.

Доказательство:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1 G} &= \overrightarrow{A_1 B} + \overrightarrow{A_1 D} + \overrightarrow{A_1 C_1} = \overrightarrow{A_1 A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1 A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{B_1 C_1} = \\ &= \overrightarrow{A_1 A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1 A} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{A_1 A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

\Rightarrow точка C — середина диагонали параллелепипеда $AB E C_1 D F G H$, т.е. центр его симметрии.

С—7

1. Дано: цилиндр, $ABCD, EFKL$ — осевые сечения, $(ABCD) \perp (EFKL)$, $M \in AF$, $AM = MF$, $N \in AL$, $AN = NL$, $MN = \sqrt{17}$, $S(ABCD) = 16$.

Найти: $S_{\text{цилиндра}}$.

Решение:

Поместим цилиндр в полярную систему координат $O_1 x y z$. Пусть $O_2 F = R$, $EF = 2h$, тогда $A(-R, 0, 2h)$, $F(0, R, 0)$, $L(0, -R, 2h)$, $M\left(-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, h\right)$, $N\left(-\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}, 2h\right)$.

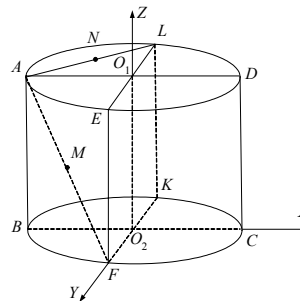
$$\overrightarrow{MN} (0, -R, h)$$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{17}$$

$$S(ABCD) = BC \cdot AB = 2R \cdot 2h = 4Rh = 16$$

$$\begin{cases} R^2 + h^2 = 17 \\ 4Rh = 16 \end{cases}, \begin{cases} \frac{16}{h^2} + h^2 = 17 \\ R = \frac{4}{h} \end{cases};$$

$$h^4 - 17h^2 + 16 = 0; h_1^2 = 16, h_2^2 = 1; \\ h_1 = 4, h_2 = 1$$



$$\Rightarrow R_1 = 1, R_2 = 4.$$

$$S_{\text{цил } 1} = 2\pi R_1^2 + 4\pi R_1 h_1 = 2\pi + 16\pi = 18\pi$$

$$S_{\text{цил } 2} = 2\pi R_2^2 + 4\pi R_2 h_2 = 32\pi + 16\pi = 48\pi.$$

Значит, либо 10π , либо 40π .

2. Дано: $ABCD$ — правильная пирамида, $AB = a$, $\angle MAC = 60^\circ$, в $ABCD$ вписан цилиндр, высота цилиндра равна h .

Найти: $S_{\text{бок цилиндра}}$.

Решение:

Рассмотрим $\triangle EFK \sim \triangle BDM$. В $\triangle EFK$ вписано основание цилиндра.

$$\text{ра. } BD = a\sqrt{2}; AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}; PH = \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow AP = AH - PH = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{h}{2}$$

$$\frac{EK}{BD} = \frac{AP}{AH} \Rightarrow EK = \frac{BD \cdot AP}{AH} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{h}{2}\right)}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = 2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{h}{2}\right) =$$

$$= a\sqrt{2} - h.$$

$$\triangle EFK \text{ — правильный} \Rightarrow S(EFK) = EK^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{(a\sqrt{2} - h)^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$r = \frac{2S}{3EK} = \frac{(a\sqrt{2} - h)^2 \sqrt{3}}{2 \cdot 3 \cdot (a\sqrt{2} - h)} = \frac{(a\sqrt{2} - h)\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow S_{\text{бок}} = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot \frac{(a\sqrt{2} - h)\sqrt{3}}{6} \cdot h = \frac{\pi\sqrt{3}(a\sqrt{2} - h)h}{3}.$$

С—8

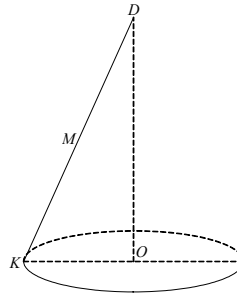
1. Дано: конус, $A(1, -1, 2)$, $B(-2, -1, 2)$, $C(-2, 3, 2)$, $A, B, C \in$ окружности основания конуса, $M\left(0, \frac{5}{3}, 6\right)$ лежит на боковой поверхности.

Найти: $S_{\text{бок конуса}}$.

Решение:

Уравнение основания (окружность):

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \\ z = 2 \end{cases}.$$



$$\begin{cases} (1-x_0)^2 + (-1-y_0)^2 = R^2 \\ (-2-x_0)^2 + (-1-y_0)^2 = R^2 \\ (-2-x_0)^2 + (3-y_0)^2 = R^2 \\ z=2 \end{cases}, \begin{cases} (1-x_0)^2 = (-2-x_0)^2 \\ \frac{9}{4} + (-1-y_0)^2 = R^2 \\ \frac{4}{4} + (3-y_0)^2 = R^2 \\ z=2 \end{cases}.$$

$$1 + x_0^2 - 2x_0 = 4 + x_0^2 + 4x_0; x_0 = -\frac{1}{2}.$$

$$2y_0 + 1 + y_0^2 = 9 - 6y_0 + y_0^2; y_0 = 1.$$

$$\frac{9}{4} + 4 = R^2, R = \frac{AC}{2} = \frac{5}{2}, \quad O \in AC \quad AO = OC.$$

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{1}{2} \\ y_0 = 1 \\ z = 2 \end{cases} \text{ — центр основания } O$$

$$R = \frac{5}{2} \text{ — радиус.}$$

$$\overrightarrow{AB}(-3, 0, 0) \quad AB = 3$$

$$\overrightarrow{AC}(-3, 4, 0) \quad AC = 5$$

$$\overrightarrow{BC}(0, 4, 0) \quad BC = 4$$

$$O(-\frac{1}{2}, 1, 2)$$

$$\text{Значит, } D(-\frac{1}{2}, 1, h) \text{ — вершина конуса.}$$

$$\overrightarrow{DM}(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 6-h)$$

Прямая DM пересекает основание в точке K .

$$\overrightarrow{DK} = p\overrightarrow{DM} = \left(\frac{p}{2}, \frac{2p}{3}, p(6-h)\right) \quad (p > 0), \quad K\left(-\frac{1}{2} + \frac{p}{2}, 1 + \frac{2p}{3}, h + p(6-h)\right)$$

K принадлежит окружности \Rightarrow

$$\begin{cases} h + p(6-h) = 2 \\ \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{2p}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} \end{cases}; \begin{cases} h(1-p) = 2-6p \\ \frac{p^2}{4} + \frac{4p^2}{9} = \frac{25}{4} \end{cases};$$

$$\begin{cases} h = \frac{2-6p}{1-p} \\ \frac{25}{36}p^2 = \frac{25}{4} \end{cases}; \begin{cases} h = \frac{2-6p}{1-p} \\ p^2 = 9 \end{cases}; \begin{cases} p = 3 \\ h = \frac{2-6p}{1-p} \end{cases}; \begin{cases} p = 3 \\ h = 8 \end{cases}; \overrightarrow{DK} = \left(\frac{3}{2}; 2; -6\right),$$

$$R = \frac{4\sqrt{3} \pm 4}{16} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{4}; R_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}, R_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4};$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}, r_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Итак, } r = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}, R = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}.$$

$$AH = R - r = \frac{1}{2}, BH = R + r = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{из } \triangle AHB: \angle HAB = 60^\circ.$$

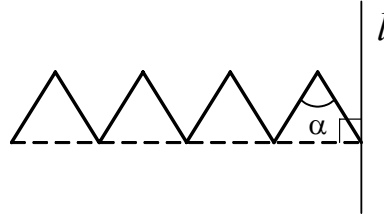
С—9

1. Дано: четыре квадрата со стороной, равной a .

Найти: S поверхности, которая образуется при вращении этой фигуры вокруг оси l .

Решение:

Поскольку фигура симметрична относительно прямой m , то достаточно найти площадь фигуры вращения, образованной ломаной, лежащей над прямой m , а потом удвоить.



Продлим первый отрезок ломаной. Проведем через концы остальных отрезков ломаной прямые, параллельные l . Легко видеть, что соответствующие элементы вращения фигуры, которую нужно обчислить, равны частям конуса (нечетные можно совместить путем сдвига, параллельно l , а четные — путем симметрии относительно некоторой плоскости).

Поэтому искомая площадь равна удвоенной площади конуса с образующей $6a$ и углом между осью вращения и образующей в 45° .

$$S_{\text{пов}} = 2\pi r l = 2\pi(6a \sin 45^\circ) \cdot 6a = 72a^2 \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{2} \pi a^2.$$

2. Дано: $A_1B_1C_1ABC$ — правильная призма, $ABCA_1B_1C_1$ вписана в конус, $AB = AA_1$, OH — высота конуса, $\angle OKH = \varphi$.

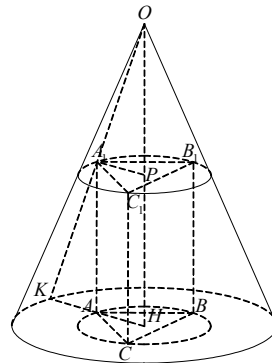
Найти: $S_{\text{ос сеч}}$.

Решение:

$$OH \cap (A_1B_1C_1) = P.$$

$$\text{Пусть } A_1P = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \text{ тогда } AA_1 = AB = a,$$

$$OP = A_1P \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$



$$\begin{aligned}
 OH &= OP + a = \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \varphi + a, \quad HK = \frac{OH}{\operatorname{tg} \varphi} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \varphi + a \right) \operatorname{ctg} \varphi \\
 \Rightarrow S_{\text{ос сеч}} &= KH \cdot OH = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \varphi + a \right)^2 \operatorname{ctg} \varphi = a^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \varphi + 1 \right)^2 \operatorname{ctg} \varphi = \\
 &= \frac{a^2}{3} \left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{3}{\operatorname{tg} \varphi} + 2\sqrt{3} \right). \\
 S(\operatorname{tg} \varphi) &= \frac{a^2}{3} \left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{3}{\operatorname{tg} \varphi} + 2\sqrt{3} \right). \\
 S'(\operatorname{tg} \varphi) &= \frac{a^2}{3} \left(1 - \frac{3}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \right). \\
 \operatorname{tg}^2 \varphi &= 3; \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}; \varphi = 60^\circ. \\
 S_{\text{наим}} &= \frac{a^2}{3} (\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = \frac{4a^2\sqrt{3}}{3}.
 \end{aligned}$$

С—10

1. Дано: две сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ и сфера с центром в точке $O_2(2; 4; 2)$. Они пересекаются по окружности, длина которой равна $2\pi\sqrt{21}$.

Найти: уравнение второй сферы.

Решение:

Преобразуем уравнение 1-й сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 20 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 - 25 = 0.$$

Значит, центр ее в т. $O_1(1, 2, 0)$, а радиус равен 5.

Проведем сечение через прямую O_1O_2 . Получим такую картинку:

Здесь $O_1L = 5$ (радиус сферы 1), $LK = \sqrt{21}$ (радиус окружности пересечения), $O_2K = 2$.

$$O_1O_2 = (1, 2, 2) \quad O_1P_2 = 3.$$

$$LK^2 + O_2K^2 = R_2^2 \Rightarrow R_2^2 = 21 + 1 = 22$$

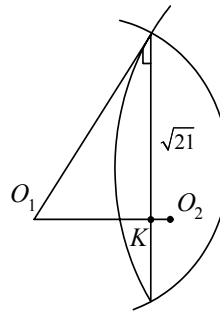
$$\Rightarrow \text{искомое уравнение } (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 22$$

2. Найти: множество точек, расположенных вдвое ближе к точке $M(0; 2; 0)$, чем к точке $P(0; 4; 0)$.

Решение:

Запишем условие аналитически. Координаты искомых точек должны удовлетворять равенству

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + (y-4)^2 + z^2} \Leftrightarrow$$



$$4x^2 + 4(y-2)^2 + 4z^2 = x^2 + (y-4)^2 + z^2 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 + 3y^2 - 8y + 3z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 + z^2 - \frac{16}{9} = 0.$$

Значит, искомое множество точек — сфера с центром в т. $\left\{0, \frac{4}{3}, 0\right\}$ и радиусом $\frac{4}{3}$.

С—11

1. Дано: четыре шара радиуса R касаются друг друга. Сфера касается этих шаров внутренним образом.

Найти: радиус сферы.

Решение:

Центры шаров — вершины правильного тетраэдра, длина ребра которого $2R$. Центр искомой сферы совпадает с центром тетраэдра. Высота тетраэдра $h = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$.

$$V = S(ABC) \cdot h = 4R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3}R = 2\sqrt{2}R^3.$$

По формуле из задачи С-19.1 (вариант 7)

Радиус вписанной окружности

$$r_{\text{впис}} = \frac{3V}{4S(ABC)} = \frac{6\sqrt{2}R^3}{4R^2\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Радиус искомой сферы } \frac{R\sqrt{6}}{2} - R = \frac{R(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \frac{R}{2}(\sqrt{6} - 2).$$

2. Дано: $DABC$ — тетраэдр, сфера касается всех ребер $DABC$.

Сравнить суммы длин скрещивающихся ребер.

Решение:

Пусть E, F, K, L, M, N — точки касания. Т.к. отрезки касательных, проведенные к сфере, равны, то

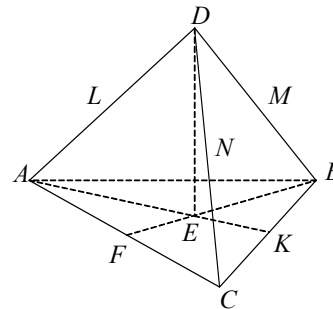
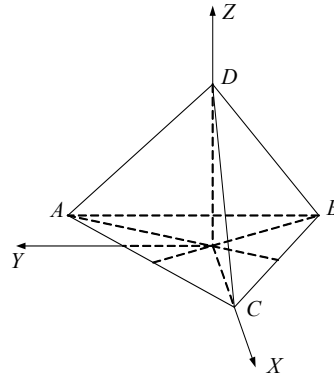
$$A: AF = AE = AL$$

$$C: CF = CK = CN$$

$$B: BE = BM = BK$$

$$D: DL = DM = DN$$

$$AC + BD = AF + FC + BM + MD = AE + CN + BE + DN =$$



$$= AE + BE + CN + DN = AB + CD = AD + BC.$$

С—12

1. Дано: $DABC$ — правильный тетраэдр, $AB = a$, $AE \perp CB$, $\angle DEA = 60^\circ$, DH — высота, DH — диаметр шара.

Найти: длину линии пересечения шара и тетраэдра.

Решение:

$$CB = a, HE = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Из } \triangle DHE: DE = 2HE = \frac{a\sqrt{3}}{3}, DH = HE \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle DHC, \text{ где } HC = \frac{a\sqrt{3}}{3}:$$

$$DC = \sqrt{DH^2 + HC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}.$$

Плоский угол CDB при вершине пирамиды $\alpha = \angle CDB$.

$$CB^2 + 2CD^2(1 - \cos \alpha)$$

$$a^2 = \frac{a^2 \cdot 7}{2 \cdot 3} (1 - \cos \alpha)$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{6}{7}; \cos \alpha = \frac{1}{7}; \alpha = \arccos \frac{1}{7} \text{ — вписанный.}$$

l линии пересечения равна:

$$3 \cdot 2\alpha \cdot R = 3\alpha \cdot DH = \frac{3a}{2} \arccos \frac{1}{7}.$$

2. Дано: $DABC$ — правильная пирамида, $AB = a$, $AE \perp CB$, $\angle DEA = 60^\circ$, DH — высота, в $DABC$ вписаны три шара, точки касания на апофемах.

Найти: радиус шара.

Решение:

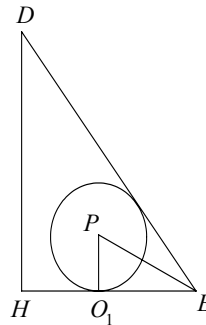
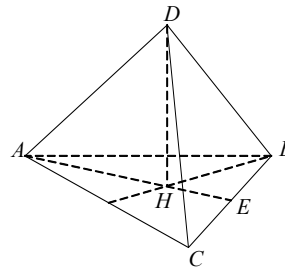
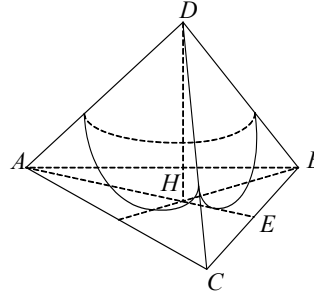
Рассмотрим сечение DHE .

Окружность с центром P — сечение шара плоскостью DHE .

Пусть радиус равен r , тогда $O_1E = r \operatorname{ctg} 30^\circ = r\sqrt{3}$.

$$HE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$\triangle O_1O_2O_3$ — правильный со стороной, равной $2r$.



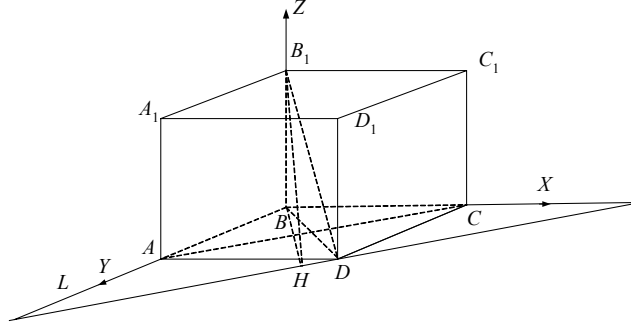
$$HO_1 = \frac{2r}{\sqrt{3}}; HE = O_1E + HO_1$$

$$\frac{a}{2\sqrt{3}} = r\sqrt{3} + \frac{2r}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = \frac{a}{10}.$$

С—13

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AB = 5$, $BC = 12$, плоскость $\alpha \parallel AC$, $B_1 D \in \alpha$, угол между α и $ABCD$ равен 60° .

Найти: $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$



Решение:

Поместим параллелепипед в полярную систему координат $Bxyz$.

$\alpha \cap ABCD =$ прямая DR .

Проведем $BH \perp DR$.

Из $\triangle ABC$: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 13$.

В $\triangle BLK$ AC — средняя линия; $LK = 2AC = 26$, $LB = 10$, $BK = 24$.

$$S(LBK) = \frac{1}{2} LB \cdot BK = \frac{1}{2} LK \cdot BH \Rightarrow BH = \frac{LB \cdot BK}{LK} = \frac{10 \cdot 24}{26} = \frac{120}{13}.$$

$$\text{Из } \triangle B_1 BH: B_1 B = BH \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{120}{13} \cdot \sqrt{3}$$

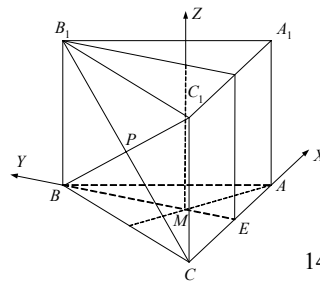
$$\Rightarrow V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1) = AB \cdot BC \cdot BB_1 = 60 \cdot \frac{120\sqrt{3}}{13} = \frac{7200\sqrt{3}}{13}.$$

2. Дано: $ABCA_1 B_1 C_1$ — прямая призма, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$, $CB = 6$, M — точка пересечения медиан $\triangle ABC$, $B_1 C \cap BC_1 = P$, угол α между MP и $(AA_1 C_1 C)$ равен $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Найти: $V(ABCA_1 B_1 C_1)$.

Решение:

Поместим призму в полярную систему координат $Cxyz$.



Пусть $CC_1 = 2h$. $\overrightarrow{BE} \left(\frac{3}{2}, -6, 0 \right)$, $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BE} = (1, -4, 0) \Rightarrow M(1, 2, 0)$

$P(0, 3, h)$, $\overrightarrow{MP}(-1, 1, h)$, $\vec{n}(0, 1, 0)$, $\overrightarrow{MP} \vec{n} = \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

$$(\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n}) = 1 = |\overrightarrow{MP}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \beta = \sqrt{2+h^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

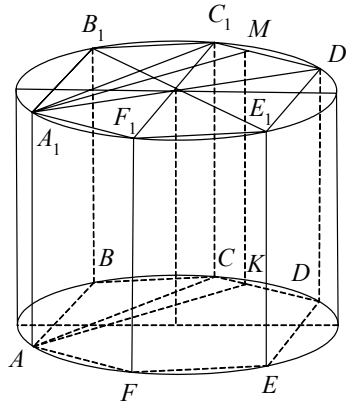
$$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{2+h^2}, |\vec{n}| = 1$$

$$\cos \beta = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{2+h^2} = \sqrt{3}; 2+h^2 = 3, h = 1$$

$$\Rightarrow V_{\text{призмы}} = S(ABC) \cdot 2h = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot AC \cdot 2h = 6 \cdot 3 = 18.$$

С—14

1. Дано: $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ — правильная призма, $S(AA_1 B_1 B) = Q$, сечение проходит через AA_1 , $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$.



Найти: $S_{\text{сеч}}$.

Решение:

Секущая плоскость проходит между C_1 и D_1 (или D_1 и E_1). Объемы относятся как площади частей основания. Пусть $A_1 B_1 = a$, тогда

$$S_1 = S(A_1 B_1 C_1) + S(A_1 C_1 E) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + a^2 \sqrt{3} - \frac{C_1 M \cdot a \sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 3S_1 = S_2.$$

$$\frac{3a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{3C_1 M \cdot a \sqrt{3}}{2} = \frac{5}{4} a^2 \sqrt{3} - \frac{C_1 M \cdot a \sqrt{3}}{2}$$

$$2C_1 M = \frac{a}{2} \Rightarrow C_1 M = \frac{a}{4}.$$

Из прямоугольного $\triangle A_1C_1M$, где $C_1M = \frac{a}{4}$, $A_1C_1 = a\sqrt{3}$,

$$A_1M = \sqrt{C_1M^2 + A_1C_1^2} = \sqrt{\frac{a^2}{16} + 3a^2} = \frac{7}{4}a$$

$$\frac{S(AA_1MK)}{S(ABB_1A_1)} = \frac{A_1M}{A_1B_1} = \frac{7}{4} \Rightarrow S(AA_1MK) = \frac{7}{4}Q.$$

2. Дано: цилиндр, $ABCD$ — осевое сечение, Π цилиндр, AB — диаметр.

Найти: $\frac{V_1}{V_2}$.

Решение:

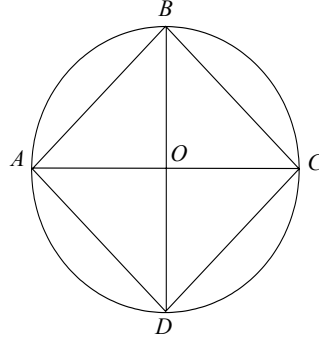
$$V_1 = AD \cdot \pi \cdot \frac{AB^2}{4} = \frac{\pi AB^3}{4}.$$

Радиус Π цилиндра $AO = AB \frac{\sqrt{2}}{2}$, а

высота равна AB .

$$V_2 = \pi \cdot AO^2 \cdot AB = \frac{\pi BA^3}{2}.$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}.$$



С—15

1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная призма, $AB = 50$, $AC = 40$, $\angle BAC = 60^\circ$, $AA_1 = 25$, $A_1E \perp AC$, $A_1E = 7$, $A_1F \perp AB = A_1F = 20$.

Найти: $V_{\text{призмы}}$.

Решение:

Опустим перпендикуляры $A_1P \perp C_1C$, $A_1M \perp B_1B$.

$$S(AA_1C_1C) = A_1E \cdot AC = C_1C \cdot A_1P$$

$$\Rightarrow A_1P = \frac{A_1E \cdot AC}{CC_1} = \frac{7 \cdot 40}{25} = \frac{56}{5}$$

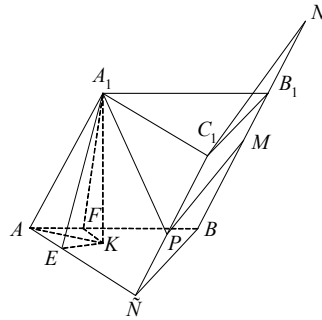
$$A_1M = \frac{AB \cdot A_1F}{B_1B} = \frac{50 \cdot 20}{25} = 40$$

A_1PM — перпендикулярное сечение, $C_1N \parallel PM$, $C_1N \perp BB_1$.

Из $\triangle A_1C_1B_1$:

$$C_1B_1^2 = A_1C_1^2 + A_1B_1^2 - 2A_1C_1 \cdot A_1B_1 \cdot \cos 60^\circ$$

$$C_1B_1^2 = 1600 + 2500 - 4000 \cos 60^\circ$$



$$C_1B_1^2 = 4100 - 4000 \cdot \frac{1}{2}$$

$$C_1B_1^2 = 2100; C_1B_1 = 10\sqrt{21}.$$

Из $\triangle A_1PC_1$:

$$PC_1 = \sqrt{A_1C_1^2 - A_1P^2} = \sqrt{1600 - \frac{3136}{25}} = \frac{192}{5}.$$

Из $\triangle A_1MB_1$:

$$MB_1 = \sqrt{A_1B_1^2 - A_1M^2} = \sqrt{2500 - 1600} = 30.$$

Из прямоугольной трапеции PC_1B_1M :

$$B_1N = PC_1 - MB_1 = \frac{192}{5} - 30 = \frac{42}{5}.$$

Из прямоугольного $\triangle C_1NB_1$ $\angle C_1NB_1 = 90^\circ$

$$C_1N = \sqrt{C_1B_1^2 - B_1N^2} = \sqrt{2100 - \left(\frac{42}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{52500 - 1764}{25}} = \sqrt{\frac{50736}{25}} =$$

$$= \frac{4}{5}\sqrt{3 \cdot 1057} = \frac{4}{5}\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 151} = PM.$$

$$P(A_1PM) = \frac{A_1P + A_1M + PM}{2} = \frac{\frac{56}{5} + 40 + \frac{4}{5}\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 151}}{2} =$$

$$= \frac{128}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 151}.$$

$$S(A_1PM) = \sqrt{\left(\frac{128}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 151}\right)\left(\frac{128}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 151}\right)}.$$

$$\cdot \sqrt{\left(\frac{72}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 151}\right)\left(\frac{72}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 151}\right)} =$$

$$= \frac{4}{25}\sqrt{(64^2 - 3 \cdot 7 \cdot 151)(3 \cdot 7 \cdot 151 - 36^2)} =$$

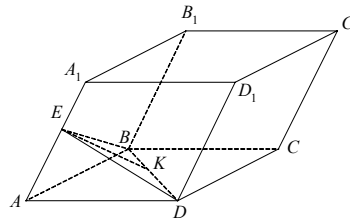
$$= \frac{4}{25}\sqrt{(4096 - 3171)(3171 - 1296)} = \frac{4}{25}\sqrt{925 \cdot 1875} =$$

$$= \frac{4}{25}\sqrt{25 \cdot 37 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \sqrt{111}$$

$$\Rightarrow V = S(A_1PM) \cdot AA_1 = 4 \cdot 5 \sqrt{111} \cdot 25 = 500\sqrt{111}.$$

2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — наклонный параллелепипед, $\angle A_1AB = \angle A_1AD < 90^\circ$, $ABCD$ — квадрат, $AB = a$, $AA_1 = a$, $E \in AA_1$, $BE \perp AA_1$, $\angle BED = 120^\circ$.

Найти: $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$.



Решение:

$$\text{Из } \triangle BED: BE = ED = \sqrt{\frac{BD^2}{2(1 - \cos 120^\circ)}} = BD \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Высота } EK = \frac{1}{2} ED = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow S(EBD) = \frac{1}{2} BD \cdot EK = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$$

$\triangle EBD$ — половина перпендикулярного сечения

$$\Rightarrow V = AA_1 \cdot 2S(EBD) = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

С—16

1. Дано: $MABC$ — тетраэдр, $AB = BC = AC = \sqrt{3}$, $MA = 6$, $S(MAB) = S(MBC) = S(MAC)$.

Найти: $V(MABC)$.

Решение:

Высоты боковых граней равны \Rightarrow вершина M равноудалена от прямых, содержащих стороны. Возможны три случая:

1) H — основание высоты — центр описанной окружности.

$$AH = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1. \text{ Из } \triangle AHM:$$

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{36 - 1} = \sqrt{35}.$$

$$V(MABC) = S(ABC) \cdot \frac{1}{3} \cdot MH = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{35} = \frac{\sqrt{105}}{4}.$$

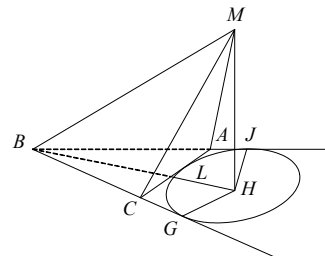
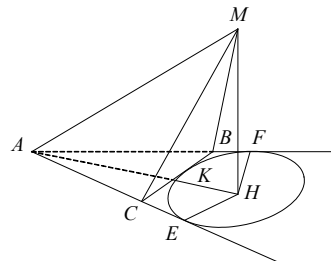
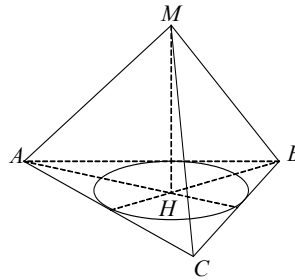
2) H — центр внеописанной окружности.

H лежит на биссектрисе AK .

$$KH = HE = HF = r, AK = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2};$$

$$AH = AK + KH = \frac{3}{2} + r.$$

$$\text{Из } \triangle AHE: \frac{AH}{HE} = \frac{\frac{3}{2} + r}{r} = 2 = \frac{1}{\sin 30^\circ}.$$



$$\frac{3}{2} + r = 2r; \quad r = \frac{3}{2} \Rightarrow AH = 3.$$

$$\text{Из } \triangle AHM: HM = \sqrt{AM^2 - AH^2} = 3\sqrt{3}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot MH \cdot S(ABC) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{9}{4}.$$

3) H — центр вневписанной окружности, $H \in$ биссектрисе BL .

$$LH = HJ = GH = \frac{3}{2} \quad (\text{по предыдущему случаю}).$$

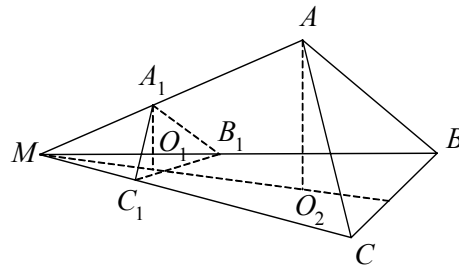
$$\text{Из } \triangle AJH = \triangle ALH \text{ по гипотенузе и катету} \Rightarrow LA = AJ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{AJ^2 + JH^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{из } \triangle AHM \quad MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{36 - 3} = \sqrt{33}$$

$$\Rightarrow V(MABC) = S(ABC) \cdot \frac{1}{3} \cdot MH = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{33} = \frac{3\sqrt{11}}{4}$$

2. Дано: $MABC$ — пирамида, $MA = 4$, $MB = 6$, $MC = 5$, $A_1 \in MA$, $MA_1 = 1$, $B_1 \in MB$, $MB_1 = 3$, $C_1 \in MC$, $MC_1 = 2$, плоскость $A_1B_1C_1$ — секущая.



$$\text{Найти: } \frac{V_1}{V_2}.$$

Решение:

$$\text{В пирамиде } A_1MC_1B_1: S(MC_1B_1) = \frac{1}{2} MC_1 \cdot MB_1 \cdot \sin \alpha, \quad \alpha = \angle BMC, \quad AO_1 =$$

$$MA_1 \cdot \sin \varphi, \quad \varphi = \angle A_1MO$$

$$V_1 = S(MC_1B_1) \cdot \frac{1}{3} AO_1 = \frac{1}{3} S(MC_1B_1) = \frac{MC_1 \cdot MB_1 \cdot MA_1 \cdot \sin \alpha \sin \varphi}{6}.$$

$$\text{Аналогично } V = \frac{MC \cdot MB \cdot MA \cdot \sin \alpha \sin \varphi}{6}$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{MA_1 \cdot MB_1 \cdot MC_1}{MA \cdot MB \cdot MC} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{20}.$$

C—17

1. Дано: конус, MH — высота, $\triangle MAB$ — сечение, $S(MAB)$ — наибольшая из таких сечений, $HE \perp AB$, $\angle MEH = \arctg 2$, $MH = H$.

Найти: объем большей части конуса.

Решение:

Т.к. S — наибольшая, то $\angle AMB = 90^\circ$.

$$\text{Из } \triangle MHE: \frac{MH}{HE} = \operatorname{tg} \angle MEH = 2 \Rightarrow$$

$$HE = \frac{H}{2}; ME = \sqrt{MH^2 + HE^2} = \frac{H\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{В } \triangle AMB: AE = EB = ME = \frac{H\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle HEA: \sqrt{HE^2 + EA^2} = \sqrt{\frac{H^2}{4} + \frac{5H^2}{4}} = \frac{H\sqrt{6}}{2} = AH = R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Из } \triangle AHB, \text{ где } AB = 2EA = H\sqrt{5},$$

$$AB^2 = 2AH^2(1 - \cos \angle AHB); 5H^2 = 6H^2(1 - \cos \angle AHB)$$

$$\Rightarrow \cos \angle AHB = \frac{1}{6} \Rightarrow \sin \angle AHB = \frac{\sqrt{35}}{6}; \angle AHB = \arccos \frac{1}{6}.$$

$$S_{\text{наиб сегм}} = HA^2 \left(\frac{2\pi - \angle AHB}{2} \right) + \frac{1}{2} HA^2 \cdot \sin \angle AHB.$$

$$S = HA^2 \left(\pi - \frac{\angle AHB}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin \angle AHB \right) = \frac{H^2 \cdot 3}{2} \left(\pi - \frac{\arccos \frac{1}{6}}{2} + \frac{\sqrt{35}}{12} \right).$$

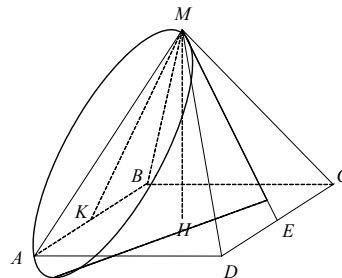
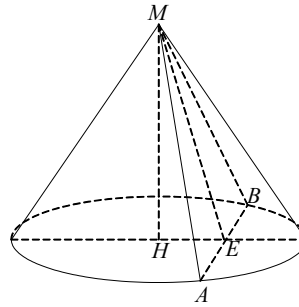
$$V = \frac{1}{3} H \cdot S = \frac{H^3}{2} \left(\pi - \frac{\arccos \frac{1}{6}}{2} + \frac{\sqrt{35}}{12} \right).$$

2. Дано: $MABCD$ — пирамида, $ABCD$ — прямоугольник, $AB = 12$, $AD = 4$, $AM = MB = MC = MD = 10$, $\triangle ABM$ вписан в окружность — основание конуса, образующая конуса лежит на ME , $ME \perp DC$.

Найти: $V_{\text{конуса}}$.

Решение:

$$S(ABM) = \sqrt{16(16-10)^2(16-12)} = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$$



$$R = \frac{AM \cdot MB \cdot AB}{4S} = \frac{100 \cdot 12}{4 \cdot 48} = \frac{100}{16} = \frac{25}{4}$$

$$ME = \frac{2S}{AB} = \frac{96}{12} = 8.$$

Проведем $MK \perp AB$; $MK = ME = 8$, $KE = 4$.

Из $\triangle MKE$: $KE^2 = 2MK^2(1 - \cos \angle KME)$;

$$16 = 128(1 - \cos \angle KME); \cos \angle KME = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow \sin \angle KME = \sqrt{\frac{64 - 49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}; \operatorname{tg} \angle KME = \frac{\sqrt{15}}{7}.$$

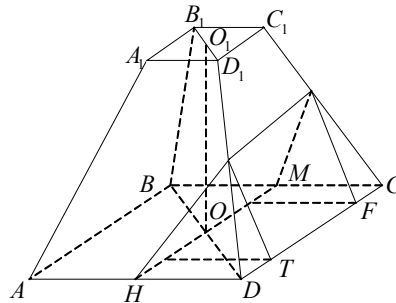
$$\text{Высота конуса равна } h = R \cdot \operatorname{tg} \angle KME = \frac{25}{4} \cdot \frac{\sqrt{15}}{7}$$

$$\Rightarrow V_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot R^2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25}{4} \cdot \frac{\sqrt{15}}{7} \cdot \frac{625}{16} = \frac{15625\pi\sqrt{15}}{1344}.$$

С—18

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — правильная усеченная пирамида, $\frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{1}{2}$,

OO_1 — ось, EF — средняя линия $DD_1 C_1 C$, α — секущая плоскость, $O \in \alpha$, $FK \in \alpha$.



Найти: $\frac{V_1}{V_2}$.

Решение:

Пусть высота пирамиды $O_1 O = 2h$, $A_1 B_1 = a \Rightarrow AB = 2A_1 B_1 = 2a$, $FK = \frac{3a}{2}$.

$$V_{\text{пирамиды}} = O_1 O (S(ABCD) + S(A_1 B_1 C_1 D_1) + \sqrt{S(ABCD) \cdot S(A_1 B_1 C_1 D_1)})$$

$$= 2h(4a^2 + a^2 + a^2 \sqrt{2}).$$

$$V_1 = V(FKPTS) + 2S(FPEDT) =$$

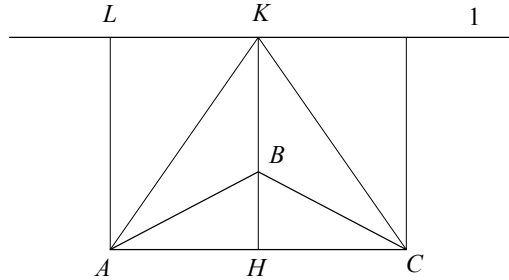
$$= \frac{1}{2} FK \cdot \frac{AB}{2} \cdot h + 2 \cdot \frac{1}{3} h \cdot \frac{(AB - A_1 B_1)}{2} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot ah + \frac{1}{3} h \cdot a \cdot a =$$

$$= \frac{3a^2 h}{4} + \frac{1}{3} ha^2 = \frac{13a^2 h}{12}.$$

$$V_2 = V - V_1 = 2h(5a^2 + a^2 \sqrt{2}) - \frac{13a^2 h}{12} = h \left(\frac{107a^2}{12} + 2a^2 \sqrt{2} \right).$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{13a^2 h}{12ha^2 \left(\frac{107}{12} + 2\sqrt{2} \right)} = \frac{13}{107 + 24\sqrt{2}}$$

2. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ABC = 120^\circ$, $AC = a$, K — точка пересечения высот $\triangle ABC$, $l \parallel AC$, $K \in l$, l — ось вращения



Найти: $V_{\text{т. вр.}}$

Решение:

$$\triangle AKC \text{ — равнобедренный, } BH = \frac{a\sqrt{3}}{6}, KH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, KB = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$V_{\text{т. вр.}} = 2\pi(AH \cdot KH^2 - \frac{1}{3} AH \cdot (KH^2 + KB^2 + KH \cdot KB)) =$$

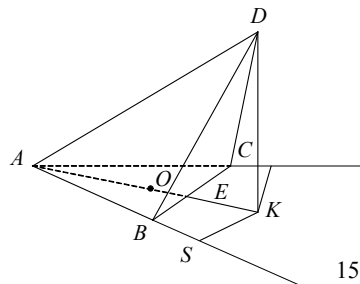
$$= 2\pi \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 \cdot 3}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \left(\frac{a^2 \cdot 3}{4} + \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{2} \right) \right) = 2\pi \left(\frac{3a^3}{8} - \frac{a^3}{6} \left(\frac{9+4+6}{12} \right) \right) =$$

$$= 2\pi \left(\frac{3a^3}{8} - \frac{a^3 \cdot 19}{6 \cdot 12} \right) = \left(\frac{3a^3}{4} - \frac{19a^3}{36} \right) \pi = \frac{8a^3 \pi}{36} = \frac{2a^3 \pi}{9}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2a^3 \pi}{9}.$$

С—19

1. Дано: $DABC$ — пирамида, DK — высота, O — центр $\triangle ABC$, $AB = BC = AC = 1$, $OK = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $DK = \frac{2}{\sqrt{3}}$. В $DABC$ вписан шар.



Найти: $S_{\text{шара}}$.

Решение:

$$AO = \frac{\sqrt{3}}{3}, OE = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Из } \triangle ADK, \text{ где } AK = AO + OK = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}, DK = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$AD = \sqrt{DK^2 + AK^2} = \sqrt{\frac{4}{3} + 3} = \sqrt{\frac{13}{3}}.$$

$$\text{Из } \triangle DEK: DE = \sqrt{EK^2 + KD^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{4}{3}} = \frac{5}{\sqrt{12}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

$$EK = OK - OE = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Найдем высоту DS грани ADB .

$$\text{Из } \triangle ASK: AS = AK \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle DSA: DS = \sqrt{AD^2 - AS^2} = \sqrt{\frac{13}{3} - \frac{9}{4}} = \frac{5}{\sqrt{12}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

$$\Rightarrow S(ABD) = S(ACD) = \frac{1}{2} AB \cdot DS = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{12}$$

$$\Rightarrow S_{\text{пов}}(DABC) = \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

По формуле из задачи С-19.1, вариант 7

$$r = \frac{3V}{S_{\text{пов.}}} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$\Rightarrow S_{\text{сферы}} = 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{27}.$$

2. Дано: полый металлический шар, внешний радиус которого R , плавает, будучи на половину погруженным в воду. Плотность материала $\rho_{\text{ш}}$.

Найти: толщину стенок шара.

Решение:

$$\text{Вес полого шара } P = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3) \rho_{\text{ш}} \cdot g,$$

$$\text{выталкивающая сила } F = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho_{\text{в}} g. \text{ Т.к. } P = F, \text{ то}$$

$$\frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3) \rho_{\text{ш}} \cdot g = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho_{\text{в}} \cdot g$$

$$2(R^3 - r^3)\rho_{\text{ш}} = R^3\rho_{\text{в}}$$

$$2\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right)\frac{\rho_{\text{ш}}}{\rho_{\text{в}}} = 1; \left(\frac{r}{R}\right)^3 = 1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{2\rho_{\text{ш}}};$$

$$\frac{r}{R} = \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{2\rho_{\text{ш}}}} \text{ и } r = R\sqrt[3]{1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{2\rho_{\text{ш}}}}.$$

Тогда толщина стенок шара

$$h = R - r = R\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{2\rho_{\text{ш}}}}\right).$$

ДС

1. Дано: $MABCD$ — пирамида, $AB = 2$, $AD = 1$, $(AMB) \perp (ABCD)$, $AM = BM$, $MH = 1$.

Найти: угол между (AMD) и (DMC) .

Решение:

Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат $Hxyz$.

Искомый угол равен углу между $\vec{n}_1(1, 0, 1) \perp (AMD)$ и $\vec{n}_2(0, 1, 1) \perp (DMC)$.

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos \hat{n}_1 n_2 \Rightarrow$$

$$\cos \hat{n}_1 n_2 = \frac{1}{2}.$$

Искомый угол равен 60° .

2. Дано: $M(1, 1, 1)$, $\alpha: 2x - y + z - 1 = 0$; $\beta: x + y - 2z - 2 = 0$, $\alpha \cap \beta = l$, плоскость $\gamma \perp l$, $M \in \gamma$.

Найти: уравнение γ .

Решение:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 & \text{I} \\ x + y - 2z - 2 = 0 & \text{II} \end{cases}$$

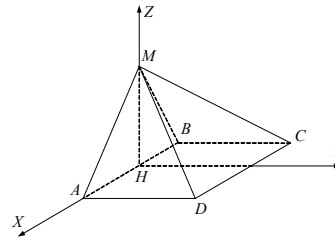
$$\begin{matrix} \text{I} + \text{II} \\ 2\text{I} + \text{II} \end{matrix} \begin{cases} 3x - z - 3 = 0 \\ 5x - y - 4 = 0 \end{cases} \cdot \begin{cases} z = 3x - 3 \\ y = 5x - 4 \end{cases} \text{ Коллинеарен линии.}$$

Система, задающая линию пересечения, например вектор $(1, 3, 5)$

\Rightarrow Уравнение α имеет вид: $x + 3y + 5z + A = 0$

$M \in \alpha: 1 + 3 + 5 + A = 0; A = -9$

Окончательно $\alpha: x + 3y + 5z - 9 = 0$.



Работы на повторение

II—1

Вариант 1

Дано: $DABC$ — пирамида, $AB = BC = AC = a$, $DB = a$.

1. Каково взаимное положение прямых: 1) AB и CD ; 2) BD и AC ; 3) PQ и AC .

Решение:

1) AB и CD — скрещивающиеся, т. к. не параллельны и не пересекаются.
2) BD и AC — скрещивающиеся.
3) PQ и AC — скрещивающиеся, т. к. не пересекаются и не параллельны.

2. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через центр основания и параллельно AC и BD . Определить его вид и найти его площадь.

Построение:

В (ABC) через центр O проводим прямую $EH \parallel AC$. В гранях DBC и DBA через точки E и H проводим прямые FE и $GH \parallel BD$. Соединяем F и G . Сечение $EFGH$ — искомое. Его вид прямоугольник $S = \frac{2a^2}{9} \left(EH = \frac{2a}{3}, EF = \frac{a}{3} \right)$.

3. Найти угол между гранями: 1) ADB и CDB ; 2) DAC и ABC .

Решение:

1) BD — линия пересечения плоскостей, $CB \perp DB$ и $AB \perp DB \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$ — искомый угол между плоскостями.

2) Проведем $DM \perp AC$. В $\triangle ABC$ $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

из прямоугольного $\triangle DBM$: $\frac{DB}{BM} = \operatorname{tg} \angle DMB$; $\frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} \angle DMB$;

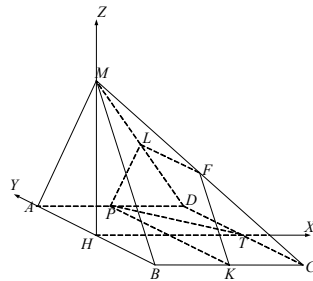
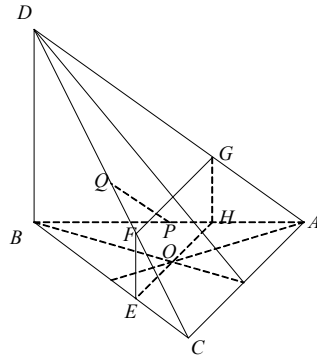
$\angle DMB = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3}$ — искомый угол.

4. Чему равен угол между DB и (ADC) ?

Решение:

Из прямоугольного $\triangle DBM$: $\angle BDM = \frac{\pi}{2} -$

$\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3}$ — искомый угол.



5. Найти угол между AB и DC .

Решение:

Поместим пирамиду в полярную систему координат $Bxyz$ как показано

на рисунке, тогда $\overrightarrow{BA}(a, 0, 0)$, $\overrightarrow{DC}\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, -a\right)$,

$$|\overrightarrow{BA}| = a, |\overrightarrow{DC}| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} + a^2} = a\sqrt{2},$$

$$(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC}) = \frac{a^2}{2} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cdot \cos \widehat{BA \cdot DC}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{BA \cdot DC} = \frac{\frac{a^2}{2}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{DC}|} = \frac{a^2}{2a^2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\widehat{BA \cdot DC} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

6. Найти расстояние между AB и DC .

Решение:

От точки A отложим вектор $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{DC}$, координаты точки

$K\left(a + \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, -a\right)$ и $(ABK) \parallel DC$.

Уравнение плоскости ABK : $Px + Qy + Rz + S = 0$.

$$\begin{matrix} B: \\ A: \\ K: \end{matrix} \begin{cases} S = \\ aP = 0 \\ \frac{3}{2}aP + \frac{a\sqrt{3}}{2}Q - aR = 0 \end{cases}; \begin{cases} S = 0 \\ P = 0 \\ R = \frac{\sqrt{3}}{2}Q \end{cases}.$$

Уравнение (ABK) : $y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0$.

$$\vec{n}\left(0, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \perp (ABK).$$

Из т. O опустим перпендикуляр DN на (ABK) , $\overrightarrow{DN} = k \cdot \vec{n}$.

Пусть $N(x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{DN}(x_0, y_0, z_0 - a)$.

$$\begin{cases} x_0 = k \cdot 0 \\ y_0 = k \\ z_0 - a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot k \end{cases}; \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = k \\ z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot k + a \end{cases}.$$

$$\text{Но } N \in (ABK) \Rightarrow k + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k + a \right) = 0;$$

$$\frac{7}{4}k + \frac{\sqrt{3}}{2}a = 0, \quad k = -\frac{2\sqrt{3}}{7}a \Rightarrow N \left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{7}a, -\frac{3}{7}a + a \right),$$

$$\overrightarrow{DN} \left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{7}a, -\frac{3}{7}a \right); \quad |\overrightarrow{DN}| = \sqrt{\frac{12a^2}{49} + \frac{9a^2}{49}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Вариант 2

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = CB = a$, $AA_1 = a$.

1. Каково взаимное расположение прямых:
1) AA_1 и BC ; 2) A_1C_1 и BC ; 3) EF и AC ; $E \in AB_1$, $AE : EB_1 = 1 : 2$; $F \in CB_1$; $CF : FB_1 = 2 : 1$.

Решение:

1) AA_1 и BC — скрещивающиеся.
2) A_1C_1 и BC — скрещивающиеся.
3) EF и AC — пересекаются (т.к. лежат в одной плоскости и не параллельны).

2. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через AC и $K \in C_1B_1$, $C_1K = KB_1$. Определить его вид. Найти его площадь.

Построение:

Соединим точку K с точкой C . В $(A_1C_1B_1)$ проведем $KD \parallel A_1C_1$. Соединим A и D . Прямоугольная трапеция $ADKC$ — искомое сечение.

$$S = \frac{1}{2} \left(a + \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2 \cdot 3\sqrt{5}}{8}.$$

3. 1) Найти угол между $(A_1B_1C_1)$ и $(ADKC)$.

Искомый угол $\angle C_1KC$ находим из прямоугольного $\triangle CC_1K$.

$$CC_1 = a, \quad C_1K = \frac{a}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \angle C_1KC = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2,$$

$$\angle C_1KC = \operatorname{arctg}(2).$$

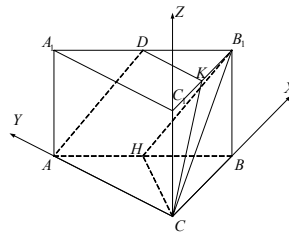
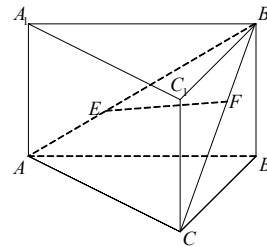
2) Найти угол между $ADKC$ и CC_1B_1B .

Решение: плоскости перпендикулярны значит угол — прямой.

4. Найти угол между B_1C и (AA_1B_1B) .

В (ABC) опустим высоту CH : $CH \perp (AA_1B_1B)$.

$$CH = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad CB_1 = a\sqrt{2} \Rightarrow \text{из прямоугольного } \triangle CHB_1:$$



$$\sin \angle CB_1H = \frac{CH}{CB_1} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle CB_1H = 30^\circ \text{ — искомый угол.}$$

5. Найти угол между AB и B_1C .

Решение:

Введем полярную систему координат $Cxyz$ как показано на рисунке \Rightarrow
 $\overrightarrow{AB}(a, -a, 0), |\overrightarrow{AB}| = a\sqrt{2}; \overrightarrow{CB_1}(a, 0, a), |\overrightarrow{CB_1}| = a\sqrt{2}.$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB_1} = a^2 = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CB_1}| \cdot \cos \angle \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB_1},$$

$$\cos \angle \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB_1} = \frac{1}{2}; \angle \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB_1} = \frac{\pi}{3}.$$

6. Находим расстояние от AB до B_1C .

Решение:

От точки D отложим вектор $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{CB_1}$, координаты $L(2a, 0, a)$, $(ABL) \parallel CB_1$. Уравнение (ABL) : $Px + Qy + Rz + S = 0$.

$$\begin{aligned} A: & \begin{cases} aQ + S = 0 \\ aP + S = 0 \end{cases}; \begin{cases} aQ = -S \\ aP = -S \end{cases} \\ L: & \begin{cases} 2aP + aR + S = 0 \end{cases}; \begin{cases} aP = -aR \end{cases} \end{aligned}$$

$$(ABL): x + y - z - a = 0$$

$$\vec{n}(1, 1, -1) \perp (ABL).$$

Опустим из точки C перпендикуляр CN на (ABL) , $\overrightarrow{CN} = k\vec{n}$

$$\Rightarrow N(k, k, -k), N \in (ABL)$$

$$k + k + k - a = 0, k = \frac{a}{3}.$$

$$\Rightarrow N\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right), \overrightarrow{CN}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$$

$$|\overrightarrow{CN}| = \sqrt{\frac{a^2 + a^2 + a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ — искомое расстояние.}$$

Вариант 3

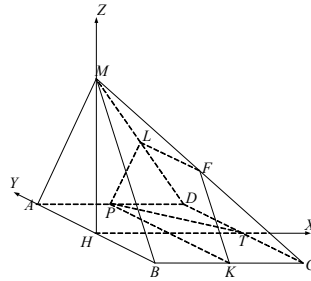
Дано: $MABCD$ — пирамида, $(AMB) \perp (ABCD)$, $AM = MB = AB$, $ABCD$ — квадрат, $AB = a$.

1. Выяснить взаимное расположение прямых: 1) MB и AD ; 2) AC и MD ; 3) EF и PT ; $E \in AM, AE = EM, F \in MC, MF = FC, T \in CD, DT = TC, P \in AD, AP = PD$.

Решение:

1) MB и AD — скрещивающиеся.

2) AC и MD — скрещивающиеся.



3) EF и PT — параллельны, т.к. $EF \parallel AC \parallel PT$.

2. Через $P \in AD$ ($AP = PD$) проводим прямую $PK \parallel AB$. В гранях AMD и BMC проводим линии PL и KF параллельно AM и MB соответственно. Равнобедренная трапеция $PLFK$ — искомое сечение.

$$S(PLFK) = \frac{3}{4} S(AMB) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{16}.$$

3. Найти угол между: 1) (ABC) и (DMC) ; 2) (AMB) и (DMC) .

Решение:

1) MH — высота пирамиды, $MH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HT = AD = a \Rightarrow$ в прямоуголь-

ном $\triangle MHT$: $\operatorname{tg} \angle MTH = \frac{MH}{HT} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$$\angle MTH = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ — искомый угол.}$$

$$2) \angle HMT \text{ — искомый угол, } \angle HMT = \frac{\pi}{2} - \angle MTH = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Найти угол между MD и AMD .

Решение:

$DA \perp (AMB) \Rightarrow$ искомый угол — $\angle DMA$.

В прямоугольном $\triangle MAD$: $AM = AD = a \Rightarrow \angle DMA = 45^\circ$.

5. Найти угол между MD и AC .

Решение:

Поместим пирамиду в полярную систему координат $Hxyz$ как показано на рисунке $\Rightarrow \overrightarrow{AC}(a, -a, 0)$, $|\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$,

$$\overrightarrow{MD}\left(a, \frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), |\overrightarrow{MD}| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}} = a\sqrt{2}$$

$$(\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC}) = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} = |\overrightarrow{MD}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{MD} \wedge \overrightarrow{AC})$$

$$\Rightarrow \cos \overrightarrow{MD} \wedge \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}, \overrightarrow{MD} \wedge \overrightarrow{AC} = \arccos \frac{1}{4}.$$

6. Найти расстояние между BC и MD .

Решение:

$$\overrightarrow{BC}(a, 0, 0), B\left(0, -\frac{a}{2}, 0\right), C\left(a, -\frac{a}{2}, 0\right).$$

$$\text{От точки } B \text{ отложим вектор } \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MD}; N\left(a, 0, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), MD \parallel BCN.$$

Уравнение плоскости BCN : $Px + Qy + Rz + S = 0$.

$$\begin{matrix} B: \\ C: \\ N: \end{matrix} \begin{cases} -\frac{a}{2}Q + S = 0 \\ aP - \frac{a}{2}Q + S = 0 \\ aP - \frac{a\sqrt{3}}{2}R + S = 0 \end{cases} ; \begin{cases} aQ = 2S \\ P = 0 \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} = S \end{cases}$$

$$\Rightarrow (BCN): \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z + a = 0, \vec{n}\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \perp (BCN).$$

Опустим из т. M перпендикуляр MO на (BCN) , $\overrightarrow{MO} = k\vec{n}$,

$$O(x_0, y_0, z_0), \overrightarrow{MO}\left(x_0, y_0, z_0 - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = \frac{k}{2} \\ z_0 - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{k\sqrt{3}}{2} \end{cases} ; \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = \frac{k}{2} \\ z_0 = \frac{k\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

$$N \in (BCN) \Rightarrow \frac{k}{4} + \frac{3}{4}k + \frac{3a}{4} + a = 0; 4k = -7a, k = -\frac{7}{4}a.$$

$$\overrightarrow{MO}\left(0, -\frac{7}{8}a, -\frac{7\sqrt{3}}{8}a + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right); \overrightarrow{MO}\left(0, -\frac{7}{8}a, -\frac{3\sqrt{3}a}{8}\right);$$

$$|\overrightarrow{MO}| = \sqrt{\frac{49}{64}a^2 + \frac{27}{64}a^2} = a\sqrt{\frac{76}{64}} = a\frac{\sqrt{19}}{2}.$$

Вариант 4

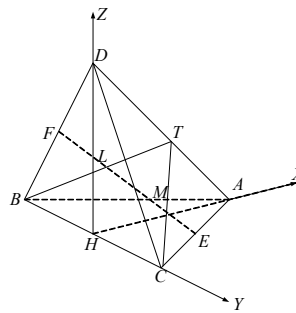
Дано: $DABC$ — тетраэдр, $(ABC) \perp (DBC)$, $AB = BC = CA = BD = DC = a$.

1. Каково взаимное расположение: 1) AC и BD ; 2) AD и BC ; 3) EF и BC ; $E \in AC$, $AE = EC$, $F \in BD$, $BF = FD$.

Решение:

- 1) AC и BD — скрещивающиеся.
- 2) AD и BC — скрещивающиеся.
- 3) EF и BC — скрещивающиеся
2. Через A и $M \in DC$ ($DM = MC$) провести сечение $\parallel BC$.

Решение:



Соединим M и F ($MF \parallel BC$), соединим F и M с A . Равнобедренный $\triangle FAM$ — искомый. $FM = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, DH — высота, $DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ — делится средней линией FM пополам.

$$HL = \frac{a\sqrt{3}}{4}, HA = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Из прямоугольного } \triangle LHA:$$

$$LA = \sqrt{LH^2 + HA^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{16} + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

$$S(FMA) = \frac{1}{2} FM \cdot LA = \frac{a}{4} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{4} = \frac{a^2\sqrt{15}}{16}.$$

3. Найти угол между: 1) (ADC) и (ABC) ; 2) (ADC) и (ADB) .

Решение:

1) Введем полярную систему координат $Hxyz$ как показано на рисунке.

$$\overrightarrow{DC} \left(0, \frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2} \right), \overrightarrow{DA} \left(a, 0, -\frac{a\sqrt{3}}{2} \right), \overrightarrow{CA} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}, 0 \right).$$

Возьмем в плоскости DCA вектор $\vec{x} = k\overrightarrow{DC} + l\overrightarrow{DA}$;

$$\vec{x} \left(la, \frac{ka}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}(k+l) \right), \vec{x} \perp \overrightarrow{CA}:$$

$$\frac{la^2\sqrt{3}}{2} - \frac{ka^2}{4} = 0; 2l\sqrt{3} - k = 0; k = 2\sqrt{3}, l = 1.$$

$$\vec{x} \left(a, a\sqrt{3}, -a \cdot 3 - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{a^2 + 3a^2 + 9a^2 + \frac{3}{4}a^2 + 3a\sqrt{3}} = a \frac{\sqrt{55 + 12\sqrt{3}}}{2}$$

$$\vec{x} \left(a, a\sqrt{3}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{3} + 1) \right).$$

$$\text{В плоскости } ABC: \overrightarrow{BA} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, 0 \right), \overrightarrow{BC} (0, a, 0), \overrightarrow{CA} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}, 0 \right).$$

Возьмем вектор $\vec{y} \perp \overrightarrow{CA}$.

$$\vec{y} = m\overrightarrow{BA} + n\overrightarrow{BC}$$

$$\vec{y} \left(\frac{ma\sqrt{3}}{2}, \frac{ma}{2} + n \cdot a, 0 \right)$$

$$(\vec{y} \cdot \overrightarrow{CA}) = 0; \frac{a^2 \cdot 3}{4}m - \frac{a^2}{4}(m + 2n) = 0$$

$$3m - m - 2n = 0, m = n = 1.$$

$$\vec{y}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{3a}{2}, 0\right), |\vec{y}| = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + \frac{9}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

Ищем требуемый угол между плоскостями

$$\vec{x}\left(a, a\sqrt{3}, -3a - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), |\vec{x}| = \frac{a\sqrt{55+12\sqrt{3}}}{2}$$

$$(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 2a^2\sqrt{3} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2a^2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot 2}{a\sqrt{55+12\sqrt{3}} \cdot a\sqrt{13}} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{55+12\sqrt{3}} \cdot \sqrt{13}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{55+12\sqrt{3}} \cdot \sqrt{13}} \text{ — угол между } ADC \text{ и } ABC.$$

2) В гранях ADC и ADB проведем высоты CT и BT .

$$\text{Из равнобедренного прямоугольного } \triangle DHA \quad \left(DH = HA = \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$AD = \frac{a\sqrt{6}}{2}, TA = \frac{1}{2}AD = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Из прямоугольного $\triangle CTA$:

$$CT = \sqrt{TA^2 + CA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 \cdot 6}{16}} = \frac{a\sqrt{10}}{4} = BT.$$

Из равнобедренного $\triangle BTC$ искомый угол по теореме косинусов:

$$a^2 = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot 10}{16} - 2 \cdot \frac{a^2 \cdot 10}{16} \cos \beta$$

$$a^2 = \frac{a^2 \cdot 10}{8} (1 - \cos \beta); \quad \frac{4}{5} = 1 - \cos \beta; \quad \cos \beta = \frac{1}{5}; \quad \beta = \arccos \frac{1}{5}.$$

4. Найти угол между AM и (ABC) .

Решение:

$$\overrightarrow{AM} \left(-a, \frac{a}{4}, \frac{a\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$\vec{n} (0, 0, 1) \perp (ABC)$$

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{16} + \frac{a^2 \cdot 3}{16}} = \frac{2\sqrt{5}}{4}a = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$|\vec{n}| = 1$$

$$(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}) = \frac{a\sqrt{3}}{4} = |\overrightarrow{AM}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2}{4 \cdot \sqrt{5}a} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}; \gamma = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$$

$$\text{Искомый угол } \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$$

5. Найти угол между: 1) AD и BC ; 2) AB и DC /

Решение:

$$1) \overrightarrow{AD} \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{a\sqrt{3}}{2} \right), \overrightarrow{BC} (0, a, 0)$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}) = 0; AD \text{ и } BC \text{ — перпендикуляры.}$$

$$2) \overrightarrow{AB} \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}, 0 \right), \overrightarrow{DC} \left(0, \frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = a; |\overrightarrow{DC}| = a$$

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}) = -\frac{a^2}{4} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cdot \cos \varphi; \cos \varphi = -\frac{1}{4}; \varphi = \arccos \left(-\frac{1}{4} \right).$$

$$\text{Искомый угол равен } \pi - \arccos \left(-\frac{1}{4} \right).$$

6. Найти расстояние между AD и BC .

Решение:

$$A \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0 \right), D \left(0, 0, \frac{a\sqrt{3}}{2} \right), B \left(0, -\frac{a}{2}, 0 \right), C \left(0, \frac{a}{2}, 0 \right).$$

$$\overrightarrow{AD} \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{a\sqrt{3}}{2} \right), \overrightarrow{BC} (0, a, 0).$$

$$\text{От точки } C \text{ отложим вектор } \overrightarrow{CU} = \overrightarrow{AD}; U \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$\text{Уравнение плоскости } BCU: Px + Qy + Rz + S = 0.$$

$$\begin{matrix} B: \\ C: \\ U: \end{matrix} \begin{cases} -\frac{a}{2}Q + S = 0 \\ \frac{a}{2}Q + S = 0 \\ -\frac{a\sqrt{3}}{2}P + \frac{a}{2}Q + \frac{a\sqrt{3}}{2}R + S = 0 \end{cases}; \begin{cases} Q = 0 \\ S = 0 \\ P = R \end{cases}.$$

$$\text{Уравнение } (BCU): x + z = 0; (BCU) \parallel AD.$$

$$\vec{n} (1, 0, 1) \perp (BCU)$$

$$\text{Опустим из т. } D \text{ перпендикуляр } DW \text{ на } (BCU), \overrightarrow{DW} = k\vec{n} = (k, 0, k)$$

$$W \left(k, 0, k + \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$W \in (BCU): k + k + \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0, k = -\frac{a\sqrt{3}}{4}$$

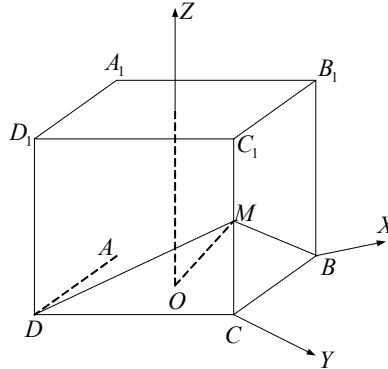
$$\overrightarrow{DW} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{4}, 0, -\frac{a\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$|\overrightarrow{DW}| = \sqrt{\frac{3}{16}a^2 + \frac{3}{16}a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{4} \text{ — искомое расстояние.}$$

П—2

Вариант 1

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — ромб, $AC = 8$, $BD = 6$, $M \in CC_1$, $C_1M = MC$, $AC \cap BD = O$, $\angle MOC = 45^\circ$.



1) Найти $\frac{V_1}{V_2}$ получившихся частей.

Решение:

$$CO = \frac{1}{2} AC = 4.$$

Из прямоугольного $\triangle OCM$: $MC = CO = 4 \Rightarrow C_1C = 2CM = 8$.

$$V_1 = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 8 = 192.$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BD \cdot OC \cdot MC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 = 16.$$

$$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = 192 - 16 = 176.$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{16}{176} = \frac{1}{11}.$$

2) Найти $S(AB_1BD_1C_1C)$.

Решение:

$$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = 5.$$

Поместим параллелепипед в полярную систему координат $Oxyz$ как показано на рисунке.

$$B(3, 0, 0), C(0, 4, 0), A_1(0, -4, 8), \overrightarrow{BC}(-3, 4, 0), BA_1(-3, -4, 8)$$

$$|\overrightarrow{BC}| = 5, |\overrightarrow{BA_1}| = \sqrt{9+16+64} = \sqrt{89}$$

$$(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA_1}) = 9 - 16 = -7 = |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA_1}| \cdot \cos \angle A_1BC$$

$$\cos \angle A_1BC = -\frac{7}{5\sqrt{89}}$$

$$\Rightarrow \sin \angle A_1BC = \sqrt{1 - \frac{49}{25 \cdot 89}} = \frac{\sqrt{2225 - 49}}{5\sqrt{89}} = \frac{\sqrt{2151}}{5\sqrt{89}}$$

$$\Rightarrow S(A_1BCD_1) = A_1B \cdot BC \cdot \sin \angle A_1BC = \sqrt{89} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2151}}{5\sqrt{89}} = \sqrt{2151}.$$

$$S(AB_1BD_1C_1C) = \sqrt{2151} + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 + 5 \cdot 8 =$$

$$= \sqrt{2151} + 80 + 24 = 104 + \sqrt{2151} = 8(13 + \sqrt{34}).$$

3) Найти угол между A_1C и (DD_1C_1C) .

Решение:

$A_1(0, -4, 8), C(0, 4, 0), \overrightarrow{A_1C}(0, 8, 8)$, а вектор $\vec{n}(4, -3, 0)$ перпендикулярен плоскости (DD_1C_1C) .

$$|\overrightarrow{A_1C}| = 8\sqrt{2}; |\vec{n}| = 5;$$

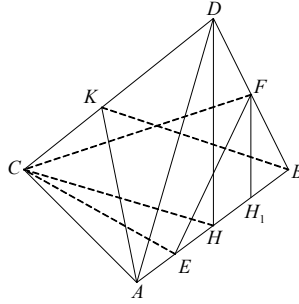
$$(\overrightarrow{A_1C} \cdot \vec{n}) = 24 = |\overrightarrow{A_1C}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{24}{5 \cdot 8\sqrt{2}} = \frac{3}{5 \cdot 8\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{3}{5 \cdot 8\sqrt{2}} \Rightarrow \text{искомый угол } \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Вариант 2

Дано: $DABC$ — пирамида, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = CB = 4$, DH — высота, $\angle DCH = \angle DBH = \angle DAH = 60^\circ$, $F \in BD$, $BF = FD$, $E \in AB$, $AE : EB = 1 : 3$, CFE — сечение.



1) Найти $\frac{V_1}{V_2}$ получившихся частей.

Решение:

В $\triangle ABC$ $AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow EB = 3\sqrt{2}$, $\angle CBE = 45^\circ$.

В $\triangle CBE$ по теореме косинусов

$$CE^2 = CB^2 + EB^2 - 2CB \cdot EB \cdot \cos 45^\circ$$

$$CE^2 = 16 + 18 - 24\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, CE^2 = 10, CE = \sqrt{10}.$$

Высота пирамиды $FCEB$ $FH_1 = \frac{1}{2} DH$. Точка H — центр описанной ок-

ружности, т.к. в $\triangle CHD$, $\triangle BHD$, $\triangle AHD$ углы наклона ребер 60° , а DH — об-
щая $\Rightarrow H$ — середина гипотенузы $AB \Rightarrow$ из прямоугольного $\triangle DHA$, где AH
 $= 2\sqrt{2}$, $\angle DAH = 60^\circ$, имеем

$$DH = AH \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{6} \Rightarrow FH_1 = \sqrt{6}.$$

$$S(CBE) = \frac{1}{2} CB \cdot EB \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$$

$$V_1 = S(CBE) \cdot \frac{1}{3} FH_1 = 2 \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}.$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot CB = 8$$

$$V = S(ABC) \cdot \frac{1}{3} DH = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{16\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{16\sqrt{6}}{3} - 2\sqrt{6} = \frac{10\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{2\sqrt{6} \cdot 3}{10\sqrt{6}} = \frac{3}{5}.$$

2) Найти $S_{\text{бок}}(DABC)$.

Решение:

$$S(ADB) = AB \cdot \frac{1}{2} DH = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} = 8\sqrt{3}.$$

$$\text{В } \triangle DCA = \triangle DCB \text{ } AD = CD = DB = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{8 + 24} = 4\sqrt{2}$$

$$p = \frac{4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4}{2} = 2 + 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S(DCA) = \sqrt{p(p-CA)(p-DA)^2} = \sqrt{(2+4\sqrt{2}) \cdot (4\sqrt{2}-2) \cdot 4} = 2\sqrt{32-4} = 4\sqrt{7}.$$

$$S_{\text{бок}} = 2S(DCA) + S(ADB) = 8\sqrt{7} + 8\sqrt{3}.$$

3) Найти угол между (ADC) и (BDC) .

Решение:

Проведем высоты AK и BK в гранях (ADC) и (BDC) .

$$S(ADC) = 4\sqrt{7} = \frac{1}{2} CD \cdot AK = 2\sqrt{2} \cdot AK \Rightarrow AK = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \sqrt{14}.$$

В равнобедренном $\triangle AKB$ ($AK = KB$) по теореме косинусов:

$$AB^2 = 2AK^2 - 2AK^2 \cos \alpha$$

$$32 = 2 \cdot \frac{4 \cdot 7}{2} (1 - \cos \alpha)$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{8}{7}; \cos \alpha = -\frac{1}{7}; \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{7}\right).$$

Вариант 3

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная призма,
 $AB = BC = CA = 4\sqrt{3}$, $M \in BC$, $BM = MC$, $A_1M \perp (ABC)$, $\angle A_1AM = 45^\circ$.

1) Найти $S_{\text{бок}}(ABCA_1B_1C_1)$.

Решение:

$$AM = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 = A_1M \text{ (т.к. } \angle A_1AM = 45^\circ) \Rightarrow AA_1 = 6\sqrt{2}.$$

$$\text{В } \triangle A_1MB \text{ } BM = 2\sqrt{3}, A_1M = 6 \Rightarrow$$

$$A_1B = \sqrt{BM^2 + A_1M^2} = \sqrt{12 + 36} = 4\sqrt{3}.$$

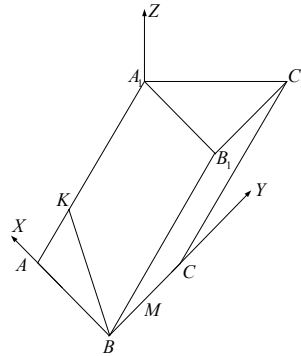
Найдем $S(AA_1B)$ по теореме Герона

$$p = \frac{4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 6\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{(4\sqrt{3} + 3\sqrt{2})(3\sqrt{2})^2 \cdot (4\sqrt{3} - 3\sqrt{2})} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{48 - 18} = 3\sqrt{60} = 6\sqrt{15}$$

BB_1C_1C — прямоугольник

$$S(BB_1C_1C) = BC \cdot BB_1 = 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2}.$$



2) KBC — секущая плоскость, $KBC \perp (CC_1B_1B)$.

Найти $\frac{V_1}{V_2}$ получившихся частей.

Решение:

$$AK \perp (KBC), \text{ причем } AK = \frac{AA_1}{2} \Rightarrow AK = 3\sqrt{2}.$$

В равнобедренном $\triangle ABA_1$ $AB = A_1B = 4\sqrt{3}$, $AA_1 = 6\sqrt{2}$

$$S(AA_1B) = 6\sqrt{15} = AA_1 \cdot \frac{1}{2} KB \Rightarrow$$

$$KB = \frac{12\sqrt{15}}{6\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{2}} = \sqrt{30}.$$

Рассмотрим равнобедренный $\triangle BKC$

$$BK = KC = \sqrt{30}, BC = 4\sqrt{3}, p = \sqrt{30} + 2\sqrt{3}$$

$$S = \sqrt{(\sqrt{30} + 2\sqrt{3})(\sqrt{30} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{30 - 12} = 6\sqrt{2}.$$

$$\text{Значит, } V_1 = AK \cdot \frac{1}{3} S(KBC) = \sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 12.$$

$$V = S(ABC) \cdot A_1M = 4\sqrt{3} \cdot \frac{6}{2} \cdot 6 = 72\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = 72\sqrt{3} - 12.$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{12}{72\sqrt{3} - 12} = \frac{1}{6\sqrt{3} - 1}.$$

3) Найти расстояние от B до (AA_1C_1C) .

Решение:

Поместим призму в полярную систему координат $Mxyz$, в ней $A(6, 0, 0)$,

$C(0, 2\sqrt{3}, 0)$, $A_1(0, 0, 6)$, $B(0, -2\sqrt{3}, 0)$.

Уравнение AA_1C : $Px + Qy + Rz + S = 0$.

$$\begin{array}{l} A: \\ A_1: \\ C: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 6P + S = 0 \\ 6R + S = 0 \\ 2\sqrt{3}Q + S = 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} P = -\frac{S}{6} \\ R = -\frac{S}{6} \\ Q = -\frac{S}{2\sqrt{3}} \end{array} \right.$$

$$AA_1C: \frac{x}{6} + \frac{y}{2\sqrt{3}} + \frac{z}{6} - 1 = 0 \text{ или } x + \sqrt{3}y + z - 6 = 0$$

$$\vec{n}(1, \sqrt{3}, 1) \perp AA_1C.$$

Опустим из т. B перпендикуляр BN на AA_1C

$$\overrightarrow{BN}(x_0, y_0 + 2\sqrt{3}, z_0) = k \cdot \vec{n}$$

$$\begin{cases} x_0 = k \\ y_0 = k\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \\ z_0 = k \end{cases}$$

$$N \in AA_1C: k + 3k - 2 \cdot 3 + k - 6 = 0$$

$$5k = 12, k = 2,4$$

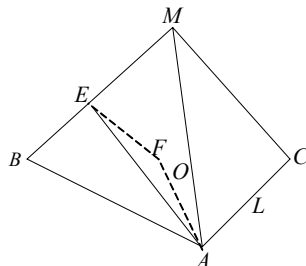
$$N(2,4; 0,4\sqrt{3}; 2,4)$$

$$\overrightarrow{BN} (2,4; 2,4\sqrt{3}; 2,4)$$

$$|\overrightarrow{BN}| = 2,4 \cdot \sqrt{1+3+1} = 2,4\sqrt{5}.$$

Вариант 4

Дано: $MABC$ — пирамида, $AB = BC = 10$, $AC = 12$, MO — высота, $MO = 4$, боковые грани равнонаклонены к основанию, $E \in BM$, $BE = EM$. Через A , O , E проведена плоскость.



1) Найти $\frac{V_1}{V_2}$ получившихся частей.

Решение:

O — центр вписанной окружности (из условия) $\triangle ABC$, т.к. AF — биссектриса, то $\frac{BF}{AB} = \frac{FC}{AC}$, но $BC = 10$; $\frac{BF}{10} = \frac{FC}{12}$; $\frac{BF}{FC} = \frac{5}{6}$

$$\Rightarrow BF = \frac{5}{11} \cdot 10 = \frac{50}{11}; FC = \frac{60}{11}.$$

$$\text{Высота } EO_1 = \frac{1}{2} MO = 2.$$

$$S(ABC) = \sqrt{16 \cdot 4 \cdot 36} = 6 \cdot 8 = 48.$$

$$\frac{S(ABC)}{S(BFA)} = \frac{11}{5}; S(BFA) = \frac{5}{11} \cdot 48$$

$$\Rightarrow V_1 = EO_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot S(BFA) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{11} \cdot 48 = \frac{2 \cdot 5 \cdot 16}{11} = \frac{160}{11}.$$

$$S(ABC) = 48, V = MO \cdot \frac{1}{3} S(ABC) = \frac{4}{3} \cdot 48 = 64$$

$$V_2 = V - V_1 = 64 - \frac{160}{11} = \frac{704 - 160}{11} = \frac{544}{11}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{160}{544} = \frac{5}{17}.$$

2) Найти $S(MABC)$.

Решение:

$$S(ABC) = \frac{1}{2} P \cdot r = 16 \cdot r = 48 \Rightarrow r = 3.$$

Значит, высоты всех граней равны $\sqrt{MO^2 + r^2} = 5$.

$$S(MABC) = 48 + 5 \cdot \frac{1}{2} (AB + BC + AC) = 48 + 5 \cdot 16 = 128.$$

3) Найти угол между MB и (AMC) .

Решение:

В грани ABC проведем высоту и медиану BL . Будем искать угол $\angle BML = \angle BMO + \angle OML$.

$$S(ABC) = 48 = AC \cdot \frac{1}{2} BL = 6BL; BL = 8.$$

В прямоугольном $\triangle MOL$ $ML = 5$, $MO = 4 \Rightarrow OL = 3$.

Значит, $BO = BL - OL = 5$.

Из прямоугольного $\triangle BOM$ $BM = \sqrt{BO^2 + OM^2} = \sqrt{41}$.

$$S(BML) = \frac{1}{2} BM \cdot ML \cdot \sin \angle BML = \frac{1}{2} BL \cdot OM =$$

$$= \sqrt{41} \cdot 5 \cdot \sin \angle BML = 8 \cdot 4$$

$$\sin \angle BML = \frac{32}{5\sqrt{41}}; \angle BML = \arcsin \frac{32}{5\sqrt{41}}.$$

II—3

Вариант 1

Дано: конус, наибольший угол между образующими 120° , $S_{\text{ос сеч}} = 16\sqrt{3}$.

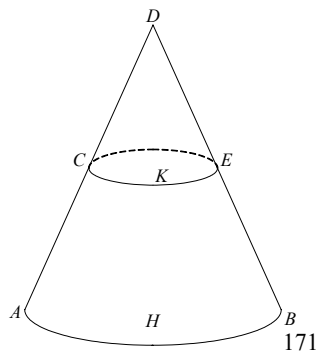
1) Найти $S_{\text{бок}}$.

Решение:

Рассмотрим осевое сечение ADB .

$$S(ADB) = \frac{1}{2} L^2 \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} L^2$$

$$\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \Rightarrow L^2 = 64, L = 8.$$



$$\text{Из } \triangle AHD \quad AH = AD \cdot \sin 60^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

$$S_{\text{бок}} = \pi K \cdot D = \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8 = 32\pi\sqrt{3}.$$

2) Найти центральный угол развертки боковой поверхности конуса (β).

Решение:

$$S_{\text{бок}} = \pi RL = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi L^2;$$

$$\alpha = \frac{2\pi RL}{L^2} = \frac{2\pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8}{64} = \pi\sqrt{3}.$$

3) В данный конус вписан другой конус, его основание делит высоту в отношении 1 : 2 (от вершины).

Найти $\frac{V_1}{V}$.

Решение:

$$V = \pi R^2 \cdot \frac{1}{3} DH \quad (DH = \sqrt{L^2 - R^2} = \sqrt{8^2 - 48} = 4)$$

$$V = \pi \cdot 48 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = 64\pi.$$

$$DK = \frac{1}{3} DH = \frac{4}{3}. \quad \triangle CKD \sim \triangle AHD$$

$$\Rightarrow \frac{CK}{AH} = \frac{DK}{DH} = \frac{1}{3} \Rightarrow CK = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$KH = h_2 = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$$

$$V_1 = \pi \cdot KH \cdot \frac{1}{3} CK^2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{8\pi}{9} \cdot \frac{16}{3} = \frac{128\pi}{27}$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{128\pi}{27 \cdot 64\pi} = \frac{2}{27}.$$

4) Около конуса описан шар.

Найти $S_{\text{шара}}$.

Решение:

$$\triangle ADB \text{ — вписан в окружность} \Rightarrow S = \frac{4bc}{4R}; \quad 16\sqrt{3} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8\sqrt{3}}{4R};$$

$$64\sqrt{3} R = 64 \cdot 8 \cdot \sqrt{3}; \quad R = 8$$

$$S = 4\pi R^2 = 4 \cdot 64\pi = 256\pi.$$

Вариант 2

Дано: цилиндр, O_1O_2 — ось, $O_1O_2 = 8$, AB — образующая; $ABCD$, $ABEF$ — сечения, $\angle DAF = 60^\circ$, $S(ABCD) = S(ABEF) = 32\sqrt{3}$.

1) Найти $S_{\text{бок. цил.}}$

Решение:

$\triangle ADF$ — равносторонний

$$S(ABCD) = AB \cdot AD = 32\sqrt{3} = 8AD; AD = 4\sqrt{3}.$$

$\triangle ADF$ — вписан в окружность.

$$S(ADF) = \frac{a^3}{4R} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow R = \frac{AD}{\sqrt{3}} = 4$$

$$\Rightarrow S_{\text{бок}} = 2\pi R \cdot l = 2\pi \cdot 4 \cdot 8 = 64\pi.$$

$$2) S_{\text{развертки}} = S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin \alpha$$

$$d = \sqrt{(2\pi R)^2 + l^2} = \sqrt{4\pi^2 \cdot 16 + 64} = 8\sqrt{\pi^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{2 \cdot 64\pi}{64(\pi^2 + 1)} = \frac{2\pi}{\pi^2 + 1}.$$

$$\alpha = \arcsin \frac{2\pi}{\pi^2 + 1}.$$

3) В цилиндр можно вписать шар, т.к. $2r = l = 8$.

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 64 = \frac{256\pi}{3}$$

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi r^2 \cdot l = \pi \cdot 16 \cdot 8 = 128\pi$$

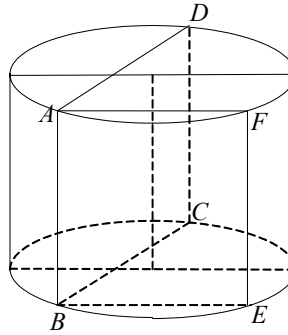
$$\frac{V_{\text{шара}}}{V_{\text{цил.}}} = \frac{256\pi}{3 \cdot 128\pi} = \frac{2}{3}.$$

4) Найти S описанного шара.

Решение:

$$2 \cdot R_{\text{ш}} = \sqrt{(2R)^2 + l^2} = 8\sqrt{2}; R_{\text{ш}} = 4\sqrt{2}$$

$$S_{\text{ш}} = 4\pi R_{\text{ш}}^2 = 4\pi \cdot 32 = 128\pi.$$



Вариант 3

Дано: в усеченный конус вписан шар, $2R = 5\sqrt{3}$, $ABCD$ — осевое сечение, $\angle BAD = \angle CDA = 60^\circ$.

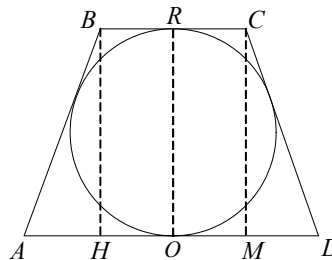
1) Найти $S_{\text{бок. конуса}}$.

Решение:

Высота усеченного конуса равна $2R = 5\sqrt{3}$.

$$BA = \frac{2R}{\cos 60^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} \cdot 2 = 10.$$

Т.к. в $ABCD$ вписана окружность, то $AD + BC = 2AB = 20$.



$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot AB \cdot \frac{BC + AD}{2} = \pi \cdot 10 \cdot 10 = 100\pi.$$

2) Найти $V_{\text{конуса}}$.

Решение:

$$\text{Проведем высоты } BM \text{ и } CM \text{ в осевом сечении} \Rightarrow AH + HM + MD + BC = \\ = \frac{2 \cdot 2R}{\operatorname{tg} 60^\circ} + 2BC = \frac{2 \cdot 5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + 2BC = 10 + 2BC = AD + BC = 20$$

$$\Rightarrow BC = 5, AD = 15, BH = 2R = 5\sqrt{3}$$

$$V_{\text{конуса}} = BH \cdot \frac{1}{3} \pi \left(\left(\frac{AD}{2} \right)^2 + \left(\frac{BC}{2} \right)^2 + \left(\frac{AD}{2} \right) \left(\frac{BC}{2} \right) \right) = \\ = \frac{5\sqrt{3}\pi}{3} \left(\frac{225}{4} + \frac{25}{4} + \frac{75}{4} \right) = \frac{5\sqrt{3}\pi}{3} \cdot \frac{325}{4} = \frac{1625\pi\sqrt{3}}{12}.$$

3) Найти $S_{\text{бок}}$ развертки, центральный угол развертки, радиусы концентрических окружностей.

Решение:

$S_{\text{бок}} \text{ развертки} = 100\pi$ (из п. 2). Достроим усеченный конус до полного с вершиной K .

$$\text{Из сечения видно, что } KA = \frac{AO}{\cos 60^\circ}, KA = \frac{15}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 15.$$

$$KB = \frac{BR}{\cos 60^\circ} = 5.$$

$$S_{\text{бок}} \text{ развертки} = \frac{\alpha}{2} \cdot (KA^2 - KB^2) = 100\pi.$$

$$\frac{\alpha}{2} \cdot (225 - 25) = 100\pi; \alpha = \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi.$$

4) Около конуса описан шар. Найти $S_{\text{шара}}$.

Решение:

$$\text{Из прямоугольного } \triangle AMC, \text{ где } AM = BC + \frac{2R}{\operatorname{tg} 60^\circ} = 5 + 5 = 10;$$

$$CM = 5\sqrt{3} \Rightarrow AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{100 + 75} = 5\sqrt{7}$$

$\triangle ABC$ вписан в большой круг шара

$$p = \frac{AC + AB + BC}{2} = \frac{15 + 5\sqrt{7}}{2}$$

$$S = \sqrt{\left(\frac{15 + 5\sqrt{7}}{2} \right) \left(\frac{15 - 5\sqrt{7}}{2} \right) \left(\frac{5\sqrt{7} - 5}{2} \right) \left(\frac{5\sqrt{7} + 5}{2} \right)} = \\ = \frac{1}{4} \sqrt{(225 - 175)(175 - 25)} = \frac{1}{4} \sqrt{50 \cdot 150} = \frac{50}{4} \sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$S(ABC) = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{7}}{4R} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{10 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{7}}{2 \cdot 25\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

$$S_{\text{шара}} = 4\pi \frac{25 \cdot 7}{3} = \frac{700\pi}{3}.$$

Вариант 4

Дано: цилиндр (осевое сечение — квадрат) вписан в конус, образующая конуса наклонена к основанию под углом 45° , $S_{\text{бок цилиндр}} = 16\pi$.

1) Найти $S_{\text{бок конуса}}$.

Решение:

Пусть радиус цилиндра R , высота $2R$

$$\Rightarrow S_{\text{бок цилиндр}} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2 = 16\pi \Rightarrow R = 2.$$

2. Рассмотрим осевое сечение фигуры ABC :

$$\triangle EKB \text{ — прямоугольный равнобедренный} \Rightarrow KB = EK = 2, ED = 2, EK = 2$$

$$4 \Rightarrow BH = BK + ED = 6 \Rightarrow AH = HC = 6, BA = \sqrt{AH^2 + HB^2} = 6\sqrt{2}.$$

$$S_{\text{бок конуса}} = \pi \cdot AB \cdot AH = 36\pi\sqrt{2}.$$

2) Какова наибольшая площадь сечения конуса, проведенного через вершину конуса?

Решение:

$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} AB^2 \cdot \sin \alpha$, где α — угол между образующими, а $\sin \alpha = 1$ наибольший в осевом сечении

$$\Rightarrow S_{\text{сеч наиб}} = \frac{1}{2} AB^2 = 36.$$

$$3) \text{ Найти } \frac{V_{\text{верх конуса}}}{V_{\text{цилиндра}}}.$$

Решение:

$$V_{\text{верх конуса}} = \frac{\pi}{3} \cdot BK \cdot EK^2 = \frac{8\pi}{3}.$$

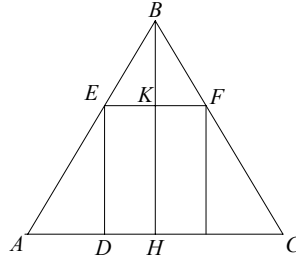
$$V_{\text{цилиндра}} = \pi \cdot EK^2 \cdot ED = 4\pi \cdot 4 = 16\pi.$$

$$\frac{V_{\text{верх конуса}}}{V_{\text{цилиндра}}} = \frac{8\pi}{3 \cdot 16\pi} = \frac{1}{6}.$$

4) В конус вписан шар. Найти $V_{\text{шара}}$.

Решение:

В осевое сечение $\triangle ABC$ вписан большой круг шара \Rightarrow



$$S(ABC) = AC \cdot \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} P \cdot r;$$

$$36 = \frac{1}{2} (6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 12) \cdot r;$$

$$V = \frac{36 \cdot 2}{12(\sqrt{2} + 1)}; V = \frac{6}{\sqrt{2} + 1}.$$

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \frac{36 \cdot 2 \cdot 3}{(\sqrt{2} + 1)^3} = \frac{36 \cdot 8\pi}{(\sqrt{2} + 1)^3} = \frac{288\pi}{(\sqrt{2} + 1)^3}.$$

II—4

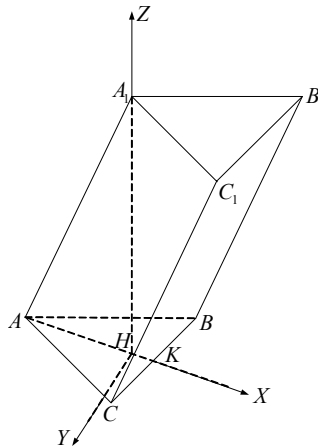
Вариант 1

1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — призма, $A_1A = AB = BC = AC = a$, $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 60^\circ$, AK — медиана $\triangle ABC$.

1) Найти угол между A_1C и AA_1 .

Решение:

Опустим высоту A_1H , H — центр $\triangle ABC$, т.к. $\triangle ACA_1$ и $\triangle AA_1B$ — равно-
сторонние $\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Введем прямоугольную систему координат $Hxyz$, в ней

$$A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right), C\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a}{2}, 0\right), A_1\left(0, 0, \frac{a\sqrt{2}}{3}\right).$$

$$\text{Из прямоугольного } \triangle AHA_1: A_1H = \sqrt{-a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$K\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0, 0\right)$$

$$\overrightarrow{C_1A_1}, \overrightarrow{AK}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right),$$

$$|\overrightarrow{A_1C}| = \sqrt{\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{4} + \frac{4}{9}a^2} = \frac{\sqrt{28}}{6}a = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

$$|\overrightarrow{AK}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$(\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{AK}) = \frac{a^2 \cdot 3}{12} = \frac{a^2}{4} = |\overrightarrow{AK}| \cdot |\overrightarrow{A_1C}| \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{a^2 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot a\sqrt{7} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

2) Доказать, что грань CC_1B_1B — прямоугольник.

$$\overrightarrow{AA_1}\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, 0, a\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CB}(0, -a, 0)$$

$(\cdot) = 0 \Rightarrow CC_1 \perp CB$ и все стороны параллелограмма CC_1B_1B равны \Rightarrow он прямоугольник.

2. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — призма, $A(1, 2, 2)$, $B(-1, -1, 2)$, $C(3, -2, 2)$, $A_1(1, 2, 5)$, $E \in A_1C_1$, $\alpha \perp B_1C$.

Найти угол между AE и α .

Решение:

$$\overrightarrow{AA_1}(0, 0, 3), \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1} \Rightarrow C_1(3, -2, 5).$$

$$\text{Координаты } E\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2-2}{2}, \frac{5+5}{2}\right), E(2, 0, 5), \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1} \Rightarrow$$

$$B_1(-1, -1, 5), \overrightarrow{B_1C}(4, -1, -3), \overrightarrow{AE}(1, -2, 3).$$

Найдем угол между \overrightarrow{AE} и $\overrightarrow{CB_1}$, $\overrightarrow{CB_1}(-4, 1, 3)$.

$$(\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CB_1}) = -4 - 2 + 9 = 3 = |\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{CB_1}| \cdot \cos \alpha$$

$$|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}; |\overrightarrow{CB_1}| = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{26}}; \alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{14} \cdot 26}.$$

Искомый угол равен $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

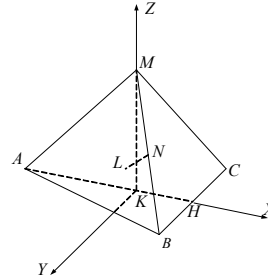
Вариант 2

1. Дано: $MABC$ — тетраэдр, $AB = BC = AC = a$, $MA = 2a$, $\angle MAC = \angle MAB = 45^\circ$.

1) Доказать: $AM \perp CB$.

Доказательство:

Проведем высоту AH в (ABC) , MK — высота пирамиды, $K \in AH$, $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow MK \perp (ABC) \Rightarrow \overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KM} \perp \overrightarrow{BC}$, т.к. $(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}) = ((\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{KM}) \cdot \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{BC}) = 0$.



2) Найти расстояние LN , $L \in AC$, $AL = LC$, $N \in MB$, $MN = NB$.

Решение:

Поместим тетраэдр в полярную систему координат $Hxyz$ как показано на рисунке.

$$\text{В } \triangle AKM \quad AK^2 + KM^2 = AM^2 = 4a^2, \text{ пусть } AK = x \Rightarrow KM = \sqrt{4a^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} \left(x, 0, \sqrt{4a^2 - x^2} \right), |\overrightarrow{AM}| = 2a$$

$$\overrightarrow{AB} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, 0 \right), |\overrightarrow{AB}| = a$$

$$\cos \angle \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \alpha.$$

$$(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}) = \frac{ax\sqrt{3}}{2} = |\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \alpha = 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{2}, AK = x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a, KM = \sqrt{4a^2 - \frac{8}{3}a^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow A \left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a, 0, 0 \right), C \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{2}, 0 \right) \Rightarrow L \left(\frac{a\sqrt{3}}{4} - \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{4}, 0 \right)$$

$$M \left(0, 0, \frac{2a}{\sqrt{3}} \right), B \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{a}{2}, 0 \right) \Rightarrow N \left(\frac{a\sqrt{3}}{4} - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{a}{4}, \frac{a}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\text{Значит, } \overrightarrow{LN} \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{a}{2}, \frac{a}{\sqrt{3}} \right)$$

$$|\overrightarrow{LN}| = a \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = a \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

2. Дано: $M(-1, 2, 5)$, $A(1, -1, 2)$, $B(-2, 1, 2)$, $C(-1, 3, 2)$, $D(3, 1, 2)$, $MABCD$ — пирамида.

Найти $V(MABCD)$.

Решение:

Уравнение плоскости (ABC) : $Px + Qy + Rz + S = 0$.

$$\begin{cases} A: P - Q + 2R + S = 0 \\ B: -2P + Q + 2R + S = 0 \\ C: -P + 3Q + 2R + S = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3P - 2Q = 0 \\ -2P + \frac{3}{2}P + 2R + S = 0 \\ -P + \frac{9}{2}P + 2R + S = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q = \frac{3P}{2} \\ -\frac{P}{2} + 2R + S = 0 \\ \frac{7}{2}P + 2R + S = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \\ R = -\frac{S}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{уравнение } ABCD: z = 2$$

MH — высота пирамиды, $MH = 3$

$$\overrightarrow{AC}(-2, 4, 0), \frac{16\sqrt{6}}{3}(-5, 0, 0)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}, |\overrightarrow{DB}| = 5$$

$$(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}) = 40 = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{DB}| \cdot \cos \varphi, \text{ где } \varphi \text{ — угол между } AC \text{ и } DB.$$

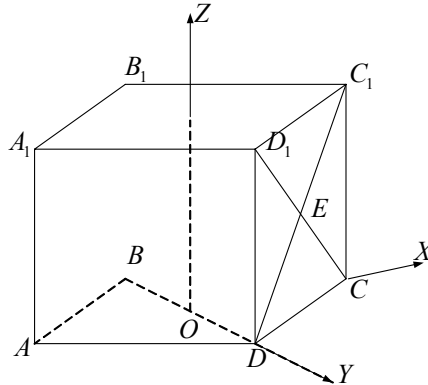
$$\cos \varphi = \frac{10}{10\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 10$$

$$\Rightarrow V(MABCD) = \frac{1}{3} MH \cdot S(ABCD) = \frac{3}{3} \cdot 10 = 10.$$

Вариант 3

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, $ABCD$ — ромб, $AB = a$, $\angle BAD = 60^\circ$, $AA_1 = a$, $E \in D_1 C$, $D_1 E = EC$.



1) Найти угол между AE и BD .

Решение:

Поместим параллелепипед в полярную систему координат $Oxyz$. В ней

$$\begin{aligned} A\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right), D_1\left(0, \frac{a}{2}, a\right), C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right) \Rightarrow \\ E\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right), B\left(0, -\frac{a}{2}, 0\right), D\left(0, \frac{a}{2}, 0\right) \\ \overrightarrow{AE}\left(\frac{3a\sqrt{3}}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right), \overrightarrow{BD}(0, a, 0) \\ |\overrightarrow{AE}| = \sqrt{\frac{27a^2}{16} + \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{4}} = \frac{4\sqrt{2}a}{4} = a\sqrt{2}; |\overrightarrow{BD}| = a \\ (\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}) = \frac{a^2}{4} = |\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} \\ \cos \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{a^2}{4a^2\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8} \\ (\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}) = \arccos \frac{\sqrt{2}}{8}. \end{aligned}$$

2) Доказать: $A_1C \perp BD$.

Доказательство:

$$\begin{aligned} A_1\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, a\right), A_1C(a\sqrt{3}, 0, -a) \\ (\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BD}) = 0 \Rightarrow A_1C \perp BD. \end{aligned}$$

2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, $F \in DC$, $DF = FC$, $E \in B_1 C_1$, $B_1 E = EC_1$.

Найти угол между EF и плоскостью $(A_1 BD)$.

Решение:

Поместим куб в полярную систему координат $Axyz$.

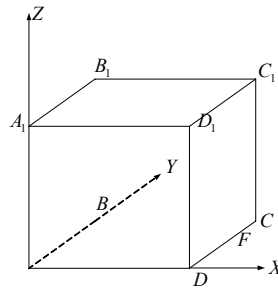
$$\begin{aligned} A_1(0, 0, a), B(0, a, 0), D(a, 0, 0), C(a, a, 0), \\ F\left(a, \frac{a}{2}, 0\right), E\left(\frac{a}{2}, a, a\right). \end{aligned}$$

Уравнение $(A_1 BD)$: $x + y + z - a = 0$.

$\vec{n}(1, 1, 1) \perp (A_1 BD)$

$$\overrightarrow{FE}\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a\right), |\vec{n}| = \sqrt{3}; \overrightarrow{FE} = a\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$(\vec{n} \cdot \overrightarrow{FE}) = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + a = a = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{FE}| \cdot \cos \alpha$$



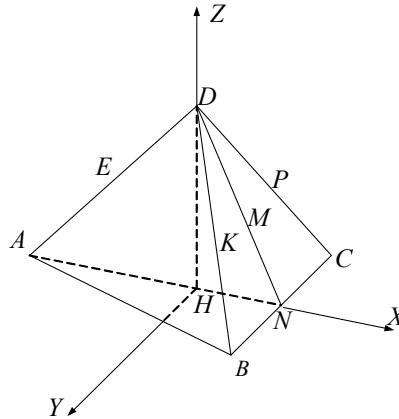
$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{3} \cdot a \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}; \alpha — \text{угол между } FE \text{ и перпендикуляром } \vec{n} \text{ к } A_1BD \Rightarrow$$

$$\text{угол между } FE \text{ и } (A_1BD) = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Вариант 4

1. Дано: $DABC$ — правильный тетраэдр, $AB = DA = a$, M — точка пресечения медиан $\triangle BDC$, $E \in AD$, $AE = ED$.



1) Найти EM .

Решение:

Опустим высоту DH и поместим тетраэдр в полярную систему координат $Hxyz$. $\triangle ACB = \triangle DBC$ (по трем сторонам) $\Rightarrow AK = DK$, но H — и точка

пересечения медиан $\triangle ABC \Rightarrow AH = DM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\triangle AEH = \triangle DEM$ по двум сторонам и углу между ними $\Rightarrow EM = EH$.

$$A \left(-\frac{a\sqrt{3}}{3}, 0, 0 \right)$$

$$DH^2 = AD^2 - AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

$$D \left(0, 0, a\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \Rightarrow E \left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0, \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$

$$\overrightarrow{HE} \left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0, \frac{a}{\sqrt{6}} \right)$$

$$|\overrightarrow{HE}| = \sqrt{\frac{a^2 \cdot 3}{36} + \frac{a^2}{6}} = \frac{a}{2} = EM.$$

2) $P \in DC, DP = PC, K \in DB, DK = KB$.

Доказать: $\overrightarrow{PK} \perp \overrightarrow{AD}$.

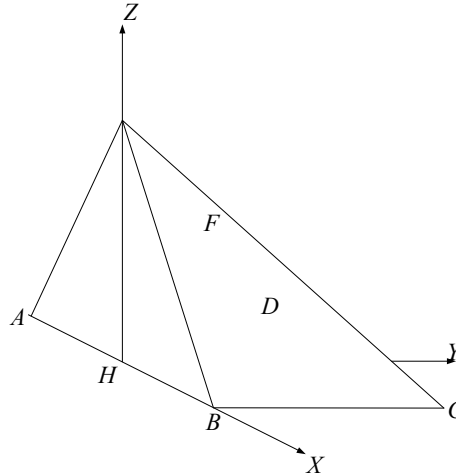
Доказательство:

$$\overrightarrow{PK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} = \left(0, \frac{a}{2}, 0 \right)$$

$$\overrightarrow{AD} \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, 0, a\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \Rightarrow (\overrightarrow{PK} \cdot \overrightarrow{AD}) = 0 \Rightarrow PK \perp AD.$$

2. Дано: $MABCD$ — пирамида, $ABCD$ — прямоугольник, $AD = 1, AB = 2$.
 $(MAB) \perp (ABCD), MH \perp AB, H \in AB, MH = 1$.

Найти угол между AE и DE ; $E \in MC, ME = EC, F \in MD, MF = FD$.



Решение:

Поместим пирамиду в полярную систему координат $Hxyz$. В ней $M(0, 0, 1)$, $A(0, -1, 0)$, $D(1, -1, 0) \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $C(1, 1, 0) \Rightarrow E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

$$\overrightarrow{AF} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \overrightarrow{DE} \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$|\overrightarrow{AF}| = \frac{\sqrt{3}}{2}, |\overrightarrow{DE}| = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$(\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DE}) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = |\overrightarrow{AF}| \cdot |\overrightarrow{DE}| \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{3 \cdot 4}{4 \cdot \sqrt{33}} = \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{33}}; \alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{33}}.$$

Математические диктанты

МД—1

Вариант 1

1. Дано: $M(1; 3; 2)$, M_1 — проекция M на плоскость Oxz , M_2 — проекция M на ось Oz .

Решение:

$$M_1(1; 0; 2)$$

$$M_2(0; 0; 2)$$

2. Дано: $E(-1; 2; 3)$, $F(1; -1; 4)$.

Разложить \overrightarrow{EF} по векторам \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} .

Решение:

$$\overrightarrow{EF} \{1 - (-1); -1 - 2; 4 - 3\}; \overrightarrow{EF} (2; -3; 1) \Rightarrow \overrightarrow{EF} = 2 \cdot \vec{i} - 3 \vec{j} + \vec{k}.$$

3. Найти угол между \vec{j} и $m = 2\vec{i} - 3\vec{k}$.

Решение:

$$(\vec{j} \cdot \vec{m}) = (\vec{j} \cdot (2\vec{i} - 3\vec{k})) = 2(\vec{j} \cdot \vec{i}) - 3(\vec{j} \cdot \vec{k}) = |\vec{j}| \cdot |\vec{m}| \cdot \cos(\hat{\vec{j}\vec{m}}) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

4. Дано: параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, вершины: $A(1; 2; -4)$, $C_1(3; 0; 2)$.

Найти точку пересечения диагоналей.

Решение:

$$\text{Середина } AC_1 \text{ т. } H \left(\frac{1+3}{2}; \frac{2+0}{2}; \frac{-4+2}{2} \right); H(2; 1; -1).$$

5. Дано: $\overrightarrow{AB} \{-2; 4; 3\}$ и $\overrightarrow{AC} \{4; -8; -6\}$.

Лежат ли точки A , B , C на одной прямой.

Ответ: лежат, т.к. есть такое $k = -2$, что $k \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, а значит, векторы коллинеарны.

6. Дано: $\vec{m} \{1; 2; 2\}$.

Найти координаты единичного вектора \vec{e} , сонаправленного с \vec{m} .

Решение:

$$|\vec{m}| = \sqrt{1+4+4} = 3 \Rightarrow \text{вектор } \vec{e} \uparrow \vec{m} \text{ будет иметь координаты}$$

$$\vec{e} \left\{ \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right\}.$$

7. Дано: $|\vec{a}| = 2$, угол между положительным направлением Ox и \vec{a} равен 135° . Найти абсциссу \vec{a} .

Решение:

Пусть $\vec{a} \{x_0, y, z\}$, т.к. $\vec{i} \{1; 0; 0\}$, то $(\vec{a} \cdot \vec{i}) = x_0$.

$$(\vec{a} \cdot \vec{i}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 135^\circ = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} = x_0.$$

Ответ: $x_0 = -\sqrt{2}$.

8. Дано: $DABC$ — правильный тетраэдр.

Упростить: $(\vec{AB} + \vec{BC})(\vec{AB} - \vec{BC}) + \vec{AD}(\vec{AC} - \vec{AB})$.

Решение:

$$\begin{aligned} (\vec{AB} + \vec{BC})(\vec{AB} - \vec{BC}) + \vec{AD}(\vec{AC} - \vec{AB}) &= (|\vec{AB}|^2 - |\vec{BC}|^2) + \vec{AD} \cdot \vec{AC} - \vec{AD} \cdot \vec{AB} = \\ &= \vec{AD} \cdot \vec{AC} - \vec{AD} \cdot \vec{AB} = \vec{AD}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0 \\ &= -\vec{AC}^2 - \vec{AD}^2 = -\vec{AB}^2. \end{aligned}$$

9. Дано: $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \vec{b} = 120^\circ$.

Найти $(\vec{a} + \vec{b}) \vec{a}$.

Решение:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 = 0.$$

10. Дано: $\triangle ABC$: $A(0; 0; 0)$, $B(1; 2; 1)$, $C(1; -1; 1)$.

Найти координаты центра описанной окружности.

Решение:

Длина $AB = \sqrt{6}$, длина $AC = \sqrt{3}$, длина $BC = 3 \Rightarrow \triangle ABC$ — прямоугольный, т.к. $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow$ центр описанной окружности лежит на середине BC , т.е. в точке $O\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$.

Вариант 2

1. Дано: $E(2; -1; 3)$.

Найти: E_1 — проекцию E на плоскость Oyz ; E_2 — проекцию E на ось Oy .

Решение:

$E_1(0; -1; 3)$; $E_2(0; -1; 0)$.

2. Дано: $K(2; -1; 3)$, $M(1; -2; 1)$.

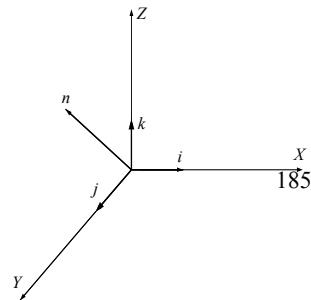
Разложить \vec{KM} по векторам \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} .

Решение:

$$\begin{aligned} \vec{KM} \{1 - 2; -2 - (-1); 1 - 3\}; \vec{KM} \{-1; - \\ 1; -2\}; \vec{KM} = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}. \end{aligned}$$

3. Найти угол между \vec{j} и $\vec{n} = -2\vec{j} + \vec{k}$.

Решение:



$$\begin{aligned}\vec{j} \cdot \vec{n} &= (\vec{j} \cdot (-2\vec{j} + \vec{k})) = -2|\vec{j}| + \vec{k} \cdot \vec{j} = -2|\vec{j}| = -2 \\ \vec{j} \cdot \vec{n} &= |\vec{j}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\alpha = 1 \cdot \sqrt{0^2 + 4 + 1} \cdot \cos\alpha = \sqrt{5} \cos\alpha; \vec{n} \{0; -2; 1\} \\ \Rightarrow \sqrt{5} \cos\alpha &= -2, \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \alpha = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right).\end{aligned}$$

4. Дано: параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $B_1(-1; 3; 2)$, точка пересечения диагоналей $M(2; -1; 1)$.

Найти координаты D .

Решение:

Т.к. M точка пересечения диагоналей, то она лежит на середине $B_1 D$.

Пусть $D(x; y; z)$, тогда

$$\begin{cases} \frac{-1+x}{2} = 2 \\ \frac{3+y}{2} = -1 \\ \frac{z+2}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -5 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow D(5; -5; 0).$$

5. Дано: $\overrightarrow{EF} \{1; -2; 3\}$, $\overrightarrow{EK} \{-2; 4; 6\}$.

Лежат ли точки E , F и K на одной прямой.

Ответ: нет, не лежат, т.к. нет такого k , что $\overrightarrow{EF} = k \overrightarrow{EK}$, а значит, векторы не коллинеарны и точки не лежат на одной прямой.

6. Дано: $\vec{p} \{-2; -2; 1\}$.

Найти координаты \vec{e} , противоположно направленного \vec{p} .

Решение:

$$|\vec{p}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3 \Rightarrow \text{координаты } \vec{e} \uparrow \vec{p} \text{ будут } \vec{e} \left\{ \frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right\}.$$

7. Дано: \vec{a} составляет с положительным направлением оси Oy угол 135° .

Найти ординату вектора \vec{a} , если $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$.

Решение:

Пусть $\vec{a} \{x; y_0; z\}$. Т.к. $\vec{j} \{0; 1; 0\}$, то $(\vec{a} \cdot \vec{j}) = y_0$.

$$(\vec{a} \cdot \vec{j}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 135^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{6} = y_0.$$

8. Дано: правильная пирамида $HPMKE$.

Упростить: $(\overrightarrow{PH} - \overrightarrow{MK})(\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{MK}) + \overrightarrow{HK}(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KE})$.

Решение:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{PH} - \overrightarrow{MK})(\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{MK}) + \overrightarrow{HK}(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KE}) &= \\ = 0 + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{ME} &= |\overrightarrow{PH}|^2 + |\overrightarrow{MK}|^2 + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{ME} = 0.\end{aligned}$$

9. Дано: $|\vec{m}| = 2, |\vec{n}| = \sqrt{2}, \hat{m}\vec{n} = 135^\circ$.

Найти: $(\vec{m} - \vec{n}) \cdot \vec{n}$.

Решение:

$$(\vec{m} - \vec{n}) \cdot \vec{n} = \vec{m} \cdot \vec{n} - (\vec{n})^2 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2 = -4.$$

10. Дано: $\triangle MFP, M(0; 0; 0), F(2; -1; 3), P(-1; 1; 1)$.

Найти d описанной окружности.

Решение:

Длина $MF = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$, длина $MP = \sqrt{3}$, длина $PF = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$. Итак, $\triangle MFP$ — прямоугольный, т.к. $PF^2 = MF^2 + MP^2 \Rightarrow$ длина диаметра описанной окружности равна длине $PF = \sqrt{17}$.

МД—2

Вариант 1

1. Дано: цилиндр, сечение отстоит от осевого сечения на 3; высота 10; $R = 5$.

Найти: $S_{\text{сеч}}$.

Решение:

Рассмотрим сечение, перпендикулярное осевому.

$ABCD$ — трапеция, вписанная в окружность. Обозначим меньшее основание за x ,

тогда $HB = \frac{10-x}{2}$ (т.к. большее основание —

диаметр, а трапеция равнобокая).

$$\frac{1}{2}x = OH = \sqrt{OC^2 - HC^2} = 4$$

$$\Rightarrow S_{\text{сеч}} = x \cdot h = 4 \cdot 2 \cdot 10 = 80$$

Ответ: 80.

2. Дано: призма, стороны 6, 8 и 10, высота 4.

Найти: $S_{\text{бок пов цил}}$.

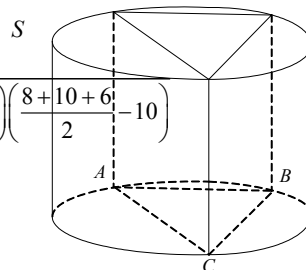
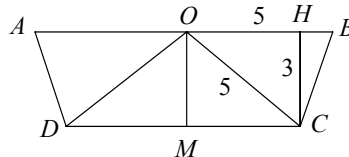
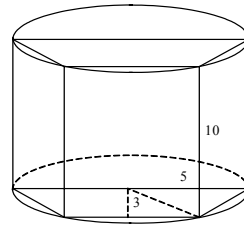
Решение:

$$1) S_{\text{бок}} = 2\pi R \cdot h = 8\pi R$$

$$2)$$

$$= \sqrt{\frac{8+10+6}{2} \left(\frac{8+10+6}{2} - 8 \right) \left(\frac{8+10+6}{2} - 6 \right) \left(\frac{8+10+6}{2} - 10 \right)}$$

$$= \sqrt{12 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2} = 24$$



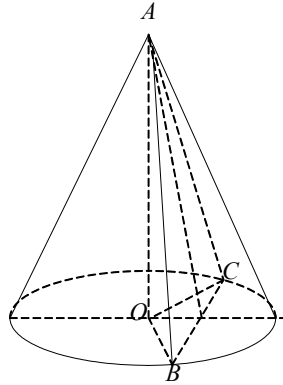
$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 10}{4 \cdot 24} = 5$$

$$S_{\text{бок}} = 40\pi.$$

Ответ: 40π .

3. Дано: конус, ABC — сечение, $BC = a$, $\angle COB = 90^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$.

Найти: $S_{\text{бок пов}}$.



Решение:

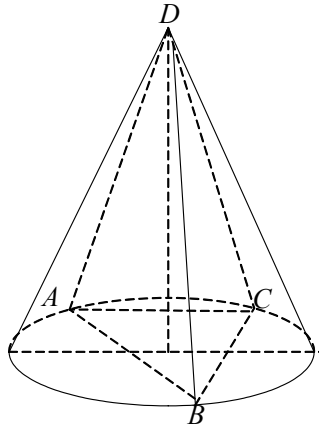
$$1) S_{\text{бок}} = \pi Rl$$

$$2) \text{ Из } \triangle COB: OC = OB = R = \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ Из } \triangle CAB BC = AC = AB = a$$

$$\Rightarrow S_{\text{бок}} = \pi \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a = \pi \frac{a^2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}.$$

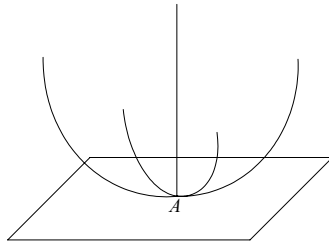
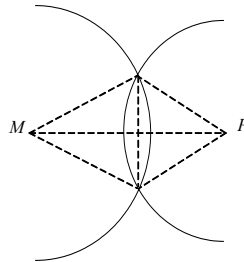
4. Дано: $\angle DAO = \angle DCO = \angle DBO = 60^\circ$, $AC = 10$, $\angle ABC = 30^\circ$.

Найти: $S_{\text{бок конуса}}$.

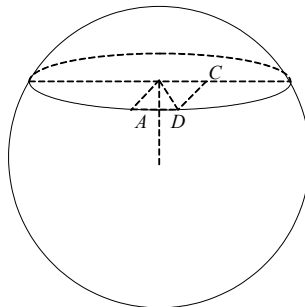


Решение:

- 1) $S_{\text{бок конуса}} = \pi Rl$
- 2) Т.к. углы при основании равны, то вершина проецируется в центр описанной окружности (из равенства $\triangle ADO = \triangle COD = \triangle BDO$).
- 3) По теореме синусов $\frac{10}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow R = 10$.
- 4) Из $\triangle AOD$, в котором $\angle DAO = 60^\circ$, $AO = R = 10$ $AD \cdot \cos 60^\circ = AO$
 $\Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{10}{AD} \Rightarrow AD = 20$.
- 5) $S_{\text{бок конуса}} = \pi \cdot R \cdot l = \pi \cdot 10 \cdot 20 = 200\pi$.
 Ответ: 200π .
5. Это будет окружность, по которой пересекаются сферы: одна с центром в т. M и с радиусом a , а вторая с центром в т. P и с радиусом b .
6. Все центры будут лежать на перпендикуляре, восстановленном из этой точки.



7. Дано: координаты $A(3; 4; 12) \in$ сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, $A \in \alpha \perp OZ$
 Найти: $R_{\text{сеч}}$.



Решение:

Уравнение плоскости $\alpha : z = k$. Т.к. $A \in \alpha$, то $12 = k$.

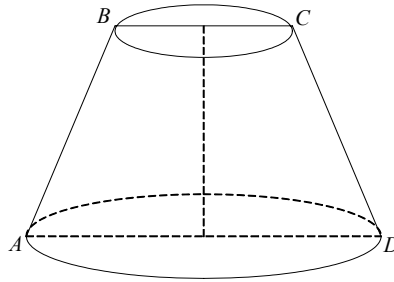
Т.е. плоскость α удалена от центра сферы на расстояние $k = 12$. А значит радиус сечения будет

$$r = \sqrt{R^2 - k^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$$

$$S_{\text{сеч}} = 25\pi = \pi r^2.$$

Ответ: 25π .

8. Дано: $BC = 2, AD = 4$.



Найти: $S_{\text{бок}}$.

Решение:

1) Построим осевое сечение $ABCD$.

2) Т.к. $ABCD$ — трапеция, в которую вписан круг, то $BC + AD = AB + CD$,

но $AB = CD \Rightarrow 4 + 2 = 2AB$

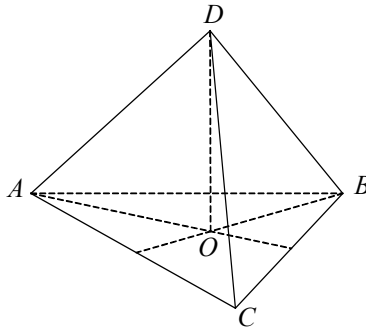
3) $S_{\text{бок ус кон}} = \pi(R + r)l = \pi \cdot 6 \cdot 3 = 18\pi$.

Ответ: 18π .

9. Дано: $AC = AB = BC = 3, \angle DCO = \angle DAO = \angle DBO = 45^\circ$.

$\triangle ABC$ — правильная

Около $\triangle ABC$ описанная сфера



Найти: $S_{\text{сферы}}$.

Решение:

1) Рассмотрим $\triangle ABC$:

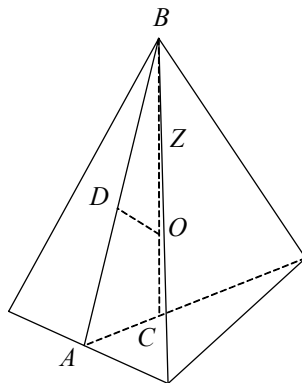
т.к. он равносторонний, то $r = \sqrt{3}$ — радиус описанной окружности.

2) Рассмотрим $\triangle DOC$:

Он прямоугольный и равнобедренный $\Rightarrow OD = \sqrt{3} \Rightarrow$ т. O — центр сферы.

3) $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4 \cdot 3 \cdot \pi = 12\pi$.

10. Дано: пирамида, центр шара делит высоту в отношении $2 : 1$, считая от вершины.



Найти угол наклона боковых граней.

Решение:

1) Рассмотрим сечения:

Т.к. т. O делит BC в отношении $2 : 1$, то $OC = OZ = ZB$.

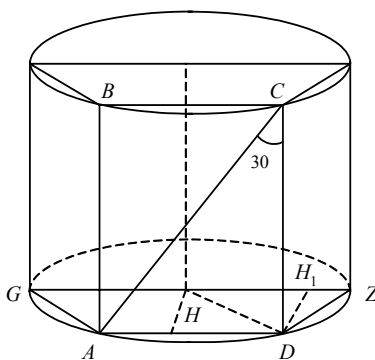
2) Рассмотрим $\triangle DBO$:

$DO = R, BO = 2R \Rightarrow \angle DBO = 30^\circ \Rightarrow \angle BAC = 60^\circ$.

Вариант 2

1. Дано: $AC = 16, \angle CAD = 60^\circ$ радиус основания равен 5.

Найти: расстояние от оси до плоскости.



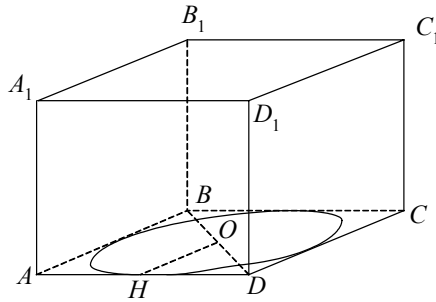
Решение:

1) Рассмотрим $\triangle ACD$: $\angle ACD = 30^\circ, AC = 16 \Rightarrow AD = 8$.

2) Искомое расстояние равно $\sqrt{-\frac{AD^2}{4} + R^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$.

2. Дано: $ABCD$ — ромб, сторона 4, $\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$, высота $AA_1 = 5$.

Найти: $S_{\text{вписан цилиндра}}$.



Решение:

1) Рассмотрим $\triangle AOD$: $\angle OAD = 30^\circ$, $AD = 4 \Rightarrow OD = 2 \Rightarrow AO = \vec{e}$.

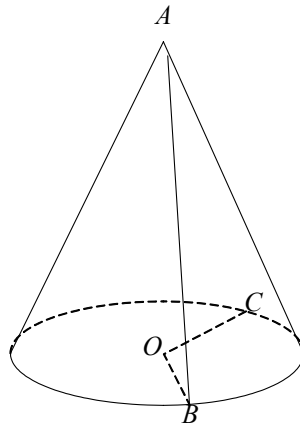
2) Рассмотрим $\triangle AOH$: $AO = \sqrt{12}$, $\angle AOH = 30^\circ$

$$\Rightarrow HO = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3} = R.$$

3) $S_{\text{цил бок пов}} = 2\pi R \cdot h = 2\pi \sqrt{3} \cdot 5 = 10\pi\sqrt{3} \pi$.

3. Дано: $\angle COB = 60^\circ$, $\angle CAB = 90^\circ$, $CB = m$.

Найти: $S_{\text{бок пов}}$.



Решение:

1) $\triangle OCB$ равнобедренный ($OC = OB = R$, $\angle COB = 60^\circ$)

$\Rightarrow OC = CB = OB = m$.

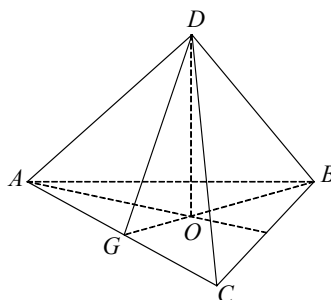
2) Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle CAB = 90^\circ$, $AB = AC$ как образующие.

$$m^2 = AB^2 + AC^2, \text{ но } AB = AC; m^2 = 2AB^2; AB = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}m}{2}.$$

$$3) S_{\text{бок пов}} = \pi R l = \pi \cdot m \cdot \frac{\sqrt{2}m}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} m^2 \pi.$$

4. Дано: $DO = 1$, $AB = BC = AC = 6$.

Найти: $S_{\text{конуса}}$.



Решение:

- 1) Рассмотрим $\triangle ABC$. Он правильный. $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$.
- 2) Рассмотрим $\triangle DGO$: $OG = r = \sqrt{3}$, $DO = 1 \Rightarrow$ по теореме Пифагора $DG = 2$.
- 3) $S_{\text{конуса}} = \pi r l = \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \pi$.
5. Это будет сфера с диаметром, равным этому отрезку.
6. Центры будут лежать на одной из 2 плоскостей, параллельных данной и лежащих от нее на расстоянии, равном радиусу.
7. Дано: координаты $B(3; 4; 12)$, сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, $B \in \alpha$, $\alpha \perp Ox$
Найти: $R_{\text{сеч}}$.

Решение:

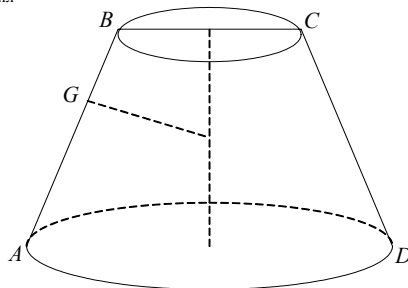
Уравнение $\alpha: x = K$, $B \in \alpha \Rightarrow K = 3$

Значит плоскость удалена от центра сферы на $K = 3$

Радиус сечения равен $V = \sqrt{R^2 - K^2} = \sqrt{169 - 9} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$.

8. Дано: $AB = CD = 6$, в конус вписан шар.

Найти: $S_{\text{бок пов цил}}$.



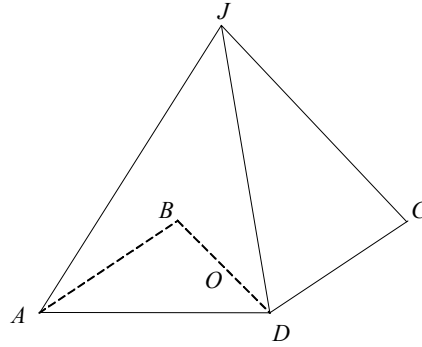
Решение:

- 1) $S_{\text{бок пов}} = \pi(R + r)l$.
- 2) Рассмотрим трапецию $ABCD$: т.к. в сечении в нее вписана окружность, то $AB + CD = BC + AD$, но $BC = r$, $AD = R$; $AB = CD = 6$, $12 = R + r$

$$\Rightarrow S_{\text{бок пов}} = \pi \cdot 12 \cdot 6 = 72\pi.$$

9. Дано: $\angle JAC = \angle JBD = \angle JCA = \angle JDB = 45^\circ$, $S_{\text{опис сферы}} = 64\pi$.

Найти: сторону основания пирамиды.



Решение:

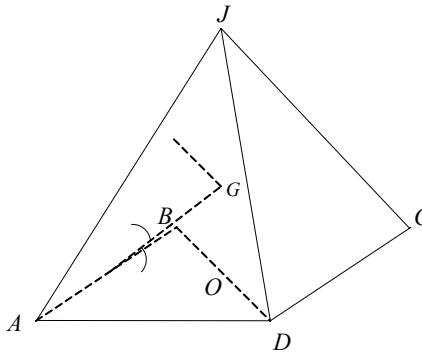
Рассмотрим $\triangle AJC$: $AJ = JC$, $\angle JAC = \angle JCA = 45^\circ \Rightarrow \angle AJC = 90^\circ$

\Rightarrow т. O — центр описанной окружности, а значит, и сферы.

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2; 64\pi = 4\pi R^2; R^2 = 16, R = 4 \Rightarrow d = AC = 8 = \sqrt{2}a \Rightarrow a = 4\sqrt{2}.$$

10. Дано: $\angle BAC = 45^\circ$.

Найти: $\frac{BO}{OG}$.



Решение:

1. Рассмотрим сечение: $\frac{1}{2}P \cdot r = S$. Пусть радиус сферы равен V , сторо-

на основания a , тогда высота пирамиды $h = \frac{a}{2}$.

$$S = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}; P = a + 2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = a(1 + \sqrt{2})$$

$$V = \frac{2S}{P} = \frac{a^2}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$$

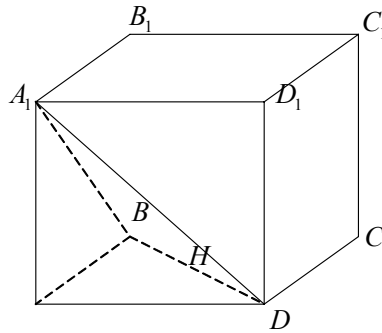
$$h-r = \frac{a}{2} - \frac{a(2-\sqrt{2}) \cdot 2}{2a(\sqrt{2}-1)} = \frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{1} = 2-2+2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

МД—3

Вариант 1

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — правильная призма, $ABCD$ — квадрат, $\angle C_1 A_1 H = 45^\circ$, $BD = d$.

Найти: $V_{\text{призмы}}$.



Решение:

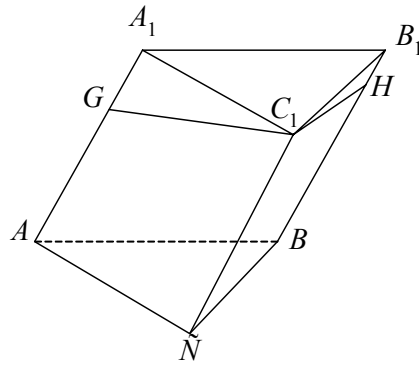
1) Рассмотрим $\triangle A_1 A H$ в нем: $\angle A_1 H A = 45^\circ$ (как накрест лежащий при параллельных плоскостях); $\angle A_1 A H = 90^\circ \Rightarrow \angle A A_1 H = 45^\circ \Rightarrow A H = A A_1$.

$$2) A H = \frac{1}{2} d.$$

$$3) V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{2} d^2 \cdot \frac{1}{2} d = \frac{1}{4} d^3.$$

2. Дано: $S_{A A_1 C_1 C} = 30$, $S_{C C_1 B_1 B} = 40$, $\angle G C_1 H = 90^\circ$.

Найти: V .



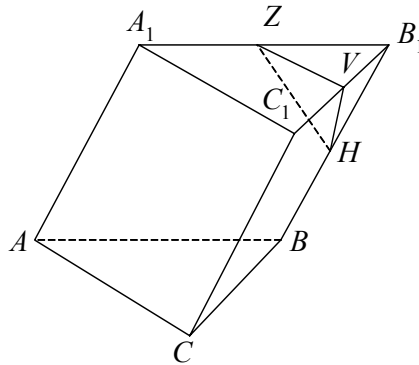
Решение:

1) Рассмотрим сечение GC_1H , в нем: $GC_1 = 3$ (т.к. $S_{AA_1C_1C} = 30$, а ребро 10), $C_1H = 4$ (аналогично рассуждая) $\Rightarrow GH = 5$ (т.к. $\angle GC_1H = 90^\circ$) $\Rightarrow S_{GC_1H} = 6 \Rightarrow V = 6 \cdot 10 = 60$.

Ответ: 60.

3. Дано: V — объем призмы $ABCA_1B_1C_1$, H — середина BB_1 , Z — середина A_1B_1 , V — середина C_1B_1 .

Найти: V_{ZB_1VH} .



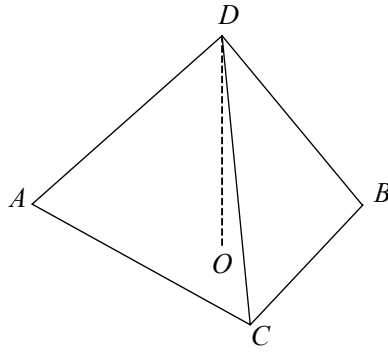
Решение:

$$S_{ZB_1V} = \frac{1}{4} S_{A_1C_1B_1}; \quad h_{ZB_1VH} = \frac{1}{2} h_{\text{призмы}} \Rightarrow V_{ZB_1VH} = \frac{1}{8} V_{\text{призмы}}.$$

Ответ: $\frac{1}{8} V$.

4. Дано: $ABCD$ — пирамида, $AC = 3$, $CB = 4$, боковые грани наклонены к основанию по углу $= 45^\circ$.

Найти: V .



Решение:

1) Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle C$ — прямой, $AC = 3$, $CB = 4 \Rightarrow AB = 5$.

2) $\frac{1}{2} Pr = S$; $r = 2 \frac{S}{P} = 2 \cdot \frac{6}{12} = 1$.

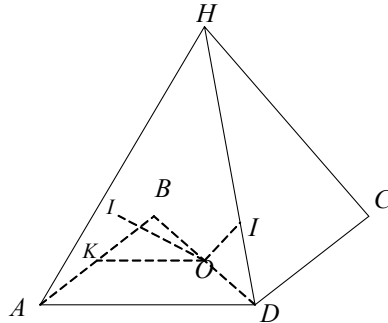
O — центр вписанной окружности.

Высота пирамиды $h = r = 1 \Rightarrow V = \frac{1}{3} S(ABC) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 1 = 2$.

Ответ: 2.

5. Дано: $ABCD$ — квадрат, $4S_{\triangle AHD} = S$, $OI = d$.

Найти: V .

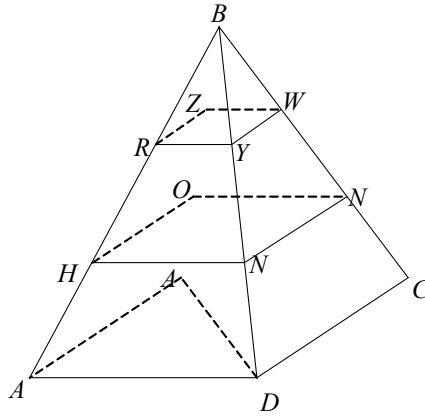


Решение:

Разбив пирамиду на несколько, получим $V = S \cdot d \frac{1}{3} = \frac{Sd}{3}$.

6. Дано: $V_{\text{пир}} = V$, $BR = RH = HA$.

Найти: $V_{HONMYRZW}$.



Решение:

$V = h \cdot S_{ADCE}$. Пусть $S_{ADCE} = S$.

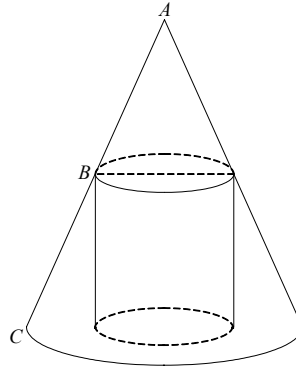
$$S_{RZY} = \frac{1}{9} S, S_{HONM} = \frac{4}{9} S, h_{HONMYRZW} = \frac{1}{3} h$$

$$\Rightarrow V_{\text{ус пир}} = \frac{h}{9} \left(\frac{1}{9} S + \frac{4}{9} S + \sqrt{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} S^2} \right) = \frac{h}{9} \left(\frac{5}{9} + \frac{2}{9} S \right) = \frac{7}{81} h S = \frac{7}{27}.$$

Ответ: $\frac{7}{27}$.

7. Дано: $V_{\text{конуса}} = 40$, $AB = BC$.

Найти: $V_{\text{цил}}$.



Решение:

$$1) V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = 40.$$

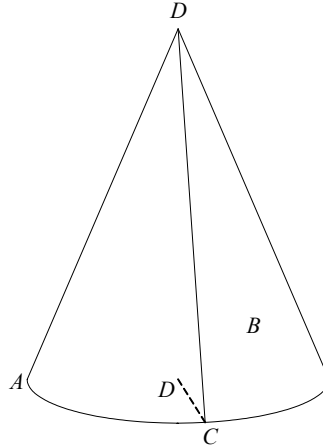
$$2) S_{\text{верх}} = S_{\text{осн}} \cdot \frac{1}{4}, h_{\text{цил}} = \frac{1}{2} h$$

$$\Rightarrow V_{\text{цил}} = \frac{1}{4} S_{\text{осн}} \cdot \frac{1}{2} h = \frac{1}{8} V_{\text{конуса}} = \frac{40}{8} = 5.$$

Ответ: 5.

8. Дано: пирамида, $\angle DAO = \angle DBO = \angle DCO = 45^\circ$, $AB = 10$, $\angle ACB = 30^\circ$.

Найти: $V_{\text{конуса}}$.



Решение:

1) Т.к. ребра равнонаклонены, то точка пересечения — центр описанной окружности.

2) По теореме синусов в $\triangle ABC$ $\frac{AB}{\sin \angle BCA} = 2R$, $R = \frac{10}{2 \sin 30^\circ} = 10$.

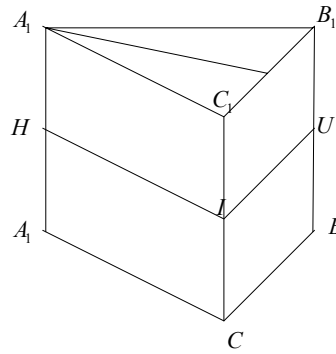


3) Рассмотрим $\triangle ADO$: он равнобедренный, т.к. $\angle DOA = 90^\circ$, а $\angle DAO = 45^\circ \Rightarrow AO = OD = 10$.

$$4) V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 1000 = \frac{1000\pi}{3}.$$

9. Дано: в правильную призму вписан шар, сторона $2\sqrt{3}$.

Найти: $V_{\text{шара}}$.



Решение:

1) Рассмотрим сечение HUI :

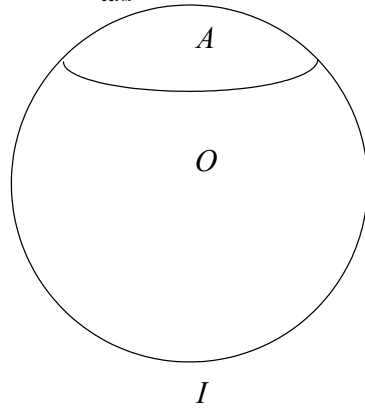
радиус вписанной окружности: $r = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1$.

$$2) V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \cdot \pi r^2 = \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot \pi = \frac{4}{3} \pi.$$

Ответ: $\frac{4}{3} \pi$.

10. Дано: $RA = 3$, $AI = 9$.

Найти: $V_{\text{сегм}}$.



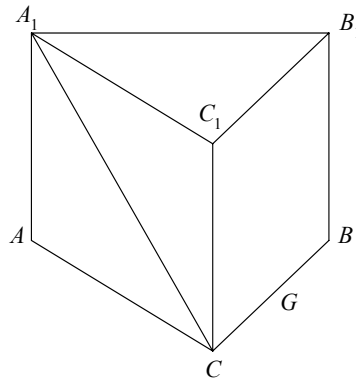
Решение:

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right) = \pi \cdot 9 \left(6 - \frac{3}{3} \right) = 45\pi.$$

Вариант 2

1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, сторона a , $\angle A_1GA = 45^\circ$.

Найти: V .



Решение:

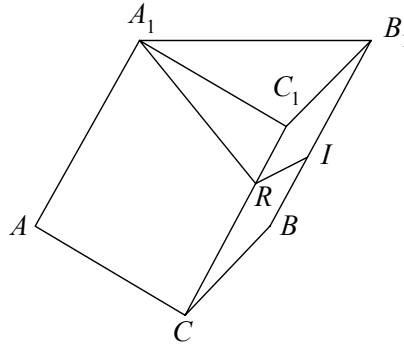
1) Рассмотрим $\triangle A_1AG$: он прямоугольный и равнобедренный ($\angle A_1GA = 45^\circ$) $\Rightarrow A_1A = AG$.

2) Рассмотрим $\triangle ABC$: он правильный $\Rightarrow AG = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

$$3) V = S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{3a^3}{8}.$$

2. Дано: призма, $S_{AA_1C_1C} = 20$, $S_{CC_1B_1B} = 30$, боковые ребра 5.

Найти: V .



Решение:

$$1) S_{AA_1C_1C} = A_1R \cdot AA_1 = 20, AR = 4.$$

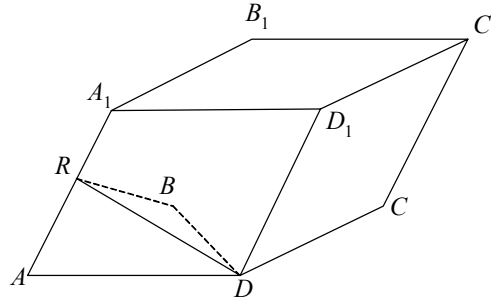
$$2) S_{CC_1B_1B} = RI \cdot CC_1 = 30, RI = 6.$$

$$\triangle ARI \text{ — прямоугольный} \Rightarrow S_{ARI} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12; V = 12 \cdot 5 = 60.$$

Ответ: $V = 60$.

3. Дано: наклонный параллелепипед, $AR = RA_1$, объем параллелепипеда — V .

Найти: V_{ARBD} .



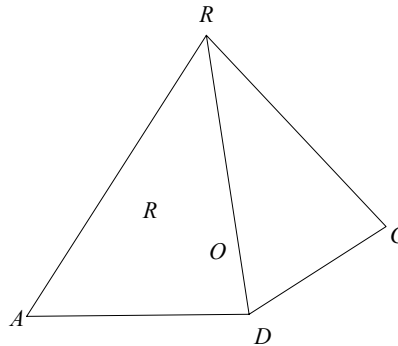
Решение:

$$V_{\text{парал}} = h \cdot S_{\text{осн}}; V_{ARBD} = \frac{1}{2} h \cdot \frac{1}{2} S_{\text{осн}} = \frac{1}{4} V.$$

Ответ: $\frac{1}{4} V$.

4. Дано: $ABCD$ — ромб, сторона a , $\angle BAD = 30^\circ$, боковые грани наклонены к основанию под углом $= 60^\circ$.

Найти: V .



Решение:

1. Рассмотрим $\triangle ABD$: по теореме косинусов $BD^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$; BD

$$= a\sqrt{2-\sqrt{3}}; OD = \frac{a\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{a\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2};$$

$$S(ABO) = \frac{1}{2} S(ABD) = \frac{a^2}{4} \cdot \sin 30^\circ = \frac{a^2}{8} =$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot HO = \frac{a}{2} \quad HO \Rightarrow HO = \frac{a}{4}$$

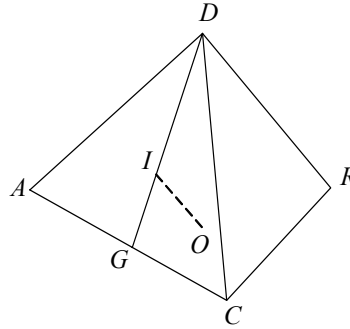
$$\Rightarrow \text{Из } \triangle ROH \quad OR = OH + g60^\circ = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} S(ABCD) \cdot RO = \frac{2}{3} S(ABD) \cdot RO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

5. Дано: пирамида, $\triangle ABC$ — правильный, V — ее объем, S — площадь боковой поверхности.

Найти: OI .

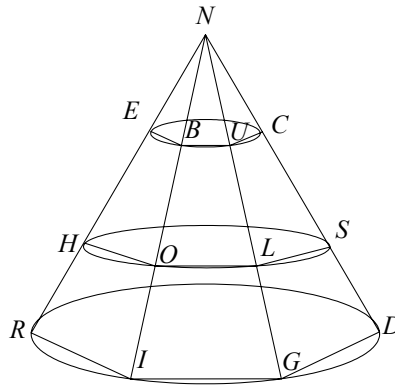


Решение:

$$V_{\text{ARCO}} = \frac{1}{3} S_{\text{ARC}} \cdot OI = \frac{1}{9} S \cdot OI, \text{ но } V = 3V_{\text{ARCO}} = \frac{1}{3} S \cdot OI \Rightarrow OI = \frac{3V}{S}.$$

6. Дано: пирамида, ребра разделены в отношении 1 : 2 : 1.

$$\text{Найти: } \frac{V_{\text{EBVCSLOH}}}{V_{\text{EBVCN}}}.$$



Решение:

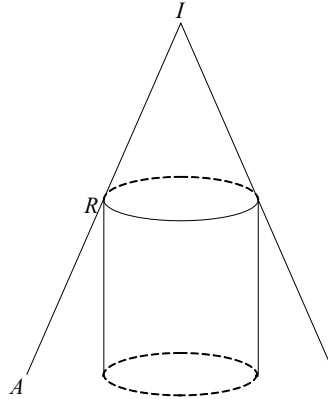
Пусть h — высота в пирамиде $EBVCN$. Тогда высота в усеченной пирамиде $SLOHEBVC = 2h$.

Пусть $S_{HOLS} = S$, тогда $S_{EBVC} = \frac{1}{9} S$

$$\Rightarrow \frac{V_{EBVCSLOH}}{V_{EBVCN}} = \frac{S \cdot 2h}{\frac{1}{9} S \cdot h} = 18.$$

7. Дано: конус, в него вписан цилиндр, $AR = RI$, $V_{\text{цил}} = 9$.

Найти: $V_{\text{конуса}}$.



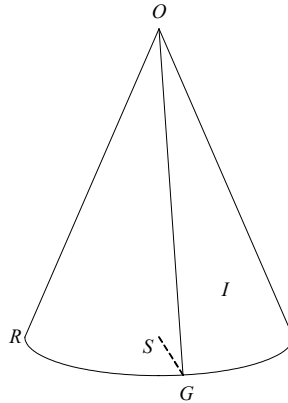
Решение:

$$V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}} \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow S_{\text{осн}} \cdot h = 18.$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = 6.$$

8. Дано: пирамида, $RI = 6$, $IG = 8$, $RG = 10$, $\angle ORS = \angle OGS = \angle OIS = 60^\circ$.

Найти: $V_{\text{конуса}}$.



Решение:

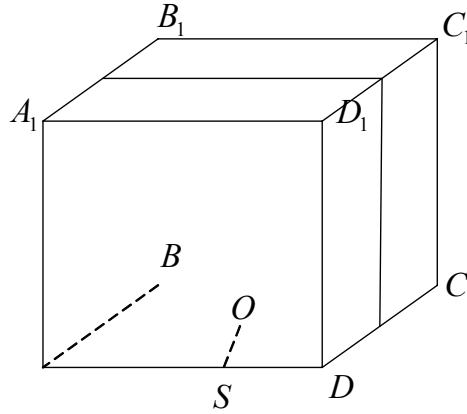
$$1) R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4\sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot 24} = 5 \text{ (из RIG).}$$

$$2) \text{ Рассмотрим } \triangle RSO: \frac{OS}{R} = \operatorname{tg} 60^\circ; OS = \sqrt{3} \cdot 5$$

$$\Rightarrow V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot OS = \frac{1}{3} \cdot 25\pi \cdot 5\sqrt{3} = \frac{125\pi\sqrt{3}}{3}.$$

9. Дано: прямой параллелепипед, $ABCD$ — ромб, сторона $4\sqrt{3}$, $\angle BAD = 60^\circ$.

Найти: $V_{\text{шара}}$.



Решение:

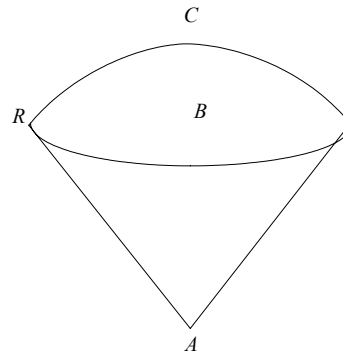
1) Рассмотрим $\triangle AOD$: $\angle AOD = 90^\circ$ (как пересечение диагоналей); $\angle OAB = 30^\circ$; $AD = 4\sqrt{3} \Rightarrow OD = 2\sqrt{3}$, $AO = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

$$2) \triangle AOD \sim \triangle AOS; \frac{SO}{OD} = \frac{AO}{AD}; SO = \frac{2\sqrt{3} \cdot 6}{4\sqrt{3}} = 3.$$

$$3) V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 27 = 36\pi.$$

10. Дано: сектор 60° и радиус 6.

Найти: $V_{\text{тела вращения}}$.



Решение:

$$1) V_{\text{сектора}} = \frac{2}{3} \pi R^2 H.$$

$$2) \text{ Рассмотрим } \triangle RBA: \text{ в нем } BA = 3\sqrt{3} \Rightarrow CB = H = 6 - 3\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow V = V = \frac{2}{3} \pi \cdot 36(6 - 3\sqrt{3}) = 24\pi(6 - 3\sqrt{3}) = 72\pi(2 - \sqrt{3}).$$

Контрольные работы

К—1

Вариант 1

1. Дано: $|\vec{a}|, |\vec{b}| = 1, (\vec{a} + 2\vec{b}, 5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$.

Найти: угол между \vec{a} и \vec{b} .

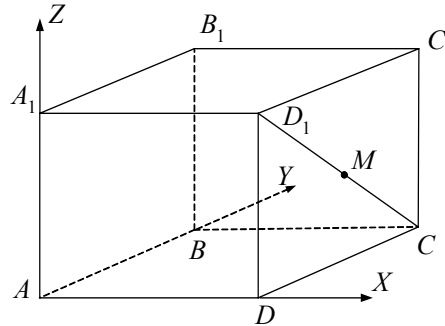
Решение:

$$(\vec{a} + 2\vec{b}, 5\vec{a} - 4\vec{b}) = 5|\vec{a}| - 8|\vec{b}| + 6(\vec{a}, \vec{b}) = 5 - 8 + 6\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = 0$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \frac{1}{2}; \quad \widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{\pi}{3}.$$

2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, $AB = 1, M \in D_1 C, D_1 M = MC$.

1) Найти угол между AM и $B_1 D$.



Решение:

Введем полярную систему координат $Axyz$.

$$A(0, 0, 0), M\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), B_1(0, 1, 1), D(1, 0, 0),$$

$$\overrightarrow{AM}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), B_1 D(1, -1, -1).$$

$$(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B_1 D}) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow AM \perp B_1 D.$$

2) Найти расстояние между серединами отрезков AM и $B_1 D$.

Решение:

$$E \in AM, AE = EM, F \in B_1 D, E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{EF}\left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right),$$

$$|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3. Дано: $A \in Oy$, $B(1, 0, 1)$, угол между AB и (Oxy) равен 30° .

Найти: координаты A .

Решение:

Пусть $A(0, y_0, 0)$; $\overrightarrow{AB}(1, -y_0, 1)$ составляет с $\vec{n}(0, 1, 0)$ угол в 60° , т.к. $\vec{n} \perp Oxy$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}) = 1 = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \widehat{AB\vec{n}} = \sqrt{2+y_0^2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{2+y_0^2} = -2y_0.$$

$$2 + y_0^2 = 4y_0^2$$

$$y_0 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow A(0, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0) \text{ или } (0, -\sqrt{\frac{2}{3}}, 0).$$

4*. Дано: $\vec{a} \parallel \vec{b}(6; 8; -7,5)$; $|\vec{a}| = 50$; $\vec{a} \cdot \vec{j} > \frac{\pi}{2}$.

Найти: координаты \vec{a} .

Решение:

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b}; |\vec{b}| = \sqrt{36+64+56,25} = 12,5 \Rightarrow \text{т.к. } |\vec{a}| = k \cdot |\vec{b}| \Rightarrow k = \pm 4.$$

$$\vec{j}(0, 1, 0), \text{ т.к. } \vec{a} \cdot \vec{j} > \frac{\pi}{2}, \text{ то } (\vec{a} \cdot \vec{j}) < 0 \Rightarrow k = -4,$$

$$\text{т.е. } \vec{a} = -4\vec{b} = \vec{a}(-24, -32, 30).$$

Вариант 2

1. Дано: $A(-1, 2, 1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 0)$, $D(2, 1, 2)$.

1) Найти \widehat{ABCD} .

Решение:

$$\overrightarrow{AB}(4, -2, 0), \overrightarrow{CD}(0, 2, 2), |\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{5}, |\overrightarrow{CD}| = 2\sqrt{2}$$

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}) = -4 = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \cdot \cos \widehat{ABCD}$$

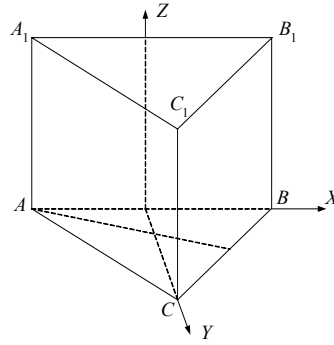
$$\Rightarrow \cos \widehat{ABCD} = -\frac{4}{4\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}; \widehat{AB \cdot CD} = -\arccos \frac{1}{\sqrt{10}} + \pi.$$

2) $E \in AB$, $AE = EB$, $F \in CD$, $CF = FD$, $E(1, 1, 1)$, $F(2, 0, 1)$

$$\overrightarrow{EF} = (1, -1, 0), |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{2}.$$

2. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $\angle ACB = 120^\circ$, $AC = CB = BB_1$.

Найти угол между AB и CB_1 .



Решение:

Поместим призму в полярную систему координат $Mxyz$.

Пусть $AC = a$, тогда высота MC — $\triangle ABC$.

$$MC = \frac{a}{2}, AB = a\sqrt{3}, AM = MB = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$A\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right), C\left(0, \frac{a}{2}, 0\right), B_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, a\right), \overrightarrow{AB}(a\sqrt{3}, 0, 0), \\ CB_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}, a\right), |\overrightarrow{AB}| = a\sqrt{3}, |CB_1| = a\sqrt{2};$$

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB_1}) = \frac{a^2 \cdot 3}{2} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CB_1}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB_1}) = a^2 \sqrt{6} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB_1} = \frac{3a^2}{2a^2 \sqrt{6}}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

3. Дано: $A \in Oxy, B(1, 1, 1), A(x_0, x_0, 0)$. Угол между AB и $Ozy = 30^\circ$.

Найти: координаты A .

Решение:

$\overrightarrow{AB}(1 - x_0, 1 - x_0, 1)$ составляет с $\vec{n}(1, 0, 0)$ угол 60° , т.к. $\vec{n} \perp Oyz$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2(1 - x_0^2) + 1}; |\vec{n}| = 1$$

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}) = 1 - x_0 = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = \sqrt{2(1 - x_0^2) + 1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4(1 - x_0)^2 = 2(1 - x_0)^2 + 1; 2(1 - x_0)^2 = 1; (1 - x_0)^2 = \frac{1}{2};$$

$$1 - x_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, x_0 = 1 \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow A\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \text{ или } A\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

4*. Дано: $\vec{a}(7, 0, 0)$, $\vec{b}(0, 0, 3)$, $(\vec{OM} \cdot \vec{a}) = 0$, $(\vec{OM} \cdot \vec{b}) = 0$.

Найти: множество точек M .

Решение:

Пусть $OM(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow (\vec{OM} \cdot \vec{a}) = 7x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$;

$(\vec{OM} \cdot \vec{b}) = 3z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 0$.

Значит, искомое множество точек $M(0, y, 0)$, где y — произвольная координата.

Вариант 3

1. Дано: \vec{a} , \vec{b} , $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\hat{\vec{a}\vec{b}} = 135^\circ$.

Найти: $|\vec{a} - 2\vec{b}|$.

Решение:

Угол

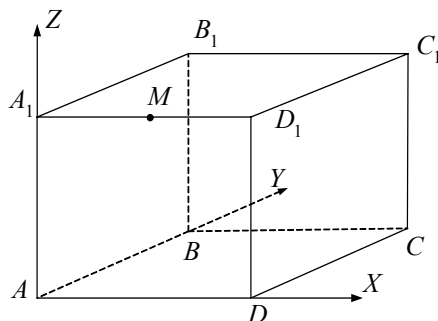
$|\vec{a} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{2} \Rightarrow$ по теореме косинусов имеем

$$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 - 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 135^\circ$$

$$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = 4 + 8 - 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 20; |\vec{a} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{5}.$$

2. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, $AB = 1$, $M \in A_1 D_1$, $A_1 M = MD_1$.

Найти: 1) угол между $A_1 C$ и $C_1 M$.



Решение:

Поместим куб в полярную систему координат $Axyz$. В ней

$A_1(0, 0, 1)$, $C(1, 1, 0)$, $D_1(1, 0, 1)$, $M\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$, $C_1(1, 1, 1)$;

$$\vec{A_1 C}(1, 1, -1), \vec{MC_1}\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right); |\vec{A_1 C}| = \sqrt{3}, |\vec{MC_1}| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$(\vec{A_1 C} \cdot \vec{MC_1}) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} = |\vec{A_1 C}| \cdot |\vec{MC_1}| \cdot \cos \hat{A_1 C MC_1} =$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{2} \cos \widehat{A_1 C M C_1}.$$

$$\cos \widehat{A_1 C M C_1} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{3}{5}}; \widehat{A_1 C M C_1} = \arccos \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

2) $E \in A_1 C, A_1 E = EC, F \in C_1 M, C_1 F = FM$.

Найти: EF .

Решение:

$$E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), F\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1\right), \overrightarrow{EF}\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}\right), |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

3. Дано: $A(0, 0, z_0) \in Oz, B(2, 2, 0)$. Угол между AB и Ox равен 60° .

Найти: координаты A .

Решение:

$\overrightarrow{AB}(2, 2, -z_0)$ составляет с $\vec{n}(0, 0, 1)$ угол $\alpha = 30^\circ$, т.к. $\vec{n} \perp (Oxy)$,

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8 + z_0^2}, |\vec{n}| = 1.$$

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}) = -z_0 = \sqrt{8 + z_0^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{4}{3} z_0^2 = 8 + z_0^2; \frac{1}{3} z_0^2 = 8, z_0 = \pm 2\sqrt{6}.$$

Значит, $A(0, 0, 2\sqrt{6})$ или $A(0, 0, -2\sqrt{6})$.

4*. Дано: $\vec{b} \parallel \vec{a}(8, -10, 13), |\vec{b}| = \sqrt{37}, \vec{b} \cdot \vec{k} < \frac{\pi}{2}$.

Найти: координаты \vec{b} .

Решение:

$$\vec{a} = \sqrt{64 + 100 + 169} = \sqrt{333}, \vec{b} = n \vec{a} \Rightarrow n = \pm \sqrt{\frac{37}{333}}; \vec{k}(0, 0, 1).$$

Т.к. $\vec{b} \cdot \vec{k} < \frac{\pi}{2}$, то $(\vec{b} \cdot \vec{k}) > 0 \Rightarrow$

$$\vec{b}\left(\frac{8}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{13}{3}\right) n = \frac{1}{3}.$$

Вариант 4

1. Дано: $E(1, -2, 2), F(3, 0, 2), K(0, -2, 3), T(2, 4, 1)$.

1) Найти $\widehat{EFKT} = \alpha$.

Решение:

$$\overrightarrow{EF}(2, 2, 0), \overrightarrow{KT}(2, 6, -2), |\overrightarrow{EF}| = 2\sqrt{2}, |\overrightarrow{KT}| = \sqrt{44} = 2\sqrt{11};$$

$$(\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{KT}) = 4 + 12 = 16 = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{11} \cdot \cos \alpha;$$

$$\cos \alpha = \frac{16}{4\sqrt{22}} = \frac{4}{\sqrt{22}}; \alpha = \arccos \frac{4}{\sqrt{22}}.$$

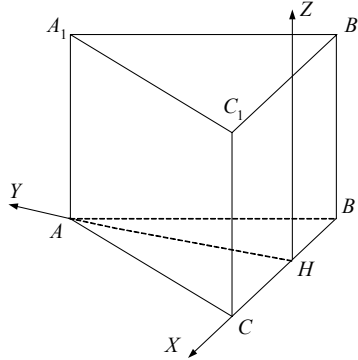
2) Найти MN ($M \in EF$, $EM = MF$, $N \in KT$, $KN = NT$).

Решение:

$$M(2, -1, 2), N(1, 1, 2), \overrightarrow{MN}(-1, 2, 0), |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{5}.$$

2. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, $AB = BC = AC = AA_1$.

Найти $\widehat{A_1CAB} = \alpha$.



Решение:

Поместим призму в полярную систему координат $Hxyz$, где $H \in CB$, CH

$$= HB. \text{ В } Hxyz \overrightarrow{AB} \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \overrightarrow{A_1C} \left(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, -a \right).$$

$$|\overrightarrow{AB}| = a, |\overrightarrow{A_1C}| = a\sqrt{2}; (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A_1C}) = -\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{2} = a^2\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}, \alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3. Дано: $M \in Oxz$, $P(1, 2, 1)$, $M(x_0, y_0, z_0)$, угол между PM и Ox равен 30° .

Найти координаты M .

Решение:

$$\overrightarrow{MP}(1 - x_0, 2, 1 - x_0) \text{ составляет с } \vec{n}(0, 0, 1) \text{ угол в } 60^\circ, \text{ т.к. } \vec{n} \perp Ox.$$

$$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{2(x_0 - 1)^2 + 4}; |\vec{n}| = 1.$$

$$(\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n}) = x_0 - 1 = \sqrt{2(x_0 - 1)^2 + 4} \cdot \frac{1}{2}; 4(x_0 - 1)^2 = 2(x_0 - 1)^2 + 4;$$

$$2(x_0 - 1)^2 = 4; x_0 - 1 \pm \sqrt{2} \quad x_0 = 1 \pm \sqrt{2}.$$

$$\text{Ответ: } M(\sqrt{2} + 1, 0, \sqrt{2} + 1) \text{ или } M(1 - \sqrt{2}, 0, 1 - \sqrt{2}).$$

$$4^*. \text{ Дано: } \vec{c}(0, -2, 0), \vec{b}(0, 0, 5), (\overrightarrow{OE} \cdot \vec{b}) = (\overrightarrow{OE} \cdot \vec{c}) = 0.$$

Найти: множество точек E .

Решение:

$$\text{Пусть } E(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow (\overrightarrow{OE} \cdot \vec{c}) = -2y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0;$$

$$(\overrightarrow{OE} \cdot \vec{b}) = 5z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 0.$$

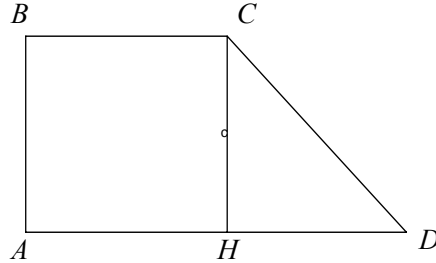
Значит, множество точек E точки $(x, 0, 0)$, где x — любая координата.

К—2

Вариант 1

1. Дано: $ABCD$ — трапеция, $\angle A = 90^\circ$, $BC = 3$, $AD = 5$, $\angle D = 45^\circ$, AD — ось вращения.

Найти: $S_{\text{т. вр.}}$.



Решение:

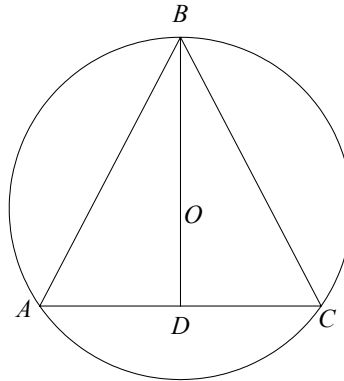
$$S_{\text{т. вр.}} = 2\pi \cdot BA \cdot BC + \pi BA \cdot CD = \pi BA(2BC + CD);$$

$$HD = AD - BC = 2 = CH = AB; \quad CD = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{\text{т. вр.}} = 2\pi(6 + 2\sqrt{2}) = 4\pi(3 + \sqrt{2})$$

2. Дано: шар (O, R) , в шар вписан конус, угол между образующей и осью равен φ .

1) Найти: $S_{\text{бок. кон.}}$.



Решение:

Рассмотрим осевое сечение конуса ABC . В $\triangle ADB$ $AD = AB \cdot \cos \varphi$, $AB =$

$$BC. \quad S = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}; \quad 4R \cdot S = 2AB^3 \cos \varphi$$

$$\Rightarrow 4R \cdot AB^2 \sin \varphi \cos \varphi = 2AB^2 \cos \varphi; R = \frac{AB}{2 \sin \varphi}; AB = 2R \sin \varphi.$$

$$S_{\text{бок кон}} = \pi \cdot AB \cdot AD = \pi \cdot 2 \sin \varphi \cdot 2R \sin \varphi \cos \varphi = 4\pi R^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi.$$

2) $\varphi = 30^\circ$. Найти наибольшую площадь сечения конуса, проходящего через вершину.

Решение:

$$\text{Угол при вершине в осевом сечении } 120^\circ. S_{\text{наиб}} = \frac{1}{2} AB^2 \cdot \sin \varphi;$$

$$\sin \varphi_{\text{наиб}} = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow S_{\text{наиб}} = \frac{1}{2} AB^2 = 2R^2 \sin^2 \varphi = \frac{R^2}{2}.$$

3*. Дано: сфера $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4 \cap Ox = A$, сфера $\cap Oy = B$, сфера $\cap Oz = C$, $A(x_1, 0, 0)$, $x_1 > 0$, $B(0, y_1, 0)$, $y_1 > 0$, $C(0, 0, z_1)$, $z_1 > 0$.

Найти угол φ между (ABC) и плоскостью $z = 0$.

Решение:

$x_1 = 2, y_1 = 2, z_1 = 3$. Уравнение (ABC) :

$$\begin{cases} A: \sqrt{2}P + S = 0 \\ B: \sqrt{2}Q + S = 0 \\ C: 3R + S = 0 \end{cases}; \begin{cases} P = -\frac{S}{\sqrt{3}} \\ Q = -\frac{S}{\sqrt{3}} \\ R = -\frac{S}{3} \end{cases}.$$

$$ABC: \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0; \sqrt{3}x + \sqrt{3}y + z - 3 = 0;$$

$$\vec{n}_1 (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1) \perp (ABC);$$

$$\vec{n}_2 (0, 0, 1) \perp \text{плоскости } z = 0.$$

Искомый угол между ABC и $z = 0$ равен углу между \vec{n}_1 и \vec{n}_2 .

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{3+3+1} = \sqrt{7}; |\vec{n}_2| = 1;$$

$$(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = 1 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos \varphi;$$

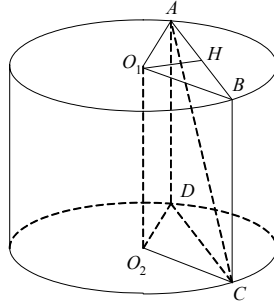
$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{7}}, \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Вариант 2

1. Дано: цилиндр, O_1O_2 — ось, $\angle AO_1B = 90^\circ$, $ABCD$ — секущая плоскость, $ABCD \parallel OO_1$, $AC = 10$, расстояние между O_1O_2 и AC равно 4.

Найти: $S_{\text{бок цилиндра}}$.



Решение:

Расстояние между O_1O_2 и AC равно O_1H — высоте $\triangle O_1AB$.

Из прямоугольного равнобедренного $\triangle AO_1B$, где $O_1H = 4$, $O_1A = 4\sqrt{2} = O_1B$, $AB = 8$.

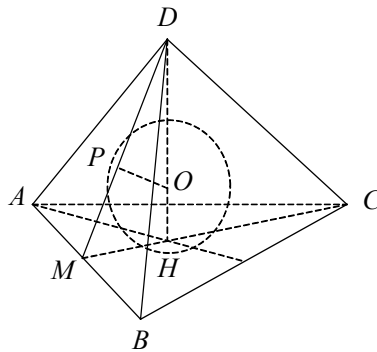
Из прямоугольного $\triangle ABC$:

$$AC^2 - AB^2 = BC^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow BC = 6.$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi O_1A \cdot BC = 2\pi \cdot 4\sqrt{2} \cdot 6 = 48\pi\sqrt{2}.$$

2. Дано: $DABC$ — правильная пирамида, боковые грани наклонены к основанию под углом $\beta = 60^\circ$. В $\triangle ABC$ вписан шар радиуса R .

1) Найти $S_{\text{бок}}(DABC)$.



Решение:

В прямоугольном $\triangle MHD$:

$$\angle MDH = 90^\circ - \beta = 30^\circ \Rightarrow MH = \frac{1}{2} MD; DH = MD \frac{\sqrt{3}}{2}; \triangle MHD \sim \triangle OPD \text{ (по} \\ \text{двум углам); } OD = DH - R = MD \frac{\sqrt{3}}{2} - R.$$

$$\text{Из подобия } \frac{OP}{DO} = \frac{MH}{MD}; \frac{R}{MD \frac{\sqrt{3}}{2} - R} = \frac{1}{2}; 2R = MD \frac{\sqrt{3}}{2} - R;$$

$MD = \frac{6R}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}R \Rightarrow MH = \sqrt{3}R \Rightarrow MC = 3\sqrt{3}R$ (т.к. H — точка пересечения медиан); $\frac{\sqrt{3}}{2}AC = MC$; $AC = \frac{2}{\sqrt{3}}MC = 6R = AB$.

$$S(ABC) = \frac{1}{2}AB \cdot HC = 3R \cdot 3\sqrt{3}R = 9R^2\sqrt{3}$$

$$DH = MD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3R.$$

$$S_{\text{бок}} = 3 \cdot AB \cdot DM \cdot \frac{1}{2} = 18R \cdot \sqrt{3}R = 18R^2\sqrt{3}.$$

2) Найти длину окружности, по которой шар касается боковых граней.

Решение:

Опустим перпендикуляр из т. P на DH , получим $r = PO \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow l = 2\pi r = \pi R\sqrt{3}.$$

3*. Дано: $M(-7, 3, -4)$, сфера $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 27 = 0$, $H \in$ сфере, MH — касательная.

Найти: MH .

Решение:

Уравнение сферы $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + z^2 - 32 = 0$

или $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = (4\sqrt{2})^2$.

Значит, центр сферы точка $O(1, 2, 0)$, а радиус $OH = R = 4\sqrt{2}$.

$OH \perp MH$, т.к. MH — касательная.

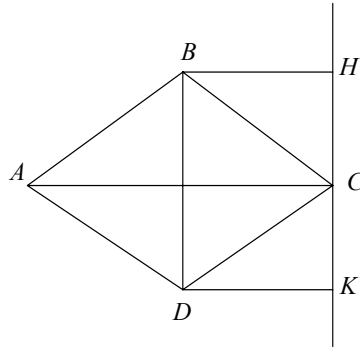
$$\overrightarrow{OM}(-8, 1, -4), |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{64 + 1 + 16} = 9.$$

$$\triangle OHM \text{ — прямоугольный} \Rightarrow MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{81 - 32} = 7.$$

Вариант 3

1. Дано: $ABCD$ — ромб, $AB = a$, $\angle BAD = 60^\circ$, $HC \perp AC$, HC — ось вращения.

Найти: $S_{\text{т. вр.}}$.



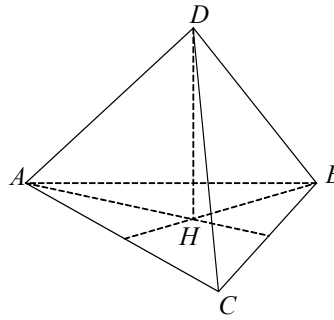
Решение:

В ромбе $BD = 2BM = a$, $AC = 2AM = a\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{\text{т. вр}} &= \pi \cdot AB(BH + AC) + \pi \cdot AD(DK + AC) + \pi \cdot BH + \pi \cdot DK \cdot DC = \\ &= 2\pi a \left(a\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\pi(a^2\sqrt{3} + a^2\sqrt{3}) = 4\pi a^2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

2. Дано: $DABC$ — правильная пирамида, DH — высота, $AB = a$, $\angle DAH = \alpha$, $DABC$ вписана в сферу.

1) Найти $S_{\text{сферы}}$.



Решение:

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}; AD = \frac{a\sqrt{3}}{3\cos\alpha}; DH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha;$$

$$S(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

r — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

$$r = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{a^3}{4 \frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} a.$$

Возможны 3 случая:

$$1) \angle \alpha = 45^\circ \Rightarrow R = AH = HD = \frac{\sqrt{3}}{3} a \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{4}{3} \pi a^2.$$

$$2) \alpha < 45^\circ.$$

$$OH = R - HD = R - \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

Из прямоугольного $\triangle AHO$:

$$AO^2 - OH^2 = AH^2 = R^2 - \left(R - \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha \right)^2 = \frac{a^2}{3}.$$

$$R^2 - R^2 + 2R \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha - \frac{a^2}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{a^2}{3};$$

$$2R \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^2}{3} (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1);$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2 = \frac{4\pi a^2}{12} \cdot \frac{(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\pi a^2}{3} \cdot \frac{(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\pi a^2}{3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}.$$

$$3) \alpha > 45^\circ.$$

Достроим $\triangle ADH$ до $\triangle ADS$, вписанного в окружность.

$$AS = 2AH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}; DH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha; AD = \frac{a\sqrt{3}}{3 \cos \alpha};$$

$$R = \frac{AD^2 \cdot AS}{4S} = \frac{AD^2 \cdot AS}{4 \cdot \frac{1}{2} AS \cdot DH} = \frac{AD^2}{2DH} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{3 \cos^2 \alpha \cdot 2a \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{6 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2 = \frac{\pi a^2}{3 \cos^4 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\pi a^2}{3 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \frac{4\pi a^2}{3 \sin^2 2\alpha}.$$

Эта формула выражает ту же зависимость, что и формула в 2) и обобщаем 1).

$$2) \alpha = 30^\circ.$$

Найти $\angle OAH$ (из случая 2).

Решение:

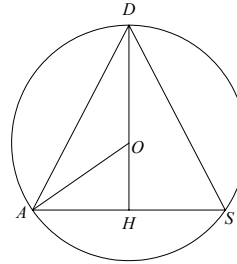
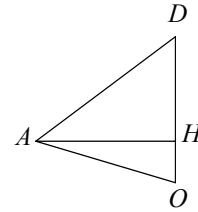
Вернемся к случаю 2. В $\triangle AHD$ $\angle ADH = 60^\circ = \angle DAO$ (т.к. $\triangle DOA$ — равнобедренный, $DO = OA = R$) $\Rightarrow \triangle DOA$ — равносторонний $\Rightarrow \angle OAD = 60^\circ$.

Искомый $\angle OAH = \angle OAD - \alpha = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

3*. Дано: сфера $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 5 \cap Oy = A(0, y, 0), y > 0, M(1, 1, 0), B \in$ сфере, $MB \parallel Oz$.

Найти: угол α между AB и (Oxy) .

Решение:



Т.к. $\overrightarrow{MB} \parallel Oz \Rightarrow \overrightarrow{MB} (0, 0, z) \Rightarrow B(1, 1, z)$. Координаты A удовлетворяют уравнению сферы $\Rightarrow y = \sqrt{5}$, $A(0, \sqrt{5}, 0)$.

B лежит на сфере $\Rightarrow 0 + 1 + z^2 = 5, z = \pm 2$

$\Rightarrow B(1, 1, 2)$ или $B(1, 1, -2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} (1, 1 - \sqrt{5}, 2)$ или $\overrightarrow{AB} (1, 1 - \sqrt{5}, -2)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 6 - 2\sqrt{5} + 4} = \sqrt{11 - 2\sqrt{5}}$.

Найдем угол $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ между \overrightarrow{AB} и $\vec{n} (0, 0, \pm 1) \perp Oxy$.

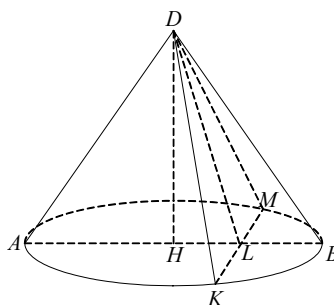
$$(\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}) = 2 = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \beta; \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{11 - 2\sqrt{5}}};$$

$$\beta = \arccos \frac{2}{\sqrt{11 - 2\sqrt{5}}}; \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Вариант 4

1. Дано: конус, DKM — сечение, $KM = 3$, $\angle MHK = 120^\circ$, DH — высота, AB — диаметр основания, $AB \perp KM$, $AB \cap KM = L$, $\angle DLH = 45^\circ$.

Найти $S_{\text{бок конуса}}$.



Решение:

Из равнобедренного $\triangle KHM$: $KM^2 = 2HK^2(1 - \cos \angle KHM)$;

$$9 = 2R^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right); R = \sqrt{3}; \angle HKL = 30^\circ \Rightarrow HL = \frac{1}{2} HK = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

\Rightarrow Из прямоугольного равнобедренного $\triangle DHL$:

$$DH = HL = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Из $\triangle DHK$

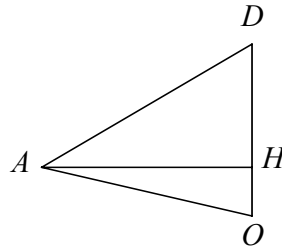
$$DK = \sqrt{DH^2 + HK^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + 3} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

$$S_{\text{бок}} = \pi DK \cdot HK = \pi \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3\pi\sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $\frac{3\pi\sqrt{5}}{2}$.

2. Дано: $MABCD$ — правильная пирамида, в $MABCD$ вписан шар, O — центр шара, $MO = a$, $K \in DC$, $DK = KC$, $\angle MKH = 60^\circ$.

1) Найти: $S_{\text{бок}}(MABCD)$.



Решение:

Рассмотрим осевое сечение пирамиды, параллельное AD .

$\triangle MOF \sim \triangle MKH$ (по двум углам), а из $\triangle MHK$ $2HK = MK$.

$$\begin{aligned} \text{Из подобия } \frac{MO}{OF} = \frac{MK}{HK} = 2 &\Rightarrow OF = \frac{a}{2} = OH \Rightarrow MH = \frac{3a}{2} = OM + OH; HK \\ &= MH \cdot \tan 30^\circ = \frac{3a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = KC = KD \Rightarrow DC = 2KC = a\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$S_{\text{бок}} = 4 \cdot \frac{1}{2} MK \cdot DC = 2 \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot a\sqrt{3} = 6a^2.$$

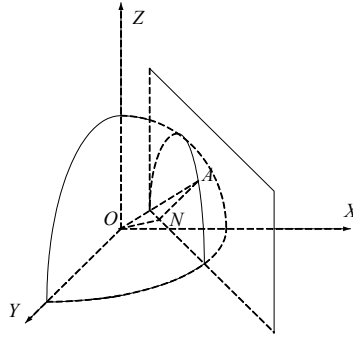
2) Найти $S_{\text{сфера}}$ по которому сфера касается пирамиды.

Решение:

$$r = OF \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{\text{сфера}} = \pi r^2 = \frac{3a^2\pi}{16}.$$

3*. Дано: $M(4, 2, 8)$, $\alpha \parallel Oz$, $M \in \alpha$, угол между α и Oxz , $Ozy = 45^\circ$, сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 25 \cap \alpha =$ окружность.

Найти длину окружности l .



Решение:

Уравнение плоскости α :

$x - y - z = 0$, т.к. $M \in \alpha$, то $4 - 2 - z = 0 \Rightarrow z = 2$.

Уравнение α : $x - y - 2 = 0$.

Опустим перпендикуляр ON на α , $N \in \alpha$.

Но и $\vec{n}(1, -1, 0) \perp \alpha \Rightarrow \overrightarrow{ON}(x_0, y_0, z_0) = k\vec{n}$

$$\begin{cases} x_0 = k \\ y_0 = -k \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow N(k, -k, 0)$ удовлетворяет уравнению плоскости α : $k + k - 2 = 0 \Rightarrow k =$

1; $\overrightarrow{ON}(1, -1, 0)$; $|\overrightarrow{ON}| = \sqrt{2}$.

\Rightarrow Расстояние от т. O — центра сферы до α равно ON .

Точка N является центром окружности в сечении. Пусть A — произвольная точка окружности, но A лежит на сфере $\Rightarrow OA = 5$, $\triangle ONA$ — прямоугольный \Rightarrow искомый радиус сечения

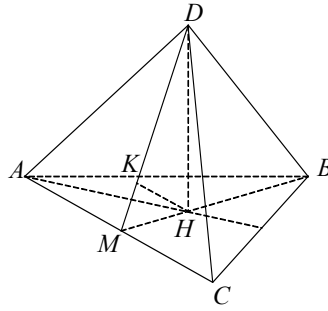
$$NA = \sqrt{OA^2 - ON^2} = \sqrt{25 - 2} = \sqrt{23} \Rightarrow l = 2\pi \cdot NA = 2\pi \cdot \sqrt{23}.$$

К—3

Вариант 1

1. Дано: $DABC$ — правильная пирамида, DH — высота, BM — медиана $\triangle ABC$, $\angle DMH = 60^\circ$, $HK \perp DM$, $HK = \sqrt{3}$.

Найти: $V(DABC)$.



Решение:

Из прямоугольного $\triangle MKN$: $MN = HK \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 4$.

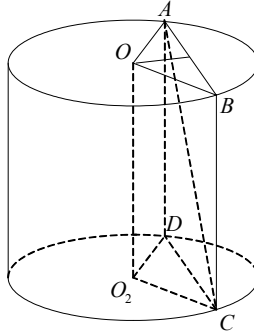
Из прямоугольного $\triangle MHD$: $DH = MN \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 4\sqrt{3}$, H — точка пересечения медиан $\triangle ABC \Rightarrow BH : MH = 2 : 1 \Rightarrow MB = 3MH = 12$.

Из $\triangle AMB$: $AB = \frac{MB}{\sin 60^\circ} = \frac{12 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{3} = AC$.

$$V(ABC) = \frac{1}{3} DH \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BM = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 12 = \frac{32 \cdot 12}{2} = 32 \cdot 6 = 192.$$

2. Дано: цилиндр, O_1O_2 — ось, $ABCD$ — сечение, $ABCD \parallel O_1O_2$, $\angle AO_1B = 2\alpha$, угол между AC и O_1O_2 равен φ . Расстояние от AC до O_1O_2 равно d .

Найти: $V_{\text{цилиндра}}$.



Решение:

Расстояние между O_1O_2 и AC равно AH — высоте $\triangle AO_1B$. А угол φ между AC и O_1O_2 равен $\angle ACB$.

Из $\triangle O_1HA$: $AH = O_1H \cdot \operatorname{tg} \alpha = d \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow AB = 2AH = 2d \operatorname{tg} \alpha$.

Из $\triangle ABC$: $L = BC = \frac{AB}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{2d \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \varphi}$.

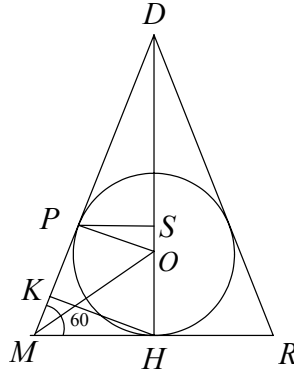
$$\text{Из } \triangle O_1HA: O_1A = R = \frac{O_1H}{\cos \alpha} = \frac{d}{\cos \alpha}.$$

$$\Rightarrow V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 L = \pi \cdot \frac{d^2}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{2d \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{2\pi d^3 \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\pi d^3 \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi}.$$

3*. Дано: $DABC$ — правильная пирамида, DH — высота, BM — медиана $\triangle ABC$, $\angle DMH = 60^\circ$, $HK \perp DM$, $HK = 2\sqrt{3}$, в $DABC$ вписан шар, плоскость α проходит через точки касания боковой поверхности.

Найти объем меньшей части шара.



Решение:

Рассмотрим осевое сечение DMB . Построим прямоугольный $\triangle MHD$ до равнобедренного $\triangle MDR$: $MD = DR = \frac{MH}{\cos 60^\circ} = 8 = MR$.

В $\triangle MDR$ вписан большой круг шара, $MR = 2MH = 8$, $DH = 4\sqrt{3}$.

$$S(\triangle MDR) = \frac{1}{2} DH \cdot MR = 16\sqrt{3}$$

$$r = PO = OH = MH \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = MH \cdot \operatorname{tg} \angle OMH = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

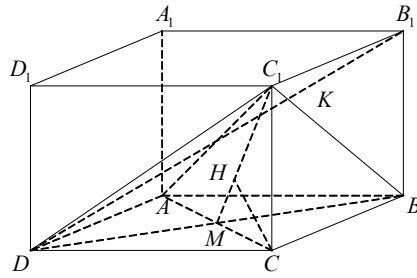
$$\text{Из } \triangle POS \quad SO = \frac{1}{2} PO = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$H_{\text{сеч}} = r - SO = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$V_{\text{сеч}} = \pi \cdot \frac{4-3}{9} \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \right) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{27}.$$

Вариант 2

1. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — правильная призма, $AC \cap BD = M$, $\angle C_1 M C = 45^\circ$, $CH \perp C_1 M$, $CH = 4\sqrt{2}$.
Найти $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$.



Решение:

$$\text{В } \triangle C_1 C M: CH = C_1 H = H M = 4\sqrt{2} \Rightarrow CM = C_1 C = 8.$$

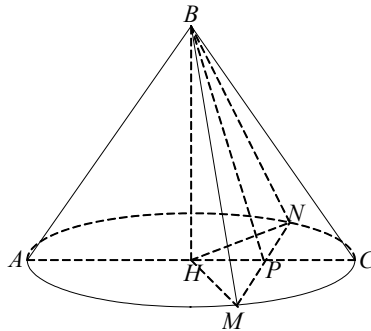
$$\text{В } \triangle C M D \text{ } CM = DM - 8 = \frac{1}{2} AC.$$

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} AC^2 = \frac{1}{2} \cdot 256 = 128.$$

$$V_{\text{призмы}} = C_1 C \cdot S(ABCD) = 8 \cdot 128 = 1024.$$

2. Дано: конус, B — вершина, BMN — сечение, AC — диаметр основания, $AC \perp MN$, BH — высота, $\angle MHN = 2\alpha$, $\angle BPH = \varphi$, $AH = R$.

Найти: $V_{\text{конуса}}$.



Решение:

$$\text{Из } \triangle H P N: HP = HN \cdot \cos \alpha = R \cos \alpha,$$

$$\text{Из } \triangle B H P: BH = HP \cdot \operatorname{tg} \varphi = R \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

$$\Rightarrow V_{\text{конуса}} = \pi \cdot \frac{BH}{3} \cdot R^2 = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi.$$

3*. Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — правильная призма, $AC \cap BD = M$, $\angle C_1 M C = 45^\circ$, $CH \perp C_1 M$. $CH = \overrightarrow{OE}$, вокруг призмы описан шар, $K \in DB_1$, $DK : KB_1 = 3 : 1$, $\alpha \perp DB_1$, $K \in \alpha$.

Найти: $V_{\text{сегмента (меньшего)}}$.

Решение:

$$d_{\text{сферы}} = DB_1 = \sqrt{BD^2 + C_1 C^2} = \sqrt{256 + 64} = 8\sqrt{5} = 2R \Rightarrow R = 4\sqrt{5},$$

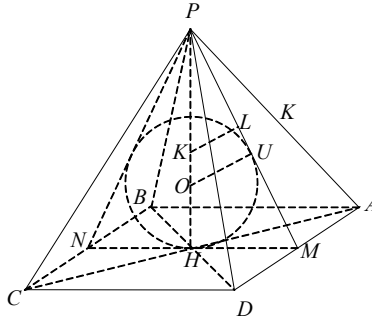
$$KB_1 = 2\sqrt{5}; H_{\text{сегмента}} = R - KB_1 = 2\sqrt{5}.$$

$$V_{\text{сегмента}} = \pi H^2 \vec{a} = \pi \cdot 20 \frac{2 \cdot 0 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 7} = \frac{20\pi}{3} \cdot 10\sqrt{5} = \overrightarrow{CB_1}.$$

Вариант 3

1. Дано: $PABCD$ — правильная пирамида, PH — высота, $MH \perp AD$, $\angle PMH = 60^\circ$, $K \in HP$, $HK = KP$, $LK \perp MP$, $LK = 2$.

Найти: $V(PABCD)$.



Решение:

Из прямоугольного $\triangle PLK$: $PK = 2LK = 4 \Rightarrow PH = 8$.

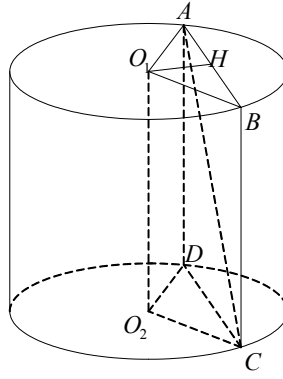
Из прямоугольного $\triangle PHM$: $MH = PH \cdot \tan 30^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} AB \Rightarrow$

$$AB = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

$$V(PABCD) = PH \cdot \frac{1}{3} AB^2 = \frac{8}{3} \cdot \frac{256}{3} = \frac{2048}{9}.$$

2. Дано: цилиндр, $O_1 O_2$ — ось, $ABCD$ — сечение, $ABCD \parallel O_1 O_2$, $\angle A O_1 B = \varphi$, $AC = 2m$, расстояние между $O_1 O_2$ и AC равно m .

Найти: $V_{\text{цил}}$.



Решение:

$O_1H = m$. Из $\triangle O_1HA$:

$$AH = O_1H \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = m \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2};$$

$$O_1A = \frac{O_1H}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{m}{\cos \frac{\varphi}{2}} = R;$$

$$AB = 2AH = 2m \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Из $\triangle ABC$:

$$BC = L = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4m^2 - 4m^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = 2m \frac{\sqrt{-\sin^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2}}}{\cos \frac{\varphi}{2}}.$$

$$\begin{aligned} V_{\text{цил}} &= \pi BC \cdot O_1A^2 = \pi \cdot 2m \frac{\sqrt{-\sin^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2}}}{\cos \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{m^2}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \\ &= 2\pi m^3 \frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2}}}{\cos^3 \frac{\varphi}{2}} = 2\pi m^3 \frac{\sqrt{\cos \varphi}}{\cos^3 \frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}$$

3*. Дано: $PABCD$ — правильная пирамида, PH — высота, $MH \perp AD$, $\angle PMH = 60^\circ$, $K \in HP$, $HK = KP$, $LK \perp MP$, $LK = 2$. В $PABCD$ вписан шар. Точки касания образуют плоскость $\alpha \parallel ABCD$, α отсекает сегмент от шара.

Найти: $V_{\text{меньшего сегмента}}$.

Решение:

$$PH = 8; MN = AB = \frac{16\sqrt{3}}{3}. \text{ Из } \triangle MHP:$$

$$MP = 2MH = MN = \frac{16\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \triangle MNP \text{ — равносторонний}$$

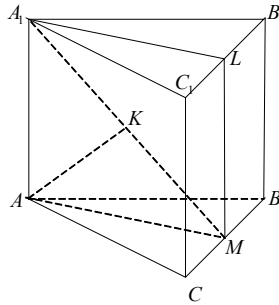
$$\Rightarrow PO : OH = 2 : 1 \Rightarrow OH = R = \frac{PH}{3} = \frac{8}{3}; h = HO \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}.$$

$$\Rightarrow V_{\text{сегм}} = \pi h^2 \cdot \left(R - \frac{h}{3}\right) = \pi \cdot \frac{16}{9} \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{9}\right) = \frac{\pi \cdot 16}{9} \cdot \frac{20}{9} = \frac{320\pi}{81} = \frac{320\pi}{81}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{320\pi}{81}.$$

Вариант 4

1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, A_1BC — сечение, $M \in BC$, $BM = MC$, $\angle A_1MA = 45^\circ$, $AK \perp A_1M$, $K \in A_1M$, $AK = 2$.
Найти: $V(ABCA_1B_1C_1)$.



Решение:

В прямоугольном равнобедренном $\triangle A_1AM$: $AK = A_1K = KM = 2 \Rightarrow S(AA_1M) = \frac{1}{2} AK \cdot A_1M = 4$. Построим $\triangle A_1AB$ до квадрата AA_1LM .

$$S(AA_1LM) = 2S(AA_1M) = 8.$$

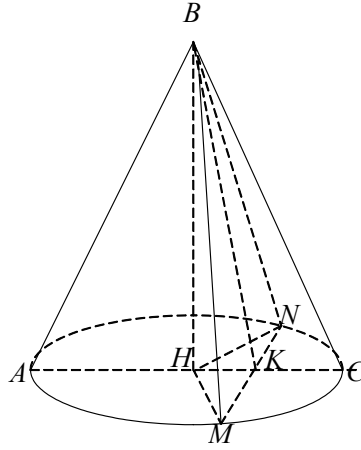
$$A_1A = AM = \sqrt{2} \cdot AK = 2\sqrt{2}. \text{ Из } \triangle ABC:$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} BC = AM \Rightarrow BC = 2BM = \frac{2}{\sqrt{3}} AM = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

$$V_{\text{призмы}} = AA_1 \cdot AM \cdot \frac{1}{2} BC = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{16\sqrt{6}}{3}.$$

2. Дано: конус, B — вершина, BH — высота, BMN — сечение, $\angle MHN = \alpha$, $\angle BKH = \varphi$, $BH = h$.

Найти: $V_{\text{конуса}}$.



Решение:

AC — диаметр, $AC \cap MN = K$.

$$\text{Из } \triangle BHK: HK = \frac{BH}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

$$\text{Из } \triangle HKM: HM = \frac{HK}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{h}{\operatorname{tg} \varphi \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{\pi h}{3} R^2 = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot \frac{h^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{\pi h^3}{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

3*. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, A_1BC — сечение, $M \in BC$, $BM = MC$, $\angle A_1MA = 45^\circ$, $AK \perp A_1M$, $K \in A_1M$, $AK = 2$, вокруг призмы описан шар, плоскость BB_1C_1C — секущая.

Найти $V_{\text{меньшего сегмента}}$.

Решение:

$$\text{Радиус окружности, описанной около } \triangle ABC: r = \frac{2AM}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

$$\frac{h}{2} = \frac{AA_1}{2} = \sqrt{2} \text{ образует с } r \text{ прямоугольный треугольник, гипотенуза которого } R = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}} = \sqrt{\frac{32}{3} + 2} = \frac{5\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Расстояние от центра сферы до } BB_1C_1C: R - H = \frac{AM}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{3} - H = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow H = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}.$$

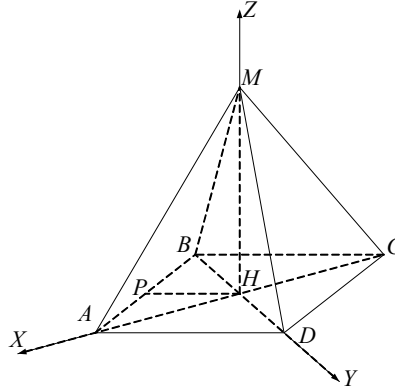
$$\Rightarrow V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right) = \pi \cdot 2 \cdot \left(\frac{5\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}.$$

К—4

Вариант 1

Дано: $MABCD$ — правильная пирамида, MH — высота, $AB = 6$, $MA = 5$.

1) Найти $S_{\text{бок}}(MABCD)$.



Решение:

$$S(AMB) = \sqrt{p(p-MA)^2(p-AB)}; p = \frac{5+5+6}{2} = 8.$$

$$S(AMB) = \sqrt{8(8-5)^2(8-6)} = 4 \cdot 3 = 12.$$

$$S_{\text{бок}} = 4S(AMB) = 4 \cdot 12 = 48.$$

2) Найти $V(MABCD)$.

Решение:

$$AH = AB \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Из } \triangle AHM: MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{25 - 18} = \sqrt{7}.$$

$$V(MABCD) = \frac{1}{3} MH \cdot S(ABCD) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{7} \cdot 36 = 12\sqrt{7}.$$

3) $P \in AB$, $AP = PB$.

Найти $\angle MPH$.

Решение:

$$PH = \frac{AD}{2} = 3 \Rightarrow \text{из } \triangle MHP: MP = \sqrt{PH^2 + MH^2} = \sqrt{9 + 7} = 4$$

$$\Rightarrow \cos \angle MPH = \frac{PH}{MP} = \frac{3}{4} \Rightarrow \angle MPH = \arccos \frac{3}{4}.$$

4) Найти $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AM}$.

Решение:

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Поместим пирамиду в полярную систему координат

Нхуз. $\overrightarrow{AM}(-3\sqrt{2}, 0, \sqrt{7})$, $\overrightarrow{AC}(-6\sqrt{2}, 0, 0)$, $(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}) = 18 \cdot 2 = 36$.

5) Вокруг $MABC$ описан шар.

Найти $S_{\text{сферы}}$.

Решение:

Вокруг $\triangle AMC$ описан большой круг сферы. $AC = 6\sqrt{2}$, $MH = \sqrt{7}$, $AM =$

$$MC = 5 \Rightarrow R = \frac{AM \cdot AC \cdot MC}{4 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot MH} = \frac{5 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 5}{2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}} = \frac{25}{2\sqrt{7}} = \frac{25\sqrt{7}}{14}.$$

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot \frac{625}{28} = \frac{\pi}{7} \cdot 625.$$

6)* Найти угол между BD и (DMC) .

Решение:

Координаты точек: $D(0, 3\sqrt{2}, 0)$, $C(-3\sqrt{2}, 0, 0)$, $M(0, 0, \sqrt{7})$,

$\overrightarrow{DC}(-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, 0)$, $\overrightarrow{CM}(3\sqrt{2}, 0, \sqrt{7})$, $\vec{n}(x_0, y_0, z_0) \perp (DMC)$.

$$\begin{cases} (\vec{n} \cdot \overrightarrow{DC}) = 0 \\ (\vec{n} \cdot \overrightarrow{CM}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\sqrt{2}x_0 - 3\sqrt{2}y_0 = 0 \\ 3\sqrt{2}x_0 + \sqrt{7}z_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -y_0 \\ z_0 = -\frac{3\sqrt{14}}{7}x_0 = 0 \end{cases}.$$

$$\vec{n}\left(-1, 1, \frac{3\sqrt{14}}{7}\right), \overrightarrow{BD}(0, 6\sqrt{2}, 0).$$

Искомый угол $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, где β — угол между \vec{n} и \overrightarrow{BD} .

$$|\vec{n}| = \sqrt{2 + \frac{9 \cdot 14}{7}} = \sqrt{\frac{32}{7}} = 4\sqrt{\frac{2}{7}}; |\overrightarrow{BD}| = 6\sqrt{2};$$

$$(\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD}) = 6\sqrt{2} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos\beta;$$

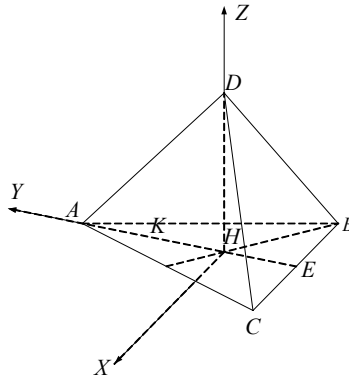
$$\cos\beta = \frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot 6\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{2}{7}}} = \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}};$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\sqrt{14}}{8}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Вариант 2

Дано: $MABC$ — правильная пирамида, MH — высота, $AB = 4\sqrt{3}$, $AM = 5$.

1) Найти: $S_{\text{бок}}$.



Решение:

$$\triangle AMB: AM = MB = 5; p = 5 + 2\sqrt{3}.$$

$$S(AMB) = \sqrt{(5 + 2\sqrt{3})(2\sqrt{3})^2(5 - 2\sqrt{3})} = 2\sqrt{3}\sqrt{25 - 12} = 2\sqrt{39}.$$

$$S_{\text{бок}} = 3S(AMB) = 6\sqrt{39}.$$

2) Найти $V(MABC)$.

Решение:

$$AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4\sqrt{3} = 4.$$

$$\text{Из } \triangle AHM \Rightarrow HM = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

$$S(ABC) = AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{48}{4}\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

$$V(MABC) = \frac{1}{3} MH \cdot S(ABC) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 12\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

3) $\angle MAH = ?$

Решение:

$$\operatorname{tg} \angle MAH = \frac{MH}{AH} = \frac{3}{4}; \angle MAH = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}.$$

$$4) \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})\overrightarrow{EA} = ? (E \in BC, BE = EC).$$

Решение:

Введем полярную систему координат $Hxyz$. $M(0, 0, 3)$; $A(0, 4, 0)$;

$B(-2\sqrt{3}, -2, 0)$, $C(2\sqrt{3}, -2, 0) \Rightarrow E(0, -2, 0)$.

$$\overrightarrow{AE}(0, -6, 0), \overrightarrow{MB}(-2\sqrt{3}, -2, -3), \overrightarrow{MC}(2\sqrt{3}, -2, -3).$$

$$\vec{b} = \frac{h}{2} = \frac{AA_1}{2} = \sqrt{2} = \frac{1}{2}(0, -4, -6) = (0, -2, -3);$$

$$(\vec{b} \cdot \vec{b}) = 12 \Rightarrow (\overrightarrow{EA} \cdot \vec{b}) = -12.$$

5) В $MABC$ вписан шар.

Найти $V_{\text{шара}}$.

Решение:

Большой круг шара вписан в $\triangle KME$, где $K \in AH$, $AK = KH$, $KE = 4$, $ME = \sqrt{HM^2 + HE^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} = MK$.

$$\frac{1}{2} P \cdot r = S(KME) = \frac{1}{2} KE \cdot MH = 6 \Rightarrow r = \frac{12}{2\sqrt{13} + 4}$$

$$\Rightarrow V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{12}{2\sqrt{13} + 4} \right)^3 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{6}{\sqrt{13} + 2} \right)^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot 6^3 \left(\frac{\sqrt{13} - 2}{9} \right)^3 = \frac{32\pi}{81} (\sqrt{13} - 2)^3.$$

6)* Найти угол α между AB и (AMC) .

Решение:

$A(0, 4, 0)$, $C(2\sqrt{3}, -2, 0)$, $M(0, 0, 3)$; $\overrightarrow{AM}(0, -4, 3)$, $\overrightarrow{AC}(2\sqrt{3}, -6, 0)$,

$\vec{n}(x_0, y_0, z_0) \perp (AMC) \Rightarrow$

$$(\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}) = -4y_0 + 3z_0 = 0$$

$$(\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}) = 2\sqrt{3}x_0 - 6y_0 = 0$$

$$\begin{cases} z_0 = \frac{4}{3}y_0 \\ x_0 = \sqrt{3} \cdot y_0 \end{cases}$$

$$\vec{n}\left(-\sqrt{3}, -1, -\frac{4}{3}\right) \perp (AMC); \overrightarrow{AB}(-2, -6, 0)$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{3 + 1 + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{36 + 16}{9}} = \frac{4\sqrt{13}}{3}; |\overrightarrow{AB}| = 4\sqrt{3}.$$

Искомый угол $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, где β — угол между \vec{n} и \overrightarrow{AB} .

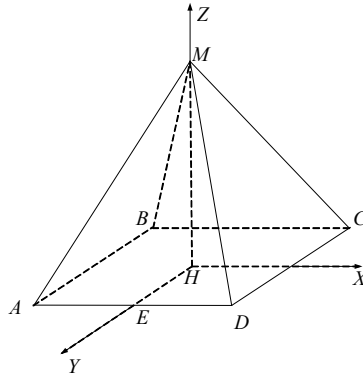
$$(\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}) = 2\sqrt{3} + 6 = 4\sqrt{3} \cdot \frac{4\sqrt{13}}{3} \cdot \cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{(2\sqrt{3} + 6)^3}{16\sqrt{13}}; \beta = \arccos\left(\frac{3(2\sqrt{3} + 6)}{16\sqrt{13}}\right).$$

Вариант 3

Дано: $MABCD$ — правильная пирамида, $AM = 8$, MH — высота, $\angle MAN = 60^\circ$.

1) Найти $S_{\text{бок}}$.



Решение:

$$\Delta AMB: AM = MB = 8, AB = 4\sqrt{2}; p = 8 + b^{\vec{}}$$

$$S(AMB) = \frac{1}{2} \vec{AB} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{64-8} = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{14} = 8\sqrt{7}.$$

$$S_{\text{бок}} = 4S(AMB) = 32\sqrt{7}.$$

2) Найти $V(MABCD)$.

Решение:

$$\text{Из } \Delta AHM: AH = \frac{AM}{2} = 4, MH = AM \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}; AB = AH\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

$$V(MABCD) = \frac{MH}{3} \cdot S(ABCD) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot 16 \cdot 2 = \frac{128\sqrt{3}}{3}.$$

3) Найти угол между (AMD) и (DMC) .

Решение:

Искомый угол равен $\angle EMF$, где $E \in AD, AE = ED, F \in BC, BF = FC$.

$$\text{В } \Delta EMF: EM = MF = \sqrt{EH^2 + HM^2} = \sqrt{8 + 48} = 2\sqrt{14}.$$

По теореме косинусов: $EF^2 = 2EM^2(1 - \cos \angle EMF)$;

$$32 = 2 \cdot 56(1 - \cos \angle EMF); 1 - \cos \angle EMF = \frac{16}{56} = \frac{2}{7};$$

$$\cos \angle EMF = \frac{5}{7}, \angle EMF = \arccos \frac{5}{7}.$$

4) Найти $\frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot \vec{ME}$ ($E \in DC, DE = EC$).

Решение:

Введем полярную систему координат $Hxyz$. В ней $M(0, 0, 4\sqrt{3})$,

$$A(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0), C(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 0), D(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0) \Rightarrow E(2\sqrt{2}, 0, 0).$$

$$\vec{MA}(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -4\sqrt{3}), \vec{MC}(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -4\sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{ME} (2\sqrt{2}, 0, -4\sqrt{3}).$$

$$\vec{b} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = (0, 0, -4\sqrt{3}) = \overrightarrow{MH}$$

$$(\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{ME}) = 16 \cdot 3 = 48.$$

5) Вокруг $MABCD$ описан шар.

Найти $V_{\text{шара}}$.

Решение:

$\triangle AMC$ вписан в большой круг шара; $AC = 8$, $AM = MC = 8$;

$$S(AMC) = AM^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3};$$

$$R = \frac{AM \cdot MC \cdot AC}{4S} = \frac{8^3}{4 \cdot 16\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{8^3 \cdot 3\sqrt{3}}{27} = \frac{4 \cdot 8^3 \pi \cdot \sqrt{3}}{27} = \frac{2048\sqrt{3}}{27}.$$

6)* Найти угол α между AM и (DMC) .

$$\overrightarrow{AM} (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4\sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{DM} (-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4\sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{CM} (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4\sqrt{3})$$

$$\vec{n} (x_0, y_0, z_0) \perp (MCH) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} (\vec{n} \cdot \overrightarrow{DM}) &= -2\sqrt{2}x_0 - 2\sqrt{2}y_0 + 4\sqrt{3}z_0 = 0 \\ (\vec{n} \cdot \overrightarrow{DN}) &= -2\sqrt{2}x_0 + 2\sqrt{2}y_0 + 4\sqrt{3}z_0 = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ x_0 = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}z_0 = \sqrt{6}z_0 \end{cases}$$

$$\vec{n} (\sqrt{6}, 0, 1) \perp (DMC).$$

Искомый угол $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, где β — угол между \vec{n} и \overrightarrow{AM} .

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{8+8+48} = 8; |\vec{n}| = \sqrt{6+1} = \sqrt{17}$$

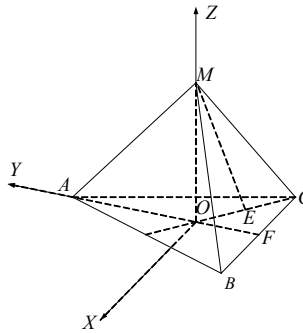
$$(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}) = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3} = 8\sqrt{7} \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}; \beta = \arccos \sqrt{\frac{3}{7}}; \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Вариант 4

Дано: $MABC$ — правильная пирамида, $AB = 2\sqrt{3}$, MO — высота $\triangle ABC$, $\angle MHO = 60^\circ$.

1) Найти $S_{\text{бок}}$.



Решение:

$$AC = AB \frac{\sqrt{3}}{2} = 3; HO = \frac{1}{3} AC = 1, \text{ т.к. } O \text{ — центр } \triangle ABC.$$

$$\text{В } \triangle HOM: HM = 2HO = 2, MO = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{\text{бок}} = 3 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot HM = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 = 6\sqrt{3}.$$

2) Найти $V(MABC)$.

Решение:

$$S(ABC) = AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$$

$$V(MABC) = \frac{1}{3} \cdot MO \cdot S(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 3.$$

3) Найти $\angle MAO$.

Решение:

$$AO = 2HO = 2, MO = \sqrt{3} \Rightarrow \text{Из } \triangle MAO: \operatorname{tg} \angle MAO = \frac{MO}{AO} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\angle MAO = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4) Найти $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{OM}$.

Решение:

Введем полярную систему координат $Oxyz$.

В ней $M(0, 0, \sqrt{3})$, $C(-\sqrt{3}, -1, 0)$, $B(\sqrt{3}, -1, 0)$;

$\overrightarrow{MC}(-\sqrt{3}, -1, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{MB}(\sqrt{3}, -1, -\sqrt{3})$.

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) = (0, -1, -\sqrt{3}); \overrightarrow{OM}(0, 0, \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{OM} = -3.$$

5) В $MABC$ вписана сфера.

Найти $S_{\text{сферы}}$.

Решение:

Достроим $\triangle HOM$ до равнобедренного $\triangle HME$, в который вписан большой круг сферы.

$$S(HME) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}; P(HME) = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$\Rightarrow r = \frac{2S}{P} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\text{сферы}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

6)* Найти угол α между MF и (AMC) , $F \in BC$, $BF = FC$.

Решение:

$$F(0, -1, 0), \overrightarrow{MF}(0, -1, -\sqrt{3}), \overrightarrow{AC}(-\sqrt{3}, -3, 0), \overrightarrow{AM}(0, -2, \sqrt{3}),$$

$$\vec{n}(x_0, y_0, z_0); \vec{n} \perp (AMC) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}) = 0: -\sqrt{3}x_0 - 3y_0 = 0 \\ (\vec{n} \cdot \overrightarrow{MA}) = 0: -2y_0 + \sqrt{3}z_0 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_0 = -\sqrt{3}y_0 \\ z_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}y_0 \end{cases}$$

$$\vec{n}\left(\sqrt{3}, -1, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$|\overrightarrow{MF}| = 2; |\vec{n}| = \sqrt{3+1+\frac{12}{9}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Искомый угол $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, где β — угол между \overrightarrow{MF} и \vec{n} .

$$(\overrightarrow{MF} \cdot \vec{n}) = 1 + 2 = 3 = \frac{8}{\sqrt{3}} \cos \beta; \cos \beta = \frac{3\sqrt{3}}{8};$$

$$\beta = \arccos \frac{3\sqrt{3}}{8}; \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta.$$