

# **Решение контрольных и самостоятельных работ по геометрии за 8 класс**

к учебному пособию  
«Дидактические материалы по Геометрии для 8 класса.  
Б.Г. Зив, В.М. Мейлер,  
М.: Просвещение, 2002г»

*учебно-методическое пособие*

# САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

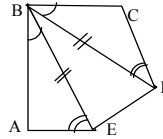
## С-1

### В-1

1. Дано:  $BE = BD$ ,  $\angle DBC = \angle ABE$ ,  $\angle AEB = \angle BDC$ .

Доказать:  $P_{ABDE} = P_{BEDC}$ .

Доказательство: Рассмотрим  $\triangle ABE$  и  $\triangle BCD$ . Они равны по двум углам и стороне между ними. Так что  $AB = BC$ ,  $AE = CD$ ,  $BE = BD$ , значит:  $P_{ABE} = P_{BCD}$ .  $P_{ABDE} = P_{ABE} + P_{BDE} = P_{BDE} + P_{BCD} = P_{BEDC}$ .



2. По формуле:  $\alpha = \frac{180^\circ}{n}(n-2) = \frac{180^\circ}{9} \cdot 7 = 140^\circ$ .

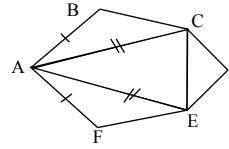
### В-2

1. Дано:  $AB = AF$ ,  $AC = AE$ ,  $\angle BAC = \angle EAF$ .

Доказать:  $P_{ABCE} = P_{ACEF}$ .

Доказательство:  $\triangle ABC = \triangle AEF$  (по двум сторонам и углу между ними). Так что  $BC = EF$ ,  $AB = AF$  и  $AC = AE$ , поэтому  $P_{ABC} = P_{AEF}$ .

$P_{ABCE} = P_{ABC} + P_{ACE} = P_{AEF} + P_{ACE} = P_{ACEF}$ .



2.  $\frac{540^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}(n-2) = \alpha$  — (величина каждого угла);  $n-2 = 3$ ,  $n = 5$ .

### В-3

1. Дано:  $AB = AD$ ,  $BC = CD$ .

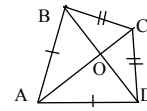
Найти:  $P_{ABCOD}$  — ?  $P_{ABOCD}$  — ?

Решение:  $P_{ABCOD} = AB + BC + CO + OD + DA = 2AB + BC + CO + OD$ ,  $P_{ABOCD} = AB + BO + OC + CD + DA = 2AB + BC + CO + BO$  (т.к.  $BC = CD$  и  $AB = AD$ ).

$\triangle ABC = \triangle ACD$  (по трем сторонам), т.к. в равных треугольниках соответствующие элементы равны, то  $\angle BAO = \angle OAD$ . Тогда  $\triangle ABO = \triangle OAD$  по двум сторонам и углу между ними ( $AB = AD$ ,  $AO$  — общая,  $\angle BAO = \angle OAD$ ). Так что  $BO = OD$  и  $P_{ABCOD} = P_{ABOCD}$ .

2. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника:

$$n \cdot \left( 180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n} \right) = 180^\circ \cdot n - 180^\circ(n-2) = 180^\circ \cdot 2 = 360^\circ.$$



### В-4

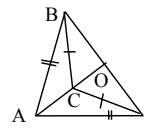
1. Дано:  $AB > BC$ ,  $AB = AD$ ,  $BC = CD$ .

Сравнить  $P_{BCODA}$  и  $P_{DCOBA}$ .

Решение:

$$P_{BCODA} = BC + CO + OD + DA + AB = BC + 2AD + CO + OD, P_{DCOBA} = DC + CO + OB + BA + AD =$$

2



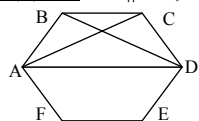
$= BC + 2AD + CO + OB$  (т.к.  $AB = AD$  и  $DC = BC$ ). Т.к.  $\triangle ABC = \triangle ACD$  (по трем сторонам), то  $\angle BAC = \angle CAD$ .  $\triangle BOA = \triangle DOA$  по двум сторонам и углу между ними ( $BA = AD$ ,  $AO$  — общая,  $\angle BAO = \angle OAD$ ), так что  $OB = OD$  и  $P_{BCODA} = P_{DCOBA}$ .

2. Сумма углов  $n$ -угольника  $n \cdot \frac{180^\circ (n-2)}{n} = 180^\circ (n-2)$ ;

$180^\circ (n-2) - 180^\circ ((n-1)-2) = 180^\circ$ , т.о. не зависит от  $n$ .

### В-5

1. Дано:  $AD \parallel BC$ ,  $AB = BC = CD = EF = FA$ ,  $\angle BAD = \angle CDA$ .



Сравнить  $P_{ABDEF}$  и  $P_{ACDEF}$ .

Решение:

$$P_{ABDEF} = AB + BD + DE + EF + FA = 4AF + BD,$$

$$P_{ACDEF} = AC + CD + DE + EF + FA = 4AF + AC$$

(т.к.  $AB = DE = EF = CD = AF$ ). Т.к.  $BC \parallel AD$  и

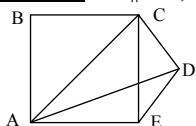
$\angle BAD = \angle ADC$  то  $ABCD$  — равнобокая трапеция, а у нее диагонали равны, т.о.  $AC = BD$ ,  $P_{ABDEF} = P_{ACDEF}$ .

2. Сумма углов  $2n$ -угольника:  $180^\circ (2n-2)$ , т.о.  $180^\circ (2n-2) = k \cdot 180^\circ (n-2)$ ,

$$k = \frac{2n-2}{n-2} = 2 + \frac{2}{n-2}, \text{ т.к. } k \text{ — нечетно и } k \text{ — целое число, то } k = 3.$$

### В-6

1. Дано:  $AC \parallel ED$ ,  $AB = BC = CD = DE = EA$ ,



$$\angle CAE = \angle ACD.$$

Сравнить  $P_{EABC}$  и  $P_{DCBA}$ .

Решение:  $AC \parallel ED$  и  $\angle ACD = \angle CAE$ , так что  $ACDE$  — равнобокая трапеция, т.о.  $CE = AD$ .

$$P_{EABC} = EA + AB + BC + CE = 3AB + CE, P_{DCBA} = DC + CB + BA + AD = 3AB + AD = 3AB + CE \text{ (т.к. } AB = BC = EA = DC \text{ и } CE = AD).$$

Так что  $P_{EABC} = P_{DCBA}$ .

$$2. 180^\circ (n-2) = k \cdot 180^\circ (n-3), k = \frac{n-2}{n-3} = 1 + \frac{1}{n-3}, \text{ т.к. } k \in \mathbb{N}, \text{ то } k = 2.$$

### В-7

1. Рассмотрим произвольный  $n$ -угольник (выпуклый), количество диагоналей: из каждой вершины выходит  $(n-3)$  штуки, а так как число вершин  $n$ , но каждая диагональ соединяет две вершины, то общее число диагоналей  $(n(n-3)) : 2 = 25$ ,  $n^2 - 3n = 50$ ,  $n^2 - 3n - 50 = 0$ ,  $n = (3 \pm \sqrt{209}) : 2$  — не целое число. Значит такого многоугольника не существует.

2. (Из задачи В-3 (2)) сумма внешних углов равна  $360^\circ$ , т.о. может быть только два внешних угла больших  $170^\circ$ , т.о. только два внутренних угла могут быть меньше  $10^\circ$ .

## В-8

1. По предыдущей задаче  $\frac{n(n-3)}{2} = 27$ ,  $n^2 - 3n - 54 = 0$ ,  $n_1 = -6$  и  $n_2 = 9$ .

Так что у 9-угольника 27 диагоналей.

2. Т.к. 5 внутренних углов по  $140^\circ$ , то соответствующие им внешние углы будут по  $40^\circ$ . Т.о.  $5 \cdot 40^\circ = 200^\circ$ , а  $360^\circ - 200^\circ = 160^\circ$  остается на остальные углы, а т.к. они тупые ( $> 90^\circ$ ), то только один тупой внешний угол у этого многоугольника, т.к. их сумма равна  $160^\circ$ , т.о.  $n = 6$ .

## С-2

### В-1

1. Дано:  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ ,  $AC = 20$ ,  
 $BD = 10$ ,  $AB = 13$ .

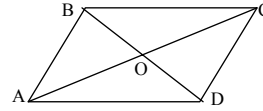
Найти:  $P_{COD}$  — ?

Решение: Так как  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ , то  $ABCD$  — параллелограмм, т.о.  $BO = OD = 5$ ,  $AO = OC = 10$ ,  $AB = CD = 13$ , т.к. в параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам, а противоположные стороны равны:  $P_{COD} = 13 + 5 + 10 = 28$ .

2. Дано:  $BK = (1/2)AB$ .

Найти:  $\angle C$  и  $\angle D$  — ?

Решение:  $\triangle ABK$  — прямоугольный, т.к.  $BK = (1/2)AB$ , то  $\angle A = 30^\circ$ , а т.к.  $ABCD$  — параллелограмм, то  $\angle A = \angle C = 30^\circ$ ,  $\angle D = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ .



### В-2

1. Дано:  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ ,  $P_{AOD} = 25$ ,  
 $AC = 16$ ,  $BD = 14$ .

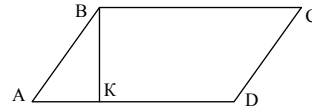
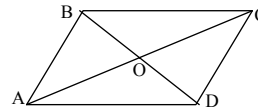
Найти:  $BC$  — ?

Решение: Так как  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ , то  $ABCD$  — параллелограмм, тогда  $AO = OC = 8$ ,  $BO = OD = 7$ ,  $AD = BC$ ,  
 $P_{AOD} = AO + OD + AD = 15 + AD = 25$ , так что  $AD = BC = 10$ .

2. Дано:  $AK = BK$ .

Найти:  $\angle C$  и  $\angle D$  — ?

Решение: Т.к.  $AK = BK$ , то  $\triangle ABK$  равнобедренный и прямоугольный, т.е.  $\angle A = 45^\circ$ , а т.к.  $ABCD$  — параллелограмм, то  $\angle A = \angle C = 45^\circ$ , а  $\angle D = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ .

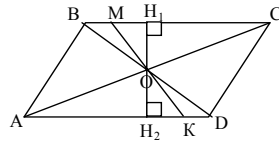


### В-3

1. Дано:  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ,  $AB \parallel CD$ ,  
 $BM = KD$ .

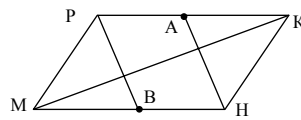
Доказать:  $OM = OK$ .

Доказательство: Так как  $\angle A + \angle B = 180^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$ , а т.к.  $AB \parallel CD$ , то  $ABCD$  — параллелограмм. Проведем высоты  $OH_1$  и  $OH_2$ .



$\angle BOH_1 = \angle H_2OD$  — как вертикальные,  $\angle OBH_1 = \angle H_2OD$  как накрестлежающие при  $BC \parallel AD$ ,  $BO = OD$  (по свойству параллелограмма). Значит  $\triangle BOH_1 = \triangle OH_2D$  (по стороне и двум прилежащим углам). Так что  $BH_1 = DH_2$  и  $OH_1 = OH_2$ . Рассмотрим  $\triangle MH_1O$  и  $\triangle H_2OK$ . Они равны (т.к.  $OH_1 = OH_2$ ,  $H_2K = H_2D - KD = H_1B - BM = H_1M$ ), т.о.  $OM = OK$ .

2. Дано:  $MP = PB = AK$ ,  $\angle MPB = 60^\circ$ .



Найти:  $\angle M$ ,  $\angle P$  — ?

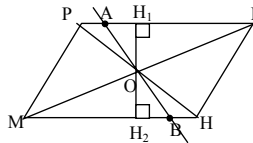
Сравнить:  $BM$  и  $HA$ .

Решение: Т.к.  $MP = PB \Rightarrow \angle M = \angle PBM = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MPB) = 60^\circ$ .

Значит  $\triangle MPB$  — равносторонний и  $BM = PB$ .  $\angle P = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .  $\angle K = \angle M$  (по свойству параллелограмма),  $MP = KH = AK$ , т.о.  $\triangle KAH$  — равносторонний, т.к.  $AK = KH$  и  $\angle AKH = 60^\circ$ ,  $AK = KH = AH$ , т.о.  $BM = PB = AK = AH$ , т.е.  $BM = AH$ .

#### В-4

1. Дано:  $\angle PMK = \angle HKM$ ,  $PK \parallel MH$ .



Доказать:  $AP = HB$ .

Доказательство: Т.к.  $\angle PMK = \angle HKM \Rightarrow PM \parallel KH$ , т.о.  $PKHM$  параллелограмм.

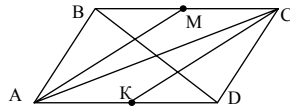
Проведем высоты  $OH_1$  и  $OH_2$ . Рассмотрим  $\triangle AH_1O$  и  $\triangle H_2OB$ .

1.  $\angle OAH_1 = \angle OBH_2$  (как накрестлежающие при  $PK \parallel MH$ ).

2.  $\angle H_2OB = \angle H_1OA$  (вертикальные).

3.  $\angle OH_1A = \angle BH_2O = 90^\circ$ . Т.о.  $\triangle AH_1O = \triangle H_2OB$  (по трем углам)  $\Rightarrow H_2B = AH_1$ , а т.к.  $PH_1 = H_2H$  (из предыдущей задачи), т.о.  $PA = HB$ .

2. Дано:  $AB = BM = KD$ ,  $\angle AMB = 30^\circ$ .



Найти:  $\angle A$  и  $\angle B$  — ?

Сравнить:  $AM$  и  $CK$ .

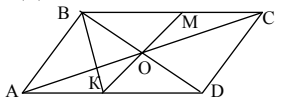
Решение: Задача аналогична предыдущей.

$\angle AMB = \angle BAM = 30^\circ$ ,  $\angle B = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$ ,  $\angle A = 60^\circ$ .

$AB = CD$ , т.о.  $\triangle ABM = \triangle KCD$  (по 2-м сторонам и углу), т.о.  $AM = CK$ .

#### В-5

1. Дано:  $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = 180^\circ$ ,  $\angle BOM = 90^\circ$ .



Доказать:  $BK = BM$ .

Доказательство: Т.к.  $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow AB \parallel CD$  и  $BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$  параллелограмм. Рассмотрим  $\triangle BKM$ ,

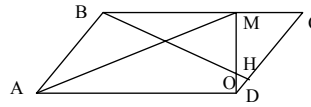
$KO = OM$  (из В-3 (1)), то  $BO$  является высотой и медианой  $\Rightarrow \triangle BKM$  равнобедренный, т.е.  $BK = BM$ .

2. Дано:  $\angle BHD = 95^\circ$ ,  $\angle DMC = 90^\circ$ ,  $\angle BOD = 155^\circ$ .

Найти:  $AB/MD$  — ?  $\angle A$ ,  $\angle B$  — ?

Решение:  $\angle DOH = 180^\circ - \angle BOD = 180^\circ - 155^\circ = 25^\circ$ ,  $\angle MDC = 180^\circ - \angle DOH - \angle OHD = 180^\circ - 25^\circ - 95^\circ = 60^\circ$ .

Т.о.  $\angle C = 30^\circ$ ,  $\angle B = 150^\circ$  (по свойству параллелограмма),  $\angle A = \angle C = 30^\circ$ . Т.о.  $MD = (1/2)CD = (1/2)AB$ , и  $AB/MD = 2$ .



### В-6

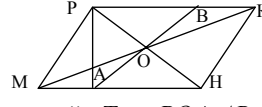
1. Дано:  $\angle M + \angle P = 180^\circ$ ,  $\angle PMK = \angle MKH$ ,  $PB = PA$ .

Доказать:  $HP \perp AB$ .

Доказательство: Т.к.  $\angle M + \angle P = 180^\circ$ , то  $MH \parallel PK$ . Т.к.  $\angle PMK = \angle MKH \Rightarrow MP \parallel KH \Rightarrow MPKH$  параллелограмм.

Задача обратная предыдущей.  $\triangle APB$  — равнобедренный ( $AP = PB$ ).

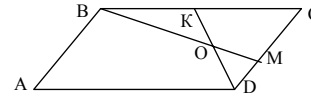
$AO = OB$ , а т.к.  $PO$  — медиана в равнобедренном треугольнике, то она является и высотой. Т.о.  $PO \perp AB$  и  $PH \perp AB$ .



2. Дано:  $\angle BOD = 140^\circ$ ,  $\angle DKB = 110^\circ$ ,  $\angle BMC = 90^\circ$ .

Найти:  $MC/AD$  — ?  $\angle A$ ,  $\angle B$  — ?

Решение:  $\angle BOK = 180^\circ - \angle BOD = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ ,  $\angle CBM = 180^\circ - \angle BOK - \angle DKB = 180^\circ - 40^\circ - 110^\circ = 30^\circ$ ,  $\angle C = 180^\circ - \angle BMC - \angle MBC = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ,  $\angle A = \angle C = 60^\circ$ ,  $\angle B = \angle D = 120^\circ$ . Т.о.  $MC = (1/2)BC = (1/2)AD$ ,  $MC/AD = (1/2)$ .



### В-7

1. Дано:  $\angle KBC = 90^\circ$ .

Доказать:  $BO = OE$ .

Доказательство:  $\triangle BOE = \triangle KOD$ ,

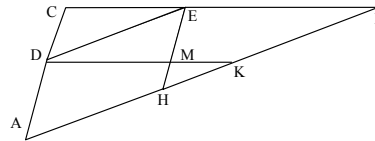
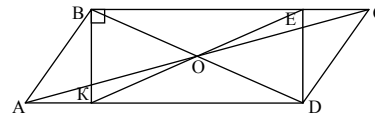
т.к.  $OB = OD$ ,  $KO = OE$  (B-3 (1)),

$\angle KOD = \angle BOE$  (как вертикальные). Так что  $BE = KD$ .  $\triangle BKO = \triangle EOD$  ( $BO = OD$ ,  $KO = OE$ ,  $\angle BOK = \angle EOD$  (как вертикальные)), так что  $BK = ED$ . Т.о.  $BEDK$  — прямоугольник, а в нем диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, т.о.  $BO = OE$ .

2. Т.к.  $DCEM$  — параллелограмм, то  $CD \parallel EM$ , то есть и  $AD \parallel EH$ , а  $DE \parallel AH$ , значит  $ADEH$  — параллелограмм.  $KDEB$  — тоже параллелограмм, т.к.  $KD \parallel EB$ ,  $DE \parallel BK$ .

Т.о.  $AH = DE$  и  $KB = DE$ , т.о.

$AH = KB$ , т.е.  $AK = AH + HK = BK + HK = BH$ .

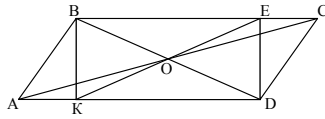


### В-8

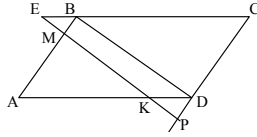
1. Дано:  $BO = OE$ .

Найти:  $\angle KBE$  — ?

Решение: Т.к.  $BO = OE$ ,  $BO = OD$ ,  $KO = OE(B-3(1))$ , то  $EO = OK = OD = BO$ , а  $BEDK$  — четырехугольник в котором диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам. Так что  $BEDK$  — прямоугольник, т.о.  $\angle KBE = 90^\circ$ .



2. Дано:  $MK \parallel BD$ .



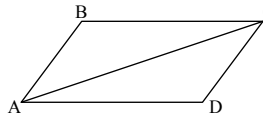
Доказать:  $EM = KP$ .

Доказательство:  $EBDK$  и  $BMPD$  — параллелограммы, т.к.  $BD \parallel EP$ ,  $PD \parallel BM$  и  $EB \parallel KD$ , т.о.  $EK = BD = MP$ , т.е.  $EM = EK - MK = MP - MK = KP$ .

### C-3

#### B-1

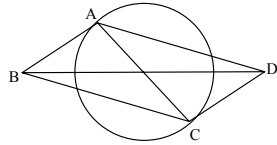
1. Дано:  $AB = CD$ ,  $\angle B = 70^\circ$ ,  $\angle ACD = 50^\circ$ ,  $\angle BCA = 60^\circ$ .



Доказать:  $BC = AD$ .

Доказательство:  $\angle BAC = \angle ABC - \angle ACB = 180^\circ - 70^\circ - 60^\circ = 50^\circ = \angle ACD$ . Т.о.  $AB \parallel CD$  (т.к.  $\angle BAC = \angle ACD$ ), а т.к.  $AB = CD$ ,

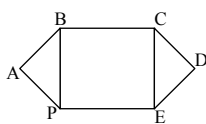
то  $ABCD$  — параллелограмм,  $AD = BC$ .



2.  $ABCD$  — параллелограмм (т.к. диагонали  $AC$  и  $BD$  точкой пересечения делятся пополам). Т.е.  $\angle ABC = \angle ADC$ .

#### B-2

1. Дано:  $AB = BC = CD = DE = EP = PA$ ,  $\angle A = \angle D$ .



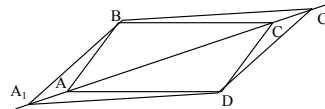
Доказать:  $BP \parallel CE$ .

Доказательство:  $\triangle ABP = \triangle CDE$  по двум сторонам и углу ( $AB = AP = CD = CE$ ,  $\angle A = \angle D$ ). Т.е.  $BP = CE$ , т.к.  $BC = PE$ , то  $BCEP$  — параллелограмм, т.е.  $BP \parallel CE$ .

2. Дано:  $AA_1 = CC_1$ .

Доказать:  $\angle BA_1D = \angle BC_1D$ .

Доказательство:  $\angle A_1AB = \angle C_1CD$  (т.к.  $\angle BAC = \angle ACD$ ). Т.о.  $\triangle A_1AB = \triangle C_1CD$  ( $AA_1 = CC_1$ ,  $BA = CD$ ,  $\angle A_1AB = \angle C_1CD$ ), так что  $\angle BA_1A = \angle CC_1D$ ,  $\angle A_1AD = \angle BCC_1$  (т.к.  $\angle CAD = \angle ACB$ ). Т.о.  $\triangle A_1DA = \triangle BCC_1$  ( $AA_1 = CC_1$ ,  $AD = BC$ ,  $\angle A_1AD = \angle BCC_1$ ). Т.о.



$\angle AA_1D = \angle CC_1B$ , так что  $\angle A_1 = \angle BA_1A + \angle DA_1A = \angle DC_1C + \angle CC_1B = \angle C_1$ .

### В-3

1. Дано:  $PK = MB$ ,  $\angle KPC = 80^\circ$ ,  $\angle C = 50^\circ$ .

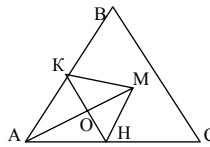
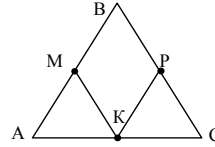
Доказать:  $\angle KMB + \angle MBP = 180^\circ$ .

Доказательство:  $\angle A = \angle C = 50^\circ$  (т.к.  $\triangle ABC$  — равнобедренный),  $\angle B = 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 80^\circ$ . Т.к.  $\angle B = \angle KPC$ , от  $MB \parallel KP$ , а т.к.  $PK = MB$ , то  $MBPK$  — параллелограмм, т.е.  $\angle KMB + \angle MBP = 180^\circ$ .

2. Дано:  $AO = OM$ ,  $KO = OH$ ,  $\angle KMH = \angle C$ .

Доказать:  $ABC$  — равнобедренный.

Доказательство:  $AKMH$  — параллелограмм, т.к. диагонали  $KH$  и  $AM$  точкой пересечения делятся пополам. Т.о.  $\angle KMH = \angle A = \angle C \Rightarrow \triangle ABC$  — равнобедренный.



### В-4

1. Дано:  $\angle M = 65^\circ$ ,  $PC = CK = AM$ ,

$BP = AC$ ,  $\angle BAM = 50^\circ$ .

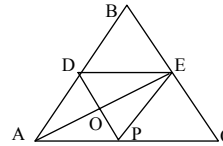
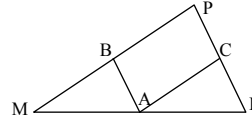
Доказать:  $\angle CPB + \angle ABP = 180^\circ$ .

Доказательство:  $\angle MBA = 180^\circ - \angle BAM - \angle M = 180^\circ - 50^\circ - 65^\circ = 65^\circ = \angle M$ , так что  $\triangle ABM$  — равнобедренный, т.е.  $MA = BA = PC$ , т.е.  $BPCA$  — параллелограмм, т.е.  $\angle CPB + \angle ABP = 180^\circ$ .

2. Дано:  $DO = OP$ ,  $AO = OE$ .

Доказать:  $\angle DEP = \angle BCA$ .

Доказательство: Аналогично предыдущей задаче. Т.к.  $ADEP$  — параллелограмм, то  $\angle DEP = \angle A = \angle C$ .



### В-5

1. Дано:  $AM = MB$ ,  $BK = KC$ ,  $AB \parallel EC$ .

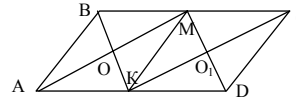
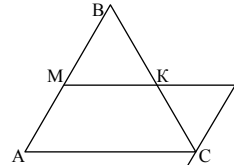
Доказать:  $KE = (1/2)AC$ .

Доказательство:  $MK \parallel AC$  (средняя линия треугольника),  $AM \parallel CE$  по условию. Т.о.  $AMEC$  — параллелограмм. Т.к.  $MK = (1/2)AC$ , то  $KE = MK = (1/2)AC$ .

2. Дано:  $AO = OM$ ,  $BO = OK$ ,  $KO_1 = O_1C$ ,  $MO_1 = O_1D$ .

Доказать:  $\angle BAD = \angle BCD$ .

Доказательство:  $ABMK$  и  $KMCD$  — параллелограммы (т.к. их диагонали делятся точкой пересечения пополам), так что  $BM \parallel AK$ ,  $MC \parallel KD$  и  $BM = AK$ ,  $MC = KD \Rightarrow AD \parallel BC$  и  $AD = BC$ , так что  $ABCD$  — параллелограмм, т.е.  $\angle A = \angle C$ .

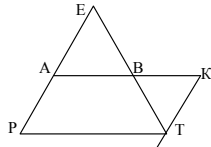


### В-6

1. Дано:  $AP = KT$ ,  $AB = BK = (1/2)PT$ .

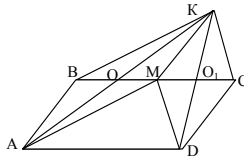
Доказать:  $PE = 2PA$ .





Доказательство: Т.к.  $AP = KT$  и  $AK = PT$ , то  $PAKT$  – параллелограмм, т.е.  $AK \parallel PT$ . Таким образом, т.к.  $AB = (1/2)PT$ , и  $AB \parallel PT$ , то это средняя линия, т.е.  $PA = AE \Rightarrow PE = 2PA$ .

2. Дано:  $AO = OK$ ,  $BO = OM$ ,  $MO_1 = O_1C$ ,  $KO_1 = O_1D$ .



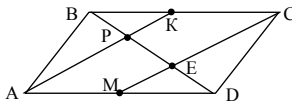
Доказать:  $\angle ABC = \angle ADC$ .

Доказательство:  $ABKM$  и  $MKCD$  – параллелограммы (см. предыдущую задачу).

Т.о.  $AB = MK = CD$  и  $AB \parallel MK \parallel CD$ . Т.о.  $ABCD$  – параллелограмм, т.е.  $\angle ABC = \angle ADC$ .

## В-7

1. Дано:  $AK \parallel CM$ ,  $PK = EM$ ,  $BP = ED$ ,  $KC = AM$ .



Доказать:  $\angle BAD = \angle BCD$ .

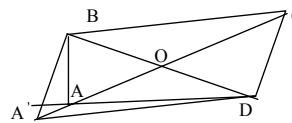
Доказательство: Т.к.  $AK \parallel MC$ , то  $\angle MED = \angle BPK$ , а т.к.  $PK = EM$  и  $BP = ED$ , то  $\triangle BPK = \triangle MED$  (по 2-м сторонам и углу). Т.е.  $\angle MDB = \angle DBC$  (т.е.  $BC \parallel AD$  и  $MD = BK$ )  $\Rightarrow BC = AD$ , т.е.

$ABCD$  – параллелограмм, т.е.  $\angle BAD = \angle BCD$ .

2. Дано:  $BO = OD$ ,  $AO < OC$ .

Доказать:  $\angle BAD > \angle BCD$ .

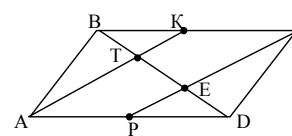
Доказательство: Отметим точку  $A'$  на луче  $CA$ , так что  $A'O = OC$ .



$A'BCD$  – параллелограмм, т.к.  $BD$  и  $A'C$  – диагонали, которые пересекаются в середине. Очевидно, что  $\angle BAD > \angle A'$ , т.к.  $\angle A' = \angle C \Rightarrow \angle BAD > \angle C$ .

## В-8

1. Дано:  $KC = AP$ ,  $AT = EC$ ,  $TK = EP$ .



Доказать:  $\angle ABC = \angle ADC$ .

Доказательство: Т.к.  $AT = EC$  и  $TK = EP$ , то  $AK = CP$ .  $AP = KC$  и  $AK = CP$ , значит  $AKCP$  – параллелограмм. Т.е.  $AP \parallel KC$ , и  $AK \parallel PC$ . Т.к.  $AK \parallel PC$  и  $AP \parallel KC$ , то  $\angle CPD = \angle BKA$  и  $\angle BTK = \angle PED$ . Т.о.  $\triangle PED = \triangle BTK$  (по стороне и 2-м углам), т.е.  $BK = PD$ , а т.к.  $KC = AP$ , то  $BC = AD$ , но  $BC \parallel AD$ , значит  $ABCD$  – параллелограмм, т.е.  $\angle ABC = \angle ADC$ .

2. Допустим утверждение неверно, т.е.  $AO \geq OC$ . Тогда из предыдущей задачи  $\angle BAD \leq \angle BCD$ , т.е. пришли к противоречию, т.е.  $AO < OC$ .

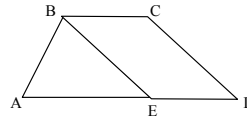
**С-4**

**В-1**

1. Дано:  $BE \parallel CD$ ,  $\angle ABE = 70^\circ$ ,  $\angle BEA = 50^\circ$ .

Найти: углы — ?

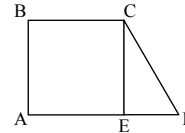
Решение:  $\angle A = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ$ . Т.к.  $BE \parallel CD$ , то  $\angle D = \angle AEB = 50^\circ$ . Т.к.  $ED \parallel BC \Rightarrow \angle C = 180^\circ - \angle D = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$  и  $\angle EBC = \angle D = 50^\circ$ . Т.о.  $\angle B = 70^\circ + 50^\circ = 120^\circ$ .



2. Дано:  $\angle D = 45^\circ$ ,  $AB = BC = 10$ .

Найти:  $AD$  — ?

Решение: Т.к.  $\angle D = 45^\circ$ , то  $ED = CE = AB = 10$  см.  $AE = BC = 10$  см. Т.о.  $AE + ED = 20$  см.

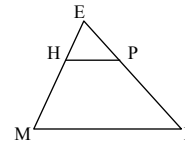


**В-2**

1. Дано:  $\angle MEK = 80^\circ$ ,  $\angle EHP = 40^\circ$ .

Найти: углы — ?

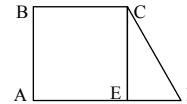
Решение:  $\angle HPK = \angle EHP + \angle HEP = 80^\circ + 40^\circ = 120^\circ$  (внешний угол  $\triangle HEP$ ). Т.к.  $HP \parallel MK$ , то  $\angle M = \angle EHP = 40^\circ$ ,  $\angle PHM = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ ,  $\angle K = 180^\circ - \angle HPK = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ$ .



2. Дано:  $\angle D = 60^\circ$ ,  $AD = CD = 20$ .

Найти:  $BC$  — ?

Решение:  $\angle ECD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ . Так как напротив угла в  $30^\circ$  лежит катет равный половине гипотенузы, то  $ED = (1/2) \cdot CD = (1/2) \cdot 20 = 10$ .  $BC = AE = AD - ED = 10$ .



**В-3**

1. Дано:  $AB = CD = BC$ ,  $\angle ACD = 120^\circ$ .

Найти: углы — ?

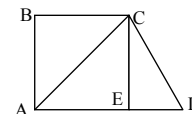
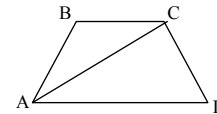
Решение:

Пусть  $\angle BCA = \alpha$ , тогда т.к.  $AB = BC = CD$ ,  $\triangle ABC$  — равнобедренный и  $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ . Т.к.  $BC \parallel AD$ , то  $\angle CAD = \angle BCA = \alpha$ . Т.к. трапеция равнобокая, то  $\angle D = \angle BAD$ , т.е.  $180^\circ - \angle CAD - \angle ACD = \angle BAC + \angle CAD$ ,  $60^\circ - \alpha = 2\alpha$ ,  $\alpha = 20^\circ$ , т.о. углы:  $\angle D = 40^\circ$ ,  $\angle C = 140^\circ$ ,  $\angle B = 140^\circ$ ,  $\angle A = 40^\circ$ .

2. Дано:  $\angle ACB = \angle D = 60^\circ$ .

Найти:  $AD/BC$  — ?

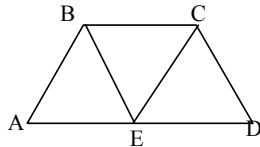
Решение:  $\angle BAC = \angle ECD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow ED = (1/2)CD$ ,  $BC = (1/2)AC$  (из предыдущей задачи). Т.к.  $BC \parallel AD$ , то  $\angle CAD = \angle BCA = 60^\circ$ , т.о.  $AC = CD$  (т.к.  $\triangle ACD$  — равносторонний). Т.о.  $ED = AE = BC$  и  $AD/BC = 2$ .



**В-4**

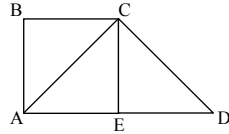
1. Дано:  $AD = 2BC$ ,  $BE = EC = BC$ .

Найти:  $\angle A, \angle B$  — ?



$$\angle B = 180^\circ - (2 \cdot 60^\circ) = 60^\circ.$$

2. Дано:  $\angle D = 45^\circ, \angle ACD = 90^\circ$ .



Решение: Т.к.  $AD = 2BC$ , то  $AE = BC = ED$ .  
Т.к.  $BC = BE = EC$ , то  $\triangle BCE$  — правильный.  
Т.е.  $\angle CBE = 60^\circ = \angle BEA$  (т.к.  $BC \parallel AD$ ). Т.к.  
 $BE = AE$ , то  $\angle A = \angle ABE$ , так что  $\angle A =$   
 $= (180^\circ - \angle BEA) \cdot (1/2) = (180^\circ - 60^\circ) \cdot (1/2) = 60^\circ$ ,

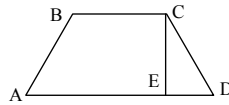
Найти:  $AD/BC$  — ?

Решение: Т.к.  $\angle D = 45^\circ$ , то  $\angle CAD = 180^\circ -$   
 $-\angle ACD - \angle D = 45^\circ$ ,  $\angle ACE = 90^\circ - \angle CAD =$   
 $= \angle CAD = 45^\circ$ . Так что  $CE = AE = BC = ED$ , т.е.  
 $AD/BC = (AE + ED)/BC = (2BC)/BC = 2$ .

### В-5

1. Дано:  $AB = CD, CE \perp AD$ .

Доказать:  $AE = (1/2)(AD + BC)$ .



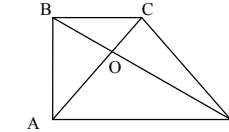
Доказательство:

Т.к.  $AB = CD$ , то  $ED = (AD - BC)(1/2)$ .

Т.о.  $AE = AD - ED = AD - (1/2)AD + (1/2)BC =$   
 $= (1/2)(AD + BC)$ .

2. Дано:  $\angle ABD = 60^\circ, BD \perp AC$ .

Доказать:  $AC = (1/2)(BC + AD)$ .

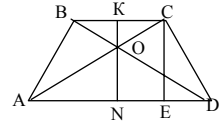


Доказательство: Т.к.  $\angle ABD = 60^\circ$ , то  $\angle ADB =$   
 $30^\circ$ . Т.е.  $AD = 2AO$  (т.к. против угла в  $30^\circ$  ле-  
жит катет равный половине гипотенузы). Так  
как  $BC \parallel AD$ , то  $\angle ADO = \angle BCO = 30^\circ \Rightarrow BC =$   
 $2CO$ , т.е.  $CA = OC + OA = (1/2)(AD + BC)$ .

### В-6

1. Дано:  $\angle AOD = 90^\circ$ .

Доказать:  $CE = (1/2)(AD + BC)$ .

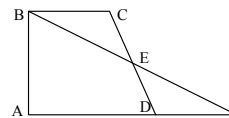


Доказательство: Проведем  $OK \perp BC$  и  $ON \perp AD$ .  
 $\triangle ABO$  и  $\triangle DCO$  — прямоугольные, и  $AB = CD$  и  
 $\angle BOA = \angle COD$  (вертикальные), так что  
 $\triangle BOA \cong \triangle COD$  и  $BO = OC$  и  $AO = OD$ .

Т.о.  $OK = (1/2)BC$  и  $ON = (1/2)AD$  (т.к. высота в

равнобедренном прямоугольнике треугольника равна половине гипо-  
тенузы). Т.о.  $CE = OK + ON = (1/2)(AD + BC)$ .

2. Дано:  $CE = ED, \angle EBC = 45^\circ$ .



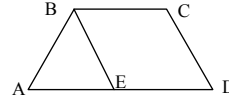
Доказать:  $AB = AD + BC$ .

Доказательство: Продлим  $AD$  до пересечения  
с  $BE$  в точке  $F$ .  $\triangle DEF \cong \triangle ECB$  по двум сто-  
ронам и углу между ними ( $CE = ED, BE = EF$

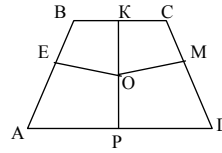
(по теореме Фалеса),  $\angle BEC = \angle DEF$  как вертикальные). Т.о.  $DF = BC$ ,  $\angle AFB = \angle EBC = 45^\circ$ , т.о.  $AB = AF = AD + DF = AD + BC$ .

#### В-7

1. Проведем  $BE \parallel CD$ . Т.к.  $BCDE$  – параллелограмм, так что  $DE = BC$  и,  $BD = CE$ , так что  $AE = AD + DE = AD + BC < AC + CE = AC + BD$ .

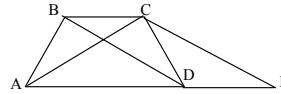


2. Проведем перпендикуляры как показано на рисунке.  $\triangle OKC = \triangle OCM$  по катету и гипотенузе ( $OM = OK$  и  $OC$  — общая). Т.о.  $KC = CM$ . Аналогично  $MD = DP$ ,  $PA = AE$ ,  $EB = BK$ . Т.о., сложив эти четыре равенства, получаем  $BC + AD = AB + CD$ .

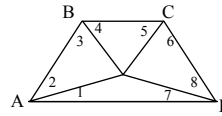


#### В-8

1. Продлим луч  $AD$  до точки  $E$  так, что  $BD \parallel CE$ . Т.к.  $BCED$  – параллелограмм, то  $AE = AD + BC < AC + CE = CA + BD$ .



2. Т.к. в трапеции сумма углов равна  $360^\circ$ , то  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360^\circ$ , но  $\angle 1 = \angle 7$ ,  $\angle 2 = \angle 3$ ,  $\angle 4 = \angle 5$ ,  $\angle 6 = \angle 8$ . Т.к. треугольники  $AOD$ ,  $DOC$ ,  $COB$  и  $BOA$  — равнобедренные, то есть  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6 = \angle 7 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 8 = 180^\circ$ , т.е.  $\angle C + \angle A = 180^\circ$ ,  $\angle B + \angle D$ .



#### С-5

##### В-1

1. Сначала нарисовать известную сторону и отложить от нее данный угол, затем провести меньшую диагональ и соединить ее конец с противоположным концом нашей стороны. Т.о. мы имеем уже три точки параллелограмма. Чтобы построить четвертую необходимо параллельным переносом перенести большую сторону и отложить ее от конца диагонали.

2. Нарисовать меньшее основание, отложить от него перпендикулярную прямую, отмерить на ней меньшую боковую сторону. Затем из конца ее отложить луч, параллельный меньшему основанию в ту полуплоскость, где и это основание. Из второй вершины меньшего основания провести окружность радиусом большей стороны. Она пересечет луч в двух точках. Необходимо взять дальнюю от перпендикулярной прямой.

##### В-2

1. Необходимо нарисовать меньшую сторону, затем от нее отложить острый угол и провести прямую, которая должна содержать большую сторону, затем от меньшей стороны (с другого конца) отложить второй угол и провести прямую, которая должна содержать меньшее ос-

нование. В точке пересечения этих прямых будет третья вершина. Чтобы получить четвертую необходимо перенести меньшую сторону параллельным переносом и отложить ее от третьей вершины.

2. Построим треугольник по трем сторонам. Его основание большее основание трапеции. Из вершины, противоположной основанию проведем прямую, параллельную основанию из конца основания (из которого выходит диагональ). Проведем перпендикулярную прямую. Точка пересечения этих прямых и будет четвертой вершиной.

### **В-3**

1. Сначала необходимо поделить диагонали пополам и построить треугольник, стороны которого будут являться стороной и половинками диагоналей. Затем эти диагонали продлить вдвое. Т.о. мы будем иметь все 4 вершины.

2. Нарисуем большую сторону. Затем проведем параллельную ей прямую на расстоянии, равном высоте трапеции (см. В-5(1)). Затем из обоих концов основания проведем окружность с радиусом, равным боковой стороне. Отрезок между ближайшими точками пересечения этих окружностей с прямой будет меньшим основанием.

### **В-4**

1. Сначала нарисуем меньшую диагональ. Затем отложим от нее угол между ней и меньшей стороной и проведем прямую, содержащую меньшую сторону. Затем необходимо поделить диагональ пополам и отложить от нее угол между диагоналями, и провести прямую, содержащую вторую диагональ. В точке пересечения наших прямых будет третья вершина. Четвертую можно получить, отмерив от точки пересечения диагоналей расстояние равное расстоянию от третьей вершины до точки пересечения диагоналей по большей диагонали.

2. Построим большее основание. Затем прямую параллельную ему на расстоянии высоты трапеции (см. В-5(1)). Из концов основания проведем 2 окружности с радиусами диагонали. Необходимо взять те 2 точки, чтобы отрезки, проведенные из концов основания к ним, пересекались и были равны.

### **В-5**

1. Нарисуем известную сторону. Затем нарисуем перпендикулярную ей прямую, которая должна содержать наш отрезок. Затем отложим на ней расстояние, равное нашему отрезку, и проведем прямую перпендикулярную этому отрезку (она должна содержать 2-ю сторону). Затем, поставив циркуль в конец нашей стороны, проведем окружность с радиусом равным диагонали. Т.о. получим третью вершину. От нее необходимо отложить по данной прямой отрезок, равный нашей стороне (причем необходимо его откладывать в сторону 2-ой точки пересечения окружности с прямой). 2. Нарисуем две параллельные прямые (содержащие основания) на расстоянии высоты трапеции друг

(содержащие основания) на расстоянии высоты трапеции друг от друга (см. В-5(1)). Из произвольной точки на прямой строим боковую сторону (отложив острый угол от прямой и проведя прямую до пересечения с другой прямой). Затем проводим окружность с радиусом диагонали (берем точку, которая лежит в правой полуплоскости от боковой стороны). Затем из точки пересечения боковой стороны и меньшего основания проводим окружность с радиусом диагонали. Берем точку так, чтобы диагонали пересекались.

#### **В-6**

1. Разделим 2-е диагонали, а высоту пополам и построим треугольник по двум сторонам (половинками диагоналей) и высоте (половинка высоты). Затем достроить его до параллелограмма (В-3(1)).

2. Нарисуем две параллельные прямые (содержащие основания трапеции) на расстоянии высоты трапеции друг от друга (см. В-5 (1)). На любой прямой отложим угол, равный углу между меньшим основанием и диагональю, и проведем прямую до точки пересечения с другой прямой (это будет диагональ), а дальше как в предыдущей задаче (острый угол равен  $180^\circ$  – тупой).

#### **В-7**

1. Нарисовать сторону, отложить от нее данный угол и провести луч, который должен содержать вторую сторону. Затем в другую вершину стороны воткнуть циркуль и провести окружность с радиусом, равным диагонали. В точке пересечения окружности с лучом будет третья вершина. Далее параллельным переносом получим четвертую.

2. Пусть необходимо построить трапецию  $ABCD$  с большим основанием  $AD$ . Продлим луч  $AD$  до точки  $E$  ( $CE \parallel BD$ ). Т.о.  $CE = BD$ ,  $\angle ACE = \angle AOD$  ( $O$  – точка пересечения диагоналей). Т.о. можно построить  $\triangle ACE$  по двум сторонам и углу между ними. Точку  $D$  получаем, проведя окружность из точки  $C$  радиусом  $CD$ . Из точки  $C$  откладываем отрезок параллельный  $AD$  и равный  $DE$ .

#### **В-8**

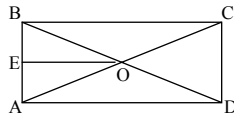
1. Нарисуем диагональ и от обеих сторон отложим равные углы (которые нам даны) и проведем две прямые, которые содержат две параллельные стороны. Затем воткнуть циркуль в один конец диагонали, провести окружность с радиусом, равным данной стороне (получится третья вершина). Параллельным переносом получим четвертую.

2. Пусть необходимо построить трапецию  $ABCD$  с большим основанием  $AD$ . Поставим точку  $E$  на  $AD$  так, чтобы  $BE \parallel CD$ . Т.о.  $DE = CE$ ,  $AE = AD - BC$ . Т.о. мы можем построить  $\triangle ABE$  по трем сторонам. Далее продлим  $AE$  до  $AD$  ( $AD = AE + BC$ ), проведем  $BC$  так, чтобы  $BC \parallel AD$ .

**С-6**

**В-1**

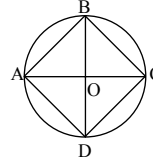
1. Дано:  $AE = EB$ ,  $\angle BAC = 50^\circ$ .



Найти:  $\angle EOD$  – ?

Решение: Т.к.  $AO = BO$ , то  $\angle ABD = \angle BAC = 50^\circ$ ,  
 $\angle BOA = 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 80^\circ$ ,  $\angle AOD = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ . Т.к.  $BO = OA$ ,  $EB = EA$ , то  $\triangle BEO = \triangle AEO$  (по трем сторонам). Так что  $\angle BEO = \angle OEA = 90^\circ$ ,  $\angle EOA = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ . Т.о.  $\angle EOD = 100^\circ + 40^\circ = 140^\circ$ .

2. Т.к.  $BD$  и  $AC$  диаметры, то  $BD = AC$ , т.к. они точкой пересечения делятся пополам  $\Rightarrow ABCD$  – прямоугольник.

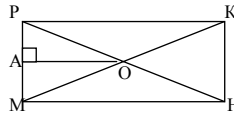


**В-2**

1. Дано:  $OA \perp PM$ ,  $\angle AOP = 15^\circ$ .

Найти:  $\angle OHK$  – ?

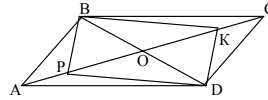
Решение: Т.к.  $\triangle POM$  равнобедренный (свойство прямоугольника), то  $OA$  – биссектриса, т.о.  $\angle POM = 30^\circ = \angle KOH$  (вертикальные).  $\triangle OKH$  тоже равнобедренный  $\Rightarrow \angle OHK = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$ .



2. Дано:  $PO = OD$ ,  $OK = OB$ .

Доказать:  $PBKD$  – прямоугольник.

Доказательство: Т.к.  $PO = OD$  и  $OK = OB$ , то сложив  $PO + OK = OD + OB$ .  $PK = BD$ , учитывая, что  $BO = OD$ , получаем  $PBKD$  – прямоугольник.



**В-3**

1. Дано:  $\angle BOH = 60^\circ$ ,  $AH = 5$ .

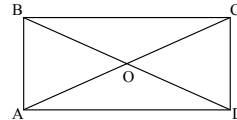
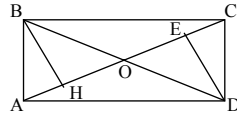
Найти:  $OE$  – ?

Решение: Т.к.  $\angle BOH = 60^\circ$  и  $BO = AO \Rightarrow \triangle ABO$  – правильный  $\Rightarrow AH = HO = 5$ . Так как  $CO = OD$  и  $\angle COD = \angle BOA = 60^\circ$ , то  $\triangle COD$  тоже правильный и  $OE = EC = (1/2)OC = (1/2)AO = AH$ , т.е.  $OE = AH = 5$ .

2. Дано:  $AO = OD$ ,  $BO = OC$ ,  $\angle BAC = \angle DCA$ .

Найти:  $\angle ABC$  – ?

Решение: Т.к.  $BO = OC$ ,  $AO = OD$  и  $\angle BOA = \angle COD$  (вертикальные), то т.к.  $\angle BAC = \angle ACD \Rightarrow AB \parallel CD$ .  $\triangle BOA = \triangle OCD$  (по углу и 2-м сторонам)  $\Rightarrow AB = CD \Rightarrow ABCD$  параллелограмм  $\Rightarrow BO = OD \Rightarrow AO = OC \Rightarrow ABCD$  – прямоугольник  $\Rightarrow \angle B = 90^\circ$ .



#### В-4

1. Дано:  $MA = OB$ .

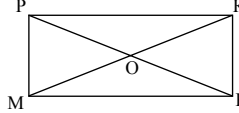
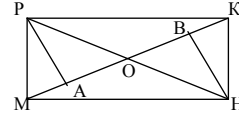
Найти:  $\angle POM$  — ?

Решение:  $\angle PMA = \angle HKB$  (т.к.  $PM \parallel KH$ ),  $PM = KH$  и  $\angle KBH = \angle MAP = 90^\circ$ , значит  $\triangle PMA = \triangle HKB$  (по гипотенузе и острому углу). Значит  $AM = KB$ . То есть  $OB = KB$ . Значит  $HB$  — медиана и высота, значит  $\triangle OHK$  — равносторонний и  $\angle KOH = 60^\circ$ ,  $\angle POM = \angle KOH$  (вертикальные), значит  $\angle POM = 60^\circ$ .

2. Дано:  $\angle OMH = \angle OHM$ ,  $PH = MK$ ,  $PK = MH = OB$ .

Найти:  $\angle MHK$  — ?

Решение: Так как  $\angle OMH = \angle OHM$ , то  $OM = OH$ , а так как  $PH = MH$ , то  $PO = OK$ , а  $PK = MH$  по условию, значит  $\triangle POK = \triangle MOH$  (по 3-м сторонам), так что  $MO = OK = OP = OH$ , т.е.  $PKHM$  — прямоугольник и  $\angle MHK = 90^\circ$ .



#### В-5

1. Дано:  $AM = MB$ ,  $AK = AD$ ,  $MP \perp AC$ ,

$KE \perp BD$ ,  $4KE = AD$ .

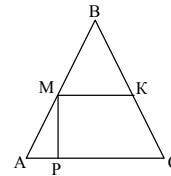
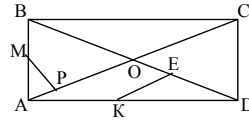
Найти:  $AP/PC$  — ?

Решение: Т.к.  $AK = KD$  т.е.  $2KE = KD$ , т.о.  $\angle BDA = 30^\circ$ , т.к. против угла в  $30^\circ$  лежит катет равный половине гипотенузы, т.е.  $\angle ABO = 60^\circ$ , значит,  $\triangle ABO$  — равносторонний. Т.е.  $\angle MAP = 60^\circ$  и  $\angle AMP = 30^\circ \Rightarrow AP = (1/2)AM = (1/4)AB = (1/4)AD = (1/8)AC$ . Значит  $PC = (7/8)AC$  и  $AP/PC = 1/7$ .

2. Дано:  $AM = CK$ ,  $2MK = AC = 4AP$ .

Найти:  $\angle PMK$  — ?

Решение: Т.к.  $2MK = AC$  и  $AM = KC$ , то  $MK$  — средняя линия. Т.к.  $AP = (1/4)AC$ , т.е.  $2AP + MK = AC$ , т.е.  $\angle PMK = 90^\circ$ .



#### В-6

1. Дано:  $MC/CK = 1:7$ ,  $MA = AP$ ,  $MB = BH$ ,

$AC \perp MK$ .

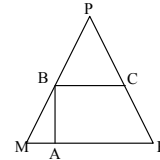
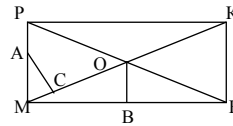
Найти:  $BO : PH$  — ?

Решение: Т.к.  $MC/CK = 1/7$ , то  $MC = (1/8)MK = (1/4)MO = (1/2)MA$  (из предыдущей задачи), т.е.  $\angle MAC = 30^\circ = \angle OMH = \angle OHM$ , т.к.  $\angle OHM = 30^\circ$ , то  $BO = (1/2)OH = (1/4)PH$ .

2. Дано:  $MA = (1/4)MK$ ,  $BC \parallel MK$ ,  $BC = 2MA$ .

Найти:  $\angle MAB$  — ?

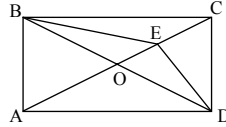
Решение: задача аналогична предыдущей, т.к.  $MK = 4MA = 2BC$ , то  $BC$  — средняя линия,  $\Rightarrow \angle MAB = 90^\circ$ .





### В-7

1. Дано:  $\angle EDC = \angle CAD = 15^\circ$ .



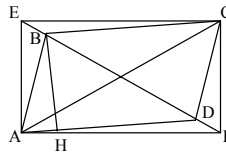
Доказать:  $BE < 5ED$ .

Доказательство: Т.к.  $\angle CAD = 15^\circ$ , то  $\angle ACD = 75^\circ$ .  
Т.е.  $\angle CED = 90^\circ$ . Т.к.  $AO = OD$  (по св-ву прямоугольника), то  $\angle ODA = \angle CAD = 15^\circ$ ,  $\angle EDO = 90^\circ - \angle ODA - \angle EDC = 90^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 60^\circ$ , т.е.

$$\angle EOD = 30^\circ \Rightarrow ED = (1/2)OD = (1/4)BD.$$

Из  $\triangle BDE$ :  $BE < ED + BD = 5ED$ .

2. Дано:  $\angle BAE + \angle BCE = 60^\circ$ ,  $AB = 10$ .



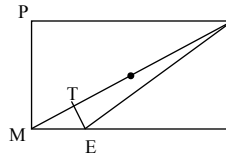
Найти:  $BH$  — ?

Решение: Пусть луч  $BD$  пересекает окружность в точке  $P$ . т.е.  $ECPA$  — прямоугольник (В-1 (2)).

$\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ACB) = 180^\circ - (180^\circ - 60^\circ - 90^\circ) = 150^\circ$ . Т.о.  $\angle BAD = 30^\circ$ , т.е.  $BH = (1/2)AB = 5$ .

### В-8

1. Дано:  $\angle KEH = 30^\circ$ ,  $ET \perp MK$ ,  $\angle KMH = 15^\circ$ .



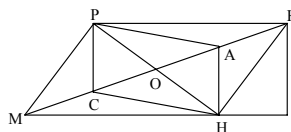
Доказать:  $PT > 0,49 KH$ .

Доказательство:  $\angle TEM = 90^\circ - \angle KMH = 75^\circ$ ,  
 $\angle TEK = 180^\circ - \angle TEM - \angle KEH = 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ$ . Т.е.  $\angle TKE = 15^\circ$ , т.е.  $\triangle MEK$  — равнобедренный  $\Rightarrow ME = EK \Rightarrow TE$  — медиана и  $MT = TK$ . Т.к.  $\triangle KHM$  — прямоугольный

$KH < MK = 2MT = 2PT$  (т.к. точка  $T$  — точка пересечения диагоналей), т.е.  $PT > 0,5KH > 0,49KH$ .

2. Дано:  $\angle KPA + \angle KHA = 45^\circ$ ,  $KB = 10$ .

Найти:  $HB$  — ?

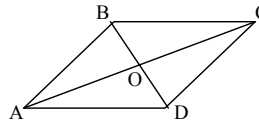


Решение:  $APCH$  — прямоугольник (В-1 (2)).  $\angle PKH = 180^\circ - \angle KPH - \angle PHK = 180^\circ - (90^\circ + \angle KPA + \angle KHA) = 45^\circ$ . Т.о.  $\angle KHB = 45^\circ$ , т.е.  $\triangle HBK$  — равнобедренный  $\Rightarrow HB = KB = 10$ .

### С-7

#### В-1

1. Дано:  $\angle A = 31^\circ$ .



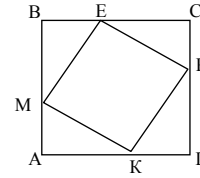
Найти: углы  $\triangle BOC$  — ?

Решение:  $\angle BAO = (31^\circ/2) = 15^\circ 30'$  (по свойству ромба).  $\angle BAO = \angle BCO = 15^\circ 30'$ . По свойству ромба  $\angle BOC = 90^\circ$ , так что  $\angle OBC = 90^\circ - \angle OCB = 74^\circ 30'$ .

2. Дано:  $AK = PD = EC = BM$ .

Доказать:  $MEPK$  – квадрат.

Доказательство:  $\triangle BEM = \triangle MAK$  ( $AK = BM$  и  $BE = CB - EC = BA - BM = MA$ ) и аналогично с другими треугольниками. Т.о.  $MK = KP = PE = EM$ . Так как  $\angle BEM = \angle AMK$ , то  $\angle EMB = 90^\circ - \angle AMK \Rightarrow \angle EMK = 90^\circ$  (аналогично с другими углами)  $\Rightarrow MEPK$  – квадрат.



## В-2

1. Дано:  $\angle EPK = 16^\circ 30'$ .

Найти: Остальные углы  $\triangle PEK$ ,  $\angle PMH$  – ?

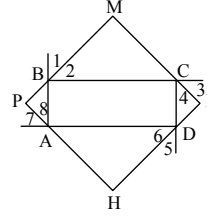
Решение:  $\angle PEK$  по свойству ромба равен  $90^\circ$ .  $\angle PKE = 90^\circ - 16^\circ 30' = 73^\circ 30'$ . Т.к.

$\angle MHP = \angle MPH = \angle EPK = 16^\circ 30'$ , то  $\angle PMH = 180^\circ - 2 \cdot 16^\circ 30' = 147^\circ$ .

2. Дано:  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 3 = \angle 4$ ,  $\angle 5 = \angle 6$ ,  $\angle 7 = \angle 8$ .

Доказать:  $HKMP$  – квадрат.

Доказательство: Т.к.  $BA \perp BC$ , то  $\angle 1 = \angle 2 = 45^\circ$ , аналогично  $\angle 3 = \angle 4 = 45^\circ$ ,  $\angle 5 = \angle 6 = 45^\circ$ ,  $\angle 7 = \angle 8 = 45^\circ$ .  $\angle 3 = \angle MCB = 45^\circ$  как вертикальные. Т.о.  $\angle M = 90^\circ$ . Аналогично с другими углами.  $\triangle BMC = \triangle ADH$ ,  $\triangle CKD = \triangle BPA$  (по стороне и двум углам). Все они еще и равнобедренные  $\Rightarrow PM = MK = KH = HP \Rightarrow PMKH$  – квадрат.



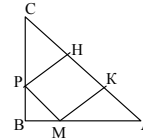
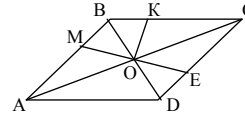
## В-3

1.  $\triangle MOB = \triangle BOK$  ( $BO$  – общая,  $\angle OMB = \angle OKB = 90^\circ$ ,  $\angle MBO = \angle OBK$  (по свойству ромба)). Т.о.  $OM = OK$ , т.к.  $BO \perp AC$ , то  $\angle MOB + \angle COE = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ .

2. Дано:  $\angle B = 90^\circ$ ,  $AB = BC$ ,  $MP = a$ .

Найти:  $AC$  – ?

Решение:  $\triangle MKA$  – равнобедренный (т.к.  $\angle A = 45^\circ$  и  $\angle MKA = 90^\circ$ )  $\Rightarrow KA = MK = MP = a = HK$ . Аналогично  $CH = a$ . Т.о.  $AC = 3a$ .



## В-4

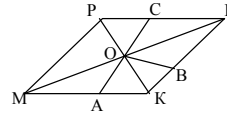
1. Дано:  $AK = KB = PC$ .

Доказать:  $OA = OB$ .

Найти:  $\angle POC + \angle MOA$  – ?

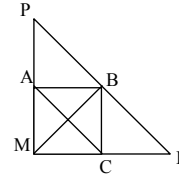
Решение: Так как  $AK = BK$  и  $\angle OKA = \angle OKB$  (по свойству ромба), то  $\triangle AKO = \triangle KBO$  (по двум сторонам и углу), т.о.  $OA = OB$ . Т.к.  $PK \perp MH$ , то  $\angle POC + \angle MOA = 180^\circ - \angle POM = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ .

2. Дано:  $MP = MK$ ,  $AC = a$ .



Найти:  $PK$  – ?

Решение: Т.к.  $\triangle CKB$  – равнобедренный ( $\angle K = 45^\circ$ ,  $\angle BCK = 90^\circ$ )  $\Rightarrow BC = AB = CK$  и  $AB \parallel CK \Rightarrow ABKC$  — параллелограмм. Т.е.  $BK = a$ . Т.к.  $MB$  — высота, а значит и медиана  $\Rightarrow PK = 2BK = 2a$ .



### В-5

1. Дано:  $BK \perp AD$ ,  $AC = 2BK$ .

Найти:  $\angle AOB$  – ?

Решение: Т.к.  $BK = (1/2)AC$ , то  $BO = (1/2)CO$  и  $OK = (1/2)AO$ . Т.о.  $\angle CAD = 30^\circ$ , т.е.  $\angle AOB = 180^\circ - (90^\circ - 30^\circ) = 120^\circ$ .

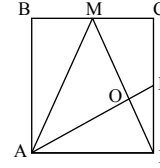
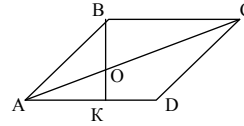
2. Дано:  $MC = KD$ ,  $AM = 2OM$ .

Найти:  $\angle AMO$  – ?

Решение: Т.к.  $AD = CD$  и  $MC = KD$ , то  $\triangle AKD = \triangle MCD$  (по двум катетам).

Т.о.  $\angle KOD = 180^\circ - \angle AKD - \angle MDC = 90^\circ$  (т.к.  $\angle AKD + \angle MDC = \angle AKD + \angle KAD = 90^\circ$ )  $\Rightarrow$  т.к.

$AM = 2OM$ ,  $\angle MAK = 30^\circ$  (т.к. против угла в  $30^\circ$  лежит катет равный половине гипотенузы) и  $\angle AMO = 60^\circ$ .



### В-6

1. Дано:  $PE \perp MK$ ,  $\angle MTP = 120^\circ$ ,  $OH = a$ .

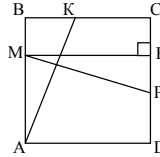
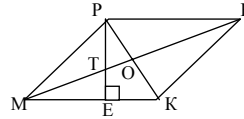
Найти:  $PE$  – ?

Решение:  $\angle PTO = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .  $\angle MTE = \angle PTO = 60^\circ$ ,  $\angle TME = 30^\circ$ . Так что  $TE = (1/2)MT$ .  $\angle PHT = \angle TME = 30^\circ$ . Так что  $PT = (1/2)TH$ . Тогда  $TE + PT = (1/2)MT + (1/2)TH$ , т.е.  $PE = (1/2)MH + OH = a$ .

2. Дано:  $MP \perp AK$ .

Сравнить:  $MP$  и  $AK$ .

Решение: Проведем высоту  $MH$ .  $MH = AB$ . Пусть  $\angle BAK = \alpha$ , тогда  $\angle AMP = 90^\circ - \alpha$ ,  $\angle HMP = \alpha \Rightarrow \triangle BKA = \triangle HMP$  (по гипотенузе и острому углу), т.о.  $MP = AK$ .

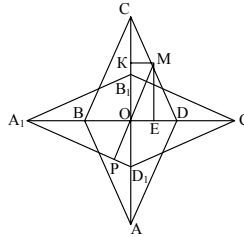


### В-7

1. Дано:  $CM = MD$ .

Доказать:  $\angle MPD_1 = 90^\circ$ .

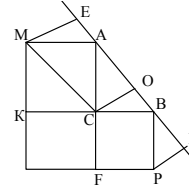
Доказательство: Построим  $MK \perp OC$  и  $ME \perp OC$ ,  $\triangle CKM = \triangle MED$  ( $CM = MD$ ,  $\angle KCM = \angle EMD$ )  $\Rightarrow ME = OK = CK$ . Аналогично  $\triangle OME = \triangle EMD \Rightarrow OM = MD = CM \Rightarrow \angle MCO = \angle MOC$ , т.о.  $\angle POD_1 = \angle KOM = \angle OCM \Rightarrow \angle POD_1 + \angle PD_1O = 90^\circ$ ,  $\angle PD_1O = \angle ODC$  и  $OP \perp A_1D_1$ .



2. Дано:  $AC \perp CB$ .

Доказать:  $ME + PD = AB$ .

Доказательство:  $\triangle EAM = \triangle COA$  ( $MA = AC$ ,  $\angle CAO = 90^\circ - \angle MAE = \angle EMA$ ).  $\triangle BOC = \triangle BPD$  ( $CB = BP$  и  $\angle PBD = 90^\circ - \angle CBO = \angle OCB$ ). Т.о.  $PD = OB$  и  $ME = AO$ . Т.е.  $ME + PD = AB$ .



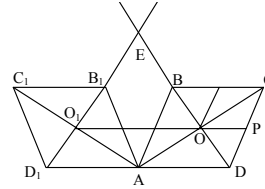
### В-8

В задачке вероятно опечатка:  $PO$  – биссектриса  $\triangle DOC$ .

1. Дано:  $\angle CAC_1 = 90^\circ$ ,  $\angle DOP = \angle POC$ .

Доказать:  $PA = PE$ .

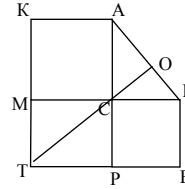
Доказательство: Т.к.  $\angle CAC_1 = 90^\circ$ ,  $BD \perp AC$ ,  $B_1D_1 \perp AC_1$ ,  $AO_1 = AO$  (т.к. ромбы равные), то  $O_1AOE$  – квадрат. Т.к.  $PO$  – биссектриса, то  $PO$  лежит на луче  $O_1O$ . Т.о. т.к.  $EA \perp O_1P$ , то  $PA = PE$ .



2. Дано:  $AC \perp CB$ .

Доказать:  $TC \perp AB$ .

Доказательство: Пусть  $\angle MTC = \alpha$ , тогда  $\angle MCT = 90^\circ - \alpha$ .  $\triangle MCT = \triangle ABC$  ( $MT = CB$ ,  $MC = AC$  как стороны квадратов). Т.о.  $\angle MCT = \angle CAB = 90^\circ - \alpha$ .  $\angle ACO = \alpha$  (как соответствующие углы при параллельных прямых  $KT$  и  $AC$ ). Т.о.  $\angle COA = 90^\circ$ .



### С-8

#### В-1

1. Т.к.  $P = 2(a + b)$ , т.е. если нам дана  $b$ , то  $a = (1/2)P - b$ . Затем построим два равных прямоугольных треугольника по двум катетам и соединим их так, чтобы равные стороны были напротив.

2. Т.к. в квадрате диагонали пересекаются под прямым углом, то значит нам дана диагональ (вернее половина ее), т.е. нам необходимо построить 4 прямоугольных, равнобедренных равных треугольника и соединить их катетами, тогда получится квадрат.

#### В-2

1. Т.к. в ромбе диагонали являются биссектрисами, то необходимо построить два равнобедренных треугольника по стороне (меньшая диагональ) и углу при этой стороне ( $1/2$  нашего угла) и соединить их основаниями).

2. Т.к. перпендикуляр опущенный из точки пересечения диагоналей на сторону равен половине стороны, значит необходимо построить два прямоугольных равнобедренных, равных треугольника по двум катетам (равных стороне квадрата) соединить их гипотенузами, тогда получится квадрат.

### **В-3**

1. Построить два равных прямоугольных треугольника по гипотенузе и прилежащему углу и соединить их гипотенузами так, чтобы равные стороны были напротив друг друга.

2. Построим прямоугольный треугольник по углу и противолежащему катету ( $\triangle ABC$  с гипотенузой  $AB$ ). Нарисуем лучи  $AC$  и  $AB$  и из точки  $B$  проведем прямую параллельную  $AC$ . На ней отложим отрезок  $BD$  равный данному (в полуплоскость не содержащую точку  $A$ ). Затем опустим перпендикуляр  $DH$  на  $AC$ . Т.о.  $BCHD$  – квадрат.

### **В-4**

1. Необходимо построить два равнобедренных равных треугольника по основанию (известная диагональ) и углу при вершине (удвоенный данный) и соединить их основания.

2. Построим прямоугольный  $\triangle ABC$  с катетом  $AC$ , гипотенузой  $BC$  и углом  $\angle B = 90^\circ - \alpha$  ( $\alpha$  и  $AC$  нам даны). Из вершины  $A$  опустим перпендикуляр  $AH$  на  $BC$  и проведем прямую из точки  $C$  параллельную  $AH$  до точки  $O$  пересечения с лучем  $BA$ . Из точки  $A$  опустим перпендикуляр  $AM$  на  $OC$ , т.о.  $AMCH$  – искомый квадрат.

### **В-5**

1. Необходимо построить прямоугольный треугольник по катету (данный перпендикуляр) и прилежащему углу (равному данному). Затем построить прямоугольный треугольник по катету (данный перпендикуляр) и противолежащий углу (равному данному) и соединить их, чтобы получился один большой прямоугольный треугольник. Затем нарисовать равный ему и соединить их гипотенузами так, чтобы получился прямоугольник.

2. Т.к.  $\angle BAE = (1/2) \angle BAC = (1/4) \angle BAD = (90^\circ/4)$ , то мы можем построить  $\triangle BAE$  по двум углам ( $\angle B = 90^\circ$ ) и гипотенузе, а затем, т.к.  $AB$  - сторона квадрата, достроить его до квадрата.

### **В-6**

1. Построить два прямоугольных треугольника по катету (данный отрезок) и противолежащий углу (равному данному). Затем построить прямоугольник по двум сторонам (первая равна данному отрезку, а вторая равна гипотенузе построенного треугольника минус второй катет, который нам не был дан). Затем эти три фигуры соединить до ромба.

2. Т.к.  $\angle BMD = 180^\circ - \angle MBD - \angle BDA = 180^\circ - \angle MBD - 45^\circ = 135^\circ - \angle MBD$ , то мы можем построить  $\triangle BMD$  по стороне и двум прилежащим углам, а затем т.к.  $2MD$  равен стороне квадрата, построить квадрат по стороне.

### **В-7**

1. Построим треугольник по стороне  $((1/2)P)$ , другой стороне (диагональ) и противолежащему ей углу равному  $45^\circ$ , затем к стороне равной

$(1/2)P$  проведем высоту. Т.о. у нас получилось два прямоугольных треугольника, один из которых равнобедренный (т.к. один угол равен  $45^\circ$ ) и второй, катеты которого соответствующие стороны прямоугольника. Затем достроим второй треугольник до прямоугольника (см. В-5 (1)).

2. Пусть необходимо построить квадрат  $ABCD$ . На диагонали  $BD$  возьмем точку  $F$ ,  $FD = AD$ . Т.к.  $\triangle AFD$  равнобедренный, то  $\angle AFD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BDA) = \frac{1}{2} \cdot 135^\circ$ . Т.о.  $\angle BFA = 180^\circ - \angle AFD = (225^\circ/2)$ .  $BF = BD - AD$  (т.к.  $AD = FD$ ),  $\angle ABD = (90^\circ/2)$ . Т.о. мы можем построить  $\triangle ABF$  по стороне и двум углам. Т.о. у нас есть сторона квадрата, далее необходимо построить квадрат по стороне.

### В-8

1. Допустим, что нам необходимо построить ромб  $ABCD$ ,  $O$  – точка пересечения диагоналей. На луче  $OB$  отметим точку  $F$ ,  $OF = OC$ . Т.о.  $\angle OFC = 45^\circ$ , а  $\angle BFC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ ;  $BF = \frac{BD - AC}{2}$ . Т.к.  $OF = OC$

$\Rightarrow 2OF = AC$  и  $BF = (1/2)BD - (1/2)AC$ . Т.о. мы можем построить  $\triangle BFC$  (по двум сторонам и углу). Далее отложим от стороны  $CF$  угол в  $45^\circ$  и проведем прямую до пересечения с лучом  $BF$ . Т.о. мы построили  $\triangle BOC$ . Далее построим  $\triangle DAO = \triangle CBO$  так, чтобы  $AO$  лежала на прямой  $OC$  и  $DO$  на  $OB$ . Т.о.  $ABCD$  – ромб.

2. Пусть надо построить квадрат  $ABCD$  на луче  $CA$  (за точкой  $A$ ). Отметим точку  $E$ .  $AE = AD$ , т.о.  $EC = AC + AD$ ,  $\angle ECD = (90^\circ/2)$ . Т.к.  $\angle EAD = 180^\circ - \angle CAD = 135^\circ$ , то т.к.  $EA = AD$ , то  $\angle E = \frac{1}{2}(180^\circ - 135^\circ) = (45^\circ/2)$ , а значит мы можем построить  $\triangle ECD$  по стороне и двум углам, а отрезок  $CD$  будет стороной квадрата. Т.о. мы можем построить квадрат по стороне.

### С-9

#### В-1

1.  $S = (a + b + c)(f + l) - f^2 + (1/2)BD = af + bf + cf + al + bl + cl - f^2 + (1/2)BD$ .

2. Пусть  $a$  и  $b$  – стороны прямоугольника,  $a = 9$ .  $P = 2(a + b) = 26$ , т.о.  $b = 4$ .  $S = ab = 36 = c^2$ , где  $C$  – сторона квадрата. Т.о.  $c = \sqrt{36} = 6$  см.

#### В-2

1.  $S = (f + a + b + c)l - f(l - f) - (1/2)db = al + bl + cl + f^2 - (1/2)db$ .

2. Пусть  $a$  – сторона квадрата, тогда  $P = 4a = 32$ . Т.о.  $a = 8$ .  $S = 8^2 = 64 = 4b$ , где  $b$  – вторая сторона прямоугольника. Т.о.  $b = 16$ .

#### В-3

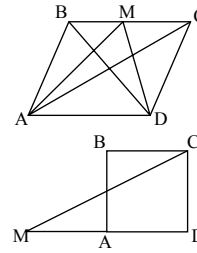
1.  $S_{AMD} = (1/2)AD \cdot h$  ( $h$  – высота параллелограмма).

$$S_{ABCD} = AD \cdot h \cdot \frac{S_{ABCD}}{S_{AMB}} = 2.$$

2. Дано:  $MC = 20$  дм,  $\angle CMD = 30^\circ$ .

Найти:  $S_{ABCD}$  — ?

Решение: Т.к. против угла в  $30^\circ$  в прямоугольном треугольнике лежит катет равный  $(1/2)$  гипотенузы, т.о.  $CD = 10$  дм.  $S_{ABCD} = 10^2 = 100$  дм<sup>2</sup>.



#### В-4

1. Дано:  $CF = FD$ .

Доказать:  $S_{ABCD} = S_{ABE}$ .

Доказательство:  $\angle DFE = \angle BFC$  (вертикальные).  $CF = FD$ ,  $\angle FDE = \angle DCB$  (накрест лежащие). Т.о.  $\triangle BCF = \triangle FED$  по стороне и двум прилежащим углам.

$$S_{ABE} = S_{ABFD} + S_{FDE} = S_{ABFD} + S_{BFC} = S_{ABCD}.$$

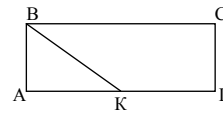
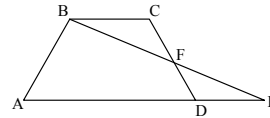
2. Дано:  $\angle ABK = \angle KBC = 45^\circ$ ,  $AK = 5$  см,  $KD = 7$  см.

Найти:  $S_{ABCD}$  — ?

Решение: Т.к.  $\angle ABK = 45^\circ$ , то  $AB = AK = 5$ .

$$AD = AK + KD = 5 + 7 = 12 \text{ см.}$$

$$\text{Т.о. } S_{ABCD} = 5 \cdot 12 = 60 \text{ см}^2.$$



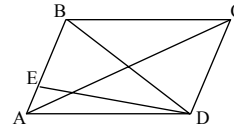
#### В-5

1. Дано:  $DE \perp AB$ .

Доказать:  $S_{ABCD} = DE \cdot AB$ .

$$\begin{aligned} \text{Доказательство: } S_{ABCD} &= (1/2)S_{ABD} + (1/2)S_{ACD} = \\ &= (1/2)BA \cdot DE + (1/2)CD \cdot ED = BA \cdot ED. \end{aligned}$$

2. Ромб его диагоналями делится на четыре равных прямоугольных треугольника. Пусть  $a$  и  $b$  — диагонали ромба, тогда  $S_{\text{ромба}} = 4S_{\text{треуг}} = 4 \cdot (1/2) \cdot (1/2)a \cdot (1/2)b = (1/2)ab$ .



#### В-6

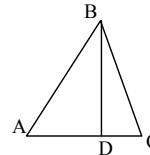
1. Дано:  $AC \perp BD$ .

Доказать:  $S_{ABC} = AC \cdot BD \cdot (1/2)$ .

$$\begin{aligned} \text{Доказательство: } S_{ABC} &= S_{ABD} + S_{BDC} = (1/2)AD \cdot BD + \\ &+ (1/2)DC \cdot BD = (1/2)BD(AD + DC) = (1/2)BD \cdot AC. \end{aligned}$$

2. Пусть диагональ квадрата равна  $a$ , тогда две диагонали разбивают квадрат на четыре прямоугольных треугольника.

$$S_{\text{квадр}} = 4S_{\text{треуг}} = 4 \cdot (1/2) \cdot (1/2)^2 a^2 = (1/2)a^2.$$



#### В-7

1. Дано:  $AM = MC$ .

Доказать:  $S_{ABM} = S_{MBC}$ .

Доказательство: Проведем высоту  $BH$ .

$$S_{\triangle ABM} = (1/2)BH \cdot AM, S_{\triangle BMC} = (1/2)BH \cdot MC,$$

т.к.  $AM = MC$  (см. предыдущую задачу). Т.о.

$$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle BMC}.$$

2. Дано:  $\angle A = 45^\circ$ ,  $\angle C = 100^\circ$ ,  $\angle BDC = 35^\circ$ ,

$$BD : DP = 2:1, P_{ABPK} = 30 \text{ см.}$$

Найти:  $S_{ABPK} - ?$

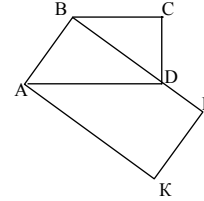
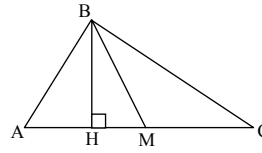
Решение:  $\angle CBD = 180^\circ - 100^\circ - 35^\circ = 45^\circ$ .

Т.к.  $BC \parallel AD \Rightarrow \angle ADB = \angle CBD = 45^\circ$  и  $\angle ABD = 90^\circ$ . Т.о.  $ABPK$  – прямоугольник. Т.о.  $AB = BD$ . Пусть  $AB = x$ , тогда

$$BD = x, DP = \frac{x}{2}, BP = x + \frac{x}{2} \Rightarrow P = 2x +$$

$$+ 2\left(x + \frac{x}{2}\right) = 30; 5x = 30; x = 6 \text{ (см)}. \text{ Т.о.}$$

$$S_{ABPK} = 6 \cdot \left(6 + \frac{1}{2} \cdot 6\right) = 54 \text{ (см}^2\text{)}.$$

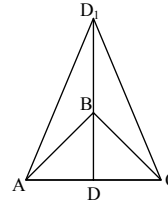


### В-8

$$1. S_{AD_1C} = (1/2)D_1D \cdot AC = (1/2) \cdot 2BD \cdot AC$$

(т.к.  $DD_1 = 2BD$ ) (см. В-6 (1)).

$$S_{ABC} = (1/2)BD \cdot AC. \text{ Т.о. } \frac{S_{AD_1C}}{S_{ABC}} = 2.$$



2. Дано:  $\angle M = 45^\circ$ ,  $\angle K = 135^\circ$ ,  $PA : AD = 1 : 3$ ,  $S_{MPDT} = 36 \text{ см}^2$ .

Найти:  $P - ?$

Решение: Т.к.  $\angle K = 135^\circ \Rightarrow \angle O = 45^\circ = \angle PAM$

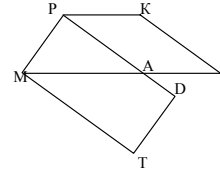
(соответствующие углы). Т.о.  $\angle MPA = 90^\circ \Rightarrow$

$MP = PA$  и  $MPDT$  – прямоугольник. Пусть  $MP = x$ ,

тогда  $AP = x$  и  $AD = 3x$ ,  $PD = 4x$ ,  $S_{MPDT} = x \cdot 4x =$

$$4x^2 = 36, x = 3 \text{ (см)}.$$

$$\text{Т.о. } P = 2x + 2 \cdot 4x = 6 + 2 \cdot 12 = 30 \text{ (см)}.$$



### С-10

#### В-1

1. Дано:  $\angle B > 90^\circ$ ,  $\angle ECD = 60^\circ$ ,  $\angle CED = 90^\circ$ ,

$$AB = 4 \text{ см}, AD = 10 \text{ см}.$$

Найти:  $S_{ABCD} - ?$

Решение: т.к.  $\angle ECD = 60^\circ$ , то  $\angle CDE = 30^\circ$ , а

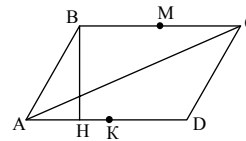
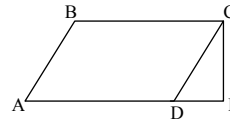
$CE = (1/2)CD = (1/2)AB = 2 \text{ см}$  (катет против

угла в  $30^\circ$  равен  $1/2$  гипотенузы),

$$\text{т.о. } S_{ABCD} = (1/2)AD \cdot CE = 20 \text{ см}^2.$$

2. Дано:  $BM = MC$ ,  $AK = KD$ .

Доказать:  $S_{ABMK} = S_{ACD}$ .





Доказательство: Пусть  $BH$  – высота. Так как  $BM = AK$ , то  $BMKA$  — параллелограмм.  $S_{ABMK} = (1/2)AD \cdot BH = (1/2)S_{ABCD} = S_{ACD}$ .

## В-2

1. Дано:  $\angle PEM = 90^\circ$ ,  $\angle EPT = 45^\circ$ ,  $ME = 4$  см,  $ET = 7$  см.

Найти:  $S_{MPTK}$  – ?

Решение: т.к.  $\angle EPT = 45^\circ$ , то  $\angle PTE = 45^\circ$  и  $PE = ET = 7$  см.  $MT = ET + ME = 11$  см.

$S_{MPTK} = 11 \cdot 7 = 77$  (см<sup>2</sup>).

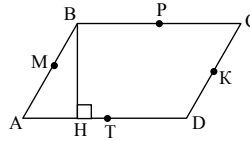
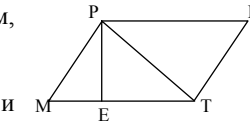
2. Дано:  $BM = CK = KD = MA$ ,

$BP = PC = DT = TA$ .

Доказать:  $S_{ABPT} = S_{AMKD}$ .

Доказательство: Пусть  $BH$  – высота.

$S_{ABPT} = (1/2)AD \cdot HB = (1/2)HB \cdot AD = S_{AMKD}$ .



## В-3

1. Дано:  $S_{ABCD} = 20$  см<sup>2</sup>,  $AH = 2$  см,  $HD = 8$  см.

Найти:  $\angle A$  – ?  $\angle D$  – ?

Решение:  $S_{ABCD} = (2 + 8)BH = 20 \Rightarrow BH = 2$ . Т.к.

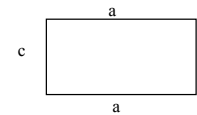
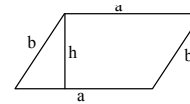
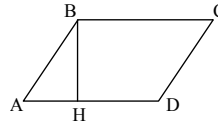
$BH = AH$ , то  $\triangle AHB$  – равнобедренный, т.е.  $\angle A = 45^\circ$ ,  $\angle D = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ .

2. Дано:  $P_1 = P_2$ .

Сравнить:  $S_1$  и  $S_2$ .

Решение:  $P_1 = 2a + 2b = P_2 = 2c + 2a$ , т.е.  $b = c$ ,  $b < a$ , т.к. катет всегда меньше гипотенузы, т.о.

$S_1 = ah < ab = ac = S_2$ .



## В-4

1. Дано:  $S_{ABCD} = 40$  см<sup>2</sup>,  $AB = 8$ ,  $AD = 10$ .

Найти:  $\angle A$ ,  $\angle D$  – ?

Решение:  $S_{ABCD} = 10BH = 40$ ,  $BH = 4$  см. т.к.  $BH = (1/2)AB$ , то  $\angle A = 30^\circ$  (т.к. против угла в  $30^\circ$  лежит катет равный половине гипотенузы)  $\Rightarrow \angle D = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ .

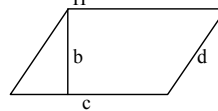
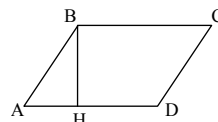
В задачке вероятно опечатка, не параметры равны, а периметры.

2. Дано:  $P_1 = P_2$ ,  $a = b$ .

Сравнить:  $S_1$  и  $S_2$ .

Решение:  $d > b$  (см. предыдущую задачу).  $P_1 = 4a = P_2 = 2d + 2c$ , а так

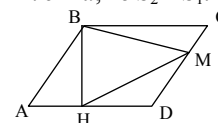
как  $d > b$ , т.е.  $d > a$ , то  $c < a$ .  $S_1 = a^2$  и  $S_2 = bc = ac$ , т.к.  $c < a$ , то  $S_2 < S_1$ .



## В-5

1. Дано:  $\angle HBM = 45^\circ$ ,  $AH = 2$  см,  $HD = 8$  см.

Найти:  $S_{ABCD}$  – ?



Решение: т.к.  $\angle HBM = 45^\circ$ , то  $\angle MBC = 45^\circ \Rightarrow \angle C = 45^\circ$ .

Т.о.  $\angle D = 135^\circ$ . Т.к.  $\angle A = \angle C = 45^\circ \Rightarrow AH = BH = 2$  см.

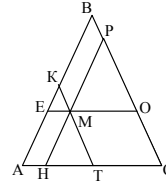
$$\text{T.o. } S_{ABCD} = 2 \cdot (2 + 8) = 20 \text{ cm}^2.$$

2. Т.к.  $\triangle ABC$  — равнобедренный и  $EO \parallel AC \Rightarrow AE = OC$ .

Пусть расстояние от  $AC$  до  $EO$  равно  $h$ , тогда:

$$S_{AEMH} : S_{MOCT} = \frac{AH \cdot h}{TC \cdot h} = \frac{AH}{TC}, \text{ а т.к. } KT \parallel BC, \text{ то}$$

$$\frac{AH}{TC} = \frac{EM}{MO} = \frac{BP}{BK} \text{ (по теореме Фалеса).}$$



**B-6**

1. Дано:  $\angle ABM = \angle MBD$ ,  $\angle BMD = 157^\circ 30'$ ,

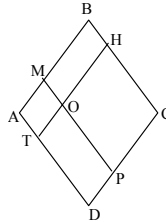
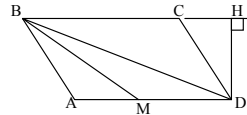
$$\overline{DH} = 10 \text{ см.}$$

Найти:  $S_{ABCD} - ?$

Решение:  $\angle ADB = \angle ABD$  (т.к.  $AB = AD$ ), т.о.

$$157^{\circ}30' + \angle ADB + (1/2)\angle ADB = 180^{\circ}.$$

$\angle ADB = 15^\circ$ . Т.о.  $\angle A = 180^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 150^\circ$ , т.е.  $\angle D = 30^\circ$ ,  $\angle DCH = \angle D = 30^\circ$ . Т.о., так как против угла в  $30^\circ$  лежит в прямоугольном треугольнике катет равный  $(1/2)$  гипотенузы, то  $CD = AB = 20$  см, т.е.  $S_{ABCD} = 10 \cdot 20 = 200$  (см<sup>2</sup>).



2. Т.к.  $MP \parallel AD$  и  $HT \parallel AB$ , то  $\frac{S_{AMOT}}{S_{MBHO}} = \frac{AM}{MB} = \frac{TO}{OH} =$

$$= \frac{S_{TOPD}}{S_{OPCH}} \Rightarrow S_{AMOT} \cdot S_{OPCH} = S_{OPDT} \cdot S_{MBHO}.$$

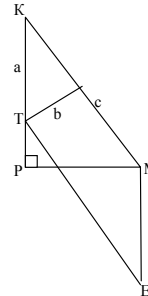
**B-7**

1. Дано:  $PM < KP$ ,  $TK = a$ ,  $KM = c$ .

Найти:  $PM - ?$

Решение: Проведем дополнительные построения как показано на рисунке, т.е.  $ME \parallel KP$  и  $ME = KT \Rightarrow KTEM$  – параллелограмм.  $S_{KTEM} = bc = PM \cdot a$ , т.е.

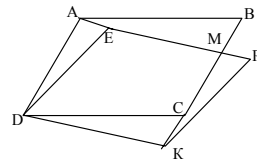
$$PM = bc/a.$$



2. Т.к.  $AD \parallel MK$ ,  $EP \parallel DK$ ,  $DE \parallel PK$ , то  $AMKD$  и  $EPKD$  — параллелограммы, так что  $AD = MK$  и  $PK = ED$ , и  $S_{ABCD} = S_{AMKD} = S_{EPKD}$ , то  $S_{ABCD} = S_{AMKD}$ . Так что:

$$S_{ABCD} - S_{DEMC} = S_{DABME} = S_{EPKD} - S_{DEMC} = S_{DKPMC}$$

$$\Rightarrow S_{DABME} = S_{DKPMC}.$$



### В-8

1. Дано:  $\angle M = 90^\circ$ ,  $MP = b$ ,  $PK = c$ ,  $KE = a$ .

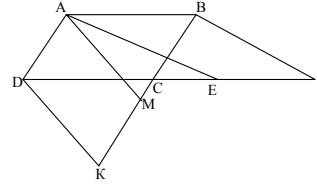
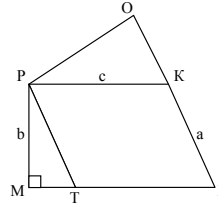
Найти:  $PO$  – ?

Решение: Проведем дополнительные построения как показано на рисунке  $PT \parallel KE$ , т.о.  $PTEK$  – параллелограмм, и  $PT = KE = a$ .

$$S_{PTEK} = bc = PO \cdot a, \text{ т.е. } PO = bc/a.$$

2. Решаем аналогично предыдущей задаче.

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABPE} \cdot S_{ABCD} = S_{AMKD} \Rightarrow \\ S_{ABPE} &= S_{AMKD}, S_{ABPCM} = S_{ABPE} + S_{AECM} = \\ &= S_{AMKD} + S_{AECM} = S_{AECMD}. \end{aligned}$$



### С-11

#### В-1

1. Дано:  $BD = 12$  см,  $BH = 4$  см.

Найти:  $S_{ABC}$  – ?

Решение:  $BD = AC = 12$  см (свойство прямоугольника).  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24$  (см<sup>2</sup>).

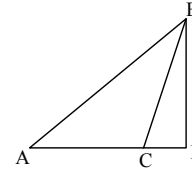
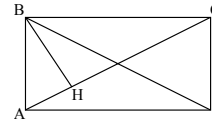
2. Дано:  $\angle C = 135^\circ$ ,  $AC = 6$  дм,  $BD = 2$  дм.

Найти:  $S_{ABD}$  – ?

Решение:  $\angle BCD = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ .

$\angle CBD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ . Т.о.  $BD = CD = 2$  дм.

$$S_{ABD} = (1/2)AD \cdot BD = \frac{1}{2} (6 + 2) \cdot 2 = 8 \text{ (дм}^2\text{)}.$$



#### В-2

1. Дано:  $AB = AC$ ,  $BC = 10$  см.

Найти:  $S_{ABC}$  – ?

Решение: В равнобедренном треугольнике высота является и медианой  $\Rightarrow HC = 5$  см, т.к.  $\angle C = 45^\circ$

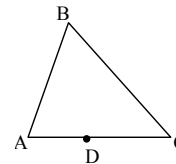
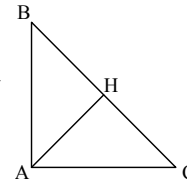
$$\Rightarrow HC = AH = 5 \text{ см} \Rightarrow S_{ABC} = 5 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 25 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2. Дано:  $S_{ABC} = 36$  см<sup>2</sup>,  $AD : DC = 1/5$ .

Найти:  $S_{ABD}$  – ?

Решение:  $S_{ABC} = (1/2)AC \cdot h$ , где  $h$  – высота, опущенная из точки  $B$ .  $AD = (1/6)AC$ .

$$\text{Т.о. } S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} AC \cdot h = \frac{36}{6} = 6 \text{ (см}^2\text{)}.$$



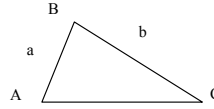
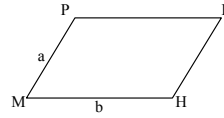
### В-3

1. Дано:  $\angle B = 130^\circ$ ,  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $MP = a$ ,  $MH = b$ ,  $\angle M = 50^\circ$ .

Найти:  $S_1 : S_2 = ?$

Решение:  $S_2 = S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin 130^\circ$ ,  $S_1 = S_{MPKH} =$

$$= ab \sin 50^\circ. S_1 : S_2 = \frac{S_{MPKH}}{S_{ABC}} = 2 \frac{\sin 50^\circ}{\sin 130^\circ} = 2 : 1.$$



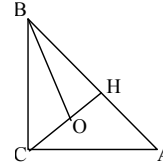
2. Дано:  $CO = OH$ ,  $BH = HA$ ,  $AC = 6$  см,  $BC = 8$  см.

Найти:  $S_{OBC} = ?$

Решение:  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$  (см<sup>2</sup>).

$S_{CHB} = (1/2)S_{ABC} = 12$  (см<sup>2</sup>) (т.к.  $CH$  — медиана).

$S_{OBC} = (1/2)S_{CHB} = 6$  (см<sup>2</sup>) (т.к.  $BO$  — медиана).



### В-4

1. Дано:  $AB = x$ ,  $AC = y$ ,  $\angle A = 15^\circ$ ,  $KP = x$ ,  $MK = y$ ,  $\angle K = 165^\circ$ .

Сравнить:  $S_1$  и  $S_2$

Решение: Пусть  $\sin 15^\circ = u$ , тогда  $\sin 165^\circ =$

$$= \sin 15^\circ = u \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot u, S_{MPK} = \frac{1}{2} x y u \Rightarrow$$

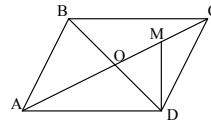
$S_1 = S_2$ . т.о.  $S_1 = S_2$ .

2. Дано:  $BD = 5$  см,  $AC = 12$  см,  $AM : MC = 4 : 1$ .

Найти:  $S_{AMD} = ?$

Решение:  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$  см<sup>2</sup>.  $S_{ACD} = (1/2)S_{ABCD} = 15$  см<sup>2</sup>.

$$AM = (4/5)AC \Rightarrow S_{AMD} = (1/2)AM \cdot OD = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot AC \cdot OD = (4/5)S_{ACD} = 12 \text{ (см}^2\text{)}.$$



### В-5

1.  $S_{AMD} = (1/2)AD \cdot H_2M$ .  $S_{BMC} = (1/2)BC \cdot H_1M$ .  
 $S_{BMC} + S_{AMD} = (1/2)AD(H_1M + H_2M) = (1/2)S_{ABCD}$ .

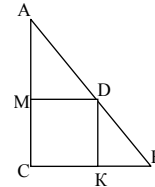
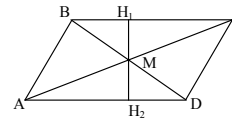
2. Дано:  $CMPK$  — квадрат,  $AC = 6$  см,  $BC = 14$  см.

Найти:  $MC = ?$

Решение: Пусть  $MC = x$ , тогда  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 14 = 42 =$

$$= x^2 + \frac{1}{2}x(14 - x) + \frac{1}{2}x(6 - x);$$

$$42 = x^2 + 7x - \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}x^2; x = 4,2 \text{ (см)}.$$



### В-6

1.  $S_{ABO} = (1/2)AO \cdot OB \cdot \sin \angle AOB$ .

$S_{BOC} = (1/2)BO \cdot OC \cdot \sin \angle BOC = (1/2)AO \cdot OB \cdot \sin \angle AOB$ .

$S_{COD} = (1/2)CO \cdot OD \cdot \sin \angle COD = (1/2)AO \cdot OB \cdot \sin \angle AOB$ .

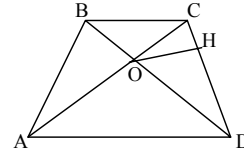
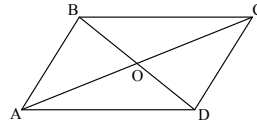
$S_{AOD} = (1/2)AO \cdot OD \cdot \sin \angle AOD = (1/2)AO \cdot OB \cdot \sin \angle AOB$  (т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам)  $\Rightarrow$

$S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ .

2. Дано:  $OH = 4$  см,  $CD = 8$  см.

Найти:  $S_{AOB}$  — ?

Решение:  $S_{ABC} = S_{BCD}$  (т.к.  $BC$  — общая и высоты равны)  $\Rightarrow S_{ABO} = S_{COD}$ . (Вычли из равенства  $S_{OBC}$ ), а  $S_{OCD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$  (см<sup>2</sup>) =  $S_{AOB}$ .



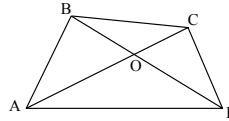
### В-7

1. Дано:  $AC = 8$ ,  $BD = 12$ ,  $\angle AOB = 30^\circ$ .

Найти:  $S_{ABCD}$  — ?

Решение:  $S_{ABCD} = S_{ABO} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} =$   
 $= (1/2)AO \cdot OB \cdot \sin 30^\circ + (1/2)BO \cdot OC \cdot \sin 150^\circ +$   
 $+ (1/2)CO \cdot OD \cdot \sin 30^\circ + (1/2)AO \cdot OD \cdot \sin 150^\circ =$   
 $= (1/2)\sin 30^\circ (OB(AO + OC) + OD(AO + OC)) =$

$= \frac{1}{2} \cdot (1/2) (AC \cdot BD) = \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot 12 = 24$  (см<sup>2</sup>).



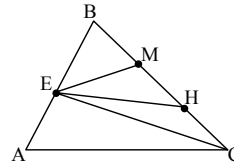
2. Дано:  $AE = EB$ ,  $BM = MH = HC$ ,  $S_{ABC} = S$ .

Найти:  $S_{EMH}$  — ?

Решение:  $S_{EMH} = (1/3)S_{EBC}$  (т.к.  $MH = (1/3)BC$ )  $\Rightarrow$

$S_{EBC} = (1/2)S_{ABC}$  (т.к.  $CE$  — медиана)  $\Rightarrow$

$S_{EMH} = (1/6)S$  (т.к.  $AE = EB$ ).



### В-8

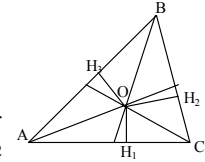
1. Дано:  $OH_1 = 1,5$  см,  $P_{ABC} = 16$  см.

Найти:  $S_{ABC}$  — ?

Решение: т.к. точка пересечения биссектрис является центром вписанной окружности  $\Rightarrow OH_1 = OH_2$

$= OH_3 = 1,5$  см  $\Rightarrow S_{ABC} = (1/2)AB \cdot 1,5 + (1/2)AC \cdot 1,5 + (1/2)BC \cdot 1,5 =$

$= \frac{3}{4} (AB + AC + BC) = \frac{3}{4} \cdot 16 = 12$  (см<sup>2</sup>).

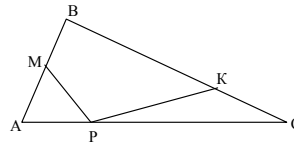


2. Дано:  $AM : MB = BK : KC = PC : AP = 2 : 1$ ,  $S_{ABC} = S$ .

Найти:  $S_{MBKP}$  — ?

Решение:  $S_{AMP} = (1/2)AM \cdot AP \cdot \sin A =$

$= \frac{1}{2} \cdot (2/3)AB \cdot (1/3)AC \cdot \sin A = (2/9)S$ .



$$S_{PKC} = (1/2)PC \cdot KC \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot (1/3)BC \cdot (2/3)AC \cdot \sin C = (2/9)S.$$

$$S_{MBKP} = S - 2 \cdot (2/9)S = (5/9)S.$$

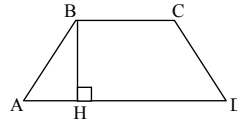
### C-12

#### B-1

1. Дано:  $P_{ABCD} = 32$  см,  $AB = CD = 5$  см,  
 $S = 44$  см<sup>2</sup>.

Найти:  $BH$  – ?

Решение:  $P = 10 + BC + AD = 32$ ;  $\frac{1}{2}(BC + AD) = 11$  см.



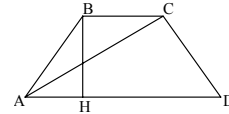
$$\frac{1}{2}(BC + AD)BH = 44 \text{ (см}^2\text{)} \Rightarrow BH = 4 \text{ (см)}.$$

2. Дано:  $BC = 8$  см,  $AD = 10$  см,  $S_{ACD} = 30$  см<sup>2</sup>.

Найти:  $S$  – ?

Решение:  $S_{ACD} = (1/2)AD \cdot BH = 30$  (см<sup>2</sup>). Так что

$$BH = 6 \text{ (см)}. S = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BH = 54 \text{ (см}^2\text{)}.$$



#### B-2

1. Дано:  $S_{ABCD} = 30$  см<sup>2</sup>,  $P_{ABCD} = 28$  см,  $AB = 3$  см.

Найти:  $CD$  – ?

Решение:

$$\begin{cases} 3 + BC + AD + CD = 28 \\ \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot 3 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC + AD = 20 \\ 3 + 20 + CD = 28 \end{cases};$$

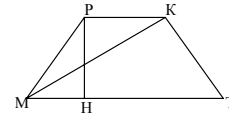
$CD = 5$  см.

2. Дано:  $PK = 6$  см,  $PH = 8$  см,  $S_{MKT} = 48$  см<sup>2</sup>.

Найти:  $S$  – ?

Решение:  $S_{MKT} = (1/2)MT \cdot PH = 48$ , так что

$$MT = 12 \text{ (см)}. S = (PK + MT) \frac{1}{2} \cdot PH = 18 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 72 \text{ (см}^2\text{)}.$$



#### B-3

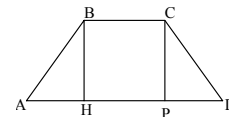
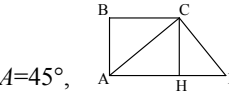
1. Дано:  $AB = 3$  дм,  $\angle CDA = \angle BAC = 45^\circ$ .

Найти:  $S$  – ?

Решение: т.к.  $\angle CDA = \angle BAC = 45^\circ \Rightarrow \angle CAH = \angle CDA = 45^\circ$ ,  
 $\triangle ACD$  и  $\triangle CDH$  – равнобедренные, так что  $HD = AH = CH = 3$  (дм).

$$\text{Т.о. } S = S_{ABCH} + S_{CHD} = 9 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 13,5 \text{ (дм}^2\text{)}.$$

2. Дано:  $BC = BH = 6$  см,  $AH + DP = HP$ .



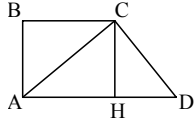
Найти:  $S$  – ?

Решение: т.к.  $AH = PD \Rightarrow BC = HP = 2AH \Rightarrow AD = 12$  (см)  $\Rightarrow$

$$S = \frac{1}{2} \cdot (12 + 6) \cdot 6 = 54 \text{ (см}^2\text{)}.$$

#### В-4

1. Дано:  $BC = 4$  см,  $\angle BCA = 45^\circ$ ,  $\angle C = 135^\circ$ .



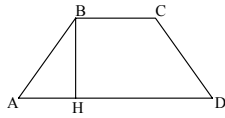
Найти:  $S$  – ?

Решение:  $\angle ACD = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = 45^\circ \Rightarrow$

$BC = AB = 4$ ,  $\angle D = 45^\circ \Rightarrow CH = AB = HD = 4 \Rightarrow$

$$AD = 8 \text{ и } S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (8 + 4) = 24 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2. Дано:  $AH = (1/2)BC$ ,  $BH = 6$  см,  $AD = BC + 2$ .



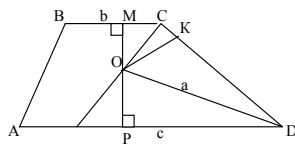
Найти:  $S$  – ?

Решение:  $AD = BC + 2AH = 2BC = BC + 2 \Rightarrow BC = 2$  см,

$$AD = 4 \text{ (см)}. S = \frac{1}{2} \cdot (2 + 4) \cdot 6 = 18 \text{ (см}^2\text{)}.$$

#### В-5

1. Дано:  $\angle D = 60^\circ$ ,  $AD = c$ ,  $OD = a$ ,  $BC = b$ .



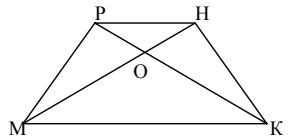
Найти:  $S$  – ?

Решение: Опустим перпендикуляры  $OP$ ,  $OK$  и  $OM$  как показано на рисунке.

Т.к.  $\triangle POD = \triangle OKD$  (по углу и гипотенузе),  $\triangle MOC = \triangle COK$  (по углу и гипотенузе), то  $OP = OK = OM$ . Т.к.  $\angle ODK = 30^\circ$

$$\Rightarrow OK = \frac{a}{2} \text{ (т.к. против угла в } 30^\circ \text{ лежит катет равный половине гипотенузы). Т.о. } S = \frac{1}{2} (b + c) \left( \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right) = \frac{1}{2} (ab + ac).$$

2. Дано:  $S_{MNC} = S_1$ ,  $S_{KPH} = S_2$ .



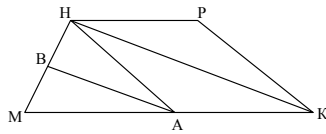
Найти:  $S$  – ?

Решение:  $S_{MPH} = S_{KPH}$ , т.к. у них общее основание и равные высоты  $\Rightarrow S_{MPO} = S_{OKH}$ ,

$$S = 2 \cdot S_{MPO} + S_{PHO} + S_{OMK} = S_{MNC} + S_{MHP} = S_{MNC} + S_{KPH} = S_1 + S_2.$$

#### В-6

1. Дано:  $MH = HK$ ,  $MB = BH$ ,  $MA = AK$ ,  $BA \perp MH$ ,  $MK = a$ ,  $HP = b$ .



Найти:  $S$  – ?

Решение: т.к.  $MA = AK$  и  $MB = BH \Rightarrow$

$AB$  – средняя линия  $\triangle MHK \Rightarrow AB =$

$= (1/2)HK = (1/2)MH = MB$ . Т.о.  $AM = AH$

(т.к.  $AB$  и медиана и высота в  $\triangle MHA$ ).  $HA \perp MK$ , т.к.  $\triangle MHK$  – равнобедренный и  $MA = AK \Rightarrow HA = \frac{a}{2}$  и  $S = \frac{1}{2}(a+b)\frac{a}{2} = \frac{a}{4}(a+b)$ .

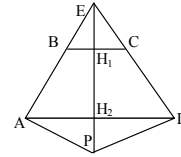
2. Дано:  $EH_1 = H_1H_2 + H_2P$ ,  $S_{BEC} = S_1$ ,  $S_{APD} = S_2$ .

Найти:  $S$  – ?

Решение:  $S_1 = (1/2)BC \cdot H_1E$ ,  $S_2 = (1/2)AD \cdot H_2P$ .

Т.к.  $H_1E = H_2P = H_1H_2$ , то:

$$S_1 + S_2 = (1/2)H_1H_2(BC + AD) = S.$$

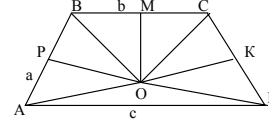


### В-7

1. Дано:  $\angle BCD = 150^\circ$ ,  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $AD = c$ .

Найти:  $S$  – ?

Решение: т.к.  $OP \perp AB$ ,  $AP = PB$ ,  $OM \perp BC$ ,  $BM = MC$ ,  $OK \perp CD$ ,  $CK = KD \Rightarrow OD = OC = OB = OA$ , т.о.  $\angle OCB = (150^\circ/2) = \angle OBC$ .  
 $\angle B = 2\angle OBC = 150^\circ \Rightarrow \angle A = \angle D = 30^\circ$

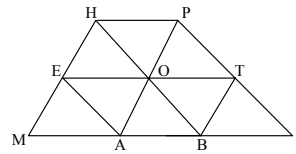


$$\Rightarrow \text{высота равна } \frac{a}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2}(b+c)\frac{a}{2} = \frac{a}{4}(b+c).$$

2. Дано:  $MK : HP = 3:1$ ,  $MA = AB = BK$ ,  $S_{HOP} = 5$ .

Найти:  $S$  – ?

Решение: Проведем прямую через точку  $O$  параллельную  $MK$ , как показано на рисунке. Т.к.  $MK : HP = 3 : 1 \Rightarrow MA = AB = BK = HP$  (по теореме Фалеса).



Т.о.  $MH \parallel PA$  и  $HB \parallel PK \Rightarrow EO = MA = AB$

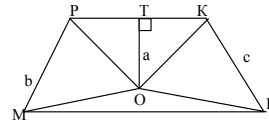
$\Rightarrow EA \parallel OB \Rightarrow EA \parallel PK$  (аналогично  $BT \parallel MH$ ). т.о. трапеция разбивается на 8 треугольников равных  $\triangle HOP \Rightarrow S = 8 \cdot 5 = 40$  (см<sup>2</sup>).

### В-8

1. Дано:  $OT = a$ ,  $PM = b$ ,  $KH = c$ .

Найти:  $S$  – ?

Решение: Из задачи С-12 В-5 (1) вытекает, что точка  $O$  равноудалена от сторон трапеции, далее из задачи С-4 В-7 (2) вытекает, что  $PK + MH = b + c$ .

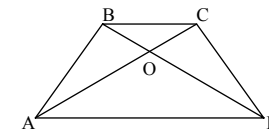


$$\text{Т.о. } S = 2a \cdot \frac{1}{2}(b+c) = ab + ac.$$

2. Дано:  $S_{BOC} = 5$  см<sup>2</sup>,  $S_{AOD} = 20$  см<sup>2</sup>.

Найти:  $S$  – ?

Решение:  $S_{ABO} = S_{OCD}$  исходя из задачи С-12 В-5 (2). Т.к.  $\sin \angle AOB = \sin \angle BOC = \sin \angle AOD = \sin \angle COD$ ;





$$\frac{AO \cdot BO \cdot \frac{1}{2} \sin \angle AOB}{OC \cdot BO \cdot \frac{1}{2} \sin \angle AOB} = \frac{AO \cdot OD \cdot \frac{1}{2} \sin \angle AOD}{OC \cdot OD \cdot \frac{1}{2} \sin \angle AOD}.$$

$$\text{Т.о. } \frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{S_{AOD}}{S_{DOC}} \Rightarrow S_{AOB}^2 = 100, S_{AOB} = 10 \Rightarrow S = 20 + 5 + 2 \cdot 10 = 45 \text{ (см}^2\text{)}.$$

### C-13

#### B-1

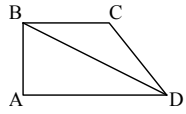
1. Дано:  $BD = 13$  см,  $AD = 12$  см,  $BC = 8$  см.

Найти:  $S$  — ?

Решение: по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ (см)}.$$

$$S = \frac{1}{2} (12 + 8) \cdot 5 = 50 \text{ (см}^2\text{)}.$$



2. Этот треугольник прямоугольный, т.к. по теореме Пифагора

$$\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2}, \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{углы равны: } 30^\circ, 60^\circ \text{ и } 90^\circ.$$

#### B-2

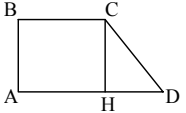
1. Дано:  $AD = 18$  см,  $BC = 9$  см,  $CD = 15$  см.

Найти:  $S$  — ?

Решение:  $HD = AD - BC = 9$  (см).

По теореме Пифагора:  $CH = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$  (см).

$$S = \frac{1}{2} (18 + 9) \cdot 12 = 162 \text{ (см}^2\text{)}.$$



2. Это треугольник прямоугольный, т.к. по теореме Пифагора:

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \cos A = \cos B = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{углы равны: два по } 45^\circ \text{ и один}$$

$90^\circ$ .

#### B-3

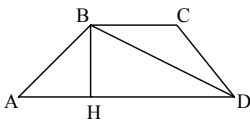
1. Дано:  $BD = 26$  см,  $AB = \sqrt{577}$  см,  $BH = 24$  см,  $BC = 7$  см.

Найти:  $S$  — ?

Решение: по теореме Пифагора:

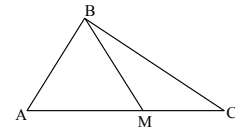
$$AH = \sqrt{577 - 24^2} = 1 \text{ (см)}. HD = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10 \text{ (см)}.$$

$$S = \frac{1}{2} (10 + 7 + 1) \cdot 24 = 216 \text{ (см}^2\text{)}.$$



2. Дано:  $AB = \sqrt{2} BC = 2$ ,  $AM = BM = 1$ .

Найти:  $\angle ABC$  — ?



Решение: Т.к.  $AM^2 + BM^2 = AB^2$ , то  $\triangle ABM$  — равнобедренный прямоугольный, так что  $\angle A = \angle ABM = 45^\circ$  и  $\angle BMC = 90^\circ \Rightarrow$   
т.к. против угла в  $30^\circ$  лежит катет равный половине гипотенузы, и  $BM = (1/2)BC$ , то  $\angle C = 30^\circ$  и  $\cos C = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle MBC = 60^\circ \Rightarrow$   
 $\angle B = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$ .

#### В-4

1. Дано:  $BH = 9$  см,  $AB = \sqrt{82}$  см,  $AC = 15$  см.

Найти:  $S$  — ?

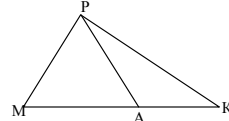
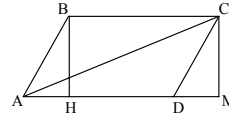
Решение: по теореме Пифагора

$AH = \sqrt{82 - 9^2} = 1$  (см).  $AM = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$  (см).  $AD = 12 - 1 = 11$  (см).  
 $S = 11 \cdot 9 = 99$  (см<sup>2</sup>).

2. Дано:  $PK = 2$ ,  $AK = 1$ ,  $MA = AP = \sqrt{3}$ .

Найти:  $\angle MPK$  — ?

Решение:  $\triangle APK$  — прямоугольный, т.к. по теореме Пифагора  $AK^2 + PA^2 = 1 + 3 = 4 = PK^2 \Rightarrow$   
 $\angle PAK = 90^\circ$  и т.к.  $AK = (1/2)PK$ , то  $\angle APK = 30^\circ$ , а т.к.  $MA = AP$   
 $\Rightarrow \angle M = \angle MPA = 45^\circ \Rightarrow \angle P = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$ .



#### В-5

1. Дано:  $AB = CD$ ,  $AC \perp CD$ ,  $AB = 26$  см,  $AH = 24$  см.

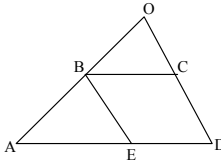
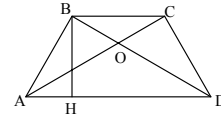
Найти:  $S$  — ?

Решение: по теореме Пифагора  $BH = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10$  (см). Из задачи С-4 В-6 (1) вытекает, что  $AD + BC = 2BH$ , т.о.  $S = BH^2 = 100$  (см<sup>2</sup>).

2. Дано:  $AB = 9$  см,  $CD = 12$  см,  $BC = 15$  см,  $AD = 30$  см.

Найти:  $\angle AOD$  — ?

Решение: Проведем  $BE \parallel CD$ . Т.о.  $BCDE$  — параллелограмм по построению  $\Rightarrow BE = CD$ ,  
 $ED = BC$ ,  $\Rightarrow AE = 15$  см  $\Rightarrow \angle ABE = 90^\circ$ , т.к.  $AB^2 + BE^2 = AE^2 \Rightarrow \angle O = 90^\circ$  (т.к.  $BE \parallel OD$ ).



#### В-6

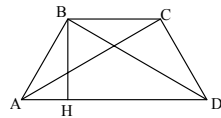
1. Дано:  $AC = 25$  см,  $BH = 15$  см.

Найти:  $S$  — ?

Решение: т.к.  $BD = AC \Rightarrow$  по теореме Пифагора:

$HD = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$  см. Из задачи С-4 В-5 (1):

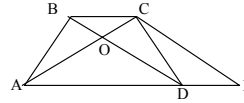
$HD = \frac{1}{2}(AD + BC) = 20$  (см). Т.о.  $S = HD \cdot BH = 20 \cdot 15 = 300$  (см<sup>2</sup>).



2. Дано:  $BD = 5$ ,  $AC = 12$ ,  $BC = 3$ ,  $AD = 10$ .

Найти:  $\angle AOD$  – ?

Решение: Проведем  $CE \parallel BD$ , как показано на рисунке. Тогда  $BCED$  – параллелограмм по построению и  $CE = BD$ .  $BC = DE$ ,  $\triangle ACE$  – прямоугольный,  $AC^2 + CE^2 = 25 + 144 = 13^2 = (AD + DE)^2 = AE^2$ , так что  $\angle ACE = 90^\circ$ .  $\angle AOD$  тоже  $90^\circ$  (т.к.  $BD \parallel CE$ ).



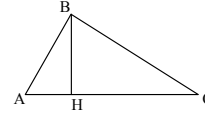
### В-7

1. Из теоремы косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A; \cos A = \frac{BH}{AB}, \text{ то:}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot BH.$$

2. Если бы  $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$  он прямоугольный, а т.к.  $c^2 > a^2 + b^2 \Rightarrow$  он тупоугольный (следствие теоремы косинусов).

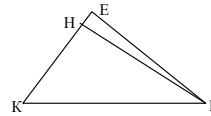


### В-8

1. Исходя из предыдущей задачи, т.к.  $\angle H$  – тупой  $\Rightarrow \cos H = -\frac{HE}{HP} \Rightarrow$

$$PK^2 = HP^2 + HK^2 + 2HE \cdot HK.$$

2. Если бы  $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$  он прямоугольный, а т.к.  $c^2 < a^2 + b^2 \Rightarrow$  он остроугольный (следствие теоремы косинусов).



### С-14

#### В-1

1.  $S = 7 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 63 - 3 - 6 - 5 - 5 = 44$  (клеточки), а так как  $1 \text{ см}^2 = 4$  клеточкам, то  $S = 11 \text{ (см}^2\text{)}$ .

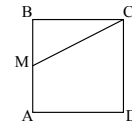
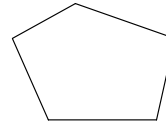
2. Дано:  $BC = 12 \text{ см}$ ,  $MC = 13 \text{ см}$ .

Найти:  $S_{AMCD}$  – ?

Решение:

По теореме Пифагора:  $BM = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ (см)}$ .

$$S_{ABCD} = 12^2 = 144 \text{ см}^2. S_{AMCD} = 144 - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 114 \text{ см}^2.$$

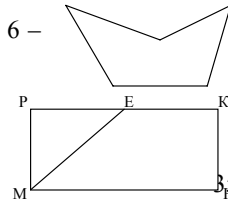


#### В-2

1.  $S = 6 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 24 - 6 - 2 - 4 = 12$  (клеточек), т.е.  $S = 3 \text{ (см}^2\text{)}$ .

2. Дано:  $ME = 15 \text{ см}$ ,  $PM = 12 \text{ см}$ ,  $EK = 6 \text{ см}$ .

Найти:  $S_{MEKH}$  – ?



Решение: по теореме Пифагора:

$$PE = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ (см)}. PK = 9 + 6 = 15 \text{ см}. S_{MPKH} = 12 \cdot 15 = 180 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{MEKH} = 180 - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 126 \text{ (см}^2\text{)}.$$

### В-3

1.  $S = S_{DEC} + S_{EPAB}$ .  $EPAB$  - прямоугольник, т.к.  $ED^2 + AP^2 = AE^2 \Rightarrow S_{EPAB} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ (см}^2\text{)}$ .  $DEC$  - прямоугольный треугольник, т.к.  $EC = \sqrt{4 + 1} = 5 \text{ см}$ , и  $EC^2 + DC^2 = ED^2 \Rightarrow S_{DEC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30 \Rightarrow$

$$S = 12 + 30 = 42 \text{ (см}^2\text{)}.$$

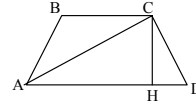
2. Дано:  $AC = \sqrt{35}$  см,  $BC = 3$  см,  $CH = \sqrt{10}$  см.

Найти:  $S$  - ?

Решение: по т. Пифагора  $AH = \sqrt{35 - 10} = 5 \text{ см}$ .

$HD = 5 - 3 = 2 \text{ (см)}$ .  $AD = 5 + 2 = 7 \text{ (см)}$ .

$$S = \frac{1}{2} (7 + 3) \cdot \sqrt{10} = 5\sqrt{10} \text{ (см}^2\text{)}.$$



### В-4

1.  $S = S_{HTMP} + S_{EPK}$ .  $HTMP$  - прямоугольник, т.к.  $MP^2 + PH^2 = MH^2 \Rightarrow S_{HTMP} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ см}^2$ . В задачниках вероятно опечатка и вместо  $PH=3$  см должно быть  $EH = 10$  см. Так как  $EP=EH+HP=13$  см, то  $KP^2 + EK^2 = EP^2$  и значит  $\triangle KPE$  - прямоугольный.

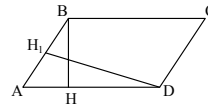
$$S_{EPK} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30 \text{ (см}^2\text{)}. S = 30 + 12 = 42 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2. Дано:  $BH = 4$  см,  $AH = HD = 3$  см.

Найти:  $DH_1$  - ?

Решение: по теореме Пифагора  $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$$\text{(см)}, S = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ (см}^2\text{)} = AB \cdot DH_1, DH_1 = \frac{24}{5} = 4,8 \text{ (см)}.$$



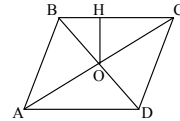
### В-5

1. Третий угол равен  $180^\circ - 45^\circ - 105^\circ = 30^\circ$ . Меньшая высота будет исходить из угла в  $105^\circ$ . Пусть она  $x$ , тогда сторона на которую она падает поделится на  $x$  и  $y$  (т.к. один угол равен  $45^\circ$ ).

$$\text{Т.о. } \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)x = \sqrt{3} + 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{y} \end{cases} ; \begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ x^2 + \sqrt{3}x^2 = 2(\sqrt{3} + 1) \end{cases} ; x = \sqrt{2} \text{ (см)}.$$

2. Дано:  $AC = 4OH$ ,  $AB = 2$  см.

Найти:  $S$  - ?

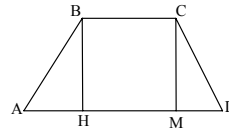


Решение:  $OC = 2OH$ , т.е.  $\angle BCA = 30^\circ$ ,  
 $\cos 30^\circ = OC/BC$ ,  $BC = AB = 2$ ,  $OC = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ .  
 $S = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \sin 30^\circ = 2\sqrt{3}$  (см<sup>2</sup>).

# **В-6**

1. Дано:  $AD = 6$  см,  $BC = 4$  см,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle D = 45^\circ$ .  
 Найти:  $S$  – ?

Решение:  $\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{AM}{BH} = \sqrt{3}$ .  $MD = CM$  (т.к.  
 $\angle D = 45^\circ$ ).  $AM = \sqrt{3} BH = \sqrt{3} MD$  (так как  
 $BH = CM = MD$ ).  $AD = 4 + (\sqrt{3} + 1)MD = 6$ ,  $MD = \frac{2}{\sqrt{3} + 1}$  (см) =  $BH$ .



$$S = \frac{1}{2} \cdot (6 + 4) \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \frac{10}{\sqrt{3} + 1} \text{ (см}^2\text{)}.$$

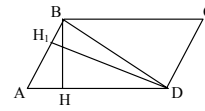
2. Дано:  $BH = 6$  см,  $DH_1 = 7,8$  см,  $S = 78$  см<sup>2</sup>.

Найти:  $BD$  – ?

Решение:  $S = AD \cdot 6 = 78$ ,  $AD = 13$  (см).

$S = AB \cdot 7,8 = 78$ ,  $AB = 10$  (см). По теореме Пифагора:  $AH = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$  (см),  $HD = 13 - 8 = 5$  (см),

$$BD = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61} \text{ (см)}.$$



# **В-7**

1. Дано:  $AM = MP = a$ ,  $AE = EK$ .

Найти:  $S$  – ?

Решение:  $\triangle MTA = \triangle TPK$  (т.к.  $PT = TA$ ,  
 $\angle MTA = \angle PTK$  и  $\angle MAP = \angle APK$ ).

Т.о.  $PK = MA = a \Rightarrow MPKA$  – ромб, т.о.  $PA \parallel KE$ ,  
 $PA = KE \Rightarrow$  трапеция равнобокая, а так как осно-

вания  $a$  и  $2a$ , значит высота ее равна  $\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

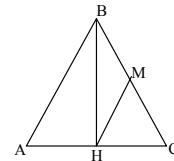
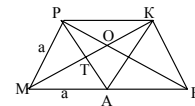
$$S = \frac{1}{2} (a + 2a) \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

2. Дано:  $BH = HM = 12$  см,  $BM = MC$ .

Найти:  $S$  – ?

Решение: Т.к. центр описанной окружности вокруг  
 прямоугольного треугольника лежит на середине  
 гипотенузы  $\Rightarrow HM = MC = BM = 12$  см.

Т.о.  $AB = 24$  (см). По теореме Пифагора:



$$AH = \sqrt{24^2 - 12^2} = \sqrt{432} = 2\sqrt{108} = 12\sqrt{3} \text{ (см)}. AC = 2AH = 24\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 24\sqrt{3} = 144\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

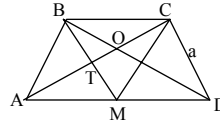
### В-8

1. Дано:  $AM = MD$ ,  $AB = BC = CD = a$ .

Найти:  $S$  — ?

Решение: Т.к.  $AC \perp BM$ , то  $ABCM$  — ромб  $\Rightarrow$   
 $AM = CM = AB = a = BM$ , далее аналогично

предыдущей задаче.  $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ .



2. Дано:  $\angle ABD = 90^\circ$ ,  $\angle ADB = 15^\circ$ ,  $AD = 12$  см.

Найти:  $S$  — ?

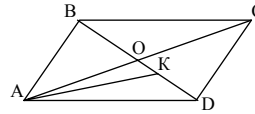
Решение:  $\angle BAD = 180^\circ - 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$ . Отметим на  $BD$  точку  $K$  так, чтобы  $\angle BAK = 60^\circ \Rightarrow \angle BKA = 30^\circ$ .  $\angle KAD = 15^\circ$ . Пусть  $BA = a$ , тогда  $AK = 2a$ ,  $AK = KD = 2a$  (так как  $\angle KAD = \angle KDA = 15^\circ$ ).

$$\cos 30^\circ = \frac{BK}{AK}, BK = \sqrt{3}a. BD = a(2 + \sqrt{3}).$$

$$AD^2 = AB^2 + BD^2, \text{ т.е. } 12^2 = a^2(7 + 4\sqrt{3}) + a^2.$$

$$\text{Т.о. } a^2 = \frac{144}{8 + 4\sqrt{3}} = \frac{36}{2 + \sqrt{3}}, a = \frac{6}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

$$S = AB \cdot BD = \frac{6}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \frac{6}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} (2 + \sqrt{3}) = 36 \text{ (см}^2\text{)}.$$



### С-15

#### В-1

$$1. \frac{AB}{CD} = \frac{EF}{MN}, AB = 5 \text{ см}, CB = 80 \text{ мм}, MN = 1 \text{ дм},$$

$$\frac{5}{8} = \frac{EF}{10}, EF = \frac{25}{4} \text{ (см)} = 6,25 \text{ (см)}.$$

2. Дано:  $AC = 6$  см,  $BC = 8$  см

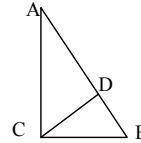
Найти:  $AB$ ,  $AD$ ,  $DB$  — ?

Решение: По теореме Пифагора:  $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$  (см). Пусть  $AD = x$

$$\Rightarrow \frac{AC}{x} = \frac{CB}{10 - x} \text{ (по свойству биссектрисы)}. 8x = 60 - 6x, 14x = 60,$$

$$x = \frac{30}{7} \text{ (см)} \text{ и } 10 - \frac{30}{7} = \frac{40}{7} \text{ (см)}.$$

Ответ: 10,  $\frac{30}{7}$ ,  $\frac{40}{7}$  (см).



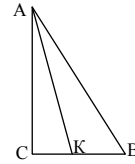
### В-2

1.  $\frac{KP}{MN} = \frac{DO}{AL}$ ,  $KP = 8$  дм,  $MN = 40$  см,  $DO = 1$  м,

$\frac{8}{4} = \frac{10}{AL}$ ,  $AL = 5$  дм.

2. Дано:  $AB = 20$  см,  $AC = 16$  см.

Найти:  $BC$ ,  $BK$ ,  $KC$  — ?



Решение: По теореме Пифагора:  $CB = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$  см. Пусть  $BK = x$

$\Rightarrow \frac{AB}{x} = \frac{AC}{12-x}$  (по свойству биссектрисы);  $240 - 20x = 16x$ ,  $x = \frac{20}{3}$ ,

$12 - x = \frac{16}{3}$  (см).

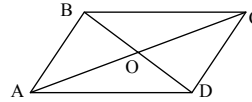
Ответ:  $\frac{20}{3}$ ,  $\frac{16}{3}$  и 12 (см).

### В-3

1. Дано:  $CD = 10$  см,  $\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{OC}$ .

Найти:  $P$  — ?

Решение:  $\frac{BC}{10} = \frac{2OC}{OC}$ , (т.к.  $AC = 2OC$ ),



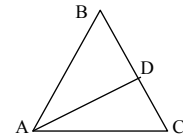
$BC = 20$  см,  $P = 20 \cdot 2 + 10 \cdot 2 = 60$  (см).

2. Дано:  $AB = BC$ ,  $AC = AB - 9,6$ ,  $BD : DC = 5 : 3$ .

Найти:  $P$  — ?

Решение:  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$  (по свойству биссектрисы),

$\frac{AC + 9,6}{AC} = \frac{5}{3}$ ,  $3AC + 28,8 = 5AC$ ,  $AC = 14,4$  (см),



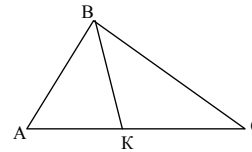
$AB = BC = 14,4 + 9,6 = 24$  (см),  $P = 2 \cdot 24 + 14,4 = 62,4$  (см).

### В-4

1. Дано:  $S_{ABK} : S_{KBC} = \frac{1}{3}$ ,  $BC = 10$  см,  $\frac{BC}{AC} = \frac{AK}{KC}$ .

Найти:  $AC$  — ?

Решение: Т.к.  $\frac{S_{ABK}}{S_{KBC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow AK = KC = 1 : 3$ ,

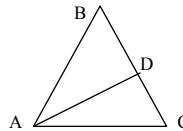


т.о.  $(10/AC) = (1/3)$ ,  $AC = 30$  (см).

2. Дано:  $AC = 18$  мм,  $DC = 12$  мм.

Найти:  $P$  — ?

Решение:  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$  (по свойству биссектрисы).



Пусть  $BD = x$ ,  $\frac{x+12}{x} = \frac{3}{2}$ ,  $\frac{12}{x} = \frac{1}{2}$ ,  $x = 24$ ,  $AB = BC = 36$ . Т.о.  $P = 2 \cdot 36 + 18 = 90$  (мм).

### В-5

1. Дано:  $\frac{AC}{CB} = \frac{EM}{MK}$ .

Доказать:  $AB \cdot MK = CB \cdot EK$

Доказательство:

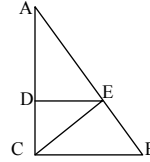
$$\frac{AC}{CB} = \frac{EM}{MK} \Rightarrow \frac{AC+CB}{CB} = \frac{EM+MK}{MK} \Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{EK}{MK} \Rightarrow AB \cdot MK = CB \cdot EK.$$

2. Дано:  $DE \parallel BC$ ,  $DE = DC$ ,  $AE = 15$  мм,  $EB = 20$  мм.

Найти:  $P$  — ?

Решение:  $DE \parallel BC$ ,  $\angle EDC = 90^\circ$  и  $DE = DC$   
 $\Rightarrow \angle ECD = \angle ECB = 45^\circ \Rightarrow CE$  — биссектриса. Т.о.

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CB}{EB} \text{ (по свойству биссектрисы), } AC = \frac{3}{4} CB, \text{ по}$$



теореме Пифагора  $35 = \sqrt{BC^2 + \frac{9}{16}BC^2}$ ,  $\frac{5}{4}BC = 35$ ,  $BC = 28$ ,  $AC = 21$ ,

$P = 84$  (мм).

### В-6

1.  $\frac{KP}{MP} = \frac{EC}{LC} \Rightarrow \frac{KM+MP}{MP} = \frac{EL+LC}{LC} \Rightarrow \frac{KM}{MP} = \frac{EL}{LC} \Rightarrow$

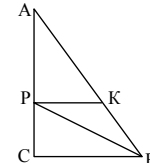
$$KM \cdot LC = EL \cdot MP.$$

2. Дано:  $PK \parallel BC$ ,  $PK = KB$ ,  $AP = 5$  дм,  $PC = 4$  дм.

Найти:  $P$  — ?

Решение: Пусть  $\angle KBP = \alpha$ , тогда  $\angle BPK = \alpha$  (т.к.  $PK = KB$ ). Т.к.  $PK \parallel BC$ ,  $\angle CBP = \angle BPK = \alpha$ ,  $\angle CBP = \alpha$

$\Rightarrow BP$  — биссектриса, т.о.  $\frac{CB}{PC} = \frac{AB}{AP}$  (по свойству бис-



сектрисы),  $AB = \frac{5}{4}CB$ . По теореме Пифагора:  $9 = \sqrt{\frac{25}{16}CB^2 - CB^2} =$

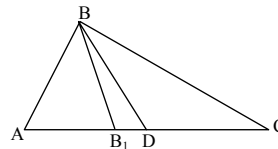
$$= \frac{3}{4}CB, CB = 12 \text{ (дм), } AB = 15 \text{ дм} \Rightarrow P = 15 + 12 + 9 = 36 \text{ (дм)}.$$

### В-7

1. Дано:  $\frac{AD}{DC} > \frac{AB}{BC}$ .

Доказать:  $\angle ABD > \angle DBC$

Доказательство: Проведем биссектрису





$BB_1$ , тогда  $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC}$  по свойству биссектрисы, но т.к.  $\frac{AD}{DC} > \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{DC} > \frac{AB_1}{B_1C} \Rightarrow \frac{AD+DC}{DC} > \frac{AB_1+B_1C}{B_1C}$ . Т.о.  $\frac{AC}{DC} > \frac{AC}{B_1C} \Rightarrow DC < B_1C \Rightarrow \angle ABD > \angle DBC$ .

2. Пусть  $E$  – искомая точка, продлим луч  $CB$  на отрезок  $BD = AB$ . Так как  $BE$  — биссектриса  $\angle EBD = \angle EBA$  и  $\triangle ABE = \triangle DBE$  (по двум сторонам и углу между ними)  $\Rightarrow AE = DE$ , и  $\angle CEB = \angle BED \Rightarrow EB$  – биссектриса  $\angle CED \Rightarrow$  (по свойству биссектрисы)  $\frac{BC}{DB} = \frac{AE+AC}{DE}$ ;

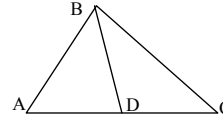
$$\frac{9}{AB} = \frac{AE+2}{AE}; \frac{9}{8} = 1 + \frac{2}{AE}; AE = 16 \text{ см.}$$

### В-8

1. Дано:  $\angle ABD > \angle DBC$ .

Доказать:  $\frac{AD}{DC} > \frac{AB}{BC}$ .

Доказательство: Допустим это не так,  $\frac{AD}{DC} \leq \frac{AB}{BC}$ .



Исходя из предыдущей задачи, если  $\frac{AD}{DC} \leq \frac{AB}{BC} \Rightarrow \angle ABD \leq \angle DBC$ ,

т.о. пришли к противоречию.

2. Из предыдущей задачи:  $E$  – точка пересечения биссектрисы внешнего угла с  $AC$ , а  $H$  – биссектрисы внутреннего угла  $CB$ .  $PB = AB \Rightarrow$  (по свойству биссектрисы)  $\frac{BC}{DB} = \frac{AE+AC}{DE}$ .  $\frac{24}{20} = 1 + \frac{16}{AE}$ ,  $AE = 80$ ,

далее  $\frac{AB}{AH} = \frac{BC}{HC}$ ;  $\frac{20}{AH} = \frac{24}{16-AH}$ ;  $80 - 5AH = 6AH$ ,  $AH = \frac{80}{11}$  (см).

$$EH = \frac{80}{11} + 80 = 87\frac{3}{11} \text{ (см).}$$

### С-16

#### В-1

1. Дано:  $EF = 14$ ,  $DF = 20$ ,  $BC = 21$ .

Найти:  $AC$  — ?

Решение:  $\frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC}$  (т.к. они подобны),  $AC = \frac{21 \cdot 20}{14} = 30$ .

$$2. \frac{S_1}{S_2} = \frac{16}{25} = k^2, \text{ т.о. } k = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{4}{5}, x = \frac{10}{4} \text{ см} = 2,5 \text{ (см).}$$

### В-2

1. Т.к. они подобны, то соответствующие их углы равны  $\Rightarrow \angle T = \angle F$ ,  
 $\angle K = \angle E$ ,  $\angle P = \angle M$ .  
 $\angle T = 20^\circ$ ,  $\angle K = 40^\circ$ ,  $\angle M = 180^\circ - 20^\circ - 40^\circ = 120^\circ = \angle P$ .
2.  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{5} = k$ ,  $\frac{P_1}{P_2} = k^2 = \frac{4}{25} = \frac{8}{x}$ ,  $x = (50 \text{ см}^2)$ .

### В-3

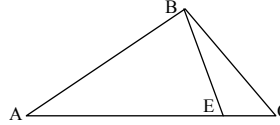
1. Запишем отношение подобия:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{EC}{BC} \quad (\text{т.к. } \angle ABC \text{ и } \angle BEC - \text{тупые и } \angle C - \text{общий}).$$

$$BC^2 = EC^2 + EC \cdot AE = 81 + 144 = 225, BC = 15 \text{ (см)}.$$

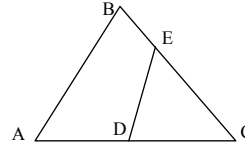
2. Т.к.  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{3} = k \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{S_1}{S_2} = k^2 = \frac{4}{9} \\ S_1 + S_2 = 260 \end{cases}; \quad \begin{cases} S_1 = \frac{4}{9} S_2 \\ \frac{13}{9} S_2 = 260 \end{cases}; \quad \begin{cases} S_1 = 80 \text{ (см}^2\text{)} \\ S_2 = 180 \text{ (см}^2\text{)} \end{cases}.$$



### В-4

1. Запишем отношение подобия:  $\frac{CE}{AC} = \frac{DC}{BC}$   
 (т.к.  $\angle C$  — общий и  $DE \parallel AB$ ),  $CE = ((3+5) \cdot 5)/7 = 40/7 \text{ (см)}$ .



2.  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{50}{32} = k^2$ ,  $k = \frac{5}{4}$ ,  $\begin{cases} \frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{4} \\ P_1 + P_2 = 117 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} P_1 = \frac{5}{4} P_2 \\ \frac{9}{4} P_2 = 117 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} P_1 = 65 \text{ (дм)} \\ P_2 = 52 \text{ (дм)} \end{cases}$ .

### В-5

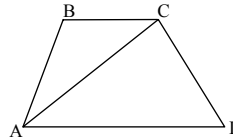
1. Дано:  $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ ,  $BC = 4 \text{ см}$ ,  $AB = 9 \text{ см}$ .

Найти:  $AC$  — ?

Решение:

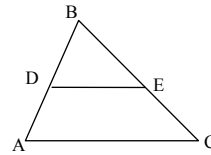
Т.к.  $\angle CAD = \angle ACB$ , то отношение подобия:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^2 = 4 \cdot 9 = 36, AC = 6 \text{ (см)}.$$



2. Дано:  $S_{ABC} = 27 \text{ см}^2$ ,  $\frac{BD}{AB} = \frac{1}{3}$ .

Найти:  $S_{ADEC}$  — ?



Решение:  $\frac{BD}{AB} = k = \frac{1}{3}$ ,  $\Delta ABC \sim \Delta DBE$  по 3-м сторонам  $\Rightarrow$

$$\frac{S_{DBE}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{9}, S_{DBE} = 3 \text{ см}^2, S_{ADEC} = S_{ABC} - S_{DBE} = 24 \text{ см}^2.$$

### В-6

1. Дано:  $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ ,  $AC$  – биссектриса,  $AB = 9 \text{ см}$ ,  $CD = 12 \text{ см}$ .

Найти:  $P$  — ?

Решение: Т.к.  $\angle CAB = \angle CAD = \angle BCA$ , то

$AB = BC = 9 \text{ см}$ . Т.к.  $\Delta ABC \sim \Delta ACD \Rightarrow$

$$\angle CAB = \angle D \Rightarrow CD = CA \Rightarrow \frac{AB}{CA} = \frac{AC}{AD},$$

$$AD = CD^2 : 9 = 16 \text{ (см)} \Rightarrow P = 12 + 2 \cdot 9 + 16 = 46 \text{ (см)}.$$

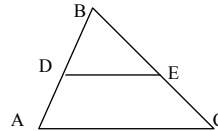
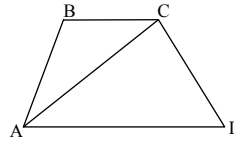
2. Дано:  $BP : AB = 1 : 4$ ,  $S_{ADEC} = 30 \text{ см}^2$ .

Найти:  $S_{ABC}$  — ?

Решение:  $\Delta ABC \sim \Delta DBE$  по трем сторонам

$$k = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{cases} \frac{S_{ABC}}{S_{DBE}} = k^2 = 16 \\ S_{ABC} - S_{DBE} = 30 \end{cases}; \begin{cases} S_{DBE} = \frac{1}{16} S_{ABC} \\ \frac{15}{16} S_{ABC} = 30 \end{cases}; S_{ABC} = 32 \text{ см}^2.$$



### В-7

1. Дано:  $\frac{S_{ABK}}{S_{BKC}} = \frac{1}{3}$ ,  $\Delta ABK \sim \Delta KBC$ .

Найти:  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$  — ?

Решение: 1. Если  $\angle B \neq 90^\circ$ , то  $BK$  не может быть перпендикулярно  $AC$ , т.к.  $\Delta ABK$  не будет  $\sim \Delta KBC$ .

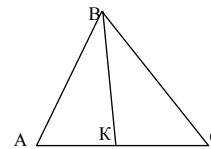
2. Если  $BK$  не перпендикулярна  $AC \Rightarrow \angle BKC$  тупой (острый)  $\Rightarrow \angle C + \angle KBC = 180^\circ - \angle BKC = \angle AKB \Rightarrow \Delta ABK$  не будет  $\sim \Delta KBC$ .

3. Если  $BK \perp AC$  и  $BK$  – биссектриса, то  $\Delta ABC$  равнобедренный и  $\Delta ABK = \Delta KBC$ , что неверно. Т.о. остается только  $\angle B = 90^\circ$ ,  $BK \perp AC$   
 $\Rightarrow$  т.к.  $\frac{S_{ABK}}{S_{BKC}} = \frac{1}{3}$ , то  $\frac{AK}{KC} = \frac{1}{3}$  и т.к.  $\Delta ABK \sim \Delta KBC \Rightarrow \frac{AK}{KB} = \frac{KB}{KC} \Rightarrow$

$$KB^2 = AK \cdot KC = \frac{1}{3} CK^2. \text{ Т.о. } KC = \sqrt{3} KB.$$

По теореме Пифагора:  $BC^2 = BK^2 + 3BK^2$ ,  $BC = 2BK \Rightarrow \angle C = 30^\circ$ ,  $\angle A = 60^\circ$ .

Ответ:  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ .



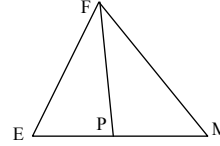
### В-8

1. Дано:  $\triangle EFP \sim \triangle PFM$ ,  $\angle PFM = 60^\circ$ ,  $S_{PFM} = 30 \text{ см}^2$ .

Найти:  $S_{EFM}$  — ?

Решение: Их предыдущей задачи:  $\angle F = 90^\circ$ ,  
 $FP \perp EM$ . Т.о.  $\angle M = 30^\circ$ ,  $FP = (1/2) FM \Rightarrow$

$$S_{PFM} = \frac{1}{2} \cdot 2FP^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} FP^2 = 30.$$



$$FP = \sqrt{\frac{60}{\sqrt{3}}} = \sqrt{20\sqrt{3}} \text{ (см)}, \angle EFP = 30^\circ \Rightarrow EP = (1/2)EF \Rightarrow \text{по теореме}$$

$$\text{Пифагора: } EF = \sqrt{\frac{1}{4}EF^2 + 20\sqrt{3}}, \frac{3}{4}EF^2 = \sqrt{20\sqrt{3}}, EF = \sqrt{\frac{80}{\sqrt{3}}},$$

$$EP = \sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}}, S_{EFP} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{20\sqrt{3}} = 10 \text{ см}^2, S_{EFM} = 10 + 30 = 40 \text{ см}^2.$$

### С-17

#### В-1

1. Т.к.  $AB \parallel CD \Rightarrow \angle BAE = \angle F$  (накрест лежащие).

$\angle B = \angle ECF, \angle BEA = \angle FEC$  (вертикальные).

Т.о.  $\triangle ABE \sim \triangle ECF$  (по трем углам).

2. Дано:  $\angle B_1 = \angle C, AC = 2; \angle B = \angle A_1; B_1C_1 = 4; A_1C_1 = AB + 2,2;$   
 $A_1B_1 = 2,8$ .

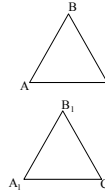
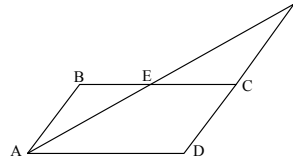
Решить треугольники.

Решение:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  по двум углам  $\Rightarrow$

$$\frac{BC}{A_1B_1} = \frac{AB}{A_1C_1} = \frac{AC}{B_1C_1}, \text{ т.е. } BC = \frac{2,8 \cdot 2}{4} = 1,4, \text{ т.е. } \frac{BC}{A_1B_1} =$$

$$= k = \frac{1,4}{2,8} = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } AB = (1/2)A_1C_1 = (1/2)AB + 1,1.$$

$$AB = 2,2; A_1C_1 = 4,4.$$



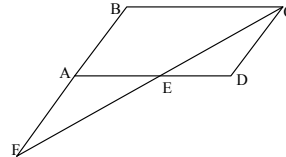
#### В-2

1. Т.к.  $AB \parallel CD \Rightarrow \angle F = \angle FCD, \angle D = \angle B$  (по свойству параллелограмма),  $\angle BCF = \angle DEC$  (накрест лежащие), т.о.  $\triangle FBC \sim \triangle ECD$  (по трем углам).

2. Дано:  $\angle A = \angle E, \angle C = \angle F, AC = 6,$   
 $EF = 2, AB = 3,3, DF = BC - 3,2$ .

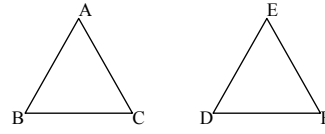
Решить треугольники.

Решение:  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  по двум углам  $\Rightarrow \frac{AC}{EF} = 3 = k, AB = 3ED \Rightarrow$



$$ED = 1,1; \frac{BC}{DF} = 3 \Rightarrow BC = 3BC - 9,6.$$

$$\text{Т.о. } BC = 4,8; DF = 1,6.$$



### В-3

1. Т.к.  $QP \parallel AC$  и  $PR \parallel AB \Rightarrow \angle C = \angle QPB$ ,  
 $\angle PRC = \angle BQP$ ,  $\angle B = \angle RPC$ . Т.о.

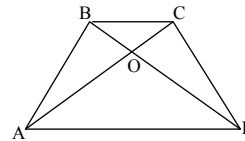
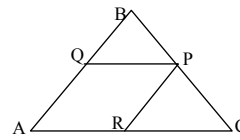
$$\Delta QBP \sim \Delta RPC \text{ (по трем углам)} \Rightarrow \frac{PQ}{CR} = \frac{BQ}{PR}.$$

$$\text{Т.о. } PQ \cdot PR = BQ \cdot CR.$$

2. Дано:  $\frac{S_{BOC}}{S_{AOD}} = \frac{1}{9}$ ,  $BC + AD = 4,8$ .

Найти:  $BC$  и  $AD$  — ?

Решение:  $\Delta BOC \sim \Delta AOD$  (по двум углам),  
 т.к.  $BC \parallel AD \Rightarrow \angle OAD = \angle OCB$  (накрест ле-



жащие) и  $\angle AOD = \angle BOC$  (вертикальные), т.е.  $\frac{S_{BOC}}{S_{AOD}} = k^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow$

$$k = \frac{1}{3}, \text{ т.е.: } \begin{cases} \frac{BC}{AD} = \frac{1}{3} \\ BC + AD = 4,8 \end{cases}; \begin{cases} BC = \frac{1}{3}AD \\ \frac{4}{3}AD = 4,8 \end{cases}; \begin{cases} AD = 3,6 \\ BC = 1,2 \end{cases}.$$

### В-4

1. Т.к.  $AB \parallel CD$  и  $BC \parallel AP \Rightarrow$

$$\angle AFE = \angle KFD = \angle FMB = \angle KMC$$

(вертикальные),  $\angle E = \angle K$ .

Т.о.  $\Delta AFE \sim \Delta MKC$  (по двум углам)

$$\Rightarrow \frac{AE}{KC} = \frac{AF}{MC} \Rightarrow AE \cdot MC = AF \cdot KC.$$

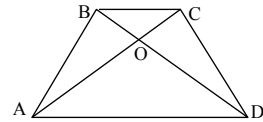
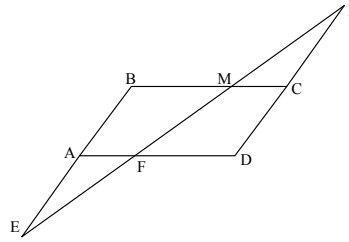
2. Дано:  $\frac{P_{BOC}}{P_{ABO}} = \frac{2}{3}$ ,  $AC = 20$ .

Найти:  $AO$  и  $OC$  — ?

Решение: Т.к.  $\Delta BOC \sim \Delta AOB$  (смотри пре-

дыдущую задачу) и  $k = \frac{P_{BOC}}{P_{ABO}} = \frac{2}{3}$ , то:

$$\begin{cases} \frac{OC}{OA} = \frac{2}{3} \\ OC + OA = 20 \end{cases}; \begin{cases} OC = \frac{2}{3}OA \\ \frac{5}{3}OA = 20 \end{cases}; \begin{cases} OA = 12 \\ OC = 8 \end{cases}.$$



**В-5**

1.  $\triangle AEC \sim \triangle BDC$  (по двум углам) ( $\angle C$  – общий)  $\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{DC}{EC} \Rightarrow BC \cdot EC = DC \cdot AC$ .

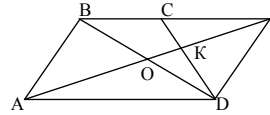
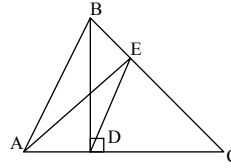
2. Дано:  $CK : KD = 1 : 2$ ,  $BC : AD = 1 : 2$ .

Доказать:  $BO = OD$

Доказательство: Продлим  $AO$  до пересечения с  $BC$ .  $\triangle CEK \sim \triangle AKD$  (т.к.  $BC \parallel AD \Rightarrow \angle EAD = \angle AEC$ ,  $\angle OKD = \angle CKE$  как вертикальные),

т.о.  $\frac{CE}{AD} = \frac{CK}{KD} = \frac{1}{2}$  и т.к.  $\frac{BC}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow BE = AD$

и  $BE \parallel AD \Rightarrow ABED$  – параллелограмм  $\Rightarrow BO = OD$ .



**В-6**

1.  $\triangle BOE \sim \triangle AOD$ , (по трем углам), т.к.  $\angle BEO = \angle ODA = 90^\circ$  и  $\angle AOD = \angle BOE$

(вертикальные)  $\Rightarrow \frac{BO}{OA} = \frac{OE}{OD} \Rightarrow$

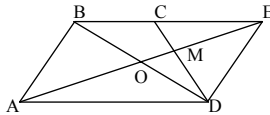
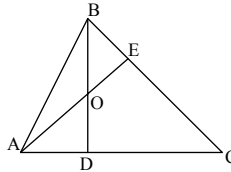
$BO \cdot OD = OE \cdot OA$ .

2. Дано:  $CM : MD = 2 : 3$ ,  $AB = AD$ ,  $BC : AD = 1 : 3$ .

Доказать:  $BD \perp AM$ .

Доказательство: Продлим  $AO$  до пересечения с  $BC$ .  $\triangle CEM \sim \triangle AMD$  (смотри предыдущую задачу). Т.о.  $\frac{CE}{AD} = \frac{CM}{MD} = \frac{2}{3}$  и т.к.

$\frac{BC}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow BE = AD = AB \Rightarrow ABED$  – ромб, т.о.  $BD \perp AE$ .



**В-7**

1. Дано:  $\angle A = 2 \angle B$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ .

Доказать:  $a^2 = bc + b^2$ .

Доказательство: Продлим луч  $CA$  до  $AD = AB$ . Пусть  $\angle D = \alpha$ , тогда

$\angle DAB = 180^\circ - 2\alpha$ ,  $\angle BAC = 2\alpha$ , а т.к.

$\angle ABC = \angle BAC \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \angle ABC = \alpha \Rightarrow$

$\triangle DBC \sim \triangle ABC$  (по двум углам), т.к.

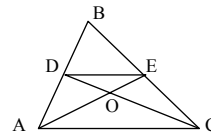
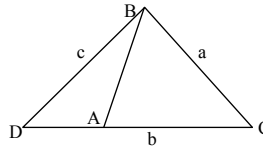
$\angle C$  – общий  $\Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow$

$a^2 = (b + c)b = b^2 + cb$ .

2. Дано:  $S_{AOD} = S_{CEO} = 8$ ,  $S_{DOE} = 4$ .

Найти:  $S_{ABC}$  — ?

Решение: Так как  $S_{ADO} = S_{CEO}$ , то  $S_{ADE} = S_{CDE} \Rightarrow$



$$DE \parallel AC \text{ и } \frac{AO}{OE} = \frac{OC}{OD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta DEO \sim \Delta AOC \text{ с коэффициентом } \frac{1}{2}, \text{ т.о.}$$

$$S_{AOC} = 4S_{DOE} = 16, \text{ т.о. } S_{ADEC} = 16+4+28=36 \text{ и т.к. } \frac{DE}{AC} = \frac{1}{2} \text{ и}$$

$$\Delta DBE \sim \Delta ABC \text{ (по двум углам), то } S_{ADEC} = S_{ABC} - S_{DBE} = S_{ABC} - \frac{1}{4} S_{ABC} =$$

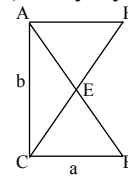
$$= \frac{3}{4} S_{ABC} = 36, S_{ABC} = 48.$$

### В-8

1. Дано:  $BC = a, AC = b, AE : EB = 1 : 2$ .

Доказать:  $CE = \frac{\sqrt{4b^2 + a^2}}{3}$ .

Доказательство: Продлим луч  $CE$  до пересечения с прямой, проведенной через точку  $A$ , параллельно  $CB$ . Т.к.  $AF \parallel CB \Rightarrow \angle F = \angle FCB$  и  $\angle BEC = \angle AEF$  (как вертикальные). Т.о.  $\Delta AEF \sim \Delta CEB$  (по двум углам). Т.о.  $\frac{AF}{BC} = \frac{AE}{EB} = \frac{1}{2}$ . Т.о.  $AF = \frac{a}{2}$ . По теореме Пифа-



гора:  $CF = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$ . Т.к.  $\Delta AEF \sim \Delta CEB$  с коэффициен-

том  $\frac{1}{2} \Rightarrow CE = \frac{2}{3} CF$ , т.е.  $CE = \frac{1}{3} \sqrt{4b^2 + a^2}$ .

2. Дано:  $S_{ADC} = S_{AEC}, S_{DOE} = 2, S_{AOC} = 8$ .

Найти:  $S_{ABC}$  — ?

Решение: Т.к.  $S_{ADC} = S_{AEC}$ , то  $DE \parallel AC \Rightarrow \Delta DOE \sim \Delta AOC$  (по трем углам)

с коэффициентом подобия  $k^2 = \frac{1}{4}, k = \frac{1}{2}$ .  $S_{AOC} = (1/2)AO \cdot OC \cdot \sin AOC =$

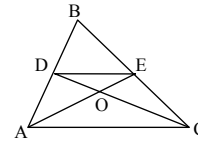
$$= (1/2)AO \cdot 2OD \cdot \sin DOA = 2S_{DOA} = 8.$$

$S_{ADEC} = 8 + 8 + 2 = 18$ .  $\Delta DBE \sim \Delta ABC$  с коэффици-

ентом подобия  $\frac{1}{2}$  (см. предыдущую задачу), т.о.

$$S_{ABC} = S_{DBE} + S_{ADEC} = \frac{1}{4} S_{ABC} + 18 = S_{ABC}, \text{ т.е.}$$

$$S_{ABC} = 24.$$

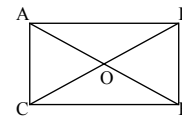


### С-18

#### В-1

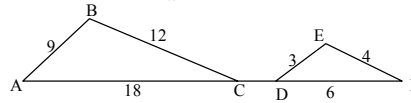
1. Дано:  $\frac{AO}{OB} = \frac{DO}{OC}$ .

Доказать:  $\angle CBO = \angle DAO$ .



Доказательство:  $\triangle ADO \sim \triangle COB$ , по углу и двум пропорциональным сторонам  $\frac{AO}{OB} = \frac{DO}{OC}$  и  $\angle AOD = \angle COB$  (как вертикальные)  $\Rightarrow \angle CBO = \angle DAO$ .

2.  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ , по трем сторонам, т.к.  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{3}{1} \Rightarrow \angle D = \angle A$ , т.к.  $DF \in AC$ , то  $AB \parallel DE$ .



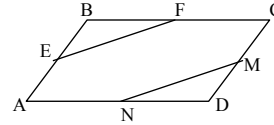
## В-2

1. Дано:  $\frac{EB}{BF} = \frac{DM}{DN}$ .

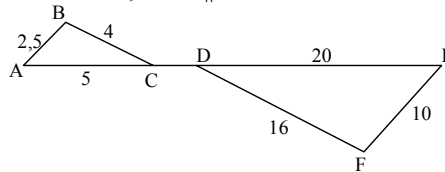
Доказать:  $\angle BEF = \angle NMD$ .

Доказательство:  $\triangle EBF \sim \triangle NMD$  по углу и двум пропорциональным сторонам (т.к.

$\angle B = \angle D$  и  $\frac{BE}{BF} = \frac{DM}{DN}$ ). Т.о.  $\angle BEF = \angle NMD$ .



2.  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ , по трем сторонам, т.к.  $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{DE} = \frac{BC}{DF} = \frac{1}{4} \Rightarrow \angle C = \angle D$ , а т.к.  $DE \in AC$ , то  $BC \parallel DF$ .



## В-3

1. Дано:  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle BDA = \angle B_1D_1A_1$ .

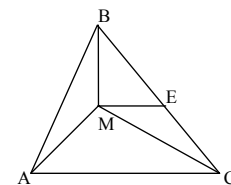
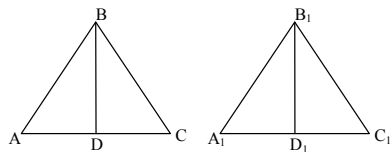
Доказать:  $\triangle BDC \sim \triangle B_1D_1C_1$ .

Доказательство:  $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$  по трем углам  $\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{B_1D_1}{A_1D_1}$ , а т.к.

$AD = DC$  и  $A_1D_1 = D_1C_1 \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{B_1D_1}{D_1C_1}$  и  $\angle BDC = \angle B_1D_1C_1 \Rightarrow$

$\triangle DBC \sim \triangle D_1B_1C_1$  по двум сторонам и углу.

2. Дано:  $AB = 4$  см,  $MB = 1\frac{7}{9}$ ,  $BC = 6$  см,  $AC = 9$  см,  $ME =$





$$2\frac{2}{3}, CE = 2.$$

Доказать:  $ME \parallel AC$ .

Доказательство:  $BE = 6 - 2 = 4$ .  $\triangle BME \sim \triangle ABC$ , по трем сторонам, т.к.

$$\frac{BE}{AC} = \frac{ME}{BC} = \frac{BM}{AB} = \frac{4}{9}, \text{ т.о. } \angle BEM = \angle C \Rightarrow ME \parallel AC.$$

#### В-4

1. Дано:  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\frac{AE}{EC} = \frac{A_1E_1}{E_1C_1}$ .

Доказать:  $\triangle ABE \sim \triangle A_1B_1E_1$ .

Доказательство: Т.к.  $BE$  и  $B_1E_1$  – биссектрисы и  $\angle B = \angle B_1$ , то

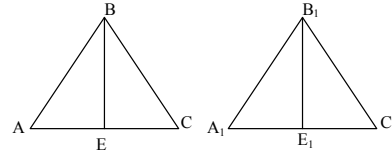
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC} = \frac{A_1C_1}{E_1C_1} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  по углу и

двум сторонам  $\Rightarrow \frac{AB}{BE} = \frac{A_1B_1}{B_1E_1}$  и

$$\angle ABE = \angle A_1B_1E_1 \Rightarrow$$

$\triangle ABE \sim \triangle A_1B_1E_1$  по углу и двум сторонам.



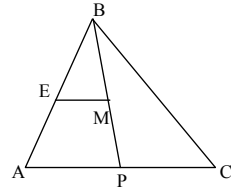
2. Дано:  $AB = 4$ ,  $AC = 7$ ,  $ME = 4\frac{1}{2}$ ,  $BC = 6$ ,  $MB = 5\frac{1}{4}$ ,  $AE = 1$ .

Доказать:  $\triangle APB$  – равнобедренный.

Доказательство:  $BE = 4 - 1 = 3$ .  $\triangle EBM \sim \triangle ABC$ ,

по трем сторонам, т.к.  $\frac{EB}{AB} = \frac{BM}{AC} = \frac{EM}{BC} = \frac{3}{4}$ , т.о.

$\angle ABP = \angle A \Rightarrow AP = BP \Rightarrow \triangle ABP$  – равнобедренный.



#### В-5

1. Дано:  $AD = a$ ,  $BC = b$ ,  $AC = \sqrt{ab}$ .

Доказать:  $\angle BAC = \angle ADC$ .

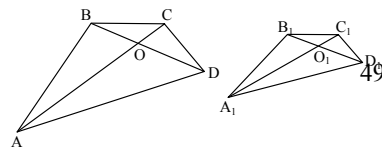
Доказательство: Т.к.  $\frac{a}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ,

т.е.  $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{BC}$ , и  $\angle BCA = \angle CAD \Rightarrow$

$\triangle ABC \sim \triangle ACD$  по углу и двум сторонам  $\Rightarrow \angle D = \angle BAC$ .

2. Дано:  $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ ;  $\angle ADB = \angle A_1D_1B_1$ ;  $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$ ;  
 $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$ .

Доказать:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .



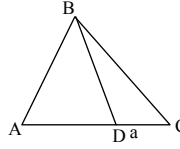
Доказательство:  $\triangle ADC \sim \triangle A_1D_1C_1$  (по двум углам)  $\Rightarrow \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$ .  
 $\angle ADB = \angle A_1D_1B_1$ ,  $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ ,  $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1 \Rightarrow \angle A = \angle A_1$ .  
 Т.о.  $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$  по трем углам  $\Rightarrow \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1} \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$  и  
 т.к.  $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  по углу и двум сторонам.

#### В-6

1. Дано:  $DC = a$ ,  $AC = b$ ,  $BC = \sqrt{ab}$ .

Доказать:  $\angle BAC = \angle DBC$ .

Доказательство:  $\triangle ABC \sim \triangle BDC$  по углу и двум сторонам т.к. ( $\angle C$  — общий и  $\frac{DC}{BC} = \frac{BC}{AC}$ , т.к.



$$\frac{a}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}). \text{ Т.о. } \angle BAC = \angle DBC.$$

2. Дано:  $AO = OC$ ;  $A_1O_1 = O_1C_1$ ;  $\angle AOD = \angle A_1O_1D_1$ ;  
 $\angle ADO = \angle A_1D_1O_1$ ;  $\angle ABO = \angle A_1B_1O_1$ .

Доказать:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

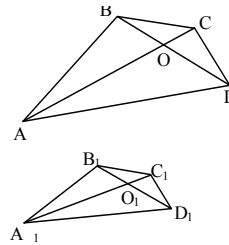
Доказательство:  $\triangle AOD \sim \triangle A_1O_1D_1$  (по двум углам)  $\Rightarrow \frac{AO}{A_1O_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$  и  $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$ ,

т.к.  $AC = 2AO$  и  $A_1C_1 = 2A_1O_1$ , то  $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$ ,

$\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$  (по двум углам)  $\Rightarrow$  и

$\angle A = \angle A_1$ ,  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AD}{A_1D_1} \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$  и

$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .



#### В-7

1. Дано:  $\angle EBC = \angle ABD$ ,  $\angle ECB = \angle BAD$ .

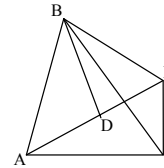
Доказать:  $\triangle DBE \sim \triangle ABC$ .

Доказательство: Так как  $\angle EBC = \angle ABD$  и  $\angle ECB = \angle BAD$ , то  $\angle BDA = \angle BEC$ .  $\triangle BDA \sim \triangle BEC$  (по двум углам).

Т.о.  $\frac{BC}{AB} = \frac{BE}{BD}$  (т.к.  $\angle CBE = \angle ABD \Rightarrow \angle CBE + \angle DBC =$

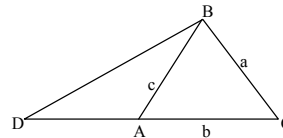
$= \angle EBD = \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ .

Т.о.  $\triangle DBE \sim \triangle ABC$  по трем углам.



2. Дано:  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,  $a^2 = bc + b^2$ .

Доказать:  $\angle A = 2\angle B$ .



Доказательство: Продлим луч  $CA$  до  $AD = AB$ , т.к.  $a^2 = b(b + c) \Rightarrow$   
 $BC^2 = AC \cdot DC \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow$   
 $\triangle ABC \sim \triangle DBC$  (по углу и двум сторонам). Т.е.  $\angle BAC = \angle DBC$ .  
 Пусть  $\angle D = \alpha \Rightarrow \angle DAB = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle BAC = 2\alpha = \alpha + \angle ABC$ .  
 Т.о.  $\angle A = 2\angle B$ .

### В-8

1. Дано:  $\angle ADB = \angle EBC$ ,  $\angle DAB = \angle BCE$ .

Доказать:  $\angle BDE = \angle ADB$ .

Доказательство:  $\triangle ADB \sim \triangle BEC$  по двум уг-

лам  $\Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{DB}{BE}$ , а т.к.  $AB = BC$ , то  $\frac{AD}{BC} = \frac{DB}{BE}$ ,

$\angle ABD = 180^\circ - \angle A - \angle ADB$ .

$\angle DBE = 180^\circ - \angle EBC - 180^\circ + \angle A + \angle ADB = \angle A$ , т.о.

$\triangle ADB \sim \triangle DBE$  по двум сторонам и углу  $\Rightarrow \angle BDE = \angle ADB$ .

2. Дано:  $\frac{AM}{CT} = \frac{AP}{CK} = \frac{1}{2}$ .

Найти:  $\frac{ME}{ET}$  — ?

Решение: Т.к.  $\angle A = \angle C$  и  $\frac{AM}{CT} = \frac{AP}{CK}$ , то

$\triangle AMP \sim \triangle KTC$  по углу и двум сторонам с коэффициентом  $\frac{1}{2}$ , т.о.

$MP \parallel KT \Rightarrow MKTP$  — трапеция  $\Rightarrow \triangle MEP \sim \triangle KTE$  по свойству трапеции

с коэффициентом  $\frac{1}{2} \Rightarrow ME : ET = \frac{1}{2}$ .

### С-19

#### В-1

1. Дано:  $AK = KB$ ,  $AK = 3$  см,  $KO = 4$  см.

Найти:  $P$  — ?

Сравнить:  $\angle KOA$  и  $\angle BCA$ .

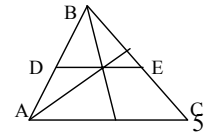
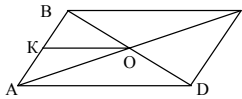
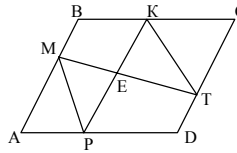
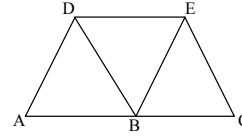
Решение: Т.к.  $AK = KB$  и  $BO = OD \Rightarrow KO$  — средняя линия  $\triangle ABD \Rightarrow KO \parallel AD \parallel BC \Rightarrow \angle KOA = \angle BCA \Rightarrow KO =$   
 $= (1/2)AD \Rightarrow AB = 3 \cdot 2 = 6$  и  $AD = 4 \cdot 2 = 8$ ,  $P = 2(6 + 8) = 28$  (см).

2. Дано:  $AC = 12$  см.

Найти:  $DE$  — ?

Решение: Т.к. медианы делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1, то  $DE = (2/3)AC = 8$  (см).

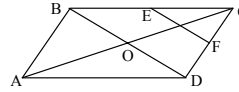
#### В-2



1. Дано:  $BE = EC, CF = FD$ .

Доказать:  $EF = BO, EF \perp AC$ .

Доказательство: Т.к.  $BE = EC$  и  $CF = FD \Rightarrow EF$  – средняя линия  $\triangle BCD \Rightarrow EF \parallel BD \perp AC \Rightarrow EF \perp AC$  и  $EF = (1/2)BD = BO$ .

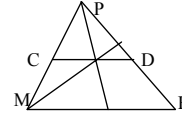


2. Дано:  $CD = 18$  см.

Найти:  $MK$  — ?

Решение: Смотри предыдущую задачу.

$$CD = (2/3)MK, MK = \frac{3}{2} \cdot 18 = 27 \text{ (см)}.$$



### В-3

1. Дано:  $AB = CD = EF, AB \parallel CD \parallel EF$ .

Доказать:  $AF \parallel O_1O_2, AF = 2O_1O_2$ .

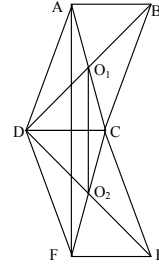
Доказательство: Т.к.  $AB = DC = FE$  и  $AB \parallel DC \parallel FE$ , то  $ABCD$  и  $CEFD$  – параллелограммы  $\Rightarrow AO_1 = O_1C, FO_2 = O_2C \Rightarrow O_1O_2$  – средняя линия  $\triangle ACF$  и  $O_1O_2 \parallel AF$  и  $AF = 2O_1O_2$ .

2. Дано:  $AB = BC, OA = 5, OB = 6$ .

Найти:  $S$  — ?

Решение: Т.к.  $AB = BC \Rightarrow \angle AMO = 90^\circ$  (т.к. медиана в равнобедренном треугольнике является и высотой)  $OM = (1/2)OB = 3$

(свойство медиан),  $AC = 2AM = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8$  (по теореме Пифагора).  $BM = 3OM = 9, S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 = 36 \text{ (см}^2\text{)}.$



### В-4

1. Дано:  $AQ = BP$ .

Доказать:  $EF \parallel BC, EF = (1/2)BC$ .

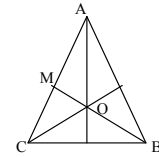
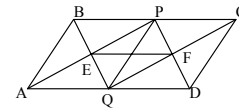
Доказательство:  $ABPQ$  – параллелограмм, т.к.  $PB \parallel AQ$  и  $BP = AQ \Rightarrow BE = EQ$ .  $QPCD$  тоже параллелограмм, т.к.  $PC \parallel QD$  и  $PC = BC - BP = AD - AQ = QD \Rightarrow CF = FQ \Rightarrow EF$  – средняя линия  $\triangle BCQ \Rightarrow EF \parallel BC$  и  $EF = (1/2)BC$ .

2. Дано:  $BC = 9, OB = 10$ .

Найти:  $S$  — ?

$$\text{Решение: } BM = (3/2)BO = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15, AC = 2MC =$$

$$2\sqrt{15^2 - 9^2} = 24 \text{ (по т. Пифагора), } S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 9 = 108.$$



### В-5

1. Дано:  $BN = NC, CP = PD, DQ = AQ, AM = MB$ .

Доказать:  $NO = OQ, MO = OP$ .

Доказательство:  $MN = (1/2)AC = PQ$  (как средняя линия  $\triangle ABC$ ).

$P = MQ = (1/2)BD$  (как средняя линия  $\triangle BCD$  и  $\triangle ABD$ ). Так что  $MNPQ$  – параллелограмм  $\Rightarrow NO = OQ$  и  $MO = OP$ .

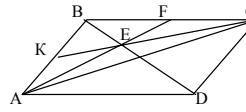
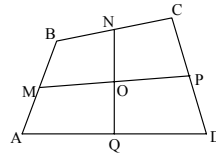
2. Дано:  $KB = 5$ ,  $AD = 12$ ,  $\angle A = 30^\circ$ .

Найти:  $S$  — ?

Решение:  $E$  – точка пересечения медиан.

$\triangle ABC \Rightarrow AB = 2KB = 10$ . Высота параллелограмма равна  $(1/2) \cdot AB = 5$  (т.к.  $\angle A = 30^\circ$ ).

$S = 12 \cdot 5 = 60$ .



### В-6

1. Т.к.  $AC = BD \Rightarrow ABCD$  – прямоугольник.

Т.к.  $AM = MB$  и  $BO = OD \Rightarrow MO$  — средняя линия и  $MO \parallel AD$ . Аналогично  $PO \parallel AB \Rightarrow MO \perp PO$ .

2. Дано:  $AC = 4$ ,  $BC = 3$ .

Найти:  $MH$  — ?

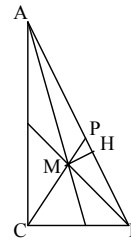
Решение:  $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  (по т. Пифагора). Т.к.  $P$  — центр описанной окружности, то  $CP = AP = PB = (1/2)AB$ :  $CP = \frac{5}{2}$ ,  $MP = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ ,

$PB = \frac{5}{2}$ .  $BM = \frac{2}{3} \sqrt{3^2 + 2^2} = \frac{2}{3} \sqrt{13}$ . Пусть  $PH = x$ ,  $MH = y$ . Тогда:

$$\begin{cases} \left(\frac{5}{6}\right)^2 = x^2 + y^2 \\ \left(\frac{52}{9}\right) = y^2 + \left(\frac{5}{2} - x\right)^2; x^2 \left(\frac{5}{2} - x\right)^2 = \frac{25}{36} - \frac{52}{9}; \end{cases}$$

$$36x^2 - 225 + 180x - 36x^2 = -183; 180x = 42; x = \frac{7}{30};$$

$$y^2 = \frac{25}{36} - \frac{49}{900} = \frac{576}{900}, y = 0,8 \text{ (см)}.$$



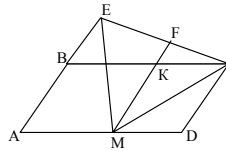
### В-7

1. Дано:  $CE \perp AB$ ,  $BC = 2AB$ .

Доказать:  $\angle EMB = 3 \angle AEM$ .

Доказательство: Пусть  $F$  – середина  $EC$ ,  $FM$  – медиана  $\triangle EMC$ ,  $FM$  – средняя линия трапеции  $AECD \Rightarrow FM \parallel AB \Rightarrow FM \perp EC \Rightarrow EM = CM$  и  $\angle EFM = \angle FMC = 90^\circ$ . Пусть  $BC \cap MF = K$ , т.к.

$MD = CD = KC = KM \Rightarrow MKCD$  – ромб и  $\angle KMC = \angle CMD$ . Т.к.  $AE \parallel FM \Rightarrow \angle AEM = \angle EMK \Rightarrow \angle EMD = 3 \angle AEM$ .



2. Дано:  $AE = 9$ ,  $CD = 12$ ,  $AC = 10$ .

Найти:  $S$  — ?

Решение:  $OC = (2/3)CD = 8$ ,  $AO = (2/3)AE = 6$ .

$$P_{AOC} = 10 + 8 + 6 = 24, \frac{P}{2} = 12,$$

$$S_{AOC} = \sqrt{12(12-10)(12-8)(12-6)} = \sqrt{12 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} = 24 \text{ (по формуле Герона),}$$

$$S_{ABC} = 3 \cdot S_{AOC} = 72.$$

### В-8

1. Дано:  $AB = a$ ,  $BE \perp AE$ ,  $CF \perp DF$ .

Доказать:  $EF = 2a$ .

Доказательство: Пусть  $M$  — точка пересечения  $AE$  и  $BC$ .  $N = DC \cap DF$ .

$$\angle MAB = \angle M \Rightarrow MB = BA = a \Rightarrow BE$$

— медиана. Аналогично с  $\triangle DNC$ .  $CF$  — медиана  $\Rightarrow FE$  — средняя линия трапеции  $MNDA$ . Так как  $MB = BA$  и  $CN = CD$ , то  $MN = 3a$ , так что  $EF = (MN + AD) : 2 = (a + 3a) : 2 = 2a$ .

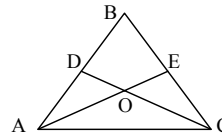
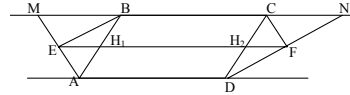
2. Дано:  $S_{ABC} = 12 \text{ см}^2$ ,  $\angle AOC = 150^\circ$ ,  $AE = 3 \text{ см}$ .

Найти:  $CD$  — ?

Решение:  $S_{AOC} = (1/3)S_{ABC} = 4$ ,  $AO = (2/3)AE =$

$$= 2 \text{ (см)}. S_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot \sin 150^\circ \cdot 2 \cdot CO = 4 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$CO = 8 \text{ (см)}. CD = (3/2)CO = 12 \text{ (см)}.$$



### С-20

#### В-1

1. Дано:  $CD \perp AB$ ,  $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$ .

Найти:  $S_{ACD} : S_{CDB}$  — ?

Решение:  $\triangle ACD \sim \triangle CDB$  по острому углу, т.к.

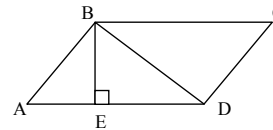
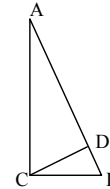
$$\angle A = \angle DCB \text{ с коэффициентом } \frac{1}{2} = k = \frac{AC}{CB}.$$

$$\text{Т.о. } \frac{S_{ACD}}{S_{CDB}} = k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

2. Дано:  $BD \perp AB$ ,  $AE = 3 \text{ см}$ ,  $BE \perp AB$ ,  $BE = 6 \text{ см}$ .

Найти:  $S$  — ?

Решение:  $AB = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$  (по т. Пифаго-



ра)  $\triangle ABE \sim \triangle ABD$  (по острому углу).  $\angle A$  – общий  $\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow$

$$AD = \frac{AB^2}{AE} = \frac{45}{3} = 15 \text{ (см)}. S = 6 \cdot 15 = 90 \text{ (см}^2\text{)}.$$

### В-2

1. Дано:  $\frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}$ .

Найти:  $S_{ADC} : S_{ACB} = ?$

Решение:  $\triangle ABC$  подобен  $\triangle ACD$  по острому углу с  $k = \frac{3}{2}$ .

Т.о.  $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{k}\right)^2 = \frac{4}{9}$ .

2. Дано:  $BC = 3$ ,  $CD = 6$ ,  $BD \perp AB$ .

Найти:  $S = ?$

Решение:  $BD = \sqrt{3^2 + 6^2} = \frac{BE}{ED} = \frac{3}{4}$  ( по теореме Пифа-

гора)  $\triangle BDC \sim \triangle DBA$  (по острому углу) (т.к.  $\angle CDB = \angle A$ )  $\Rightarrow$

$$\frac{CB}{DB} = \frac{DB}{DA} \Rightarrow DA = \frac{DB^2}{CB} = \frac{45}{3} = 15. S = \frac{1}{2} (15 + 3) \cdot 6 = 54.$$

### В-3

1. Дано:  $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{1}$ ,  $S_{DEC} = 20$ .

Найти:  $S = ?$

Решение: Из предыдущей задачи

$$\frac{S_{BDE}}{S_{DEC}} = \left(\frac{2}{1}\right)^2. S_{BDE} = 4S_{ECD} = 80 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{ABC} = 2S_{BDC} = 2 \cdot (80 + 20) = 200 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2. Дано:  $AB = 4$ ,  $BC = 6$ ,  $BE \perp AC$ .

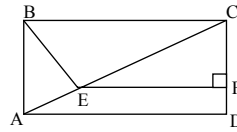
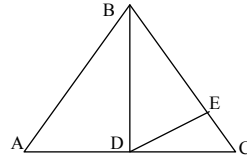
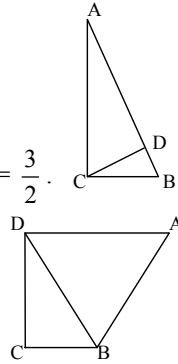
Найти:  $EF = ?$

Решение: По теореме Пифагора:  $AC = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{45}$ .  $\triangle ABE \sim \triangle ABC$  (по острому углу). Т.к.

$$\angle BCA = \angle ABE \Rightarrow \frac{CB}{DB} = \frac{DB}{DA} \Rightarrow AE = \frac{16}{\sqrt{52}}, \text{ т.к.}$$

$$EF \parallel AD \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ECF \text{ по острому углу} \Rightarrow \frac{CB}{DB} = \frac{DB}{DA}.$$

$$EF = \left( \sqrt{52} - \frac{16}{\sqrt{52}} \right) \cdot 6 : \sqrt{52} = \frac{36}{\sqrt{52}} \cdot 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{52}} = \frac{54}{13} = 4 \frac{2}{13}.$$

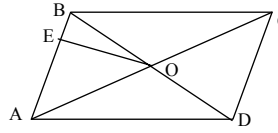


#### В-4

1. Дано:  $\frac{AC}{BD} = \frac{3}{2}$ ,  $OE \perp AB$ ,  $S_{AOE} = 27 \text{ см}^2$ .

Найти:  $S$  — ?

Решение:  $\frac{AC}{BD} = \frac{AO}{BO} = \frac{3}{2}$ . Т.к.  $\angle BOA = 90^\circ$ ,



то  $\angle BAC = \angle BOE$ , т.о.  $\triangle BEO \sim \triangle AOE$  с  $k = \frac{2}{3}$ , т.о.  $\frac{S_{BEO}}{S_{AOE}} = \frac{4}{9}$ ,

$$S_{BEO} = \frac{4}{9} \cdot 27 = 12. S_{AOB} = 12 + 27 = 39 (\text{см}^2). S_{ABCD} = 4S_{AOB} = 156 (\text{см}^2).$$

2. Дано:  $DE \perp AB$ ,  $\frac{AE}{EB} = \frac{4}{9}$ ,  $BD + AC = 14$ .

Найти:  $P$  — ?

Решение: Т.к.  $\triangle AED \sim \triangle ABD$  по острому углу ( $\angle A$  — общий)  $\Rightarrow$

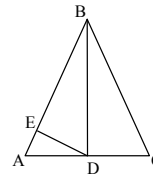
$$\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AB}. \text{ Пусть } AE = x \Rightarrow EB = \frac{9}{4}x, AB = \frac{13}{4}x \Rightarrow \frac{13}{4}x^2 = AD^2,$$

$$AD = \frac{\sqrt{13}}{2}x, AC = \sqrt{13}x. \text{ По теореме Пифагора:}$$

$$BD = \sqrt{\left(\frac{13}{4}x\right)^2 - \frac{13}{4}x^2} = \frac{\sqrt{115}}{4}x \Rightarrow \frac{\sqrt{115}}{4}x + \sqrt{13}x = 14.$$

$$x = \frac{56}{\sqrt{115} + \sqrt{13}} = \frac{56}{7\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}}. AB = 2\sqrt{13}. AC = 8.$$

$$P = AC + 2AB. P = 4\sqrt{13} + 8.$$

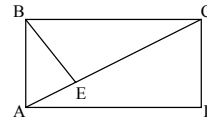


#### В-5

1. Дано:  $AE:EC = 1:3$ .

Найти:  $\angle CAD$  — ?

Решение:  $AE = (1/3)EC$ .  $\triangle ABE \sim \triangle EBC$ , по острому углу, т.к.  $\angle BCA = \angle ABE \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow$



$$BE^2 = (1/3)EC^2. BE = \frac{\sqrt{3}}{3}EC. \text{ tg } BCA = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{EC}{EC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle BCA = 30^\circ,$$

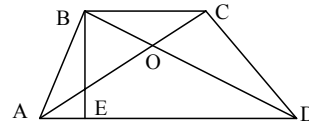
$$\angle BAC = 60^\circ, \angle CAD = 30^\circ.$$

2. Дано:  $\frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{BE}{ED} = \frac{3}{4}$ ,  $S_{ABE} = 18 \text{ см}^2$ .

Найти:  $S$  — ?

Решение: В учебнике вероятно опечатка: необходимо добавить условие:

$BD \perp AB$ .  $\triangle EBD \sim \triangle ABE$  по острому углу, ( $\angle BDA = \angle EBA$ )





$$\Rightarrow \frac{S_{EBD}}{S_{ABE}} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \text{ и т.к. } AD : BC = 2 : 1 \Rightarrow S_{ABD} : S_{BCO} = 2 \Rightarrow$$

$$S = \frac{3}{2} \cdot \left(18 \cdot \frac{16}{9} + 18\right) = 75 \text{ (см}^2\text{)}.$$

#### В-6

1. Дано:  $AC \perp CD$ ,  $AB \perp AD$ ,  $BC = 6$ ,  $AD = 8$ .

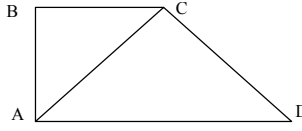
Найти:  $\angle C$ ,  $\angle D$  — ?

Решение:  $\triangle ABC \sim \triangle ACD$  по острому углу,  $\angle BCA = \angle CAD \Rightarrow$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2 = 6 \cdot 8 = 48. \quad CA = \sqrt{48}.$$

По теореме Пифагора:  $CD = \sqrt{8^2 - 48} = 4$

$$\Rightarrow \angle CAD = 30^\circ, \angle D = 60^\circ, \angle C = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ, \angle B = \angle A = 90^\circ.$$



2. Дано:  $BD \perp AB$ ,  $AE = 4$  см,  $AB : AD = 1 : 2$ ,

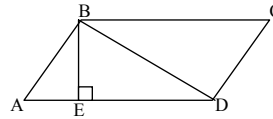
$BE \perp AD$ .

Найти:  $S$  — ?

Решение: Т.к.  $AB = (1/2)AD \Rightarrow \angle BDA = 30^\circ$

$$\Rightarrow \angle A = 60^\circ, \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{BE}{AE}, BE = 4\sqrt{3} \text{ (см)},$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{ED}{BE}, ED = 12 \text{ (см)} \Rightarrow AD = 16 \text{ (см)}. S = 16 \cdot 4\sqrt{3} = 64\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$



#### В-7

1. Дано:  $AC \perp BD$ ,  $AC = 15$ ,  $AE = 9$ .

Найти:  $S$  — ?

Решение: По теореме Пифагора:

$$CE = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ (см)}. \text{ Проведем}$$

прямую  $CM \parallel BD$  до пересечения с

$$AD, \text{ тогда } \angle ACM = 90^\circ, \text{ т.к. } BD \perp AC \Rightarrow \cos \angle CAE = \frac{AC}{AM} = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{5},$$

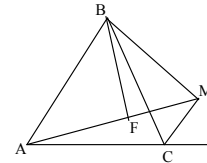
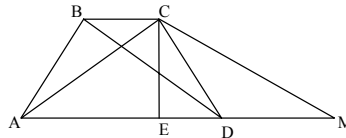
$$AM = 15 \cdot \frac{5}{3} = 25 \text{ (см)}. AD + BC = AD + MD = AM.$$

$$\text{Так что } S = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 12 = 150 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2. Дано:  $BM \perp CM$ ,  $\angle BCM = \angle ABC$ ,  $\frac{AF}{MF} = \frac{3}{1}$ .

Найти:  $\angle BAM$  — ?

Решение:  $\angle BCM = \angle ABC$ .  $\angle CBM = 90^\circ - \angle BCM \Rightarrow \angle ABM = 90^\circ$ .  $\triangle ABF \sim \triangle MBM$  (по ост-



рому углу). Т.к.  $\angle BAF$  – общий  $\frac{AB}{AM} = \frac{AF}{AB}$ , пусть  $MF = x \Rightarrow$

$$AB^2 = 3x \cdot 4x. AB = 2\sqrt{3}x. \cos BAM = \frac{3x}{2\sqrt{3}x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle BAM = 30^\circ.$$

### В-8

1. Дано:  $AC \perp BD$ ,  $AC : BD = \sqrt{2} : \sqrt{3}$ ,  
 $CE = 2\sqrt{6}$ .

Найти:  $S$  — ?

Решение: Проведем  $CM \parallel BD$  До пересечения с  $AD \Rightarrow \angle ACM = 90^\circ$ . Т.к.

$AC \perp BD$ , тогда  $\triangle CEM \sim \triangle ACM$  по острому углу (т.к.  $\angle M$  – общий)  $\Rightarrow \frac{AC}{CM} = \frac{CE}{EM}$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{EM} \Rightarrow EM = 6$  (см), т.о.:

$$CM = \sqrt{24 + 36} = \sqrt{60} = BD, \text{ по теореме Пифагора, т.е. } \frac{AC}{\sqrt{60}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$AC = \sqrt{40} \Rightarrow AE = \sqrt{40 - 24} = 4 \text{ см} \Rightarrow AM = AE + EM = 4 + 6 = 10 \text{ (см)}.$$

$$\text{Так как } AD + BC = AD + DM = AM, \text{ то } S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 10 = 10\sqrt{6} \text{ (см)}.$$

2. Дано:  $OK \perp AD$ ,  $\frac{S_{ABCD}}{S_{OKD}} = \frac{16}{1}$ .

Найти:  $\angle A$  — ?  $\angle B$  — ?

$$\text{Решение: Т.к. } \frac{S_{ABCD}}{S_{OKD}} = \frac{16}{1} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{OKD}} = \frac{8}{1} \Rightarrow$$

$$\frac{S_{AOD}}{S_{OKD}} = \frac{4}{1} \Rightarrow \text{т.к. } \triangle OKD \sim \triangle AOB \text{ (} \angle BDA \text{ – общий)} \Rightarrow \text{коэффициент}$$

$$\text{подобия } k = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OD}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle BDA = 30^\circ, \angle B = \angle D = 60^\circ,$$

$$\angle A = 120^\circ = \angle C.$$

### С-21

#### В-1

1. Сначала построим  $\triangle AB_1C_1$  подобный данному (по двум углам). Затем сторону  $B_1C_1$  разделим пополам и проведем медиану  $AM_1$ . Затем от точки  $A$  отложим отрезок  $AM$  и через точку  $M$  проведем прямую, параллельную  $B_1C_1$ . Она пересечет прямые  $AC_1$  и  $AB_1$  в точках  $C$  и  $B$ .  $\triangle ABC$  – искомый.

2. Нам необходимо разделить отрезок на 10 равных частей. Разделим отрезок пополам. Одна часть будет 5, а вторую необходимо разделить

в отношении 2 : 3 (пусть она равна  $a$ ). Построим  $\triangle ABC : AB=BC=2a$ ,  $AC = 3a$ . Проведем биссектрису  $AM$ , тогда  $BM = 1\frac{1}{5}a$  (по свойству биссектрисы). Т.о. мы можем разделить отрезок  $a$  на 5 равных частей.

## В-2

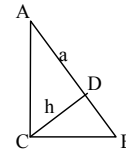
1. Сначала построим  $\triangle A_1B_1C$  (по углу  $C$  и  $A_1C = 2x$ ,  $B_1C = 3x$ , где  $x$  – произвольное число).  $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$  (по двум сторонам и углу). Затем проведем биссектрису  $CD$  под углом  $c/2$  к прямой  $CA_1$ , далее, через точку  $D$ , проведем прямую параллельную  $A_1B_1$ , которая пересечет сторону  $A_1C$  и  $B_1C$  в точках  $A$  и  $B$ .  $\triangle ABC$  – искомый.

2. Нам необходимо разделить отрезок на 12 равных частей. Разделим его пополам, затем еще каждую часть пополам. У нас получится 4 равных отрезка, которые необходимо разделить на 3 части (см. В-3 (1)).

## В-3

1. Построим сначала прямоугольный треугольник с катетом  $AD$  и углом  $\angle DBA = 180^\circ - \angle ABC$ , т.о. сейчас нам необходимо от луча  $DB$  отложить  $BC = (2/3)AB$ . Строим треугольник со сторонами  $AB$ ,  $AB$  и  $2AB$  (равнобедренный). Из угла основания треугольника пускаем биссектрису, которая разделит сторону  $AB$  на  $(1/3)AB$  и  $(2/3)AB$  по свойству биссектрисы.

2. Построим прямоугольный  $\triangle ADC$ ,  $AD = a$ ,  $DC = b$ ,  $\angle D = 90^\circ$ , затем достроим его до  $\triangle ABC$  (как показано на рисунке). Тогда  $\triangle ADC \sim \triangle DCB$  ( $\angle C = \angle BCA$ )  $\Rightarrow$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{DB} \Rightarrow DB = \frac{b^2}{a}.$$


## В-4

1. Сначала построим  $\triangle AB_1C_1$  (по углу  $A$ ,  $AB = x$ ,  $AC = 3x$ ). Т.о.  $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ . Пусть  $O$  – точка пересечения медиан  $\triangle ABC$ , т.о.  $BM = (3/2)OB$  (медиана, опущенная на сторону  $AC$ ). В  $\triangle AB_1C_1$  проведем медиану  $B_1M_1$ . Она будет параллельна  $BM$ . Затем на луче  $M_1B_1$  от точки  $M_1$  отложим отрезок  $BM$ . От его конца отложим перпендикулярную прямую, которая пересечет прямую  $AA_1$  в точке  $B$ . Затем на прямой  $AC_1$  отложим отрезок  $AC = 3AB$ , т.о.  $\triangle ABC$  – искомый.

2.  $\frac{(a+b)b}{a} = b + \frac{b^2}{a}$  из предыдущей задачи мы можем построить отрезок  $\frac{b^2}{a}$ , тогда прибавив к нему  $b$ , получим исходный.

## В-5

1. Пусть стороны прямоугольника  $x$  и  $2x$ .

$BH = h, BN = a_1, BC = a, NC = a_2, AC = h$ , тогда  $\triangle MBN \sim \triangle ABC$  ( $\angle B$  – общий,  $MN \parallel AC$ )  $\Rightarrow$

$$\frac{2x}{b} = \frac{a_1}{a}. \quad \text{Аналогично} \quad \triangle KNC \sim \triangle BHC \Rightarrow$$

$$\frac{x}{h} = \frac{a - a_1}{a}; \quad x = \frac{a_1 b}{2a} \Rightarrow \frac{a_1 b}{2ah} = \frac{a - a_1}{a} \Rightarrow ab = 2ha - 2ha_1$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{2ha - ab}{2h} = \frac{a(2h - h)}{2h} = a - \frac{ah}{2h}. \quad \text{Построим отрезок } y = \frac{ab}{2h} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{a} = \frac{b}{2h} \Rightarrow \frac{2h}{b} = \frac{a}{y}. \quad \text{Это построение описывается в задаче С-21 В-5 (2).}$$

Затем  $a_1 = a - y$ . Т.о. мы нарисовали точку  $N$ . Далее провести  $NK \perp AC$ ,  $NM \parallel AC$  и  $MT \perp AC$ .  $MKNP$  – искомый.

2. Проведем построения как показано на рисунке. Докажем, что  $C_1D_1$  – искомый:  $\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1$  ( $\angle AOB$  – общий, а  $AD \parallel A_1D_1$ ). Аналогично  $\triangle OBC \sim \triangle OB_1C_1$  и  $\triangle OCD \sim \triangle OC_1D_1 \Rightarrow$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{OC}{OC_1} = \frac{CD}{C_1D_1}.$$

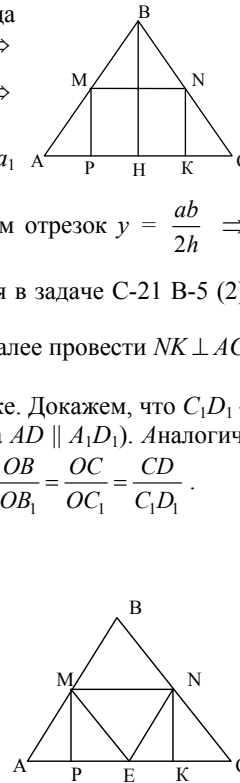
### В-6

1. Достроим  $\triangle MNE$  до прямоугольника  $MNKP$ .

Пусть  $NK = a$ , тогда  $PK = NM = 2a$ , т.е. задача сводится к предыдущей.

2.  $\frac{AB}{CB} = \frac{C_1D_1}{A_1B_1} \Rightarrow \frac{AB}{C_1D_1} = \frac{CD}{A_1B_1}$ , а дальше дейст-

вуем также, как и в предыдущей задаче.

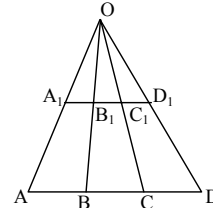


### В-7

1. Нарисуем прямоугольный треугольник с катетами  $2x, 3x$ , ( $x$  – произвольное число).

Тогда гипотенуза будет равна  $\sqrt{13}x$ . Затем нарисуем два параллельных отрезка: один длиной периметра, другой –  $2x + 3x + \sqrt{13}x$ . Если они равны, то построенный треугольник искомый, если нет, то: проведем прямые  $AA_1$  и  $DD_1$  до точки пересечения в точке  $O$ . Затем отрезки  $OB$  и  $OC$  разделят  $A_1D_1$  на  $2 : 3 : \sqrt{13}$  ( $AB = 2x, BC = 3x, CB = \sqrt{13}x$ ). Т.о. нам необходимо построить  $\triangle MNK$  (прямоугольный) с катетами  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$ .  $\triangle MNK$  – искомый.

2. Построим сначала треугольник по двум углам и высоте, опущенной из третьего угла (которая равна расстоянию от точки пересечения диагоналей до вершины  $B$ ). Затем из основания нашей высоты проведем



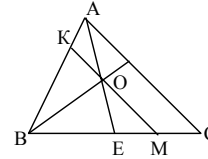
прямую перпендикулярную к боковой стороне, которая пересечет продолжение другой стороны в точке  $A$ . Затем проведем прямую  $AC$  параллельную основанию нашего треугольника, которая пересечет продолжение другой стороны в точке  $C$ .  $\triangle ACB$  – исходный.

### В-8

1. Построим прямоугольный треугольник по гипотенузе ( $4x$ ) и катету ( $x$ ). Тогда второй катет будет равен  $x\sqrt{15}$ . Далее аналогично предыдущей задаче:  $AB = 2x$ ,  $C = CD = x\sqrt{15}$ .

2. Пусть необходимо построить  $\triangle ABC$ .

Построим сначала  $\triangle AKM$  (С-21 В-2 (1)), т.о.  $KM \parallel AC$ . Т.к.  $AE$  – биссектриса, то  $\angle KAE = \angle EAC = \angle KOA$  (т.к.  $KM \parallel AC$ )  $\Rightarrow AK = KO$ . Продлив сторону  $BK$  на отрезок  $KO$  и проведя  $AC \parallel KM$  получим  $\triangle ABC$ .



### С-22

#### В-1

1. Дано:  $BC = 2$ ,  $AB = 15$ ,  $AD = 20$ .

Найти:  $\sin A$ ,  $\cos A$ ,  $\operatorname{tg} A$  — ?

Решение:  $AE = \frac{AD - BC}{2} = 9$ . По т. Пифагора:

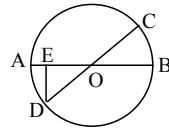
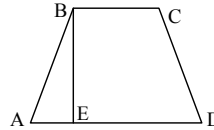
$$BE = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12, \sin A = \frac{BE}{BA} = \frac{4}{5}, \cos A = \frac{AE}{BA} = \frac{3}{5}, \operatorname{tg} A = \frac{BE}{AE} = \frac{4}{3}.$$

2. Дано:  $CD = 4$ ,  $DE = \sqrt{3}$ .

Найти:  $\angle EOD$  — ?

Решение:  $OD = (1/2)CD = 2$ ,

$$\sin \angle EOD = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle EOD = 60^\circ.$$



#### В-2

1. Дано:  $AD = 2$ ,  $DB = 3$ ,  $CD \perp AB$ .

Найти:  $\sin A$ ,  $\cos A$ ,  $\operatorname{tg} A$  — ?

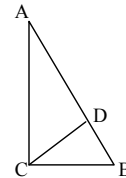
Решение: Т.к.  $\triangle CDB \sim \triangle ABC$  по острому углу ( $\angle B$  –

$$\text{общий}) \Rightarrow \frac{DB}{CB} = \frac{CB}{AB}. CB^2 = 3 \cdot 5 = 15, CB = \sqrt{15}.$$

$$AB = 5, AC = \sqrt{25 - 15} = \sqrt{10}, \sin A = \frac{CB}{AB} = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{10}}{5}, \operatorname{tg} A = \frac{CB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

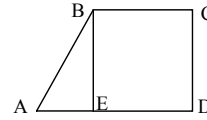
2. Дано:  $BC = 2$ ,  $AD = 4$ ,  $CD = 2\sqrt{3}$ .



Найти:  $\angle A$  — ?

Решение:  $AE = AD - BC = 2$ ,

$$\operatorname{tg} A = \frac{BE}{AE} = \frac{CD}{AE} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle A = 60^\circ.$$



### В-3

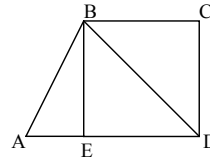
1. Дано:  $AB = 9$ ,  $BD = 12$ ,  $AD = 15$ .

Найти:  $\sin CBD$ ,  $\cos CBD$ ,  $\operatorname{tg} CBD$  — ?

Решение:  $\triangle ABD$  — прямоугольный. Т.к. по теореме Пифагора  $AB^2 + BD^2 = AD^2 \Rightarrow$

$$\angle CBD = \angle BDA \Rightarrow \cos CBD = \frac{BD}{AD} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5},$$

$$\sin CBD = \frac{AB}{AD} = \frac{3}{5}, \operatorname{tg} CBD = \frac{3}{4}.$$

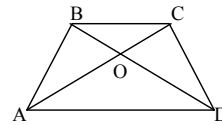


2. Дано:  $AD = 2BC$ ,  $BD \perp AC$ ,  $BD = 3\sqrt{3}$ ,  $AC = 3$ .

Найти:  $\angle CAD$ ,  $\angle BDA$  — ?

Решение: Т.к.  $AD = 2BC \Rightarrow \frac{BO}{OD} = \frac{1}{2}$ .

$$\text{Т.о. } OD = \sqrt{3}, \frac{CO}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow OA = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} CAD = \frac{OD}{AO} = \sqrt{3}, \angle CAD = 60^\circ, \angle BDA = 30^\circ.$$



### В-4

1. Дано:  $AB = 12$ ,  $BD = 16$ ,  $DA = 20$ ,  $CE \perp BD$ .

Найти:  $\sin BCE$ ,  $\cos BCE$ ,  $\operatorname{tg} BCE$  — ?

Решение:  $\triangle ABD$  — прямоугольный, т.к.  $AB^2 + BD^2 = AD^2 \Rightarrow$  т.к.  $\angle A = \angle BCE$ , то

$$\cos BCE = \cos A = \frac{AB}{AD} = \frac{3}{5}, \sin BCE = \frac{4}{5},$$

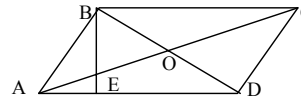
$$\operatorname{tg} BCE = \frac{4}{3}.$$

2. Дано:  $S = 4\sqrt{2}$ ,  $AB = 2\sqrt{2}$ .

Найти:  $\angle A$ ,  $\angle B$  — ?

Решение:  $S = AB \cdot BE = 4\sqrt{2} \Rightarrow BE = 2$ ,

$$\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle A = 45^\circ, \angle B = 135^\circ.$$



### В-5

1. Дано:  $CE \perp AB$ ,  $AB = 4$ ,  $ED = \sqrt{3}$ ,  $AD = DB$ .

Найти:  $\angle CDE$  и  $\angle DCE$  — ?

Решение: Т.к.  $DB = CD$  (свойство медианы в прямоугольном треугольнике), то  $CD = 2$ ,  $CE = \sqrt{4-3} = 1$  (по теореме Пифагора в  $\triangle CED$ ).

$$\operatorname{tg} DCE = \sqrt{3} \Rightarrow \angle DCE = 60^\circ \Rightarrow \angle CDE = 30^\circ.$$

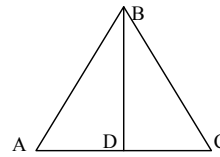
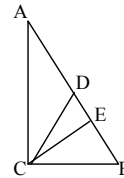
2. Дано:  $AB = BC = 5$ ,  $AC = 6$ .

Найти:  $\sin B$ ,  $\cos B$ ,  $\operatorname{tg} B$  — ?

Решение:

По теореме косинусов:  $36 = 50 - 2 \cdot 25 \cos B \Rightarrow$

$$\cos B = \frac{7}{25}, \sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25}, \operatorname{tg} B = \frac{24}{7}.$$



#### В-6

1. Дано:  $DE \parallel AC$ ,  $DE = EC$ ,  $BD : DA = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Найти: углы — ?

Решение: Т.к.  $CE = ED \Rightarrow \angle DCE = 45^\circ \Rightarrow CD$  — биссектриса  $\Rightarrow$  по свойству биссектрисы  $\frac{CB}{DB} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow$

$$\frac{CB}{AC} = \frac{DB}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} A. \text{ Т.о. } \angle A = 30^\circ, \angle B = 60^\circ.$$

2. Дано:  $BD = 6$ ,  $AC = 8$ .

Найти:  $\sin A$ ,  $\cos A$ ,  $\operatorname{tg} A$  — ?

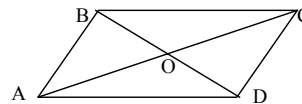
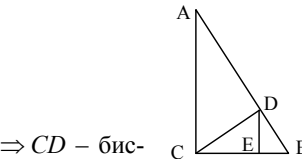
Решение:  $BO = (1/2)BD = 3$ .  $AO = (1/2)AC = 4$ .  $AB = \sqrt{BO^2 + AO^2} = 5$  (по теореме Пифагора). По теореме косинусов:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos A,$$

$$36 = 50 - 50 \cos A, 36 = 50 - 50 \cos A,$$

$$\cos A = \frac{7}{25}. \text{ Из предыдущей задачи:}$$

$$\sin A = \frac{24}{25}, \operatorname{tg} A = \frac{24}{7}.$$



#### В-7

1. Пусть  $\alpha$  — искомый угол  $\Rightarrow \sin \alpha = 2 \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2 \Rightarrow$  необходимо построить  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) такой, что  $AC = 2CB \Rightarrow \angle B = \alpha$ .

2. Рассмотрим  $\triangle ABC$ .  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = BC = 1$  и  $\triangle A_1BC$  с  $\angle CBA_1 = 30^\circ$   
 $\Rightarrow \angle ABA_1 = 75^\circ = \alpha, \operatorname{tg} 30^\circ = CA_1 : CB \Rightarrow CA_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

$$A_1B = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Т.о. } S_{ABA_1} &= \frac{1}{2} AB \cdot A_1B \cdot \sin 75^\circ = \frac{1}{2} AA_1 \cdot BC, \text{ то есть } \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sin 75^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \sin 75^\circ = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6} + \sqrt{18}}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

### В-8

1. Пусть  $\alpha$  — искомый угол  $\Rightarrow \sin \alpha = 3 \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 3 \Rightarrow$  необходимо построить  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) такой, что  $AC = 3CB \Rightarrow \angle B = \alpha$ .

2. Рассмотрим  $\triangle ABC$ .  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $CB = 1$ ,  $AC = \sqrt{3}$ ,  $AB = 2$ ,  $AD$  — биссектриса  $\angle DAC = 15^\circ$ . Т.о.  $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{1 - CD}$  (по свойству биссектрисы)  $\Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3} CD = 2CD \Rightarrow CD = \frac{\sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})}$ .  $AD = \sqrt{3 + \frac{3}{(2 + \sqrt{3})^2}} =$   
 $= \sqrt{3 + 3(2 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{24 - 12\sqrt{3}}$  (по теореме Пифагора).

$$\sin 15^\circ = \frac{DC}{AD} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{\sqrt{24 - 12\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3}\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

### С-23

#### В-1

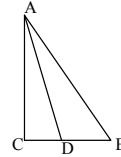
$$1. S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha + \frac{1}{2} ab \sin \alpha = ab \sin \alpha; S = 2,3 \cdot 3,7 \cdot \sin 40^\circ 37' \approx 5,54.$$

2. Дано:  $\angle A = 45^\circ$ ,  $AB = 10$ ,  $\angle DAC = 30^\circ$ .

Найти:  $DC$  — ?

Решение: Т.к.  $\angle A = 45^\circ \Rightarrow 10 = \sqrt{AC^2 + AC^2} \Rightarrow$

$$AC = BC = \frac{10}{\sqrt{2}}, \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{CD}{AC}, \quad CD = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}.$$



#### В-2

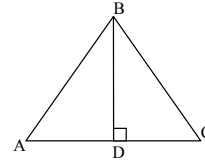
$$1. \text{Сторона равна } \frac{h}{\sin \alpha}, S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{h \cdot h}{\sin \alpha} = \frac{h^2}{\sin \alpha}; S = \frac{17,3^2}{\sin 52^\circ 43'} \approx 376,16.$$

2. Дано:  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle C = 45^\circ$ ,  $BD \perp AC$ ,  $AD = 3$ .

Найти:  $BC$  — ?

$$\text{Решение: } \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{BD}{AD} \Rightarrow BD = 3\sqrt{3},$$

$$\sin 45^\circ = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BC = \frac{3\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{6}.$$





### В-3

1. Пусть сторона ромба —  $a$ , тогда  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2a}$ ;  $a = \frac{d}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ ;

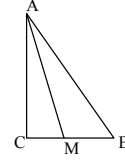
$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{d}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2 \sin \alpha = \frac{d^2}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}; S \approx 123,85.$$

2. Дано:  $MC = 2,7$ ,  $AM = 4,1$ .

Найти:  $\angle A$  — ?  $\angle B$  — ?

Решение: Т.к.  $M$  от  $AC$  и  $AB$  находится на одинаковом

расстоянии  $\Rightarrow \angle CAM = \angle MAB$ ,  $\sin \angle CAM = \frac{2,7}{4,1}$ , т.о.



по таблице синусов находим, что  $\angle A = 2 \cdot 41^\circ 11,5' = 82^\circ 23'$ ,  
 $\angle B = 7^\circ 37'$ .

### В-4

1. Дано:  $AD = 2a$ ,  $\angle CBD = \alpha$ ,  $BC = a$ ,  $BD \perp AB$ ,  $a = 7,6$ ,  $\alpha = 54^\circ 21'$ .

Найти:  $S$  — ?

Решение:  $\angle BDA = \angle DBC = \alpha$ ,  $\cos BDA = \frac{BD}{AD}$ ,  $BD = AD \cos \alpha = 2a \cos \alpha$ .

$$\sin \alpha = \frac{AB}{2a}, AB = 2a \sin \alpha, S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cos \alpha \cdot 2a \sin \alpha = a^2 \sin 2\alpha.$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} S_{ABD}; S_{ABCD} = \frac{3}{2} a^2 \sin 2\alpha \approx 82,07.$$

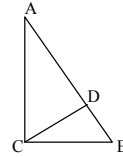
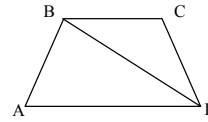
2. Дано:  $AD = DB$ ,  $CD = 5,3$ ,  $BC = 4,7$ .

Найти:  $\angle DCB$  — ?

Решение:

Т.к.  $\angle C = 90^\circ \Rightarrow AB = 2CD = 10,6 \Rightarrow \angle DCB = \angle B$ ,

$$\cos B = \frac{4,7}{10,6}, \text{ т.е. } \angle B \approx 63^\circ 41' = \angle DCB.$$



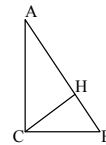
### В-5

$$1. \sin \alpha = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin \alpha}, BC = \frac{CH}{\cos \alpha}.$$

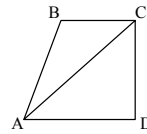
$$S = \frac{1}{2} \frac{CH^2}{\sin \alpha \cos \alpha} \Rightarrow CH = \sqrt{S \sin 2\alpha} \approx 6,44.$$

2. Дано:  $\angle BAD = 40^\circ 27'$ ,  $AB = 12,7$ ,  $AC = 18,1$ .

Найти:  $\angle CAD$  — ?



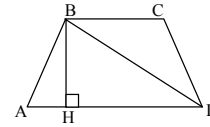
Решение:  $\sin \angle BAD = \frac{CD}{AB} \Rightarrow CD = AB \cdot \sin \angle BAD$ ,  
 $\sin \angle CAD = \frac{CD}{AC} = \frac{AB}{AC} \cdot \sin \angle BAD \approx 0,455$ , так что  
 $\angle CAD \approx 27^\circ 5'$ .



# **В-6**

1. Дано:  $S_{ABCD} = S$ ,  $\angle BDA = \alpha$ ,  $S = 234,6$ ,  
 $\alpha = 23^\circ 46'$ .  
 Найти:  $BH$  — ?

Решение:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BH}{HD} \Rightarrow HD = \frac{BH}{\operatorname{tg} \alpha}$ . Так как



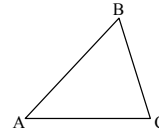
$AH + BC = AD$ , то  $S_{ABH} + S_{BCD} = S_{BHD}$  и  $S_{ABCD} = S_{BHD}$ , т.е.  $S = \frac{BH^2}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow$

$$BH = \sqrt{S \operatorname{tg} \alpha} \approx 10,16.$$

2. Дано:  $BC = 2,7$ ,  $AB = 4,2$ ,  $\angle ACB = 132^\circ 40'$ .  
 Найти:  $\angle BAC$  — ?

Решение: По теореме синусов:  $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow$

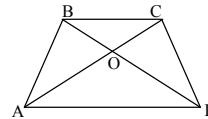
$$\sin A = \frac{BC \cdot \sin C}{AB} \approx 0,47, \text{ так что } \angle A \approx 28^\circ 13'.$$



# **В-7**

1. Дано:  $\angle CAD = \beta$ ,  $\angle CBD = \alpha$ ,  $BD = d$ ,  
 $d = 15,9$ ,  $\alpha = 27^\circ 30'$ ,  $\beta = 40^\circ 15'$ .  
 Найти:  $AC$  — ?

Решение:  $\frac{DO}{\sin \beta} = \frac{AO}{\sin \alpha}$  по теореме синусов,



$$\frac{BO}{\sin \beta} = \frac{CO}{\sin \alpha} \quad (\text{т.к. } \angle CBD = \alpha = \angle BDA \text{ и } \angle CAD = \beta = \angle BCA) \Rightarrow$$

$$AC = AO + CO = \frac{DO \sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{BO \sin \alpha}{\sin \beta} = BD \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{d \sin \alpha}{\sin \beta} \approx 11,36.$$

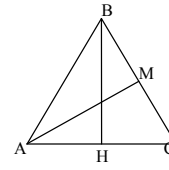
2. Дано:  $AB = BC$ ,  $BM = MC$ ,  $\angle MAC = \alpha = 37^\circ 23'$ .  
 Найти:  $\angle B$  — ?

Решение: Пусть  $MC = a$ ,  $\angle C = \beta$ , тогда  $\frac{AM}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$ ,  $AM = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$ .

Далее  $\angle BAM = \beta - \alpha$ ,  $\angle B = 180^\circ - 2\beta$ . Так что

$$\frac{a}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha (\sin(180^\circ - 2\beta))} \quad (\text{теорема синусов в } \triangle ABM).$$

Так что  $(\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta) \sin \beta = \sin \alpha \cdot 2 \sin \beta \cos \beta$ ,  $\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta = 2 \sin \alpha \cos \beta$ ,  $\sin \beta \cos \alpha = 3 \sin \alpha \cos \beta$ ,  $\operatorname{tg} \beta = 3 \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\beta \approx 66,26^\circ$ . Так что  $\angle B = 180^\circ - 2\beta \approx 47^\circ 8'$ .



### В-8

1. Дано:  $\angle A + \angle D = 90^\circ$ ,  $AD = 2BC$ ,  $AE : ED =$

$= 1 : 3$ ,  $BE = a$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $a = 17,3$ ,  $\alpha = 40^\circ 23'$ .

Найти:  $S$  — ?

Решение: Проведем  $BF \parallel CD$ . Так что  $\angle BFA = \angle D$

и  $\angle BFA + \angle A = 90^\circ$ . Т.о.  $\angle ABF = 90^\circ$ . Т.к.  $BC = FD$  и  $AD = 2BC \Rightarrow$

$$AF = BC, \frac{BC - EF}{BC + EF} = \frac{1}{3}; BC = 2EF \Rightarrow AF = 2EF \Rightarrow AE = FE = BE = a$$

$$\Rightarrow AE = 2a \text{ и } AB = 2a \cos \alpha. BH = AB \sin \alpha = 2a \cos \alpha \sin \alpha \Rightarrow$$

$$S = 6a^2 \sin \alpha \cos \alpha \approx 886,24.$$

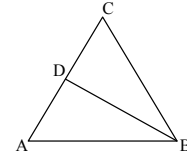
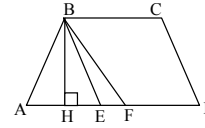
2. Дано:  $\cos C = m$ .

Найти:  $\operatorname{tg} DBA$  — ?

Решение: Рассмотрим  $\triangle DBC$ :  $BC = AC = \frac{BD}{\operatorname{tg} C}$  из

треугольника  $ADB$ :  $AD = BD \cdot \operatorname{tg} DBA$ ,  $AC = CD + AD$ ,

$$\frac{BD}{\sin C} = \frac{BD}{\operatorname{tg} C} + BD \cdot \operatorname{tg} DBA. \text{ Откуда } \operatorname{tg} DBA = \frac{1 - \cos C}{\sin C} = \frac{1 - m}{\sqrt{1 - m^2}}.$$



### С-24

#### В-1

1. Дано:  $AC = 4$ ,  $BC = 6$ ,  $EF : ED = 1 : 2$ .

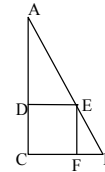
Найти:  $S_{DEFC}$  — ?

$$\text{Решение: } \operatorname{tg} B = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{EF}{FB} \Rightarrow EF = \frac{2}{3} FB.$$

$$CF = DE = 6 - FB, \text{ т.о. } \frac{2}{3} FB : (6 - FB) = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{2}{3} FB = 3 - \frac{1}{2} FB \Rightarrow FB = \frac{18}{7}, \text{ т.е. } CF = \frac{24}{7} \text{ и } DC = \frac{12}{7} \Rightarrow S = \frac{288}{49}.$$

2. Дано:  $\angle A = 60^\circ$ ,  $BH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,  $BM = 4$ .



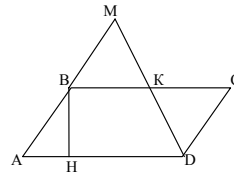
Найти:  $BK : KC$  — ?

Решение:  $\angle D = 180^\circ - \angle A = 120^\circ$ ,  $\sin 60^\circ =$

$$= \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB = \frac{3\sqrt{3} \cdot 2}{2\sqrt{3}} = 3, \Delta BMK \sim \Delta KCD$$

(т.к.  $\angle MKB = \angle CKD$  и  $BM \parallel CB$ )  $\Rightarrow$

$$\frac{BK}{KC} = \frac{BM}{AB} = \frac{4}{3}.$$



## В-2

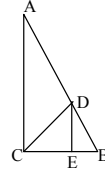
1. Дано:  $DE = 3$ ,  $DC = 5$ ,  $AC = 2BC$ .

Найти:  $S_{ABC}$  — ?

Решение:  $\operatorname{tg} B = \frac{2BC}{BC} = 2 = \frac{DE}{EB} = \frac{3}{EB} \Rightarrow EB = \frac{3}{2}.$

По теореме Пифагора:  $CE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow CB = \frac{11}{2},$

$$AC = 11 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot 11 = \frac{121}{4}.$$



2. Дано:  $AC = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ ,  $\angle CAD = 30^\circ$ ,  $DE = 3$ .

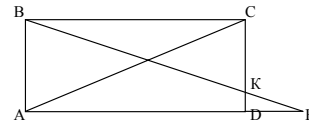
Найти:  $CK : KD$  — ?

Решение: Т.к.  $\angle CAD = 30^\circ \Rightarrow CD = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

(т.к. против угла в  $30^\circ$  лежит катет рав-

ный половине гипотенузы),  $\cos 30^\circ = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.$

$$\Delta DEK \sim \Delta BKC \text{ т.к. } (\angle BKC = \angle EKD \text{ и } DE \parallel BC) \Rightarrow \frac{CK}{KD} = \frac{ED}{BC} = \frac{3}{4}.$$



## В-3

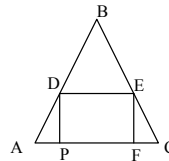
1. Дано:  $AB = BC = 10$ ,  $AC = 12$ ,  $PF : DP = 1 : 3$ .

Найти:  $S_{PFED}$  — ?

Решение:  $\cos C = \frac{AC}{2BC} = \frac{3}{5}$ ,  $\operatorname{tg} C = \frac{4}{3} = \frac{EF}{FC}$ , т.е.  $EF = \frac{4}{3} \cdot FC$ ,

$$PF = AC - 2 \cdot FC, \text{ т.е. } \frac{AC - 2FC}{\frac{4}{3}FC} = \frac{1}{3} \Rightarrow 12 - 2FC = \frac{4}{9}FC$$

$$\Rightarrow FC = \frac{54}{11}, \text{ т.е. } PF = 12 - \frac{108}{11} = \frac{24}{11}, DP = 3 \cdot \frac{24}{11} = \frac{72}{11},$$



$$S_{PFED} = \frac{72}{11} \cdot \frac{24}{11} = \frac{1728}{121}.$$

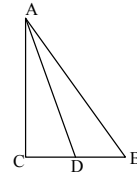
2. Дано:  $\cos B = \frac{3}{5}$ .

Найти:  $CD : DB$  — ?

Решение:

$$\sin B = \frac{4}{5} = \frac{AC}{AB}, \text{ а по свойству биссектрисы}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB} = \frac{4}{5}.$$



#### В-4

1. Дано:  $DF = FE$ ,  $BF = 16$  см,  $AB = 20$  см.

Найти:  $S_{DEF}$  — ?

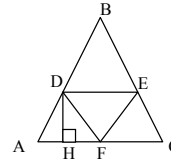
Решение: Т.к.  $AB = BC$ , то высота  $BF$  попадет в вершину прямоугольного треугольника  $AF = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$  (см) по теореме Пифагора

$$\sin A = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}, \cos A = \frac{3}{5}, \sin A = \frac{4}{5} = \frac{DH}{AD} \Rightarrow DH = \frac{4}{5} AD = HF \text{ (т.к.}$$

$$DE \parallel AC, \text{ то } \angle AFD = 45^\circ), \cos A = \frac{3}{5} = \frac{AH}{AD} \Rightarrow$$

$$AH + HF = \frac{7}{5} AD = AF = 12 \text{ (см). Т.о. } AD = \frac{60}{7} \text{ (см),}$$

$$\text{т.е. } HF = \frac{48}{7} \text{ (см). По теореме Пифагора: } A$$



$$DF = \sqrt{\left(\frac{48}{7}\right)^2 + \left(\frac{48}{7}\right)^2} = \frac{48}{7}\sqrt{2} \text{ (см). } S_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{48}{7}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{2304}{49} = 47\frac{1}{49} \text{ (см}^2\text{).}$$

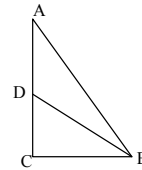
2. Дано:  $\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{17}{8}$ .

Найти:  $\sin ABC$  — ?

Решение: Т.к. высота  $BC$  у них общая, то  $\frac{AD}{DC} = \frac{17}{8}$ , а

$$\text{по свойству биссектрисы } \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{17}{8} \Rightarrow$$

$$\cos B = \frac{8}{17} \Rightarrow \sin B = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17}.$$



#### В-5

1. Дано:  $\angle A = 30^\circ$ ,  $AB = 4$ ,  $KM = 2NM$ .

Найти:  $S_{KMNP}$  — ?

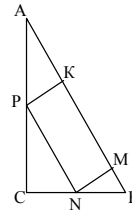
Решение:  $CB = 2$  (т.к. против угла в  $30^\circ$  лежит катет равный половине гипотенузы).  $AC = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ .

$PK = \frac{1}{2} AP$  (т.к.  $PK = AP \cdot \sin A$ ).  $KM = 2PK = AP$ . Т.к.

$\angle CPN = 30^\circ$ , то  $\cos 30^\circ = \frac{PC}{PN} = \frac{PC}{AP} \Rightarrow PC = \frac{\sqrt{3}}{2} AP$ ,

$AC = PC + AP = 2\sqrt{3}$ ,  $\frac{\sqrt{3}+2}{2} AP = 2\sqrt{3}$ .  $AP = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} = 8\sqrt{3} - 12$ , т.е.

$S_{KMNP} = \frac{1}{2} (8\sqrt{3} - 12)^2 = 168 - 96\sqrt{3} = 24(7 - 4\sqrt{3})$ .



2.  $\triangle FBO \sim \triangle ABO$  ( $\angle B$  — общий)  $\Rightarrow \frac{OB}{AB} = \frac{FB}{OB} \Rightarrow FB = \frac{OB^2}{AB} \Rightarrow$

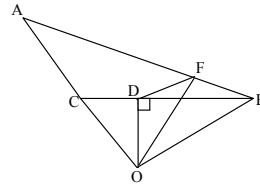
$OB^2 = AB \cdot FB$ .

$\triangle BDO \sim \triangle CBO$  ( $\angle CBO$  — общий), т.о.

$\frac{BD}{BO} = \frac{BO}{CB} \Rightarrow BD = \frac{BO^2}{CB} \Rightarrow$

$BO^2 = CB \cdot BD$ . Т.о.  $\frac{FB}{BD} = \frac{BC}{AB}$  и если

учесть, что  $\angle ABC$  — общий, то  $\triangle ACB \sim \triangle DFB \Rightarrow \angle DFB = \angle ACB$ .

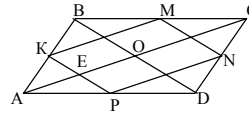


## В-6

1. Дано:  $PN:MN = 2$ ,  $AB = a$ ,  $\angle A = 60^\circ$ .

Найти:  $S_{PNMK}$  — ?

Решение: Т.к.  $\angle A = 60^\circ$ , то  $\triangle ABD$  — правильный и  $BD = a$ . Пусть  $AP = x$ , тогда  $EP = \frac{x}{2}$ ,



$KP = x$ ,  $EO = \frac{1}{2} KM = KP = x$ .  $PD = \frac{EO}{\cos 30^\circ} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$ ;

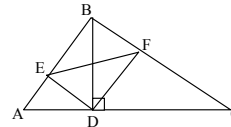
$PD + AP = a$ ,  $x(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1) = a$ ;  $x = \frac{a\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2a\sqrt{3} - 3a$ .  $KP = 2a\sqrt{3} - 3a$  и

$PN = 2KP = 4a\sqrt{3} - 6a$ .  $S_{PNMK} = (2a\sqrt{3} - 3a)(4a\sqrt{3} - 6a) = a^2(42 - 24\sqrt{3}) = 6a^2(7 - 4\sqrt{3})$ .

2.  $\triangle EBD \sim \triangle ABD$  ( $\angle ABD$  — общий)  $\Rightarrow$

$EB = \frac{BD^2}{AB}$ , т.о.  $BD^2 = AB \cdot EB$ .

$\triangle BDF \sim \triangle BDC$  ( $\angle DBC$  — общий)  $\Rightarrow$



$$FB = \frac{BD^2}{AB} \Rightarrow BD^2 = AB \cdot FB. \text{ Т.о. } \frac{EB}{FB} = \frac{BC}{BA}, \text{ т.к. } \angle B \text{ — общий} \Rightarrow \Delta EBF \sim \Delta ABC.$$

### В-7

1. Дано:  $AC = b$ ,  $MN = NK = KP = a$ ,  $\angle PMN = 60^\circ$ .  
Найти:  $S_{ABC}$  — ?

Решение:  $\sin 60^\circ = \frac{HN}{a} \Rightarrow TP = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$

$$MH = \frac{a}{2} \Rightarrow MP = 2a \Rightarrow S_{MNKP} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$$

$\Delta BMP \sim \Delta ABC$  (т.к.  $\angle B$  — общий,  $MP \parallel AC$ ).

Т.о.  $k = \frac{MP}{AC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow k = \frac{2a}{b}$ .  $AMPC$  — трапеция, т.к.  $MP \parallel AC$ .

$$S_{AMPC} = \frac{1}{2} \cdot (b + 2a) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} (ab + 2a^2). \quad \frac{S_{ABC}}{S_{MBP}} = \frac{1}{k^2} = \frac{b^2}{4a^2} = 1 + \frac{S_{AMPC}}{S_{MBP}}$$

$$\Rightarrow S_{MBP} = \frac{4a^2 S_{AMPC}}{b^2 - 4a^2} = \frac{a^2 \sqrt{3} a (b + 2a)}{(b - 2a)(b + 2a)} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{b - 2a} \Rightarrow$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} (ab + 2a^2) + \frac{a^3 \sqrt{3}}{b - 2a} = \frac{\sqrt{3} a (b^2 - 4a^2) + 4a^3 \sqrt{3}}{b - 2a} = \frac{ab^2 \sqrt{3}}{b - 2a}.$$

2. Проведем через точку  $M$  прямую параллельную  $AC$  и пересекающую  $AB$  в точке  $K$  и  $BC$  в точке  $L$ . Т.к.  $KL \parallel AC$ , то  $\Delta BML \sim \Delta BDC$  и  $\Delta BKM \sim \Delta BAD$ , т.е.  $\frac{ML}{DC} = \frac{BM}{BD} = \frac{KM}{AD}$ , т.е.

$$\frac{ML}{KM} = \frac{DC}{AD}, \text{ т.е. } ML = KM. \text{ Т.к. } \Delta KFM \sim \Delta AFC$$

( $\angle KFM$  — общий,  $KM \parallel AC$ ), то  $\frac{FM}{FC} = \frac{KM}{AC}$ . Аналогично

$$\frac{EM}{AE} = \frac{ML}{AC}. \text{ Т.к. } KM = ML, \text{ то } FM : FC = EM : AE, \text{ т.е. } \frac{FM}{MC} = \frac{EM}{MA}. \text{ Т.к.}$$

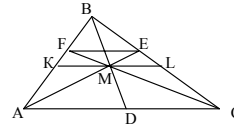
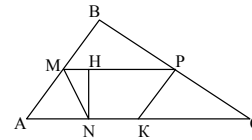
$\angle FME = \angle AMC$ , то  $\Delta FME \sim \Delta AMC \Rightarrow \angle EFM = \angle MCA$ . Т.о.  $EF \parallel AC$ .

### В-8

1. Дано:  $FH = a$ ,  $BH = h$ ,  $DF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Найти:  $S_{ABC}$  — ?

Решение: Т.к.  $DE \parallel AC$ , то  $\angle DEF = \angle EFM$ ,



так что  $EM = FM = a$ . По теореме синусов:

$$\frac{FE}{\sin(180^\circ - 2 \cdot \angle FEM)} = \frac{FM}{\sin \angle FEM}, \text{ так что } FE = 2a \cos \angle FEM. \text{ Но}$$

$$\text{из } \triangle DFE : FE = \frac{DF}{\sin \angle DEF} = \frac{a\sqrt{3}}{2 \sin \angle FEM}.$$

$$\text{Так что } \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \angle FEM} = 2 \cos \angle FEM. \text{ Так что } \angle FEM = 30^\circ \text{ и } FE = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Далее } DE = \sqrt{FE^2 - DF^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{3a}{2}. \text{ Т.к. } DE \parallel AC, \text{ то}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DBE \text{ и } \frac{DE}{AC} = \frac{h - \frac{a\sqrt{3}}{2}}{h}, \text{ так что } AC = \frac{3a \cdot h}{2(h - \frac{a\sqrt{3}}{2})} = \frac{3ah}{2h - a\sqrt{3}}.$$

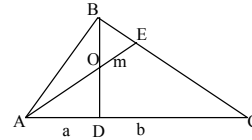
$$\text{Значит } S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot h = \frac{3ah^2}{4h - 2a\sqrt{3}}.$$

$$2. \triangle BDC \sim \triangle AEC \text{ (т.к. } \angle C \text{ — общий). Т.о. } \frac{BD}{AE} = \frac{DC}{EC}, \text{ далее т.к.}$$

$$\angle EAC \text{ — общий, то } \triangle EAC \sim \triangle AOD \Rightarrow$$

$$\frac{EC}{OD} = \frac{AE}{AD}, \text{ т.е. } AE = \frac{EC \cdot AD}{OD}.$$

$$BD = \frac{EC \cdot AD \cdot DC}{OD \cdot EC} = \frac{AD \cdot DC}{OD} = \frac{ab}{m}.$$



**C-25**

**B-1**

1. Дано:  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle ABC = 30^\circ$ ,  $AB = 10$ .

Решение: а) Если окружность касается прямой  $BC$ , то  $C$ -точка касания, т.к.  $\angle C$  — прямой, и  $AC$  — радиус окружности.

$$\frac{AC}{AB} = \sin \angle ABC = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; AC = \frac{1}{2} AB = 5.$$

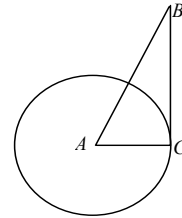
б) Окружность не имеет общих точек с  $BC$ , если ее радиус  $R < AC = 5$ .

в) Окружность имеет с  $BC$  две общие точки, если ее радиус  $R > AC = 5$ .

Ответ: а)  $R = 5$ ; б)  $R < 5$ ; в)  $R > 5$ .

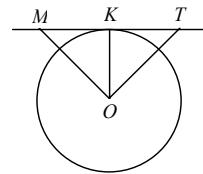
2. Дано:  $OM = OT = 20$  см.,  $TM = 32$  см.

Решение: Пусть  $K$  — точка касания, тогда  $OK$  — радиус.  $\triangle OMT$  — равнобедренный, следовательно  $OK$  — высота и





медиана и значит  $MK = KT = 16$  см.  $\triangle MKO$  — прямоугольный, следовательно, по теореме Пифагора  $OK = \sqrt{OM^2 - MK^2}$ ,  
 $OK = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$  (см).  
 Ответ: 12 см.



### В-2

1. Дано:  $ABCD$  — квадрат,  $AC = 10\sqrt{2}$ ,  $O$  — середина  $AD$ . Решение:  $\triangle ACD$  — прямоугольный, равнобедренный. По теореме Пифагора:

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{2AD^2} = 10\sqrt{2}. AD = CD = 10. AO = OD = 5.$$

а)  $R_{OKP} = 5$ ; б)  $R_{OKP} < 5$ ; в)  $R_{OKP} > 5$ .

2. Дано:  $AB$  — касательная,  $OC = 8$ ,  $AB = 30$ ,  $\angle AOC = \angle BOC$ .

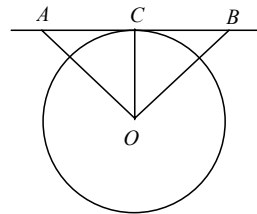
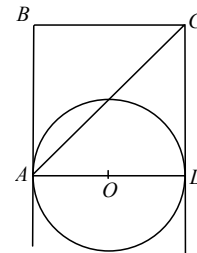
Найти:  $AO$ ,  $BO$ .

Решение: Т.к.  $AB$  — касательная, то  $AB \perp OC$  и  $\triangle AOC = \triangle BOC$  (по стороне и двум углам), т.к.  $OC$  — общая сторона  $\Rightarrow$

$$AC = BC = \frac{1}{2}AB = 15. \text{ По теореме Пифагора:}$$

$$BO = AO = \sqrt{AC^2 + OC^2} = \sqrt{225 + 64} = 17.$$

Ответ: 17.



### В-3

1. Дано:  $BE = CB$ .

Решение:  $\triangle COB \sim \triangle CDE$ , т.к.  $\angle C$  — общий и  $\frac{CO}{CD} = \frac{CB}{CE} = \frac{1}{2}$ ,  $\Rightarrow \triangle CDE$  — прямоугольный,  $\angle CDE$  — прямой, т.е.  $ED$  — касательная к окружности.

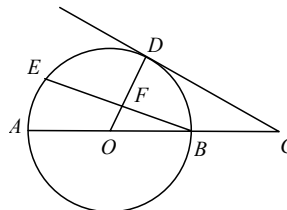
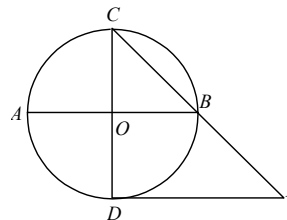
2. Дано:  $CD$  — касательная,  $OB = 10$  см,  $OF = 4$  см.

Найти  $AC$ .

Решение:  $\triangle OFB \sim \triangle ODC$  (по 3 углам)  $\Rightarrow$ :

$$\frac{OD}{OF} = \frac{OC}{OB}, OC = \frac{OD \cdot OB}{OF} = \frac{10 \cdot 10}{4} = 25 \text{ (см)}.$$

$$AC = AO + OC = 10 + 25 = 35 \text{ (см)}.$$



Решение:  $\sphericalangle FC = 2\angle ABC = 80^\circ$  (т.к.  $\angle FBC$  — вписанный).

$$\angle BFC = 2 \angle BCA = 2 \left( \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} \right) = 140^\circ \text{ (т.к. } \angle BCA \text{ — угол между касат.)}$$

тельной и хордой)  $\Rightarrow \cup BF = \cup BFC - \cup FC = 60^\circ \Rightarrow \cup CB = 220^\circ$ .

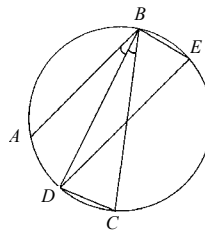
Ответ:  $60^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $220^\circ$ .

**B-7**

1. Дано:  $\angle ABD = \angle DBC$ ,  $AB \parallel DE$ .

Доказать:  $DE = BC$ .

Доказательство: Так как  $AB \parallel DE$  и  $BD$  — биссектриса  $\angle ABC$ , то  $\angle ABD = \angle BDE = \angle DBC$ ;  $\angle DCB = \angle DEB$ , как вписанный, опирающийся на ту же дугу, откуда  $\triangle DCB = \triangle DEB$  по стороне и двум углам. Отсюда  $DE = BC$ .



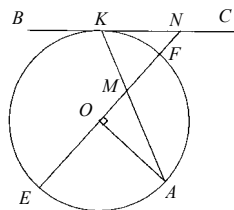
2. Доказать:  $NK = NM$ .

Доказательство:  $\angle NKM = \frac{1}{2} \cup KFA$ ,

$$\cup KFA = \cup KF = \cup FA = \cup KF + 90^\circ.$$

$$\angle KMF = \frac{1}{2}(\cup KF + \cup EA) = \frac{1}{2}(\cup KF + 90^\circ) \Rightarrow$$

$\angle NKM = \angle KMF$ , поэтому  $\triangle KNM$  — равнобедренный и  $NK = NM$ .



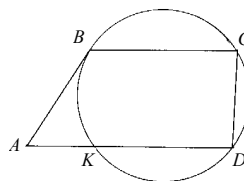
**B-8**

1. Дано:  $ABCD$  — трапеция,  $\triangle BCD$  — вписанный,  $AB$  — касательная.

Доказать:  $BD = \sqrt{BC \cdot AD}$ .

Доказательство:  $\angle CBD = \angle ADB$  (т.к.  $AD \parallel BC$  — основания трапеции).

$$\angle BCD = \frac{1}{2} \cup BKD \quad (\text{т.к. он вписанный и}$$



опирается на эту дугу).  $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup BKD$  (как угол между касательной

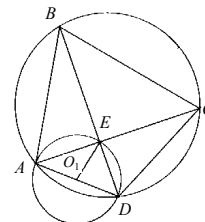
и хордой)  $\Rightarrow \angle BCD = \angle ABD \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BCD$

(по двум углам), откуда  $\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow$

$$BD = \sqrt{BC \cdot AD} .$$

2. Дано:  $ABCD$  — вписанный,  $\angle A + \angle C = 180^\circ$ ,  
 $\triangle AED$  — вписанный в окружность с центром  $O_1$ ,  
 $O_1E = 8$  см.

Найти:  $AD$ .



Решение:  $\angle CAD + \angle BDA = \frac{1}{2} \cup AB + \frac{1}{2} \cup CD = 90^\circ$  (т.к. эти углы вписанные и опираются на дуги  $\cup AB$  и  $\cup CD$  соответственно).  
 $\Rightarrow \angle AED = 90^\circ$ , т.е.  $\triangle AED$  — прямоугольный  $\Rightarrow O_1$  лежит на  $AD$  и  $AD = 2 O_1E = 8 \cdot 2 = 16$  см.  
 Ответ: 16 см.

### C-27

#### В-1

1. Дано:  $M$  — внутри круга,  $AB, CD$  — хорды,  $AM = MB, CM = 16$  см,  
 $\frac{DM}{MC} = \frac{1}{4}$ .

Решение:  $\frac{DM}{MC} = \frac{1}{4}, MC = 4 \cdot DM, 16 = 4 \cdot DM,$

$DM = 4$  (см).

$AM \cdot MB = DM \cdot MC. AM \cdot MB = 4 \cdot 16 = 64$  (см), т.к.  $AM = MB$ , то  $AM = MB = 8$  (см).

$AB = AM + MB = 8 + 8 = 16$  (см).

Ответ: 16 см.

2. Дано:  $AB$ -диаметр,  $CD \perp AB, AD = 3, DB = 5$ .

В условии задачи опечатка, пропущено условие : точка  $D$  лежит на  $AB$ .

Найти:  $CD$ .

Решение:  $AB = AD + DB = 8$ . Проведем радиус  $OC = 4$ .

$\triangle ODC$  — прямоугольный. По теореме Пифагора :

$CD = \sqrt{OC^2 - OD^2} = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$  (т.к.  $OD = AO - AD = 4 - 3 = 1$ ).

#### В-2

1. Дано:  $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}, CD = 20, DE = 5$ .

Найти:  $AB$ .

Решение:  $CE = CD - DE = 20 - 5 = 15. 3AE = EB.$

$AE \cdot EB = CE \cdot ED. AE \cdot 3AE = 15 \cdot 5. AE^2 = 25,$

$AE = 5, EB = 3AE = 15. AB = AE + EB = 5 + 15 = 20.$

Ответ: 20.

2. Дано: В условии задачи опечатка, пропущено:

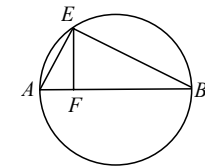
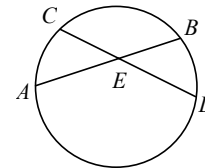
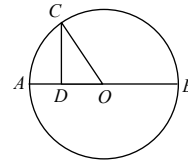
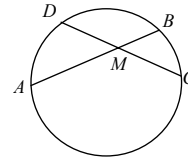
точка  $F$  лежит на  $AB$ .

$AB$ -диаметр,  $EF \perp AB, FB = 4, EF = 6$ .

Найти:  $R_{окр}$ .

Решение:  $\triangle EFB$  — прямоугольный, а т.к.  $\angle AEB$

опирается на диаметр, то он прямой и  $\triangle AEB \sim \triangle EFB$ , т.к.  $\angle B$  — общий.



$$EB = \sqrt{EF^2 + BF^2} = 2\sqrt{13} . \frac{EB}{BF} = \frac{AB}{EB} ; \frac{2\sqrt{13}}{4} = \frac{AB}{2\sqrt{13}} , AB = 13 .$$

$$R_{OKP} = \frac{1}{2} AB = 6,5 .$$

Ответ: 6,5.

### В-3

1. Дано:  $CD$  — диаметр,  $AB \perp CD$ ,  $CE = 2$  (см),  
 $AB + CE = CD$ .

Найти:  $R_{OKP}$ .

Решение:  $CD = CE + ED = CE + AB$  (по условию),  
 следовательно  $AB = ED$ .

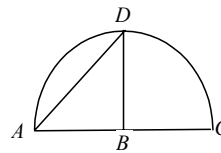
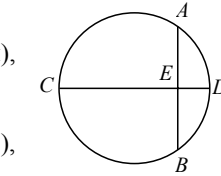
Т.к.  $AB \perp CD$ , то  $E$  — середина  $AB$  и  $AE = EB$ . Поэтому  
 $AE^2 = CE \cdot ED = 2AB = 4AE$ ,  $AE = 4$  (см),  $AB = 8$  (см) следовательно

$$CD = 2 + 8 = 10 \text{ (см)}. R_{OKP} = \frac{1}{2} CD = 5 \text{ (см)} .$$

Ответ: 5 (см).

2. Дано:

Решение: Откладываем на одной прямой оба  
 отрезка  $AB$  и  $AC$ , затем проводим полуокруж-  
 ность диаметром  $AC$ , из точки  $B$  проводим пер-  
 пендикуляр  $BD$ .  $AD$  — искомый отрезок.



### В-4

1. Дано:  $OK = 5$  (см),  $OE = 4$  (см),  $AB = 16$  (см).

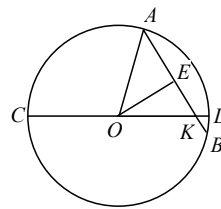
Найти:  $OA$ .

Решение:  $AE = BE = 8$  (см);

$$OA = \sqrt{OE^2 + AE^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5} \text{ (см)} .$$

Ответ:  $4\sqrt{5}$  (см).

2. Строится аналогично задаче В-3, С-27, 2 для  
 длин отрезков 2 см и 3 см.

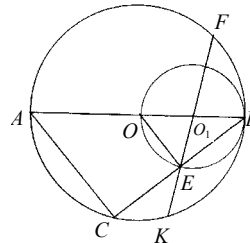


### В-5

1. Дано:  $KE = 2$  см,  $EF = 8$  см.

Найти:  $BC$ .

Решение:  $\angle ABC$  — вписанный в большую  
 окружность и опирающийся на  $\cup AC$ ,  
 $\angle OBE$  — вписанный в меньшую окруж-  
 ность и опирающийся на  $\cup OE$ . Значит гра-  
 дусные меры этих углов равны, а следова-  
 тельно равны и градусные меры дуг  $BE$  и  
 $BC$ , откуда следует:  $\angle CAB = \angle OEB$ . Тогда



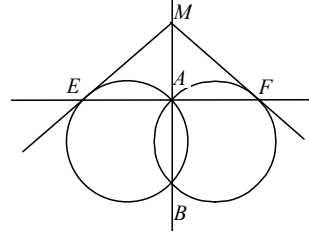
$\triangle ABC \sim \triangle OEB$  и  $\frac{BC}{BE} = \frac{BA}{BO} = 2$ , т.е.  $BE = EC$ . Тогда получаем:

$BE^2 = BE \cdot EC = KE \cdot EF = 16$  (см), откуда  $BE = 4$  см и  $BC = 2BE = 8$  см.

Ответ: 8 см.

2. Доказать:  $ME = MF$ .

Доказательство: Из св-ва хорды и касательной к окружности, проведенным из одной точки, имеем:  $ME^2 = MA \cdot MB$ ,  $MF^2 = MA \cdot MB$ , откуда  $ME = MF$ .



#### В-6

1. Дано:  $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ ,  $KE = 4$  см,  $ME = 6$  см,

$\cup AD = \cup DC$ .

Найти:  $AC$ .

Решение: Пусть  $AC = x$ .  $\angle ABD = \angle DBC$  (т.к. по условию  $\cup AD = \cup DC$ ), т.е.  $BE$  — биссектриса

$\angle ABC$  и  $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow AE = \frac{2}{5}x$ ,  $EC = \frac{3}{5}x$ .

По свойству хорд, пересекающихся внутри ок-

ружности  $AE \cdot EC = KE \cdot EM$ , т.е.  $\frac{6}{25}x^2 = 24$ , откуда  $x = 10$  (см).

$AC = 10$  см

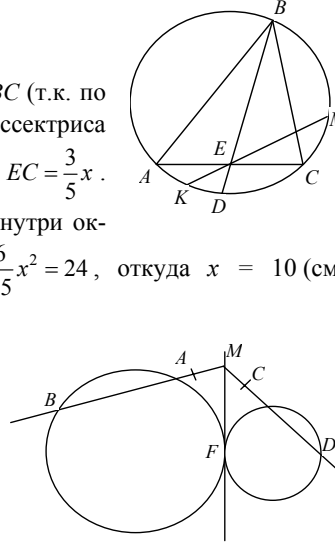
Ответ: 10 см.

2. Дано:  $MA = MC$ .

Доказать:  $AB = CD$ .

Доказательство: По свойству касательной и хорды, проведенных из одной точки к окружности, имеем:

$MF^2 = MB \cdot MA = MD \cdot MC$ , откуда  $MB = MD$  и  $AB = CD$ .



#### В-7

1. Дано:  $R, r$  — радиусы большей и меньшей окружностей соответственно.

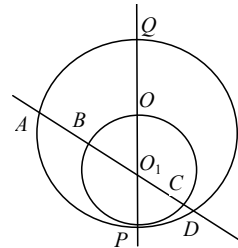
$AB : BC : CD = 2 : 4 : 3$ .

Найти:  $(r / R) = ?$

Решение: имеем  $BC = 2r$ ,  $AB = r$ ,

$CD = \frac{3}{4} \cdot 2r = \frac{3}{2}r$ .  $O_1P \cdot O_1Q = O_1A \cdot O_1D$ . Т.к.

$O_1Q = 2R - r$ ,  $O_1P = r$ ,  $O_1A = r + r = 2r$ ,



$$O_1D = r + \frac{3}{2}r = \frac{5}{2}r, \text{ то имеем: } (2R - r)r = 5r^2, \text{ откуда } \frac{r}{R} = \frac{1}{3}.$$

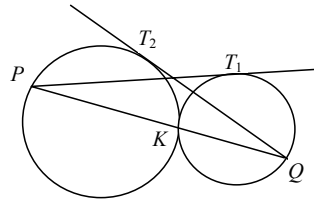
Ответ:  $(1/3)$ .

2. Доказать:  $PT_1^2 + QT_2^2 = PQ^2$

Доказательство: По теореме о касательной и секущей  $PT_1^2 + PK \cdot PQ$ ,

$PT_1^2 + QK \cdot PQ$ . Складывая получим:

$$PT_1^2 + PT_1^2 = PQ(PK + KQ) = PO^2.$$



### В-8

1. Дано:  $CD$  — диаметр,  $AB$  — хорда,  $AE = 4$ ,  $EB = 3$ ,  $AD = 6,5$ ,  $\angle AB = 60^\circ$ .

Найти:  $CE$ ,  $ED$ .

Решение:  $\angle CDA = \angle ABC = 60^\circ$  (т.к. они вписанные и опираются одну дугу).

$\angle CAD = 90^\circ$  (т.к. он вписанный и опирается на диаметр)  $\Rightarrow CD = 2AD = 13$ .

$CE \cdot ED = AE \cdot EB = 12$  (как отрезки хорд, пересекающиеся внутри окружности). Таким

образом, имеем:  $\begin{cases} CE \cdot ED = 12 \\ CE + ED = 13 \end{cases}$ . Решая систему получаем:  $CE = 12$ ,

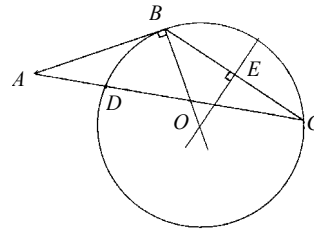
$ED = 1$ .

Ответ:  $CE = 12$ ,  $ED = 1$ .

2. Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle B$  — тупой. Построить на  $AC$  точку  $D$ , такую, что  $AB^2 = AD \cdot AC$ .

Построение:

Восстанавливаем перпендикуляр  $BO$  к  $AB$  и серединный перпендикуляр  $EO$  к  $BC$ . Строим окружность с центром в точке  $O$  радиуса  $OB$ . Она пересекает  $AC$  в искомой точке  $D$ .

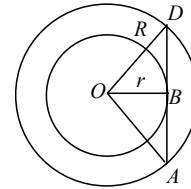


### С-28

#### В-1

1. Дано:  $r$  — радиус меньшей окружности,  $R$  — радиус большей.

Решение: Т.к. хорда  $AD$  касается малой окружности, то  $\angle OAB$  — прямой,  $B$  — точка касания. По

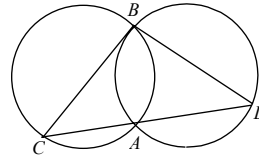


теореме Пифагора:  $AB = \sqrt{R^2 - r^2}$ ,  $AB = DB$ , т.к.  $\triangle ODA$  — равнобедренный, а  $OB$  — медиана и высота  $AD = AB + BD = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ .

Ответ:  $2\sqrt{R^2 - r^2}$ .

2. Дано:

$\angle ADB = \angle ACB$ , так как эти углы опираются на равные дуги. Следовательно  $\triangle CBD$  — равнобедренный и  $BC = BD$ , что и требовалось доказать.



## В-2

1. Дано: Окр.<sub>1</sub>( $O, r$ ),  $AB$  — диаметр,  $OB$  — диаметр окр.<sub>2</sub>,  $AK$  — касательная к меньшей окружности.

Найти:  $AK = ?$

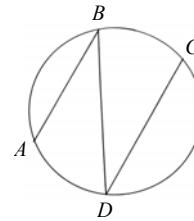
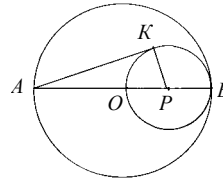
Решение: Т.к.  $AB$  — диаметр, то  $O$  лежит на  $AB$ . Пусть  $P$  — центр меньшей окружности. Он также лежит на  $AB$ .  $KP \perp AK$  (т.к.  $AK$  — касательная)  $\Rightarrow \triangle AKP$  — прямоугольный следовательно  $AK = \sqrt{AP^2 - PK^2} = \sqrt{9r^2 - r^2} = 2\sqrt{2}r$ .

Ответ:  $AK = 2\sqrt{2}r$ .

2. Дано:  $A, B, C, D$  — лежат на окружности,  $\cup BC = \cup AD$ .

Доказать:  $AB \parallel CD$ .

Доказательство: т.к.  $\cup AD = \cup BC$ , то  $\angle ABD = \angle BDC \Rightarrow AB \parallel CD$ .



## В-3

1. Дано: Окр.<sub>1</sub> ( $O_1, 8$  см), окр.<sub>2</sub> ( $O_2, 2$  см) касаются внешним образом,  $AB$  — общая касательная.

Найти:  $AB = ?$

Решение: Опустим из  $O_2$  перпендикуляр  $O_2K$  на  $AO_1$ . Имеем:  $AB \perp O_1A$ ,  $AB \perp O_2B$ ,  $O_2K \perp AK \Rightarrow ABO_2K$  — прямоугольник  $\Rightarrow AB = O_2K$ ,  $AK = O_2B = 2$  (см). Рассмотрим  $\triangle O_1O_2K$  — прямоугольный.

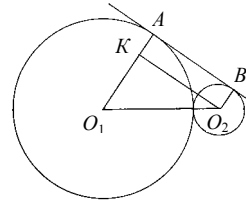
$O_1O_2 = 8 + 2 = 10$  (см) — гипотенуза,  $O_1K = 8 - 2 = 6$  (см)  $\Rightarrow$

$O_2K = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$  (см)  $\Rightarrow AB = 8$  (см).

Ответ: 8 см.

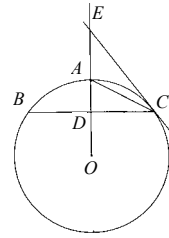
2. Дано: Окружность,  $OA$  — радиус,  $D$  лежит на  $AO$ .  $BC \perp OA$ ,  $BC$  — хорда, проходящая через  $D$ .  $CE$  — касательная.

Доказать:  $CA$  — биссектриса  $\angle BCE$ .



Доказательство:  $\angle BCA = \frac{1}{2} \cup AB$  (т.к.  $\angle BCA$

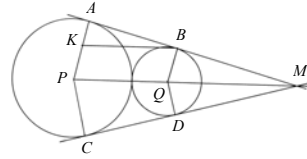
опирается на  $\cup AB$ ).  $\angle ACE = \frac{1}{2} \cup AC$  (как угол между касательной и хордой).  $\cup AB = \cup AC \Rightarrow \angle BCA = \angle ACE$ , что и требовалось доказать.



#### В-4

1. Дано: Окр.<sub>1</sub> (P, 6), окр.<sub>2</sub> (Q, 4), AB — общая внешняя касательная, CD — общая внешняя касательная,  $AB \cap CD = M$ .  
Найти:  $MQ = ?$

Решение: Прямая PQ проходит через точку M.  $PA \perp AB$ ,  $QB \perp AB \Rightarrow AP \parallel BQ \Rightarrow \angle APM = \angle BQM$ .



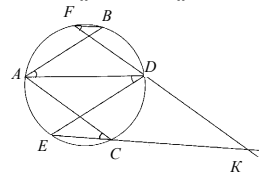
Проведем отрезок  $BK \parallel PQ$ . Тогда,  $\angle AKB = \angle APM = \angle BQM$  и  $\angle ABK = \angle BMQ \Rightarrow \triangle KAB \sim \triangle QBM \Rightarrow \frac{AK}{KB} = \frac{BQ}{QM}$ .  $PQ \parallel KB$ ,  $PK \parallel QB \Rightarrow PKQB$  — параллелограмм  $\Rightarrow KB = PQ = 6 + 4 = 10$ ,  $AK = AP - KP = 6 - 4 = 2 \Rightarrow QM = \frac{KB}{AK} \cdot BQ = \frac{10}{2} \cdot 4 = 20$ .

Ответ: 20.

2. Дано: Окружность; AB, AC, DE, DF, — хорды;  $AB \parallel DE$ ,  $AC \parallel DF$ .

Доказать:  $FB \parallel CE$ .

Доказательство: Т.к.  $AB \parallel DE$ , то  $\angle BAD = \angle ADE$ . Т.к.  $\angle BAD$  и  $\angle BFD$  опираются на одну и ту же дугу BD, то  $\angle BAD = \angle BFD$ .



Аналогично,  $\angle ACE = \angle BFD$ . Пусть прямые EC и FD пересекаются в точке K.

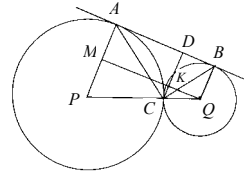
Тогда  $\angle ACE = \angle FKE \Rightarrow \angle BFK = \angle FKE \Rightarrow FB \parallel EC$ , что и требовалось доказать.

#### В-5

1. Дано: Окр.<sub>1</sub> (P, 3 см), окр.<sub>2</sub> (Q, 1 см) касаются в точке C, AB — общая внешняя касательная.

Найти:  $S_{ABC} = ?$

Решение: Опустим из точки C перпендикуляр CD на AB и из точки Q перпендикуляр QM на AP, пересекающий CD в точке K. Имеем:  $MA \perp AB$ ,  $KD \perp AB$ ,  $QB \perp AB$ ,  $MA \perp MQ$ ,





$DK \perp MQ$ ,  $BQ \perp MQ \Rightarrow ADKM$  и  $KDBQ$  — прямоугольники  $\Rightarrow$   
 $BQ = KD = AM = 1$ ,

$$AB = MQ = \sqrt{PQ^2 - MP^2} = \sqrt{(3+1)^2 - (3-1)^2} = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3},$$

$$\triangle PQM \sim \triangle CKQ \Rightarrow \frac{PM}{PQ} = \frac{CK}{CQ} \Rightarrow CK = \frac{2}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow CD = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

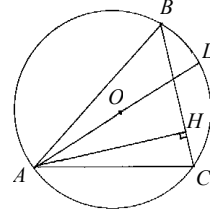
2. Дано:  $\triangle ABC$  вписан в окружность с центром в точке  $O$ ,  $AH \perp BC$ .

Доказать:  $\angle OAC = \angle BAH$ .

Доказательство: Продолжим  $AO$  до пересечения с окружностью в точке  $D$ . Пусть  $\angle BAH = \alpha$ .

Тогда  $\angle ABC = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle AC = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow$   
 $\angle DC = \angle AD - \angle AC = 180^\circ - 180^\circ + 2\alpha \Rightarrow$

$\angle DAC = \frac{1}{2} \angle DC = \alpha$ , что и требовалось доказать.



## В-6

1. Дано: Окр.<sub>1</sub> ( $P$ , 4), окр.<sub>2</sub> ( $Q$ , 1) касаются внутренним образом,  $AB$  касается окр.<sub>2</sub> и является хордой для окр.<sub>1</sub>,  $\angle ACK = 60^\circ$ .

Найти:  $AB = ?$

Решение: Пусть  $AB$  касается меньшей окружности в точке  $L$ , точка касания окружностей —  $K$ ,  $PQ$  пересекается с  $AB$  в точке  $M$ .  $\angle QCL = \angle QCK = 30^\circ$ ,

$\angle CQL = \angle CQK = 60^\circ \Rightarrow \angle MQL = 60^\circ \Rightarrow \angle AMP = 30^\circ$ .  $\triangle MQL$  — прямоугольный,  $QL = 1$  см  $\Rightarrow MQ = 2$  см  $\Rightarrow PM = PK = QK - MQ = 1$  см. Опустим перпендикуляр  $PH$  из  $P$  на  $AB \Rightarrow \triangle PHM$  — прямоугольный  $\Rightarrow PH = \frac{1}{2}$  см (т.к.  $\angle HMP = 30^\circ$ ,  $PM = 1$  см)  $\Rightarrow$

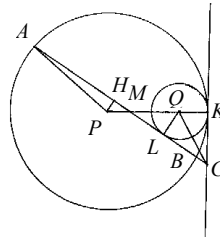
$$AH = \frac{1}{2} AB = \sqrt{AP^2 - PH^2} = \frac{\sqrt{63}}{2} \text{ (см)} \Rightarrow AB = \sqrt{63} \text{ (см)}.$$

Ответ:  $AB = \sqrt{63}$  см.

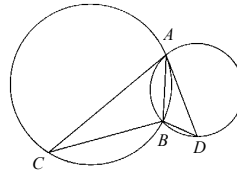
2. Дано: Окр.<sub>1</sub> пересекается с окр.<sub>2</sub> в точках  $A$ ,  $B$ ,  $AC$ -хорда окр.<sub>1</sub> и касательная к окр.<sub>2</sub>,  $AD$  — хорда окр.<sub>2</sub> и касательная окр.<sub>1</sub>.

Доказать:  $AC \cdot BA = AD \cdot BC$ .

Т.к.  $AD$  — касательная к окр.<sub>1</sub>, то  $\angle BAD = (1/2) \angle AB$  (в окр.<sub>1</sub>). Но и  $\angle ACB = (1/2) \angle AB$  (в окр.<sub>1</sub>), т.к. опирается на нее  $\Rightarrow \angle ACB = \angle BAD$ .



Аналогично  $\angle ADB = \angle CAB$ . Таким образом,  $\triangle ABC \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AC \cdot BA = AD \cdot BC$ , что и требовалось доказать.

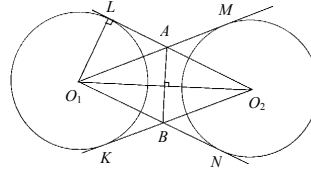


### В-7

1. Дано: 2 круга радиуса  $r$ , расстояние между центрами —  $d$ .

Найти:  $S_{O_1AO_2B} = ?$

В силу симметрии относительно  $O_1O_2$  и  $AB$   $S_{O_1AO_2B} = 4S_{O_1AB}$ ,  $\triangle O_1LO_2 \sim \triangle HAO_2$  (т.к. оба они прямоугольные и имеют



общий острый угол)  $\Rightarrow \frac{O_1L}{O_2L} = \frac{AH}{HO_2}$ .  $O_2L = \sqrt{d^2 - r^2}$ , т.о.

$$S_{O_1AH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot AH = \frac{d}{4} \cdot \frac{O_1L}{O_2L} \cdot HO_2 = \frac{d}{4} \cdot \frac{r}{\sqrt{d^2 - r^2}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{rd^2}{\sqrt{d^2 - r^2}} \Rightarrow$$

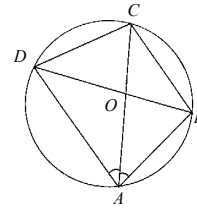
$$S_{O_1AO_2B} = \frac{rd^2}{2\sqrt{d^2 - r^2}}.$$

Ответ:  $\frac{rd^2}{2\sqrt{d^2 - r^2}}.$

2. Дано: четырехугольник  $ABCD$  — вписанный,  $\angle DAC = \angle BAC$ .

Доказать:  $AC \cdot BD = AD \cdot DC + AB \cdot BC$

Пусть  $AC$  пересекает  $BD$  в точке  $O$ .  $\angle DAC = \angle BAC$  по условию, а  $\angle BAC = \angle BDC$  как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу  $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle COD$  по 2-м углам ( $\angle DAC$  — общий)  $\Rightarrow \frac{AD}{DO} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot DO$  (1).



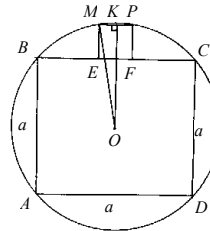
Аналогично  $\triangle ABC \sim \triangle BOC$  и  $AB \cdot BC = AC \cdot BO$  (2). Складывая (1) и (2), получаем  $AC \cdot BD = AD \cdot DC + AB \cdot BC$ , что и требовалось доказать.

### В-8

1. Дано: квадрат  $ABCD$  — вписанный в окружность,  $EMPF$  — квадрат,  $E, F$  лежат на  $BC$ ;  $M, P$  лежат на окружности.

Найти: сторону квадрата  $EMPF$ .

Решение: Пусть сторона квадрата  $EMPF$ .



равна  $x$ . Опустим перпендикуляр  $OK$  из точки  $O$  на  $MP$ .

Тогда,  $MK = KP = \frac{x}{2}$ ,  $OK = \frac{a}{2} + x$ ,  $OM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  (радиус окружности).

$$MK^2 + OK^2 = OM^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + x^2 + ax + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow$$

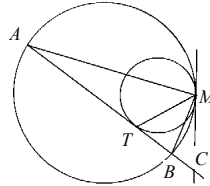
$$5x^2 + 4ax - a^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 5a^2}}{5} = \frac{-2a \pm 3a}{5} = \left[ \frac{a}{5} \right. \text{ (} -a \text{ — не подходит по смыслу задачи).}$$

Ответ:  $\frac{a}{5}$ .

2. Дано: Две окружности касаются внутренним образом в точке  $M$ .  $AB$  — хорда большей и касательная к меньшей окружности (в точке  $T$ ).

Доказать:  $\angle AMT = \angle BMT$ .

Доказательство: Проведем общую касательную двух окружностей и пусть  $AB$  пересекает эту касательную в точке  $C$ . Так как  $CT = CM$  как отрезка касательных, проведенных из точки  $C$  к меньшей окружности, то  $\angle CMT = \angle CTM$ . Кроме того,  $\angle CAM = \angle BMC$ ,  $\angle AMT = \angle CTM - \angle CAM = \angle CTM - \angle BMC = \angle CMT - \angle BMC = \angle BMT$ , то есть  $\angle AMT = \angle BMT$ .



### C-29

#### B-1

1. Дано:  $AD \perp BC$ ,  $CF \perp AB$ .

Решение: Построим  $BM$  до пересечения с  $AC$ ,  $BE$  — тоже высота, так как все высоты в треугольнике пересекаются в одной точке.  $\angle FMB = \angle EMC$  т.к. они вертикальные, следовательно  $\triangle FBM$  и  $\triangle EMC$  — подобные и значит  $\angle MCA = \angle ABM$  что и требовалось доказать.

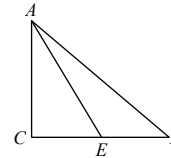
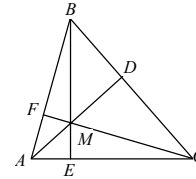
2. Дано:  $AE$  — биссектриса,  $CE = 5$ ,  $AB = 14$ .

Решение: По свойству биссектрисы:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{EB}; \frac{AC}{14} = \frac{5}{EB}; AC \cdot EB = 70.$$

$$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AC \cdot EB = \frac{1}{2} \cdot 70 = 35.$$

Ответ:  $S_{\triangle ABE} = 35$ .



#### B-2

1. Дано:  $AK = 5$ ,  $BC = 4$ ,  $AM = BM$ .

Найти:  $P_{\Delta BKC}$ .

Решение:  $\Delta AMK = \Delta BMK$  (по двум катетам), так как  $MK$  — общий катет, следовательно  $BK = AK = 5$ .

По теореме Пифагора:  $KC = \sqrt{BK^2 - BC^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$ .

$P_{\Delta BKC} = KC + BK + BC = 3 + 5 + 4 = 12$ .

Ответ: 12.

2. Дано:  $AE, FC$  — медианы,  $AB = BC$ ,  $BK = 6, AC = 10$ .

Найти:  $S_{\Delta ABC}$ .

Решение: Продолжим  $BK$  до пересечения с  $AC$  в точке  $D$ . Т.к. все медианы пересекаются в одной точке, то  $BD$  — тоже медиана, а т.к.  $\Delta ABC$  — равнобедренный, то  $BD$  — высота. Медианы в

точке пересечения делятся в отношении 2:1, следовательно  $\frac{BK}{KD} = \frac{2}{1}$ ,

$BK = 2KD = 6$ .  $KD = 3$ ,  $BD = BK + KD = 6 + 3 = 9$ .

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 = 45$ .

Ответ: 45.

### В-3

1. Дано:  $AD, CE$  — биссектрисы,  $BM = m$ ,  $\angle ABC = \alpha$ .

Найти:  $MF$ .

Решение: Точка  $M$  — центр вписанной окружности, а  $MF = MF_1$  — ее радиусы.  $\Delta BMF_1$  —

прямоугольный,  $\angle MBF_1 = \frac{\alpha}{2}$ .  $\frac{MF_1}{BM} = \sin \angle MBF_1$ ;

$MF_1 = MF = m \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$ .

Ответ:  $m \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$ .

2. Дано:  $AD, CE$  — высоты,  $OA = 4, OD = 3, BD = 4$ .

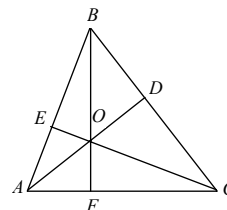
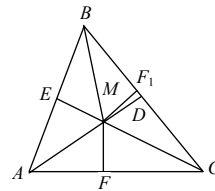
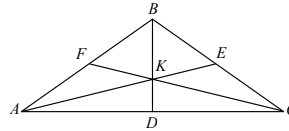
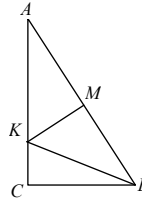
Найти:  $OF$ .

Решение:  $\angle AOF = \angle BOD$  (вертикальные) и

$\Delta AOF \sim \Delta BOD$  (по 3 углам).  $\frac{OF}{AO} = \frac{OD}{BO}$ ;

$OF = \frac{AO \cdot OD}{\sqrt{BD^2 + OD^2}} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{12}{5} = 2,4$ .

Ответ: 2,4.



#### В-4

1. Дано:  $AC = 3$ ,  $BC = 4$ ,  $R_{OKP} = 2,4$ .

Решение: Построим высоту  $CD$ .

$$\triangle ACD \sim \triangle ABC \quad (\text{по } 3 \text{ углам}). \quad \frac{CD}{AC} = \frac{CB}{AB};$$

$$CD = \frac{AC \cdot CB}{AB} = \frac{3 \cdot 4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5} = 2,4.$$

Т.к.  $CD = R_{OKP}$ , то  $AB$  — касательная к окружности.

2. Дано:  $OD = OC = 7$ ,  $OA = OB = 25$ .

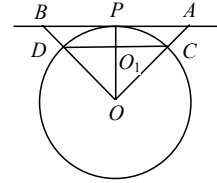
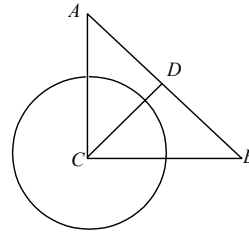
Найти:  $CD$ .

$$\text{Решение: } PA = \sqrt{OA^2 - OP^2} = \sqrt{625 - 49} = 24.$$

$$\triangle OO_1C \sim \triangle OPA.$$

$$\frac{CO_1}{OC} = \frac{PA}{OA}; \quad CO_1 = \frac{OC \cdot PA}{OA} = \frac{7 \cdot 24}{25} = 6,72.$$

$$DC = 2CO_1 = 13,44.$$



#### В-5

1. Дано:  $AB = BC = CD$ ,  $AD = 2BC$ .

Решение: Проведем высоту  $BB_1$ .

$$AB_1 = \frac{1}{2} AB. \quad \cos \angle A = \frac{AB_1}{AB} = \frac{\frac{1}{2} AB}{AB} = \frac{1}{2};$$

$$\angle A = 60^\circ; \quad \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ;$$

$$\angle C = \angle ABC = 120^\circ. \quad \triangle BCD \text{ — равнобе-$$

$$\text{денный} \Rightarrow \angle CDB = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle C) = 30^\circ;$$

$$\angle ADB = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ. \quad \angle ABD = 180^\circ - \angle A - \angle ADB = 90^\circ. \text{ Т.к. } A \text{ —}$$

центр окружности, то  $BD$  — касательная.

2. Дано:  $R_{OKP} = R$ ,  $\angle ABC = \alpha$ .

Найти:  $AC$ .

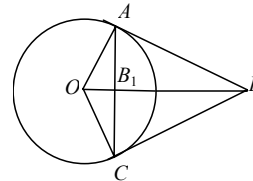
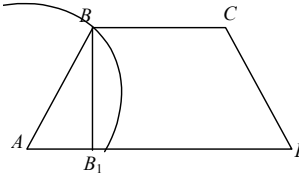
$$\text{Решение: } \angle AOB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \text{ т.к. } \triangle AOB \text{ — прямоугольный.}$$

$$\angle AOC = 2\angle AOB = 180^\circ - \alpha; \quad \angle OAB_1 = \frac{\alpha}{2}, \text{ т.к. } \triangle OAB_1 \text{ — прямоуголь-}$$

$$\text{ный. } \frac{AB_1}{r} = \cos \angle OAB_1 = \cos \frac{\alpha}{2}; \quad AB_1 = r \cos \frac{\alpha}{2};$$

$$AC = 2AB_1 = 2r \cos \frac{\alpha}{2}.$$

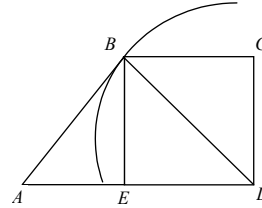
$$\text{Ответ: } 2r \cos \frac{\alpha}{2}.$$



### В-6

1. Дано:  $BC = CD$ ,  $AD = 2BC$ ,  $\angle CDA = 90^\circ$ .

Решение: Опустим высоту  $BE$  на  $AD$ . Тогда  $EBCD$  — квадрат, откуда  $\angle EBD = 45^\circ$ , а  $AE = BE$ , т.е.  $\triangle ABE$  — прямоугольный, равнобедренный и  $\angle ABE = 45^\circ$ . Таким образом,  $\angle ABD = 90^\circ$ , т.е.  $AB$  касается данной окружности.



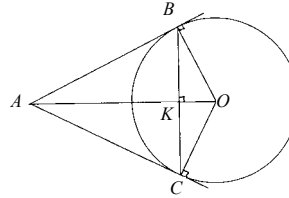
2. Дано:  $\angle BAC = \alpha$ ,  $OK = m$ .

Найти:  $AB$ ,  $BC = ?$

Решение:  $\triangle ABK \sim \triangle KBO$ , откуда

$$\angle KBO = \angle BAO = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow OB = \frac{m}{\sin \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$AB = \frac{OB}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{m}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$



### В-7

1. Дано:  $d_1, d_2$  — диаметры.

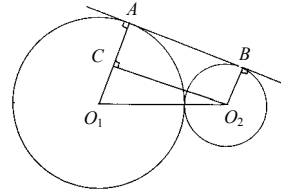
Доказать:  $AB^2 = d_1 d_2$ .

Доказательство: Пусть  $d_1 > d_2$ .

Тогда  $O_1C = \frac{1}{2}(d_1 - d_2)$ , т.к.  $(O_2C \perp AC)$ .

$O_1O_2 = \frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{2}d_2$ . Так что по теореме

Пифагора:  $AB^2 = O_2C^2 = \frac{1}{4}(d_1 + d_2)^2 - \frac{1}{4}(d_1 - d_2)^2 = d_1 d_2$ , т.е.  $AB^2 = d_1 d_2$ .



2. Дано:  $R$  — радиус окружности.

Доказать:  $R^2 = CA \cdot BD$ .

Доказательство:

Пусть  $\angle OCK = \alpha$ . Тогда  $\angle ACO = \alpha$ ,

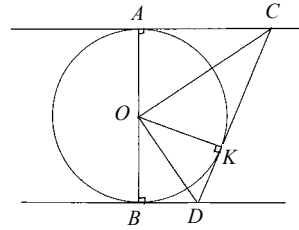
$\angle COK = \alpha \Rightarrow$

$$\angle KOD = \frac{1}{2}(180^\circ - 180^\circ + 2\alpha) = \alpha \Rightarrow$$

$\angle COD = 90^\circ$ , т.е.  $\triangle COD$  — прямо-

угольный.  $OK$  — высота  $\triangle COD \Rightarrow r^2 = OK^2 = CK \cdot DK$ , но  $CK = AC$  и

$DK = BD \Rightarrow r^2 = CA \cdot BD$ .



### В-8

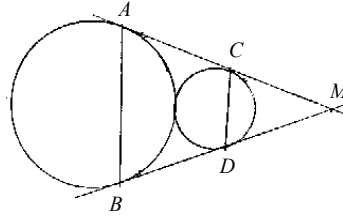
1. Дано:  $AC$  и  $BD$  — общие касательные для двух окружностей.

Доказать:  $ACDB$  – равнобедренная трапеция.

Доказательство:  $MA = MB$  как отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки.

Аналогично,  $MC = MD$ . Тогда  $\triangle AMB$  и  $\triangle DCM$  – равнобедренные с общим углом  $M \Rightarrow$

$\angle MAB = \angle MCD = \angle MBA = \angle MDC \Rightarrow$   
 $CD \parallel AB$ . Т.о., имеем:  $CD \parallel AB$  и  
 $AC = BD$ , т.е.  $ACDB$  – равнобедренная трапеция.



2. Дано:  $AB$  – диаметр окружности с

центром в точке  $O$ ,  $\text{окр.}(O, R)$ ,  $\angle DAE = 60^\circ$ .

Найти:  $CA$  и  $CE$ .

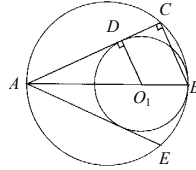
Решение: Очевидно, что  $AC = AE$ , поэтому достаточно найти  $AC$ .

$$\angle DAO_1 = \angle O_1AE = \frac{1}{2} \angle DAE = 30^\circ, O_1D = R \Rightarrow$$

$AD = r\sqrt{3}$ ,  $AO_1 = 2R$ .  $\triangle ACB \sim \triangle ADO_1$  (т.к. они оба  
 прямоугольны и имеют общий острый угол)  $\Rightarrow$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AO_1} \Rightarrow AC = AD \cdot \frac{AB}{AO_1} = r\sqrt{3} \cdot \frac{3r}{2r} = \frac{3\sqrt{3}}{2} r.$$

Ответ:  $\frac{3\sqrt{3}}{2} r$ .



## C-26

### B-1

1. Дано:  $\angle AB = 60^\circ$ ,  $OA = 6$  см.

Решение:  $\triangle AOC$  – прямоугольный, т.к.  $AC$  – рас-

стояние от  $A$  до  $OB$ .  $\frac{AC}{AO} = \sin \angle AOC = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$$AC = AO \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Ответ:  $3\sqrt{3}$  (см).

2. Дано:  $AB, AC$  – хорды,  $\angle BAC = 70^\circ$ ,  $\angle AB = 120^\circ$ .

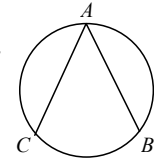
Решение: Т.к.  $\angle BAC = 70^\circ$ , вписан в окружность и опирается на  $\cup CB$ ,

то  $\cup CB = 2 \cdot \angle BAC = 140^\circ$ .

Градусная мера полной окружности равна  $360^\circ$ , следо-  
 вательно:  $\cup AC = 360^\circ - \cup CB - \cup AB \Rightarrow$

$$\cup AC = 360^\circ - 140^\circ - 120^\circ = 100^\circ.$$

Ответ:  $\cup AC = 100^\circ$ .



### В-2

1. Дано:  $OB = OA = 2 \cdot AC$ .

Найти:  $\sphericalangle AB$ .

Решение:  $\triangle ACO$  — прямоугольный.  $\sphericalangle AB = \sphericalangle AOB$ .

$$\sin \sphericalangle AOB = \frac{AC}{AO} = \frac{AC}{2AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sphericalangle AOB = 30^\circ.$$

Ответ:  $30^\circ$ .

2. Дано:  $\frac{\sphericalangle AC}{\sphericalangle CB} = \frac{7}{2}$ .

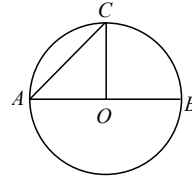
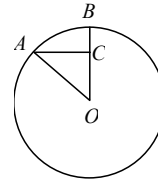
Найти:  $\sphericalangle BAC$ .

Решение:  $\sphericalangle AB + \sphericalangle CB = 180^\circ$ , т.к.  $AB$  — диаметр.

Пусть  $\sphericalangle CB = x$ , тогда  $\sphericalangle AB = \frac{7}{2}x$ ,  $x + \frac{7}{2}x = 180^\circ$ ,

$$x = 40^\circ. \sphericalangle COB = \sphericalangle CB, \sphericalangle CAB = \frac{1}{2} \sphericalangle COB, \sphericalangle CAB = \frac{1}{2} 40^\circ = 20^\circ.$$

Ответ:  $20^\circ$ .



### В-3

1. Дано:  $\sphericalangle AMB = 30^\circ$ ,  $R_{\text{окр}} = 10$  см.

Найти:  $AB$ .

Решение:  $\sphericalangle AOB = 2 \sphericalangle AMB$ , т.к. они опираются на одну дугу  $\sphericalangle AB$ . По теореме косинусов в  $\triangle AOB$

$$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos \sphericalangle AOB};$$

$$AB = \sqrt{100 + 100 - 2 \cdot 100 \cdot \frac{1}{2}} = 10 \text{ (см)}.$$

Ответ: 10 см.

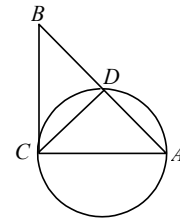
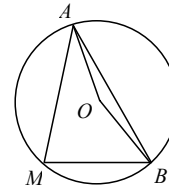
2. Дано:  $BD = 4$  см,  $AD = 9$  см.

Найти:  $CD$ .

Решение:  $\sphericalangle CDA$  — прямой, т.к. опирается на диаметр окружности.  $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DAC$  (т.к.  $BC$  — касательная) и  $\triangle BCD \sim \triangle ACD$  (по 3 углам).  $\frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD}$ ,

$$CD^2 = AD \cdot BD, CD = \sqrt{9 \cdot 4} = 6 \text{ (см)}.$$

Ответ: 6 см.



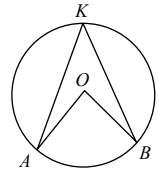
### В-4

1. Дано:  $\sphericalangle AKB = 45^\circ$ ,  $AB = 3\sqrt{2}$ .

Найти:  $R_{\text{окр}}$ .

Решение:  $\sphericalangle AOB = 2 \sphericalangle AKB = 90^\circ$ ;  $AO = BO = R_{\text{окр}}$ .

По т. Пифагора:  $AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{2AO^2} = AO\sqrt{2}$ ;





$$AB = AO\sqrt{2} = 3\sqrt{2}; AO = 3.$$

Ответ : 3.

2. Дано:  $AC = CB$ ,  $CD = 18$ ,  $AD = 16$ .

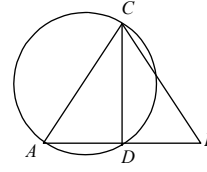
Найти :  $S_{ABC}$ .

Решение : Т.к.  $AC$  — диаметр,  $\angle ADC$  — прямой.

Т.к.  $\triangle ABC$  равнобедренный, то  $AD = BD$  и

$$AB = 2AD = 32. S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 18 = 288.$$

Ответ :  $288 \text{ см}^2$ .



### В-5

1. Доказать, что  $\frac{EP}{PB} = \frac{FK}{KB}$ .

Решение:  $\angle AEB$ ,  $\angle CPB$ ,  $\angle AFB$ ,  $\angle CKB$  — прямые, т.к. опираются на диаметр окружности, следовательно  $AF \parallel KC$  и  $AE \parallel PC$ . По теореме Фалеса

$$\frac{EP}{PB} = \frac{AC}{CB} \text{ и } \frac{FK}{KB} = \frac{AC}{CB}, \text{ т.е. } \frac{EP}{PB} = \frac{FK}{KB}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

2. Дано:  $\cup AM = \cup MC$ ,  $MM_1 = 5$ .

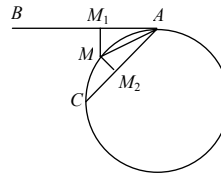
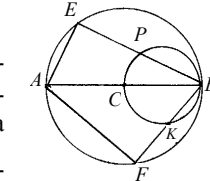
Найти:  $MM_2$ .

Решение:

$$\angle M_2AM = \frac{1}{2} \cup AC; \angle CAM = \cup MC = \frac{1}{2} \cup AC \Rightarrow$$

$$\triangle M_2AM = \triangle MAM_1 \text{ и } MM_2 = MM_1 = 5 \text{ (см).}$$

Ответ: 5 см.



### В-6

1. Доказать:  $\frac{KP}{PB} = \frac{K_1P_1}{P_1B}$ .

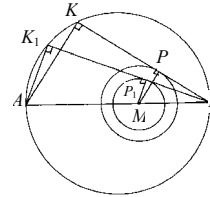
Доказательство:

$\triangle AK_1B \sim \triangle MP_1B$  (т.к. угол  $B$  — общий), откуда

$$\frac{K_1P_1}{P_1B} = \frac{AM}{MB}. \text{ Аналогично из подобия } \triangle AKB \text{ и}$$

$$\triangle MPB \quad \frac{KP}{PB} = \frac{AM}{MB}, \text{ откуда получаем } \frac{KP}{PB} = \frac{K_1P_1}{P_1B}.$$

2. Дано:  $\angle ABC = 40^\circ$ .



**Найти:**  $\angle BFC = ?$ ,  $\angle FCB = ?$  **В-4**

1. Дано:  $CF = 10$ ,  $AB = 16$ .

Найти:  $FD$ .

Решение: Все серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке, поэтому  $FD$  — тоже серединный перпендикуляр. Точка  $F$  — равноудалена от вершин:  $AF = BF = CF = 10$ ;  $AD = DB = 8$ . По теореме Пифагора:

$$FD = \sqrt{BF^2 - BD^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$$

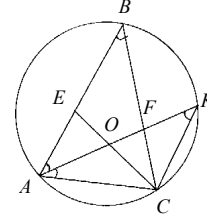
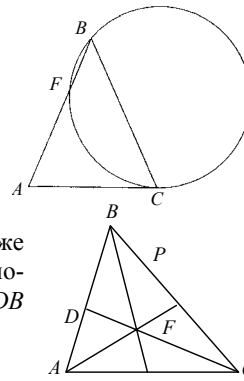
Ответ: 6.

2. Дано:  $\triangle ABC$  — вписанный,  $\angle A = 2\angle B$ ,  $AF$  и  $CE$  — биссектрисы, пересекаются в точке  $O$ .  $AO$  пересекает окружность в точке  $K$ .

Доказать:  $KC \parallel AB$ .

Доказательство: Пусть  $\angle ABC = \alpha$ . Тогда  $\angle BAC = 2\alpha$  (по условию), а  $\angle BAF = \angle FAC = \alpha$  (т.к.  $AF$  — биссектриса  $\angle BAC$ ).

$\angle AKC = \angle ABC = \alpha$  (т.к. они оба вписанные и опираются на  $\text{дугу } AC$ )  $\Rightarrow KC \parallel AB$ .



### В-5

1. Дано:  $AC = BC = a$ ,  $\angle ACB = 120^\circ$ .

Найти:  $MC_1$ .

Решение:

Построим высоту  $CC_1$ . Т.к.  $\triangle ABC$  — равнобедренный, то высота  $CC_1$  — это серединный перпендикуляр и биссектриса.

$$\angle ACC_1 = \frac{1}{2} \angle ACB = 60^\circ; \frac{CC_1}{AC} = \cos \angle ACC_1;$$

$$CC_1 = AC \cdot \cos \angle ACC_1 = a \cdot \frac{1}{2}; \triangle CB_1M \sim \triangle ACC_1 \text{ (по 2 углам) и}$$

$$\frac{CM}{CB_1} = \frac{AC}{CC_1}; \quad CM = \frac{CB_1 \cdot AC}{CC_1} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{\frac{a}{2}} = a;$$

$$C_1M = CM - CC_1 = a - (a/2) = (a/2).$$

Ответ:  $(a/2)$ .

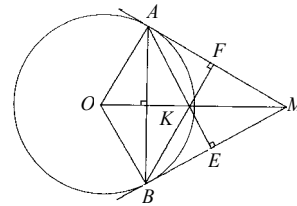
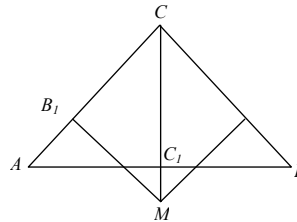
2. Дано:  $MO = 2OB$ .

Найти:  $\angle KAB$ .

Решение: Т.к.  $MO = 2OB$  и  $OB \perp BM$ , то

$\angle BMO = 30^\circ$ . Пусть продолжение  $AK$

пересекает  $BM$  в точке  $E$ . Тогда  $AE \perp BM$ , поскольку  $K$  — точка пере-



сечения высот  $\triangle AMB$ . Таким образом, стороны углов  $\angle KAB$  и  $\angle BMO$  взаимно перпендикулярны, а значит  $\angle KAB = \angle BMO = 30^\circ$ .

Ответ:  $30^\circ$ .

### В-6

1. Дано:  $\angle ABC$  — тупой,  $MB = 5$ ,  $AC = 10$ .

Найти:  $S_{AMCB}$ .

Решение: Очевидно, что  $AE$  и  $CD$  — высоты  $\triangle AMC$ , откуда  $MH$  ( $H$  — точка пересечения прямой  $MB$  с  $AC$ ) — также высота в этом треугольнике, т.е.  $MH \perp AC$ .

$$S_{AMCB} = S_{AMC} - S_{ABC} = \frac{1}{2} AC(MH - BH) = \frac{1}{2} AC \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25.$$

Ответ: 25.

2. Дано:  $\angle ABC = 2\alpha$ .

Найти:  $\angle AOC$ .

Решение:

точка, равноудаленная от сторон треугольника — это точка пересечения биссектрис.

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \angle AOC &= 180^\circ - \angle OAC - \angle OCA = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ + \alpha. \end{aligned}$$

Ответ:  $90^\circ + \alpha$ .

### В-7

1. Строим вспомогательный прямоугольный равнобедренный треугольник с некоторым катетом  $a$  и построением находим отрезок, соединяющий точки пересечения биссектрис и медиан. Пусть этот отрезок имеет длину, равную  $b$ . Все равнобедренные прямоугольные треугольники подобны. Обозначим сторону искомого треугольника через  $x = \frac{am}{b}$ . Тогда  $\frac{a}{x} = \frac{b}{m}$ . Построением находим отрезок  $x$ .

Дальнейшее построение очевидно.

2. Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AB = BC = 5$ ,  $AC = 6$ .

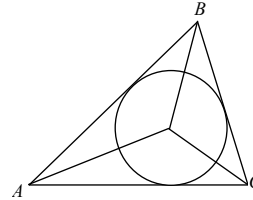
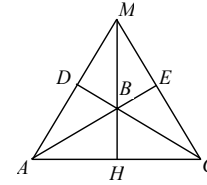
Найти:  $PQ = ?$

Решение:

Пусть  $P$  — точка пересечения высот, а  $Q$  — медиан.

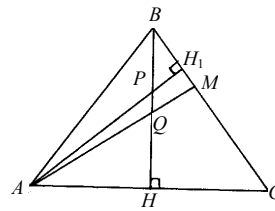
Очевидно, что  $BH = 4$ .  $BQ = \frac{2}{3}BH = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$ .  $\triangle PBH_1 \sim \triangle HBC$  (по двум

углам), а  $\triangle APH \sim \triangle PBH_1$  (также по двум углам).



Таким образом,  $\triangle APH \sim \triangle HBC$  и  $\frac{AH}{HB} = \frac{HP}{HC}$ , откуда  $HP = \frac{9}{4}$ . Тогда  $PQ = |HP - HQ| = \left| HP - \frac{1}{3}BH \right| = \frac{11}{12}$ .

Ответ: (11/12).



### В-8

1. Задача решается аналогично задаче 1 варианта 7.

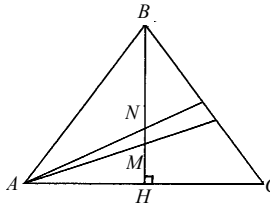
2. Дано:  $\triangle ABC$  — равнобедренный,  $AB = BC = 5$ ,  $AC = 6$ .  
Найти:  $MN$  — ?

Решение: Пусть  $M$  — точка пересечения медиан,  $N$  — точка пересечения биссектрис. Пусть  $BH \perp AC$ . Тогда,

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 4. \quad MH = \frac{1}{3}BH = \frac{4}{3},$$

$$NH = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{6 \cdot 4}{16} = \frac{3}{2} \Rightarrow MN = NH - MH = \frac{1}{6}.$$

Ответ:  $MN = \frac{1}{6}$ .



### С-30

#### В-1

1. Дано:  $\triangle ABC$  — равносторонний,  $AB = 2\sqrt{3}$  см.

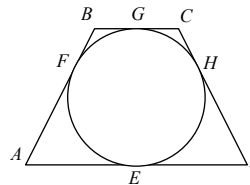
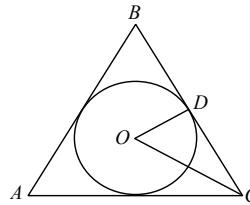
Решение: Построим радиус  $OD$ . Так как окружность вписанная, то  $BC$ -касательная и  $OD \perp BC$ .  $\triangle ODC$  — прямоугольный. Т.к.  $\triangle ABC$  — равносторонний, то  $\angle ABC = 60^\circ$ , а  $\angle OCD = 30^\circ$ , т.к. центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис. Т.к.  $\triangle ABC$  — равносторонний, то  $BD = DC = \sqrt{3}$  (см).  $\operatorname{tg} \angle DCO = \frac{OD}{DC} = \frac{OD}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $OD = 1$  (см).

Ответ:  $r = 1$  см.

2. Дано:  $ABCD$  — равнобедренная трапеция,  $P_{ABCD} = 10$  см.

Найти:  $AB$ .

Решение: Обозначим точки прикосновения окружности через  $E, F, G, H$ . Имеем  $AF = AE$ ,  $BF = BG$ ,  $CG = CH$ ,  $DH = DE$ . Т.к.



трапеция равнобедренная, то  $AE = ED = a$ ,  $BG = GC = b$ .

Тогда  $P_{ABCD} = 4(a + b) = 10$  (см);  $a + b = \frac{5}{2} = AB = CD$ .

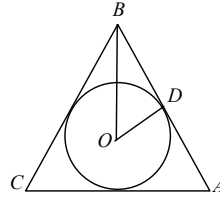
Ответ:  $AB = CD = \frac{5}{2}$  см.

## В-2

1. Дано:  $OD = \sqrt{3}$  см  $\triangle ABC$  — равносторонний.

Найти:  $AB$ .

Решение:  $\triangle OBD$  — прямоугольный. Т.к.  $\triangle ABC$  — равносторонний, то  $\angle CBA = 60^\circ$  и  $\angle OBD = 30^\circ$ .  $\operatorname{tg} \angle OBD = \frac{OD}{BD}$ ;  $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,



$BD = 3$  (см).

$AB = 2BD = 6$  (см).

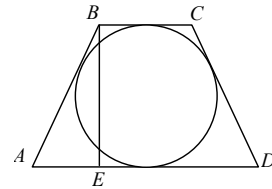
Ответ: 6 см.

2. Дано:  $ABCD$  — равнобедренная трапеция,  $\angle BAD = 30^\circ$ ,  $BE = 4$  см.

Найти:  $BC + AD$ .

Решение:  $\triangle ABE$  — прямоугольный.

$\sin \angle A = \frac{BE}{AB}$ ;  $\sin 30^\circ = \frac{4}{AB} = \frac{1}{2}$ ,  $AB = 8$  (см).



Т.к. окружность вписана в трапецию, то  $AB + CD = BC + AD = 16$  (см).

Ответ: 16 см.

## В-3

1. Дано:  $AB = BC = 10$  см,  $AC = 12$  см.

Найти:  $R_{\text{окр.}}$ .

Решение: Центр вписанной окружности — пересечение биссектрис, но т.к.  $\triangle ABC$  — равнобедренный, то  $BD$  — высота и медиана и

$AD = \frac{1}{2} AC = 6$  (см);  $\triangle OEB \sim \triangle ABD$  (по 3 углам) и  $\frac{AD}{BD} = \frac{OE}{EB}$ ;

$$OE = \frac{AD \cdot EB}{BD} = \frac{AD \cdot EB}{\sqrt{AB^2 - AD^2}}.$$

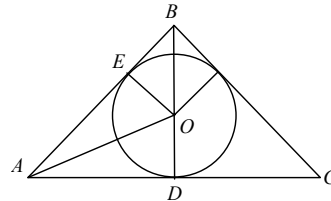
$AE = AD = 6$  см;  $EB = AB - AE = 10 - 6 = 4$  см.

$$OE = \frac{6 \cdot 4}{\sqrt{100 - 36}} = 3 \text{ (см)}.$$

Ответ: 3 см.

2. Дано:  $P_{ABCD} = 80$  см.,  $AC = 32$  см.

Найти:  $R_{\text{впис. окр.}}$ .



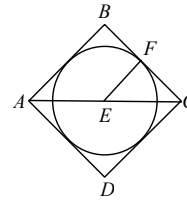
Решение:  $BC = \frac{1}{4} \cdot P_{ABCD} = 20$  (см);

$EC = \frac{1}{2} AC = 16$  (см);  $BE \perp AC$ .  $\triangle BEF \sim \triangle BEC$  (по 3

углам);  $BE = \sqrt{BC^2 - EC^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$  (см).

$\frac{EF}{BE} = \frac{EC}{BC}$ ;  $EF = \frac{BE \cdot EC}{BC} = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9,6$  (см).

Ответ: 9,6 см.



#### В-4

1. Дано:  $AD = 6$  см,  $DB = 4$  см.

Найти:  $R_{\text{окр.}}$ .

Решение:  $AE = AD = 6$  см,  $BF = BD = 4$  см (отрезки касательных, проведенных из одной точки). Обозначим  $CE = CF = x$ . Тогда по теореме Пифагора, имеем:  $(6+x)^2 + (4+x)^2 = (6+4)^2$ ;  $36 + 12x + x^2 + 16 + 8x + x^2 = 100$ ;  $x^2 + 10x - 24 = 0$ ,  $x = 2$  (см) (второй корень — отрицательный, не подходит по смыслу задачи)

Ответ: 2 см.

2. Дано:  $AB = CD$ ,  $BC = 2$  см,  $AD = 8$  см.

Найти:  $R_{\text{окр.}}$ .

Решение:  $CG = CE = (1/2)BC = 1$  (см),

$DE = DF = (1/2)AD = 4$  (см) (отрезки касательных проведенных из одной точки).

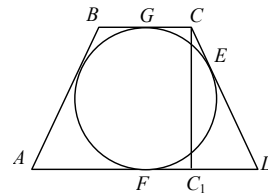
Проведем высоту  $CC_1$ ;  $FC_1 = GC = 1$ .

$DC_1 = 4 - 1 = 3$  (см). По теореме Пифагора:

$CC_1 = \sqrt{CD^2 - DC_1^2} = \sqrt{(1+4)^2 - 3^2} = 4$  (см).

$CC_1 = 2 \cdot R_{\text{окр.}} = 4$  (см),  $R_{\text{окр.}} = 2$  (см).

Ответ: 2 см.



#### В-5

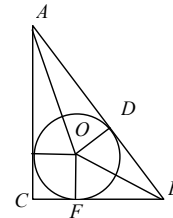
1. Дано:  $\angle B = 60^\circ$ ,  $R_{\text{окр.}} = 2\sqrt{3}$  см.

Найти:  $S_{ABC}$ .

Решение:  $CF = R_{\text{окр.}} = 2\sqrt{3}$  (см);  $\angle OBD = \frac{1}{2} \angle B = 30^\circ$ .

$\frac{OF}{BF} = \tan \angle OBF$ ;  $BF = \frac{OF}{\tan \angle OBF} = \frac{2\sqrt{3}}{\tan 30^\circ} = 6$  (см):

$CB = (2\sqrt{3} + 6)$  (см).



$$\frac{AC}{CB} = \operatorname{tg} \angle B; \quad AC = CB \cdot \operatorname{tg} \angle B = (2\sqrt{3} + 6)\sqrt{3} = (6 + 6\sqrt{3}) \text{ см.}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB = \frac{1}{2} 6(1 + \sqrt{3})(2\sqrt{3} + 6) = 6(1 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{3}) = \\ = 6\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})^2 (\text{см}^2).$$

Ответ:  $6\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})^2 \text{ см}^2$ .

2. Дано:  $ABCD$  — прямоугольная трапеция,  $OC = 6$  см,  $OD = 8$  см.

Найти:  $S_{ABCD}$ .

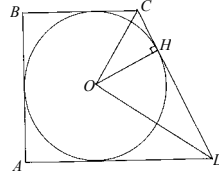
Решение: Поскольку  $CO$  и  $DO$  — биссектрисы углов  $\angle BCD$  и  $\angle CDA$  соответственно, а также из того, что  $\angle BCD + \angle CDA = 180^\circ$ , имеем:  $\angle COD = 90^\circ$ , т.е.  $\triangle COD$  — прямоугольный.

Тогда  $CD = 10$  (см) и  $OH = \frac{24}{5}$  (см) — радиус окружности. Следова-

тельно,  $AB = 2OH = \frac{48}{5}$  (см).  $AD + BC = AB + CD = \frac{98}{5}$  (см) (т.к. трапеция  $ABCD$  — описанная).

$$\text{Тогда } S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = \frac{49}{5} \cdot \frac{48}{5} = 94,08 (\text{см}^2).$$

Ответ:  $94,08 \text{ см}^2$ .



## В-6

1. Дано:  $BO = 5$  см,  $AB = BC = 10$  см.

Найти:  $r$ .

Решение: Пусть искомый радиус равен  $r$ . Тогда  $BK = \sqrt{25 - r^2}$ , откуда  $AN = AK = 10 - \sqrt{25 - r^2}$ .

$$\text{Тогда } r = \frac{S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{(10 - \sqrt{25 - r^2})(5 + r)}{20 - \sqrt{25 - r^2}}, \quad \text{откуда:}$$

$$20r = 10(5 + r) - 5\sqrt{25 - r^2}. \quad r^2 - 8r + 15 = 0 \Rightarrow r = \begin{cases} 3 (\text{см}) \\ 5 (\text{см}) \end{cases},$$

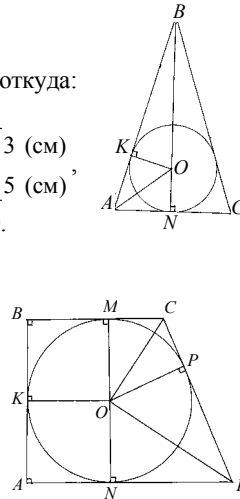
5 (см) — не подходит, т.к. должно быть  $r + 5 < 10$ .

Ответ: 3.

2. Дано:  $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ,  $BC = 3$ ,  $r = 2$ .

Найти:  $S_{ABCD}$ .

Решение: Очевидно, что  $BM = BK = KA = 2$ ,  $MC = CP = 1$ ,  $MN = 4$ ,  $ND = PD$ .







$KL=BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$  (см)  $\Rightarrow KO=2$  (см). Пусть радиус  
 меньшей окружности равен  $r$   $\Rightarrow$   
 $OP=2-r$ ,  $OO_1=(2+r)$  (см).

$\triangle KOD \sim \triangle MO_1D$  (т.к. оба они прямоугольны и имеют общий острый  
 угол)  $\Rightarrow \frac{O_1P}{OP} = \frac{KD}{KO} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow O_1P = 2OP = 4-2r$ . По теореме Пифагора  
 для  $\triangle POO_1$ :  $(2-r)^2 + 4(2-r)^2 = (2+r)^2$ , откуда  $r^2 - 4r + 4 = 0$  и

$$r = \begin{cases} (3+\sqrt{5})(\text{см}) \\ (3-\sqrt{5})(\text{см}) \end{cases}, (3+\sqrt{5})(\text{см}) \text{ — не подходит по смыслу задачи.}$$

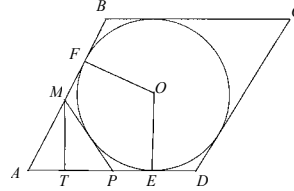
Ответ:  $3-\sqrt{5}$ .

2. Дано:  $ABCD$  — ромб,  $AB=4$  см,  $\angle BAD=60^\circ$ ,  $MP=2$  см.

Найти:  $MB$ ,  $PD$ .

Решение:

Очевидно, что радиус вписанной  
 окружности равен  $\sqrt{3}$  см и  $AE=AF=3$  (см).  
 Из свойств касательных  $AP+PK=AE$  и  
 $AM+MK=AF$ . Складывая эти равенства,  
 получим  $P_{AMP}=6$  (см), а так как  
 $MP=2$  (см), то  $AP=AM=4$  (см). Пусть



$MT$  высота  $\triangle AMP$ . Обозначим  $AM$  через  $x$ . Тогда  $MT = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ ,  $AT = \frac{x}{2}$ ,

$$PT = 4 - \frac{3x}{2}. \text{ Из } \triangle MTP \text{ следует, что } \frac{3x^2}{4} + 16 - 12x + \frac{9x^2}{4} = 4.$$

Отсюда  $x=2$  (см), т.е.  $AM=AP=2$  (см). Тогда и  $MB=PD=2$  (см).

Ответ: 2 см.

### С-31

#### В-1

1. Дано:  $\triangle ABC$  — равносторонний,  $OA=3\sqrt{3}$ .

Найти:  $P_{ABC}=?$

Решение:

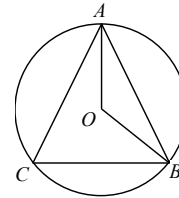
Т.к.  $\triangle ABC$  — равносторонний, то  $OA$  и  $OB$  — бис-  
 сектрисы, и  $\angle OAB = \angle OBA = 30^\circ$ ,

$\angle AOB = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ . По теореме коси-

нусов:  $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB}$ ,

$$AB = \sqrt{27 + 27 + 2 \cdot 27 \cdot \frac{1}{2}} = 9. P_{ABC} = 3 \cdot AB = 3 \cdot 9 = 27.$$

Ответ:  $P_{ABC} = 27$ .



2. Дано:  $\triangle ABC$  — прямоугольный,  $AC = 16$ ,  $R_{\text{окр}} = 10$ .

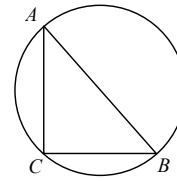
Найти:  $S_{\triangle ABC}$ .

Решение: Т.к.  $\triangle ABC$  — прямоугольный и вписан в окружность, то  $AB$ -диаметр,  $AB = 2 \cdot 10 = 20$ .

По теореме Пифагора  $BC = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ .

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 96.$$

Ответ:  $S_{\triangle ABC} = 96$ .



## В-2

1. Дано:  $AB = 24$  см.,  $OD \perp AB$ ,  $OD = 5$ .

Найти:  $OB$ .

Решение:

Т.к.  $OD \perp AB$ , то  $D$  — середина  $AB$  и  $DB = 12$  (см).

По теореме Пифагора:

$$OB = \sqrt{OD^2 + BD^2} = \sqrt{25 + 144} = 13 \text{ (см)}.$$

Ответ: 13 см.

2. Дано:  $R_{\text{окр}} = 7,5$  см;  $AC = 9$  см.

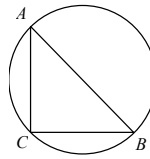
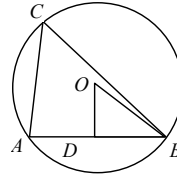
Найти:  $P_{\triangle ABC}$ .

Решение: Т.к.  $\angle ABC$  — прямой, то  $AB$  — диаметр,  $AB = 2 \cdot 7,5 = 15$  (см). По теореме Пифагора:

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{225 - 81} = 12 \text{ (см)}.$$

$$P_{\triangle ABC} = 15 + 9 + 12 = 36 \text{ (см)}.$$

Ответ: 36 см.



## В-3

1. Дано:  $AB = BC = 10$  см,  $AC = 12$  см.

Найти:  $R_{\text{окр}}$ .

Решение: Центр описанной окружности  $O$  — пересечение серединных перпендикуляров. Т.к.  $\triangle ABC$  — равнобедренный, то  $BD$  — медиана, высота и биссектриса.  $DC = \frac{1}{2} AC = 6$  (см). По теореме Пифа-

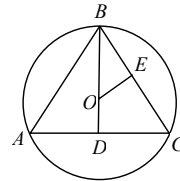
гора:  $BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$  (см).  $\triangle OBE \sim \triangle BDC$  (по 3 уг-

лам); Т.к.  $OE \perp BC$ , то  $E$  — середина  $BC$  и  $BE = \frac{1}{2} BC = 5$  (см).

$$\frac{OB}{BE} = \frac{BC}{BD}; OB = \frac{BE \cdot BC}{BD} = \frac{5 \cdot 10}{8} = 6,25 \text{ (см)}.$$

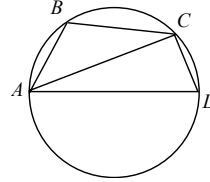
Ответ: 6,25 см.

2. Дано:  $AD$  — диаметр,  $\angle ABC = 130^\circ$ ,  $\angle BCD = 140^\circ$ .



Найти:  $\angle BAD$ ,  $\angle CDA$ ,  $\angle ACB$ .

Решение: Т.к.  $ABCD$  — вписанный, то  $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$ ,  $\angle CDA = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ . Аналогично  $\angle BAD = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ . Т.к.  $AD$  — диаметр, то  $\angle ACD = 90^\circ$ .  $\angle ACB = \angle BCD - \angle ACD = 140^\circ - 90^\circ = 50^\circ$ .  
 Ответ:  $40^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $50^\circ$



#### В-4

1. Дано:  $AC = 24$  см,  $OC = 13$  см.

Найти:  $AB = BC$ .

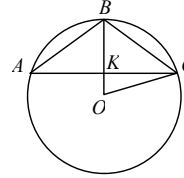
Решение: Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров, следовательно  $AK = KC = 12$  (см) и  $OB \perp AC$ . В  $\triangle OCK$ :

$$OK = \sqrt{OC^2 - KC^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ (см)}.$$

$$BK = OB - OK = 13 - 5 = 8 \text{ см}.$$

$$BC = \sqrt{BK^2 + KC^2} = \sqrt{8^2 + 12^2} = 4\sqrt{13} \text{ (см)}.$$

Ответ:  $4\sqrt{13}$  см.



2. Дано:  $AB = BC = AC = \sqrt{3}$  см.

Доказать, что около  $MDCE$  можно описать окружность.

Решение: Т.к.  $\triangle ABC$  — равносторонний, то  $\angle C = 60^\circ$ , и  $BE = AD$  — биссектриса, высота и медиана, следовательно  $\angle MEC$  и  $\angle MDC$  — прямые  $\Rightarrow \angle EMC = \angle DMC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ,  $\angle MEC + \angle MDC = 180^\circ$ ;

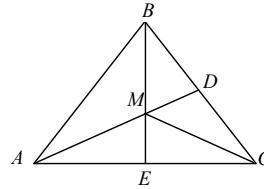
$\angle EMD + \angle ECD = 180^\circ$ ; т.е. около  $MDCE$  можно описать окружность.

Т.к.  $\angle MDC$  — прямой, то  $MC$  — диаметр окружности.

$$AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{3 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \text{ (см)}; MD = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \text{ (см)};$$

$$MC = \sqrt{MD^2 + DC^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \text{ (см)}. R_{\text{окр}} = \frac{1}{2} MC = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ (см)}.$$

Ответ:  $\frac{1}{2}$  см.



#### В-5

1. Дано:  $AC = CB$ ,  $\angle ACB = 120^\circ$ .

Доказать:  $OD = 2OC$ .



Из  $\triangle ACD$   $AC = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$  (см). Тогда, поскольку в  $\triangle ABC$   $AB = BC$ , то

$AK = KC = 2\sqrt{3}$  (см), откуда  $BC = 4$  (см). Высота  $CH$  вычисляется из прямоугольного  $\triangle ACD$ :

$$CH = \frac{AC \cdot CD}{AD} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{8} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Таким образом,  $S_{ABCD} = \frac{4+8}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$  (см<sup>2</sup>).

Ответ:  $12\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>.

### В-7

1. Очевидно, что  $\triangle AC_1B = \triangle AHB$ . Отсюда  $\angle AC_1B = \angle AHB_1$ , но  $\angle DHE = \angle AHB$ . В четырехугольнике  $EHDC$  углы  $HEC$  и  $HDC$  прямые, поэтому  $\angle DHE + \angle BCA = 180^\circ$ . Следовательно,  $\angle AC_1B + \angle BCA = 180^\circ$ . Это значит, что точка  $C_1$  лежит на окружности, описанной около  $\triangle ABC$ . Аналогично для точек  $A_1$  и  $B_1$ .

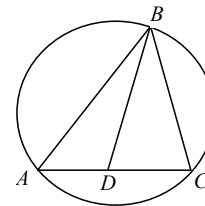
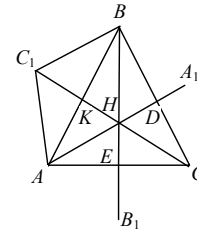
2. Дано:  $R$ ,  $AC = a$ ,  $BC = b$ ,  $\angle ABC = \angle BDC$ .

Найти:  $r = ?$

Решение: Пусть  $r$  — радиус окружности, описанной около  $\triangle BDC$ .  $\triangle BDC \sim \triangle BCA$  (по двум углам) с коэффициентом подобия  $\frac{b}{a}$ , откуда

$$r = \frac{b}{a} R.$$

Ответ:  $\frac{bR}{a}$ .

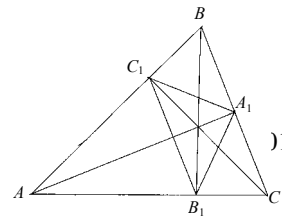


### В-8

1. Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , — высоты.

Доказать:  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , — биссектрисы  $\triangle A_1B_1C_1$ .

Доказательство: Пусть  $H$  — точка пересечения высот  $\triangle ABC$ . Около четырехугольника  $AC_1HB_1$  можно описать окружность;  $\angle HC_1B_1 = \angle HAB_1$ , как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Обозначим их через  $\alpha$ .  $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$ ,  $\angle BC_1A_1 = \angle BCA = 90^\circ = \alpha$ .



Тогда  $\angle A_1C_1H = 90^\circ - 90^\circ + \alpha$ . Следовательно,  $\angle A_1C_1H = \angle HC_1B_1$ ; т.е.  $CC_1$  — биссектриса  $\angle A_1C_1B_1$ . Аналогично можно доказать, что  $AA_1$  — биссектриса  $\angle C_1A_1B_1$  и  $BB_1$  — биссектриса  $\angle C_1B_1A_1$ .

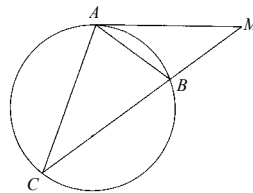
2. Дано:  $AC = b$ ,  $AB = c$ .  $R$  — радиус описаной окружности  $\triangle AMC$ .  
Найти: радиус описаной окружности  $\triangle AMB$ .

Решение:  $\angle MAB = \angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB \Rightarrow \triangle AMB \sim \triangle AMC$  (т.к.  $\angle M$  у них

общий). Тогда, обозначив за  $R_1$  радиус описанной около  $\triangle AMB$  окружности будем

иметь:  $\frac{c}{b} = \frac{R_1}{R}$ , откуда  $R_1 = \frac{cR}{b}$ .

Ответ:  $\frac{cR}{b}$ .



### С-32

#### В-1

а)  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$  и  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ ,  $\vec{f}$  и  $\vec{e}$ . б)  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$ ,  $\vec{f}$  и  $\vec{e}$ .

в)  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ .

г)  $\vec{f}$  и  $\vec{e}$ .

Нельзя.

#### В-2

а)  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$ ,  $\vec{c}$  и  $\vec{e}$ ,  $\vec{d}$  и  $\vec{e}$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

б)  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$ .

в)  $\vec{c}$  и  $\vec{e}$ ,  $\vec{d}$  и  $\vec{e}$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

г)  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Да, можно.

#### В-3

$$|\vec{AB}| > |\vec{BC}|; |\vec{AC}| = |\vec{BC}|$$

а)  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{d}$ ,  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$ .

б)  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$ .

в)  $\vec{a}$  и  $\vec{d}$ ,  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$ .

с)  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

#### В-4

1.  $|\vec{AD}| > |\vec{AC}|; |\vec{AC}| = |\vec{BD}|$

2. а)  $\vec{n}$  и  $\vec{m}$ ,  $\vec{m}$  и  $\vec{c}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{c}$ .

б)  $\vec{n}$  и  $\vec{m}$ .

в)  $\vec{m}$  и  $\vec{c}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{c}$ .

с)  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$ .

#### В-5

1. Так как  $\vec{AB} = \vec{DC}$ , то  $ABCD$  — параллелограмм.

а)  $\vec{BE}$  и  $\vec{EC}$ ,  $\vec{AF}$  и  $\vec{DF}$ ,  $\vec{BE}$  и  $\vec{AF}$ ,  $\vec{BE}$  и  $\vec{DF}$ ,  $\vec{EC}$  и  $\vec{AF}$ ,  $\vec{EC}$  и  $\vec{DF}$ .

б)  $\vec{BE}$  и  $\vec{EC}$ ,  $\vec{BE}$  и  $\vec{AF}$ ,  $\vec{EC}$  и  $\vec{AF}$ .

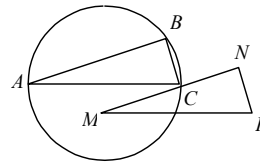
в)  $\vec{BE}$  и  $\vec{DF}$ ,  $\vec{AF}$  и  $\vec{DF}$ ,  $\vec{EC}$  и  $\vec{DF}$ .

г)  $\vec{EC}$  и  $\vec{AF}$ .

д)  $\vec{EC}$  и  $\vec{AF}$ ,  $\vec{BE}$  и  $\vec{DF}$ .

2. Решение:  $\angle ABC = 90^\circ$ , т.к. опирается на диаметр.  $\triangle ABC = \triangle MNF$  (по 2 сторонам и углу между ними), следовательно  $\angle MNF = \angle ABC = 90^\circ$ .

Ответ:  $90^\circ$ .



#### В-6

1. Дано:  $\vec{AB} = \vec{DC}$ .

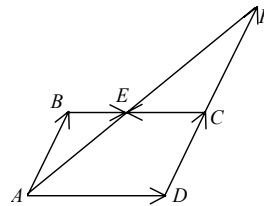
Решение: Поскольку  $\vec{AB} = \vec{DC}$ , то  $AB = CD$  и  $AB \parallel CD$ , т.е.  $ABCD$  — параллелограмм.

а) Коллинеарны:  $\vec{AB}$  и  $\vec{CF}$ ,  $\vec{BE}$  и  $\vec{CF}$ ,  $\vec{BE}$  и  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AD}$  и  $\vec{CF}$ .

б) Сонаправлены:  $\vec{AB}$  и  $\vec{CF}$ ,  $\vec{BE}$  и  $\vec{AD}$ .

в) Противоположно направлены:  $\vec{BE}$  и  $\vec{CF}$ ,  $\vec{AD}$  и  $\vec{CF}$ .

г)  $\vec{AB} = \vec{CF}$ .



д)  $|\vec{AB}| = |\vec{CF}|, |\vec{BE}| = |\vec{CE}|$ .

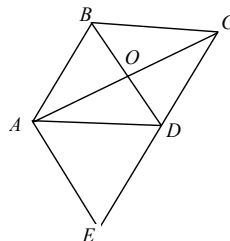
2. Дано:  $|\vec{AC}| = 12 \text{ см}, |\vec{BD}| = 16 \text{ см}, \vec{AE} = \vec{BD}$ .

Найти:  $|\vec{EC}|$ .

Решение: Т.к.  $\vec{AE} = \vec{BD}$ , то  $AE \parallel BD$ , откуда  $\triangle AEC \sim \triangle DOC$  (О — точка пересечения диагоналей ромба), откуда  $\frac{EC}{DC} = \frac{AC}{OC} = 2$ , т.е.

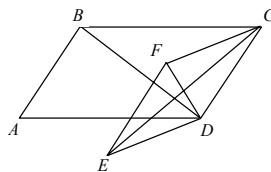
$$EC = 2DC = 2\sqrt{8^2 + 6^2} = 20 \text{ (см)} = |\vec{EC}|.$$

Ответ: 20 см.



### В-7

1.



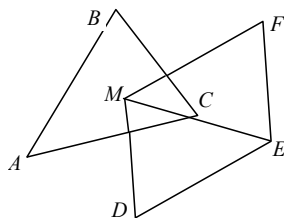
Решение:  $\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{EF}$ ,  $\vec{DE} = \vec{CF}$ ,  $\vec{AD} = \vec{BC}$ ,

$\vec{DF}, \vec{CE}, \vec{BD}, \vec{AC}, \vec{AE} = \vec{BF}, \vec{AF}, \vec{BE}$  обратные к ним и  $\vec{0}$ . Итого: 21.

Ответ: 21.

2. Дано:  $\vec{MF} = \vec{AB}$ ,  $\vec{ME} = \vec{AC}$ ,  $\vec{MD} = \vec{BC}$ .

Доказать:  $MFED$  — параллелограмм.



Доказательство:  $\vec{FE} = \vec{ME} - \vec{MF} = \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC} = \vec{MD}$ , т.е.  $MD = FE$  и  $MD \parallel FE$ , откуда  $MFED$  — параллелограмм.

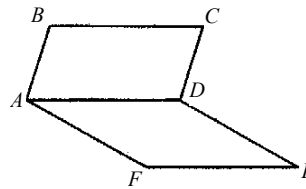
### В-8

1. Дано:  $\triangle ABC$ ,  $ADEF$  — параллелограммы.

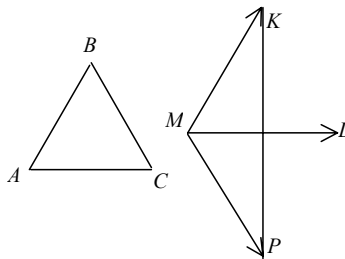


Сколько существует различных векторов с концами в вершинах данных параллелограммов?

Решение:  $\vec{AB} = \vec{CD}$ ,  $\vec{BC} = \vec{AD} = \vec{FE}$ ,  
 $\vec{AF} = \vec{DE}$ ,  $\vec{BF} = \vec{CE}$ ,  $\vec{BE}$ ,  
 $\vec{FC}$ ,  $\vec{BD}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AE}$ ,  $\vec{FD}$ , обратные к ним,  
 и  $\vec{O}$ . Итого: 21.



2. Дано:  $\triangle ABC$  — правильный,  
 $\vec{AB} = \vec{MK}$ ,  $\vec{ML} = \vec{AC}$ ,  $\vec{MP} = \vec{BC}$ .  
 Доказать:  $ML \perp KP$ .

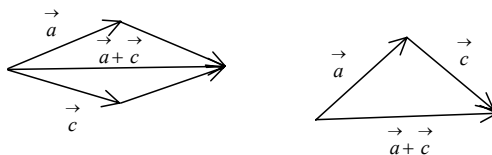


Доказательство: Очевидно, что  $\triangle MKL = \triangle MLP$ , и оба они правильные. Тогда,  $MKLP$  — ромб, а  $ML$  и  $KP$  — его диагонали  $\Rightarrow ML \perp KP$ .

### С-33

#### В-1

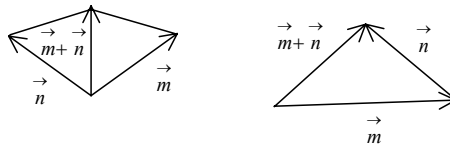
1.



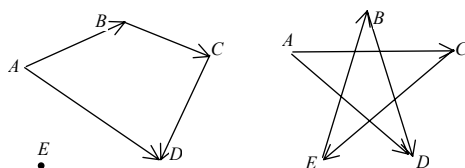
2.  $\vec{MH} + \vec{PO} + \vec{SM} + \vec{HP} + \vec{OS} = (\vec{MH} + \vec{HP}) + (\vec{HO} + \vec{OS}) + \vec{SM} =$   
 $= \vec{MP} + \vec{PS} + \vec{SM} + \vec{MS} + \vec{SM} = \vec{O}$  (нулевой вектор).

#### В-2

1. Дано:



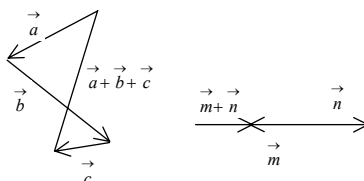
2. Дано:



От перестановки слагаемых сумма векторов не меняется. Поэтому, рассмотрим сумму  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$ ;  $\vec{AC} + \vec{EB} + \vec{CE} + \vec{BD} =$   
 $= \vec{AC} + \vec{CE} + \vec{EB} + \vec{BD} = \vec{AD}$ .

**В-3**

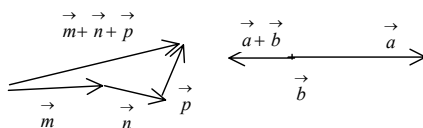
1.



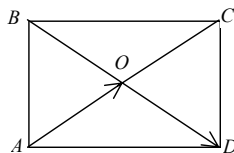
2.  $\vec{AM} + \vec{DC} + \vec{MD} + \vec{CB} = \vec{AM} + \vec{MD} + \vec{DC} + \vec{CB} = \vec{AB}$ .  
 $\vec{AC} + \vec{DA} = \vec{AB}$ ;  $\vec{AB} = \vec{AB}$

**В-4**

1.



2.



Доказательство:  $|\vec{AO} + \vec{DC} + \vec{OD}| = |\vec{AD} + \vec{DC}|$ .

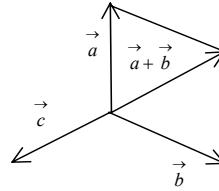
$\vec{AO} + \vec{DC} + \vec{OD} = \vec{AO} + \vec{OD} + \vec{DC} = \vec{AC}$ ,  $\vec{DA} + \vec{DC} = \vec{DB}$ .  $\vec{AC}$  и  $\vec{DB}$  — диагонали прямоугольника, следовательно их длины равны.

### В-5

1. Дано:  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ ,  $\angle ab = \angle ac = 120^\circ$ .

Доказать, что  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ .

Решение: Построим сумму  $\vec{a} + \vec{b}$  по правилу параллелограмма. Тогда  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| = |\vec{b}|$ .



Векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{a} + \vec{b}$  лежат на одной прямой и противоположно направлены, т.к. угол между  $\vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{b}$  равен  $60^\circ$ , а между  $\vec{c}$  и  $\vec{b}$  —  $120^\circ$ , угол между  $\vec{c}$  и  $\vec{a} + \vec{b}$  равен  $180^\circ$ , следовательно  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{0}$  что требовалось доказать.

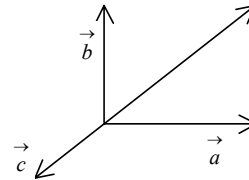
2.  $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{0}$ , получаем:  $\vec{AD} + \vec{DE} + x - \vec{AD} = \vec{0}$ ;  $\vec{DE} + x = \vec{0}$ ;  
 $x = -\vec{DE} = \vec{ED}$ .

Ответ:  $\vec{ED}$ .

### В-6

1. Дано:  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ ,  $(\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = 135^\circ$ ,  
 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ,  $|\vec{c}| = \sqrt{2}$ .

Доказать:  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ .



Доказательство: Построим вектор  $\vec{a} + \vec{b}$ . Тогда

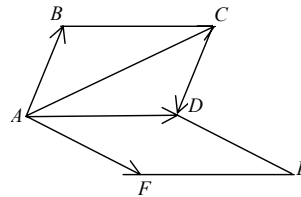
получим:  $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2}$  и  $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = 45^\circ$ , т.е. вектора  $\vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{c}$

равны по модулю и противоположно направлены, откуда вытекает, что  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ .

2. Дано:  $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CD} + \vec{AF} + \vec{y} = \vec{AF}$ .

Найти:  $\vec{y}$ .

Решение: Легко видеть, что  $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CD} + \vec{AF} = \vec{AE}$ , откуда видно, что  $\vec{y}$  можно взять, например, равный  $\vec{EF}$ .



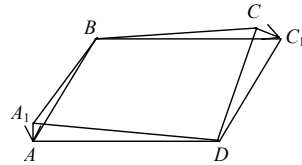
### В-7

1. Доказать:  $\vec{AA_1} = \vec{CC_1}$ .

Доказательство:

$$\vec{AA_1} = \vec{DA_1} - \vec{DA} = -\vec{BC_1} + \vec{BC} = \vec{C_1C}, \quad \text{т.е.}$$

$$\vec{AA_1} = \vec{CC_1}.$$



2. Дано:  $M$  — точка пересечения медиан.

Доказать:  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{O}$ .

Доказательство:

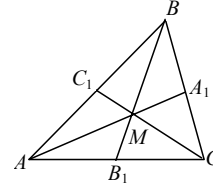
Пусть медианы  $\Delta ABC - AA_1, BB_1, CC_1$ .

$$\vec{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AB}) \Rightarrow$$

$$\vec{MA} = -\frac{2}{3}\vec{AA_1} = -\frac{1}{3}(\vec{AC} + \vec{AB}). \quad \text{Аналогично} \quad \vec{MB} = -\frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{BC}) \quad \text{и}$$

$$\vec{MC} = -\frac{1}{3}(\vec{CB} + \vec{CA}). \quad \text{Складывая эти равенства, получим}$$

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{O}.$$



### В-8

1. Дано:  $A_1B = A_1C, A_1B_1 = A_1C_1$ .

Доказать:  $\vec{CB_1} = \vec{C_1B}$ .

Доказательство: Так как  $AA_1$  — общая медиана  $\Delta ABC$  и  $\Delta AB_1C_1$ , то  $\vec{C_1A} = \vec{AB_1}$  и

$\vec{CA_1} = \vec{A_1B}$ . Тогда:

$$\vec{C_1B} = \vec{C_1A_1} + \vec{A_1B} = \vec{CA_1} + \vec{A_1B} = \vec{CB_1}, \quad \text{т.е.} \quad \vec{CB_1} = \vec{C_1B}.$$

2. Дано:  $ABCD$  — параллелограмм.

Доказать:  $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} = 4\vec{PO}$ .

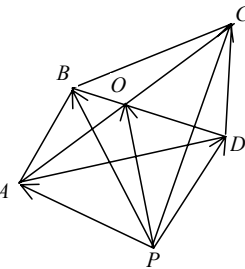
Доказательство:

$$\vec{PA} = \vec{OA} + \vec{PO}, \quad \vec{PB} = \vec{OB} + \vec{PO},$$

$$\vec{PC} = \vec{OC} + \vec{PO}, \quad \vec{PD} = \vec{OD} + \vec{PO}, \quad \text{откуда,}$$

учитывая, что  $\vec{BO} + \vec{DO} = \vec{AO} + \vec{CO} = \vec{O}$ ,  
имеем:

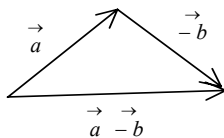
$$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} = 4\vec{PO}.$$



**С-34**

**В-1**

1.

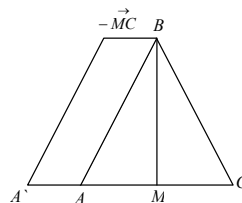


2.  $\vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC}$ .

3. Дано:  $\triangle ABC$  — равнобедренный,  $AB=5$  см,  $BM=4$  см.

Найти:  $\left| \vec{MB} - \vec{MC} + \vec{BA} \right|$ .

Решение: Построим вектор  $\vec{MB} - \vec{MC} + \vec{BA}$ . Его длина равна  $2 \cdot \left| \vec{AM} \right|$ .  $AM^2 = AB^2 - BM^2$  (по те-

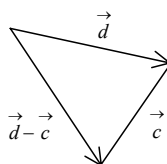


реме Пифагора):  $AM = \sqrt{25 - 16} = 3$  см;  $\left| \vec{MB} - \vec{MC} + \vec{BA} \right| = 2 \cdot 3 = 6$  см.

Ответ: 6 см.

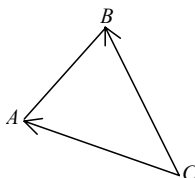
**В-2**

1.



$\vec{d} - \vec{c} = \vec{d} + (-\vec{c})$ .

2.



$\vec{CA} - \vec{BA} = \vec{CB}$ ;  $\vec{CA} - \vec{CB} = \vec{BA}$ .

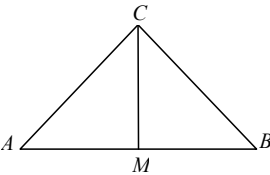
3. Дано:  $AC = CB$ ,  $CM$  — медиана,  $AB = 10$ .

Найти:  $\left| \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BM} \right|$ .

Решение: по теореме Пифагора  
 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2AC^2} = AC\sqrt{2}$ .  
 $AB = 10 = AC\sqrt{2}$ ,  $AC = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$ .

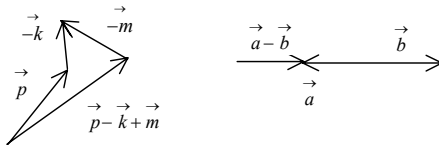
$AM = \frac{1}{2}AB = 5$ . Построим вектор  $\vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BM} = \vec{AD}$ . По теореме Пифагора:  $AD = \sqrt{MD^2 - AM^2} = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{50 - 25} = 5$ .

Ответ: 5.

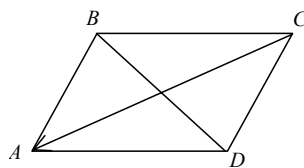


### В-3

1.



2. Дано:  $\vec{CA} = \vec{a}$ ;  $\vec{CD} = \vec{c}$ .

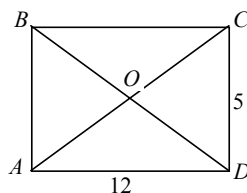


Найти:  $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{DA}$ .

Решение:  $\vec{AB} = -\vec{c}$ ;  $\vec{BC} = \vec{c} - \vec{a}$ ;  $\vec{c} + \vec{DA} = \vec{a}$ ;  $\vec{DA} = \vec{a} - \vec{c}$ .

3.  $\vec{AB} + \vec{AD} - \vec{DC} - \vec{OD} = \vec{AO}$ ;  $\vec{AB} - \vec{DC} = \vec{AO}$ .  $\vec{AD} - \vec{OD} = \vec{AO}$ ;  $\vec{AO} = \vec{AO}$ ;

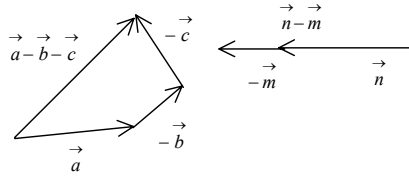
$|\vec{AO}| = \frac{1}{2}|\vec{AC}|$ ,  $|\vec{AC}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ .  $|\vec{AO}| = 6,5$ .



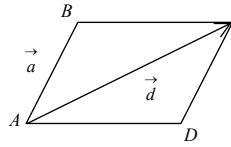
Ответ: 6,5.

**В-4**

1.



2.  $\vec{d} + \vec{CB} = \vec{a}$ ;  $\vec{CB} = \vec{a} - \vec{d}$ ;  $\vec{AD} + \vec{a} = \vec{d}$ ;  $\vec{AD} = \vec{d} - \vec{a}$ ;  $\vec{DC} = \vec{a}$ .



3. Дано:  $AD = 20$ ,  $BD = 24$ .

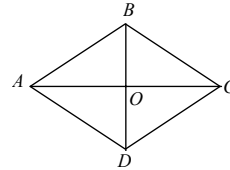
Найти:  $\left| \vec{AD} + \vec{AB} - \vec{BC} - \vec{OB} \right|$ .

$\vec{AD} + \vec{AB} = \vec{AC}$ ;  $\vec{BC} + \vec{OB} = \vec{OC}$ ;

$\vec{AC} - \vec{OC} = \vec{AO}$ ;  $\vec{BO} = \frac{1}{2} \vec{BD} = 12$ ;

$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ .

Ответ: 16.



**В-5**

1.  $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$ ;  $\vec{BC} = \vec{BD} + \vec{DC}$ ;  $\vec{CB} = -\vec{BD} - \vec{DC}$ ;  $\vec{AB} = \vec{AC} - \vec{BD} - \vec{DC}$ .

2.  $\vec{OD} - \vec{OA} = \vec{OC} - \vec{OB}$ ;  $\vec{OA} = \vec{OD} - \vec{OC} + \vec{OB}$ .

3. Дано:  $\angle A = \angle ACD = 90^\circ$ ,  $AC = a$ ,  $\angle BCA = 45^\circ$ .

Найти:  $\left| \vec{CB} - \vec{CA} + \vec{CD} \right|$ .

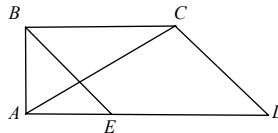
Решение:  $\angle B = 90^\circ$ , следовательно  $\angle BAC = 45^\circ$  и  $BA = BC = \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

$\angle CAD = 90^\circ - \angle BAC = 45^\circ$  и следовательно  $\angle ADC = 45^\circ$ .

Тогда  $AC = CD = a$ .  $\vec{CB} - \vec{CA} = \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$ ;  $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AE}$ .

$\triangle ABE$  — прямо-угольный и  $\vec{BE} = \vec{CD}$ .

$\left| \vec{AE} \right| = \sqrt{BE^2 - AB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .



# **В-6**

1. Решение:  $\vec{AB} = \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CB} = \vec{DC} + \vec{CB} - \vec{DA}$ .

2. Дано:  $\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OC}$ .

Доказать:  $ABCD$  — параллелограмм.

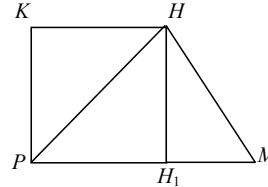
Доказательство: из условия имеем:  $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OC} - \vec{OD}$ , откуда

$\vec{AB} = \vec{DC}$ , т.е.  $ABCD$  — параллелограмм.

3. Дано:  $\angle KPM = 90^\circ$ ,  $\angle PHK = 30^\circ$ ,

$\angle PHM = 90^\circ$ ,  $PM = a$ .

Найти:  $\left| \vec{KP} + \vec{MK} - \vec{MH} \right|$ .



Решение:  $\vec{KP} + \vec{MK} - \vec{MH} = \vec{KP} + \vec{HK} = \vec{HP}$ .

$\angle HPM = \angle KHP = 30^\circ$  и  $\angle PHM = 90^\circ$  (по

условию). Тогда из  $\triangle PHM$  имеем:  $PH = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \left| \vec{KP} + \vec{MK} - \vec{MH} \right|$ .

Ответ:  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

# **В-7**

1. Дано:  $CC_1 = m$ .

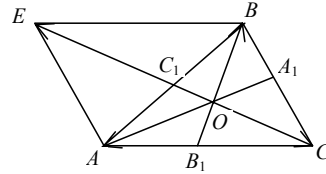
Построить:  $\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC}$  и найти его длину.

Решение:

$\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{CA} = \vec{DE}$  (см.рис.).

$CO = \frac{1}{3}CE = \frac{2}{3}m \Rightarrow OE = 2m - \frac{2}{3}m = \frac{4m}{3}$ .

Ответ:  $\frac{4m}{3}$ .



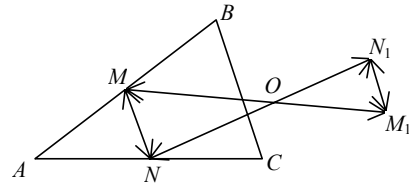
2. Дано:

$AM = MB$ ,  $AN = NC$ ,  $NO = N_1O$ ,

$MO = M_1O$ .

Доказать:  $M_1N_1 \parallel BC$  и

$M_1N_1 = \frac{1}{2}BC$ .



Доказательство:

$\vec{M_1N_1} = \vec{ON_1} - \vec{OM_1} = \vec{OM} - \vec{ON} = \vec{NM}$ .



$\vec{NM}$  — средняя линия треугольника  $\triangle ABC \Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC$  и  $MN \parallel BC$ ,  
откуда  $M_1 N_1 \parallel BC$  и  $M_1 N_1 = \frac{1}{2}BC$ .

### В-8

1. Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AA_1 = m$  — медиана.

Построить:  $\vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC}$  и найти его длину.

Решение:  $\vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC} = \vec{BA} - \vec{OC}$ . От

точки  $O$  откладываем  $\vec{OE} = \vec{BA}$ . Тогда

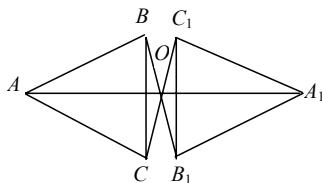
$\vec{OE} - \vec{OC} = \vec{CE}$ . Продолжим  $AA_1$  на отрезок  $A_1P = OA_1$ . Тогда  $OPBC$  — параллелограмм и  $PC \parallel OB \parallel AE$ ,  $PC = OB = AE$ . Отсюда следует, что  $EAPC$  — параллелограмм и

$$|\vec{CE}| = \frac{4m}{3}.$$

Ответ:  $\frac{4m}{3}$ .

2. Доказать:

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  и их стороны соответственно параллельны.

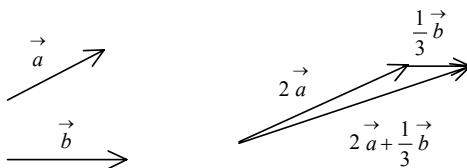


Доказательство:  $\vec{A_1B_1} = \vec{OB_1} - \vec{OA_1} = \vec{OB} - (-\vec{OA}) = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$ . Отсюда следует, что  $A_1B_1 = BA$  и  $A_1B_1 \parallel BA$ . Дальнейшее очевидно.

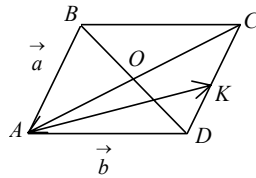
### С-35

### В-1

1.



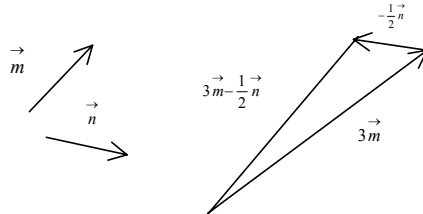
2.



$$\vec{OA} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}; \quad \vec{AK} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}.$$

## В-2

1.

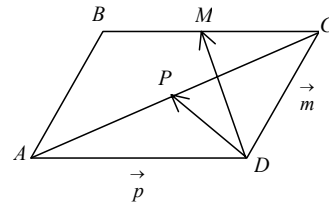


$$2. \quad \vec{m} = \vec{DC}, \quad \vec{p} = \vec{DA}.$$

Найти:  $\vec{DP}$ ,  $\vec{DM}$ .

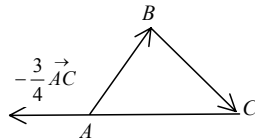
Решение: В параллелограмме диагонали делятся пополам в точке пересечения, поэтому:

$$\vec{DP} = \frac{1}{2}\vec{DB} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{m}); \quad \vec{DM} = \frac{1}{2}\vec{P} + \vec{m}.$$



## В-3

1.



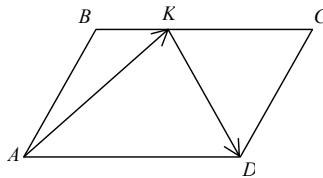
$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC};$$

$$\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AC};$$

$$-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\vec{AC} = -\frac{3}{4}\vec{AC};$$

$$-\frac{3}{2}(\vec{AB} + \vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{AC}) = -\frac{3}{4}\vec{AC}.$$

$$2. \text{ Дано: } \frac{BK}{KC} = \frac{1}{4}, \quad \vec{AB} = \vec{p}, \quad \vec{AD} = \vec{k}.$$



Найти:  $\vec{AK}, \vec{KD}$ .

Решение:

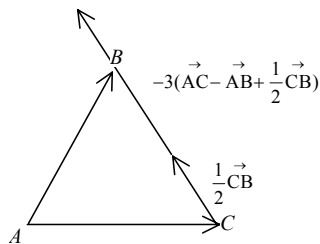
$$\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{BK}; \quad \vec{BK} = \frac{1}{5}\vec{AD} = \frac{1}{5}\vec{k}; \quad \vec{AK} = \vec{p} + \frac{1}{5}\vec{k}. \quad \vec{AK} + \vec{KD} = \vec{AD};$$

$$\vec{KD} = \vec{AD} - \vec{AK}; \quad \vec{KD} = \vec{k} - \vec{p} - \frac{1}{5}\vec{k} = \frac{4}{5}\vec{k} - \vec{p}.$$

Ответ:  $\vec{p} + \frac{1}{5}\vec{k}; \frac{4}{5}\vec{k} - \vec{p}$ .

#### В-4

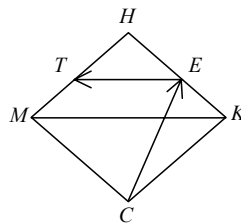
1.



$$\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{AC} + \vec{BA} = \vec{BC}; \quad \vec{AC} - \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{CB} = \vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{BC};$$

$$-3(\vec{AC} - \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{CB}) = -3 \cdot \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{3}{2}\vec{CB}$$

2. Дано:  $KE = \frac{1}{5}HE$ ,  $MT = TH$ ,  $\vec{CK} = \vec{p}$ ,  $\vec{CM} = \vec{a}$ .



Найти:  $\vec{CE}, \vec{ET}$ .

Решение:  $\vec{CE} = \vec{p} + \vec{KE} = \vec{p} + \frac{1}{6}\vec{a}$ ;  $\vec{ET} = \vec{EH} + \vec{HT} = \frac{5}{6}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{p}$ .

Ответ:  $\vec{p} + \frac{1}{6}\vec{a}$ ;  $\frac{5}{6}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{p}$ .

### В-5

1. Дано:  $\vec{OM} = \frac{3}{4}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB}$ . Доказать, что  $A, M, B$  лежат на одной прямой.

Решение.  $\vec{MA} = \vec{OA} - \vec{OM} = \frac{1}{4}(\vec{OA} - \vec{OB})$ ;  $\vec{MB} = \vec{OB} - \vec{OM} = -\frac{3}{4}(\vec{OA} - \vec{OB})$ . Век-

торы  $\vec{MA}$  и  $\vec{MB}$  — коллинеарны, а это значит, что точки  $A, B, M$  лежат на одной прямой.

2.  $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AC} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{p})$ ;  $\vec{AM} + \vec{MH} = \vec{AH}$ ;

$\vec{MH} = \vec{AH} - \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{p} - \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{p} = -\frac{1}{6}\vec{p} - \frac{2}{3}\vec{a}$ .

Ответ:  $-\frac{1}{6}\vec{p} - \frac{2}{3}\vec{a}$ .

### В-6

1. Дано:  $\vec{OE} = \frac{9}{7}\vec{OK} - \frac{2}{7}\vec{OF}$ .

Доказать:  $E, F, K$  лежат на одной прямой.

Доказательство:

$\vec{KE} = \vec{OE} - \vec{OK} = \frac{9}{7}\vec{OK} - \frac{2}{7}\vec{OF} - \vec{OK} = \frac{2}{7}(\vec{OK} - \vec{OF})$ .

$\vec{FE} = \vec{OE} - \vec{OF} = \frac{9}{7}\vec{OK} - \frac{2}{7}\vec{OF} - \vec{OF} = \frac{9}{7}(\vec{OK} - \vec{OF})$ , т.е.  $\vec{FE} = \frac{9}{2}\vec{KE}$ , а это и

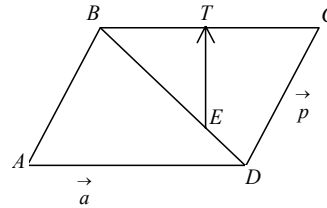
значит, что точки  $E, F, K$  лежат на одной прямой.

2. Дано:  $BE:ED=2:1$ ,  $BT=TC$ ,  $\vec{DA} = \vec{a}$ ,  $\vec{DC} = \vec{p}$ . Выразить  $\vec{ET}$  через  $\vec{a}$  и  $\vec{p}$ .

Решение:  $\vec{ET} = \vec{EB} + \vec{BT} = \frac{2}{3}\vec{DB} + \frac{1}{2}\vec{BC} =$

$= \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{p}) - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{p}$ .

Ответ:  $\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{p}$ .



### В-7

1. Дано:  $\vec{AC}_1 = \kappa \vec{AB}$ ,  $\vec{BA}_1 = \kappa \vec{BC}$ ,  $\vec{CB}_1 = \kappa \vec{CA}$ .

Найти:  $\vec{AA}_1 + \vec{BB}_1 + \vec{CC}_1 = ?$

Решение:

$$\vec{AA}_1 + \vec{BB}_1 + \vec{CC}_1 = \kappa(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) = \kappa \cdot \vec{O} = \vec{O}.$$

Ответ:  $\vec{O}$ .

2. Дано:  $AB \parallel DE \parallel CF$ ,  $BC \parallel EF \parallel AD$ ,  $CD \parallel FA$ .

Доказать:  $BE \parallel AF$ .

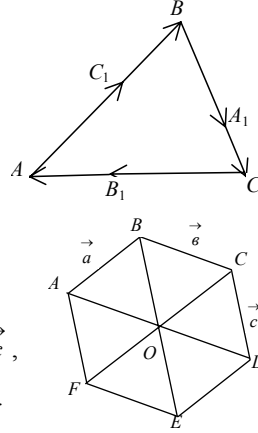
Доказательство:

Пусть  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{BC} = \vec{b}$ ,  $\vec{CD} = \vec{c}$ .

Тогда  $\vec{FE} = \vec{OD} = \vec{a} + \vec{c}$ ,  $\vec{AF} = k \vec{CD} = k \vec{c}$ ,

$$\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AF} + \vec{FE} = -\vec{a} + k \vec{c} + (\vec{a} + \vec{c}) = (k+1) \vec{c}.$$

Это значит, что  $BE \parallel AF$ .



### В-8

1. Дано:  $\vec{AP} = \kappa \vec{AB}$ ,  $\vec{BE} = \kappa \vec{BC}$ ,  $\vec{CF} = \kappa \vec{CD}$ ,

$\vec{DM} = \kappa \vec{DA}$ .

Доказать:  $PEFM$  — параллелограмм.

Доказательство:

$$\vec{PE} = \vec{BE} - \vec{BP} = \kappa \vec{BC} - (\kappa - 1) \vec{AB}. \quad \text{Аналогично}$$

получаем  $\vec{MF} = \kappa \vec{AD} - (\kappa - 1) \vec{DC}$ . Так как  $\vec{BC} = \vec{AD}$  и  $\vec{AB} = \vec{DC}$ , то

$$\vec{PE} = \vec{MF}, \text{ а потому } PEFM \text{ — параллелограмм.}$$

2. Дано:  $AB \perp CD$ .

Доказать:  $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{AO} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$ .

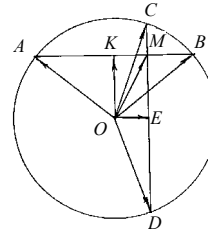
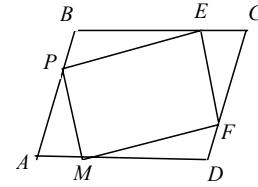
Доказательство: Пусть  $AB \perp OK$ ,  $OE \perp CD$ .

$$\text{Тогда } \vec{OM} = \vec{OK} + \vec{OE}, \vec{OK} = \vec{OA} + \vec{AK} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AB} =$$

$$= \vec{OA} + \frac{1}{2}(\vec{OB} - \vec{OA}) = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}).$$

$$\text{Аналогично } \vec{OE} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}), \quad \text{откуда}$$

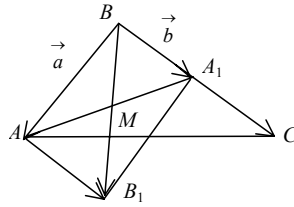
$$\vec{OM} = \vec{OK} + \vec{OE} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}).$$



**C-36**

**B-1**

1.

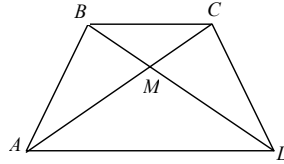


$$\vec{BB}_1 = \vec{a} + (1/2)\vec{b}; \quad \vec{BM} = (1/2)\vec{BB}_1, \quad \vec{BM} = (1/2)\vec{a} + (1/4)\vec{b}.$$

2. Дано: Дано:  $\vec{BC} = \frac{1}{3}\vec{AD}$ .

Решение: Т.к.  $\vec{BC} = \frac{1}{3}\vec{AD}$ , то  $AD \parallel BC$ , т.е.

$ABCD$  — трапеция и  $\triangle AMD \sim \triangle BMC$  (по 3 углам). А т.к.  $\vec{BC} = \frac{1}{3}\vec{AD}$ , то  $AM : MC = \frac{1}{3}$



и  $DM : MB = \frac{1}{3}$ .

Ответ:  $\frac{1}{3}$ .

**B-2**

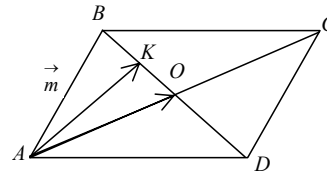
1. Дано:  $\vec{AB} = \vec{m}$ ,  $\vec{AC} = \vec{p}$ .

Найти:  $\vec{AK}$ .

Решение:  $\vec{AO} + \vec{OB} = \vec{AB}$ ,

$$\vec{OB} = \vec{AB} - \vec{AO} = \vec{m} - \frac{1}{2}\vec{p}. \quad \vec{OK} = \frac{1}{2}\vec{OB};$$

$$\vec{AO} + \vec{OK} = \vec{AK}; \quad \vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{4}\vec{p} = \frac{1}{4}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{m}.$$



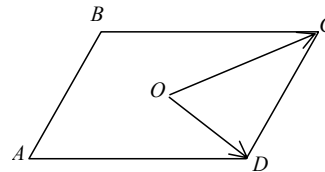
2. Дано:  $\vec{AB} + \vec{OD} = \vec{OC}$ ;  $\angle A = 15^\circ$ .

Найти:  $\angle B, \angle C, \angle D$ .

Решение:  $\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{DC}$ , но с другой

стороны:  $\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{AB}$  (по условию),

следовательно  $\vec{DC} = \vec{AB}$ , и следова-

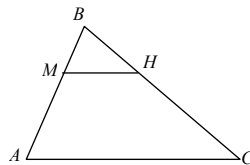


тельно  $ABCD$  — параллелограмм. Тогда  $\angle C = \angle A = 15^\circ$ ,  
 $\angle B = \angle D = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$ .  
 Ответ:  $15^\circ, 165^\circ, 165^\circ$ .

### В-3

1. Дано:  $AB=3BM$ ,  $BC=3BH$ .

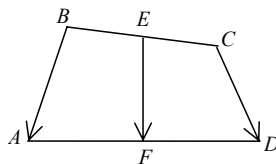
Доказать:  $MH \parallel AC$  и  $MH = \frac{1}{3} AC$ .



Решение:  $\vec{MB} = \frac{1}{3} \vec{AB}$ ;  $\vec{BH} = \frac{1}{3} \vec{BC}$ ;  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ ;

$\vec{MH} = \vec{MB} + \vec{BH} = \frac{1}{3} (\vec{AB} + \vec{BC})$ ;  $MH = \frac{1}{3} AC$ .

2. Выразить  $\vec{EF}$  через  $\vec{BA}$  и  $\vec{CD}$ .



Обозначим  $\vec{BA} = \vec{a}$  и  $\vec{CD} = \vec{b}$ ;  $-\vec{a} + \vec{BC} + \vec{b} = \vec{AD}$ .

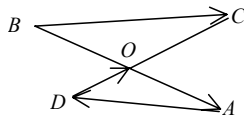
$-\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{BC} + \vec{EF} = \frac{1}{2} \vec{AD} = -\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{BC} + \frac{1}{2} \vec{b}$ .

$\vec{EF} = -\frac{1}{2} \vec{a} + \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} = \frac{1}{2} \vec{BA} + \frac{1}{2} \vec{CD}$ .

Ответ:  $\frac{1}{2} \vec{BA} + \frac{1}{2} \vec{CD}$ .

### В-4

1. Дано:  $AO=2OB$ ,  $OD=2OC$ .

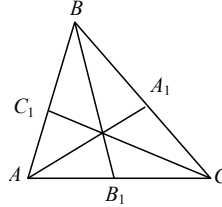


Доказать:  $BC \parallel AD$  и  $BC = \frac{1}{2} AD$ .

Решение:  $\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{DO} = -\frac{1}{2}\vec{AD}$ . Т.е.  $BC \parallel AD$  и

$$BC = \frac{1}{2}AD.$$

2. Дано:  $A_1, B_1, C_1$  — середины сторон.



Доказать, что  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1$ ,  $O$  — произвольная точка.

Решение: 
$$\begin{aligned} \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} &= (\vec{OA}_1 + \vec{A_1A}) + (\vec{OB}_1 + \vec{B_1B}) + (\vec{OC}_1 + \vec{C_1C}) = \\ &= \vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1 + \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{CB} + \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1 \end{aligned}$$

### В-5

1. Решение:

Возьмем в плоскости некоторую точку  $O$ . Тогда получим:

$$\vec{MP} = \vec{OP} - \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OB}_1) - \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OA}_1);$$

$$\vec{HF} = \vec{OF} - \vec{OH} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OC}_1) - \frac{1}{2}(\vec{OD} + \vec{OD}_1) \Rightarrow \vec{MP} = \frac{1}{2}(\vec{AB} - \vec{A_1B_1}),$$

$$\vec{HF} = \frac{1}{2}(\vec{DC} - \vec{D_1C_1}) = \frac{1}{2}(\vec{AB} - \vec{A_1B_1}), \text{ а это и означает, что } M, P, F, H \text{ являются вершинами параллелограмма или лежат на одной прямой.}$$

2. Решение:  $\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ , откуда:  $|\vec{OM}| \leq \frac{1}{3}(|\vec{OA}| + |\vec{OB}| + |\vec{OC}|)$ .

### В-6

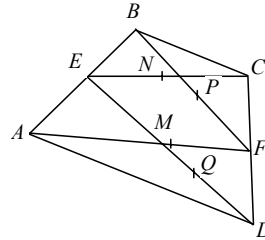
1. Дано:  $AE = EB, CF = FD, EN = NC, BP = PF, AM = MF, EQ = QD$ .

Доказать:  $M, N, P, Q$  — вершины параллелограмма.

Доказательство:

$$\vec{NP} = \vec{BP} - \vec{BN} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{CF}) - \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{BE}) =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{CF} + \frac{1}{2}\vec{EB},$$

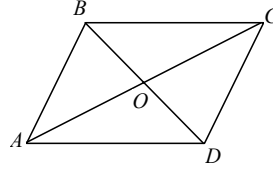




$$\vec{MQ} = \vec{AQ} - \vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AE} + \vec{AD}) - \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{DF}) = \frac{1}{2}\vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{FD}. \quad \text{Поскольку}$$

$\vec{CF} = \vec{FD}$  и  $\vec{AE} = \vec{EB}$ , то  $\vec{NP} = \vec{MQ}$ , а это и означает, что  $M, N, P, Q$  — вершины параллелограмма, либо что они лежат на одной прямой.

2. Пусть параллелограмм  $ABCD$ ,  $\vec{AB} = \vec{b}$ ,  $\vec{AD} = \vec{a}$ . Тогда  $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{BD} = \vec{a} - \vec{b}$ . Пусть  $AC \parallel BD$ . Это означает, что  $\vec{a} + \vec{b} = k(\vec{a} - \vec{b})$ , т.е.  $(1-k)\vec{a} + (1+k)\vec{b} = \vec{0}$ .



Также равенство возможно только когда  $1-k=0$  и  $1+k=0$ , а такого быть не может. Следовательно  $AC$  и  $BD$  пересекаются.

Пусть  $\vec{AO} = m\vec{AC}$  и  $\vec{BO} = n\vec{BD}$ . Тогда  $\vec{OD} = (1-n)\vec{BD}$  и  $\vec{OC} = (1-m)\vec{AC}$ . Учтывая, что  $\vec{AO} - \vec{BO} = \vec{b}$  и  $\vec{OC} - \vec{OD} = \vec{b}$ , получим:

$$\begin{cases} m(\vec{a} + \vec{b}) - n(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b}; \\ (1-m)(\vec{a} + \vec{b}) - (1-n)(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b}. \end{cases}$$

Откуда  $\begin{cases} m-n=0 \\ m+n=1 \end{cases}$ , т.е.  $m=n=\frac{1}{2}$ , а значит диагонали в точке пересечения делятся пополам.

### С-37

#### В-1

1. Дано: пусть меньшее основание равно  $x$ , тогда большее  $x+4$ . Средняя линия:  $\frac{1}{2}(x+x+4)=10$ ,  $x=8$  (см),

большее основание:  $8+4=12$  (см).

Ответ: 8 см, 12 см.

2. Дано:  $ABCD$  — равнобедренная трапеция,  $BM \perp AD$ ,  $AM=4$  см,  $MD=10$  см.

Найти:  $AD, BC$ .

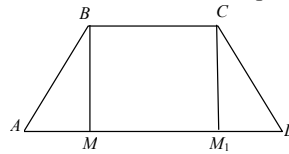
Решение: проведем высоту  $CM_1$ .

Т.к. трапеция равнобедренная, то  $AM=M_1D=4$  см.

$AD=AM+MM_1+M_1D=MM_1+8=14$  см.

$MM_1=BC=6$  см. Средняя линия  $\frac{BC+AD}{2}=10$  (см).

Ответ: 14 см, 6 см, 10 см.



## В-2

1. Дано:  $ABCD$  – трапеция,  $AD$  и  $BC$  – основания,  $AD = 2BC$ , средняя линия  $S = 15$  см.

Найти:  $AD$  и  $BC$ .

$$\text{Решение: } S = \frac{AD + BC}{2} = \frac{2BC + BC}{2} = \frac{3BC}{2} = 15, BC = 10 \text{ (см)}.$$

$$AD = 2 \cdot BC = 20 \text{ (см)}.$$

Ответ: 10 см, 20 см.

2. Дано:  $MH = KP$ ,  $ME = 6$  см,  $HK = 10$  см.

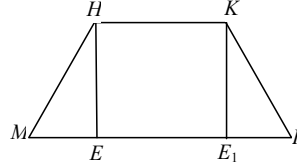
Найти:  $MP$ , среднюю линию  $S$ .

Решение:

построим перпендикуляр  $KE_1$ . Т.к.

$MHKP$  – равнобедренная трапеция, то:

$$ME = KE_1 = 6 \text{ см и } MP = ME + E_1E + E_1P = 2ME + HK = 22 \text{ см}.$$



$$\text{Средняя линия } S = \frac{MP + HK}{2} = \frac{22 + 10}{2} = 16 \text{ (см)}.$$

Ответ: 22 см, 16 см.

## В-3

1. Дано:  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle C = 135^\circ$ ,  $AB = 2$  см,  $AC \perp CD$ .

Найти среднюю линию.

$$\text{Решение: } \angle D = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ,$$

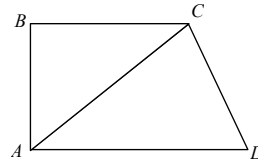
$$\angle CAD = \angle D = 45^\circ, \quad \text{следовательно}$$

$$\angle BAC = 45^\circ, \quad \angle BCA = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ,$$

следовательно  $\triangle ABC$  – равнобедренный и

$$BC = AB = 2 \text{ см. } AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ (см); } AC = CD = 2\sqrt{2} \text{ (см);}$$

$$AD = \sqrt{8 + 8} = 4 \text{ (см). Средняя линия: } \frac{4 + 2}{2} = 3 \text{ (см)}.$$



Ответ: 3 см.

2. Дано:  $\angle A = \angle D = 60^\circ$ ,  $AB = CD = 10$  см,  $AD = 15$  см.

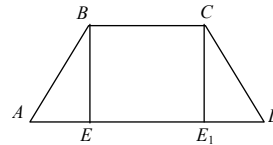
Найти:  $BC$ , средняя линия.

Решение: проведем высоты  $E$  и  $E_1$ .

$$\frac{AE}{AB} = \cos \angle A; AE = 10 \cdot \cos 60^\circ = 5 \text{ см} = AE_1;$$

$$EE_1 = AD - AE - E_1D = 15 - 5 - 5 = 5 \text{ (см)}.$$

$$BC = EE_1 = 5 \text{ (см). Средняя линия: } \frac{5 + 15}{2} = 10 \text{ (см)}.$$



Ответ: 5 см; 10 см.

#### В-4

1. Дано:  $\angle M = 90^\circ$ ,  $\angle K = 150^\circ$ ,  $HK = 2$  см,  $MK \perp KP$ .

Найти: среднюю линию.

Решение:  $\angle HKM = \angle HKP - \angle MKP = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$ ;

$$\angle H = 180^\circ - \angle M = 90^\circ;$$

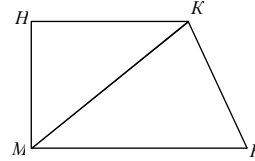
$$\angle KMP = 90^\circ - \angle KMP = 90^\circ - (90^\circ - \angle HKM) = 60^\circ \Rightarrow \triangle HKM \sim \triangle KMP \text{ (по 3 углах).}$$

$$\frac{HK}{MK} = \frac{MK}{MP}; \quad MP = \frac{MK^2}{HK}; \quad MK = \frac{HK}{\cos \angle HKM} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4.$$

$$MP = \frac{4^2}{2} = 8 \quad (\text{см}). \quad \text{Средняя линия:}$$

$$\frac{HK + MP}{2} = \frac{2 + 8}{2} = 5 \quad (\text{см}).$$

Ответ: 5 см.



2. Дано:  $AB = CD$ ,  $\angle A = \angle D = 45^\circ$ ,  $BC = 5$  см,  $BE = 4$  см.

Найти:  $AD$ , средняя линия.

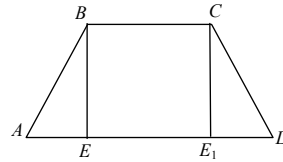
Решение: построим высоту  $CE_1$ .  $EE_1 = BC = 4$  см.

$\angle ABE = 90^\circ - \angle A = 45^\circ$ , следовательно  $\triangle ABE$  – равнобедренный и  $AE = BE = 4$  (см). Аналогично  $E_1D = 4$  см.

Тогда  $AD = AE + EE_1 + E_1D = 4 + 5 + 4 = 13$  (см).

$$\text{Средняя линия: } \frac{13 + 5}{2} = 9 \quad (\text{см}).$$

Ответ: 13 см, 9 см.



#### В-5

1. Дано:  $BC = 4$  см,  $\angle CAD = 60^\circ$ ,  $XY$  – средняя линия.

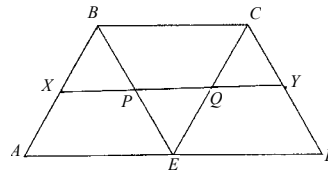
Найти:  $XY$ .

Решение: опустим перпендикуляр  $CE$  на  $AD$ . Тогда, в силу того, что  $ABCD$  – равнобедренная трапеция,  $XY = AE = 4/2 = 2$  (см).

Ответ: 2 см

2. Доказать:  $XY = \frac{3}{2} BC$ .

Доказательство: очевидно, что  $XP = PQ = QY = \frac{1}{2} BC$  (т.к.  $XP$ ,  $PQ$  и  $QY$  – средние линии правильных  $\triangle ABE$ ,  $\triangle BCE$ ,  $\triangle ECD$  соответственно)  $\Rightarrow$ ,  $XY = XP + PQ + QY = \frac{3}{2} BC$ .



# **В-6**

1. Дано:  $MN = 8$  см,  $AB = CD$ , средняя линия  $XY = ?$

Решение: проведем высоту  $MN$  через пересечение диагоналей. Пусть  $MO = x$ , тогда  $NO = 8 - x$ . Легко видеть, что  $\triangle AOD$  и  $\triangle BOC$  — прямоугольные, равнобедренные, откуда  $AD = 2NO = 16 - 2x$ ,  $BC = 2MO = 2x$ . Тогда средняя линия трапеции:

$$XY = \frac{AD + BC}{2} = 8 \text{ (см)}.$$

Ответ: 8 см

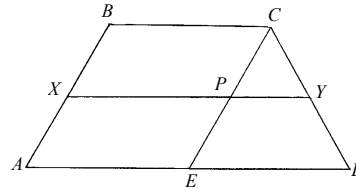
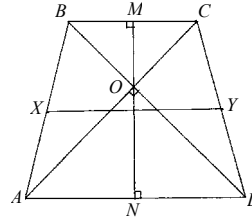
2. Дано:  $ABCD$  — ромб,  $\triangle ECD$  — правильный.

Доказать:  $XY = \frac{3}{4} AD$ .

Доказательство: пусть средняя линия трапеции  $XY$  пересекает  $CE$  в точке  $P$ . Тогда  $XP = AE$ , по  $AE = EC = ED$  (т.к. по условию  $ABCD$  — ромб,  $\triangle ECD$  — правильный).  $PY$  — средняя линия  $\triangle ECD$ , поэтому

$PY = \frac{1}{2} ED$ . Таким образом, полу-

чим:  $XY = XP + PY = AE + \frac{1}{2} ED = \frac{3}{4} AD$  (т.к.  $AE = ED$ ).



# **В-7**

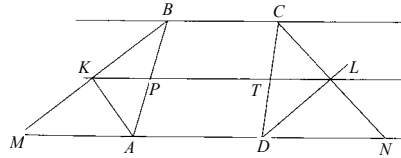
1. Дано:  $KL = 25$  см.

Найти:  $P_{ABCD} = ?$

Решение: пусть прямая  $CL$  пересекает прямую  $AD$  в точке  $N$ , а прямая  $BK$  — в точке  $M$ . Очевидно, что  $DL \perp CL \Rightarrow \triangle CLD = \triangle DLN$  (т.к. прямоугольные и имеют общую сторону  $DL$ )  $\Rightarrow CL = LN$ . Аналогично  $BK = KM \Rightarrow KL \parallel BC \parallel AD$  и  $KL$  равноудалена от  $BC$  и  $AD \Rightarrow PT$  — средняя линия трапеции  $ABCD$ . Т.к.  $\triangle AKB$  и  $\triangle CLD$  — прямоугольные, то  $AB = 2KP$  и  $CD = 2LT$

$\Rightarrow P_{ABCD} = 2KL = 50$  (см).

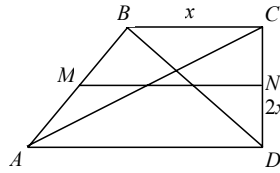
Ответ: 50 см.



2. Дано:  $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ;  $BC:CD = 1:2$ ,  $MN = 10$  см.

Найти:  $AD = ?$ ,  $BC = ?$

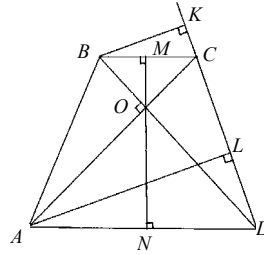
Решение: пусть  $BC = x$ . Тогда  $CD = 2x$ ,  $AD = 20 - x$ ,  $\triangle BCD \sim \triangle ACD$   
 $\Rightarrow \frac{2x}{20 - x} = \frac{1}{2}$ , откуда  $x = BC = 4$  (см),  
 $AD = 16$  (см).  
 Ответ: 4 см, 16 см.



### В-8

1. Дано:  $ABCD$  – равнобедренная трапеция,  $AL = 3BK$ ,  $MN = 12$  см.  
 Найти:  $AD = ?$ ,  $BC = ?$

Решение:  $\triangle ALD \sim \triangle BKC \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{AL}{BK} = 3$ . Так как  $ABCD$  – равнобедренная трапеция, то  $\triangle AOD \sim \triangle BOC$ , причем они прямоугольные. Т.к.  $\frac{AD}{BC} = 3$ , то  $\frac{ON}{OM} = 3$ ,  
 откуда  $ON = 9$  (см) и  $OM = 3$  (см) (т.к.  $MN = 12$  см)  $\Rightarrow AD = 2ON = 18$  (см),  
 $BC = 2OM = 6$  (см).  
 Ответ: 18 см, 6 см.



2. Дано:  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle D = 30^\circ$ ,  $xy = 6 - \sqrt{3}$  — средняя линия.

Найти: Радиус окружности.

Из прямоугольного  $\triangle DKO$  находим:

$DK = R\sqrt{3}$ ,  $DO = 2R$  — радиус

окружности. Из  $\triangle CPD$  имеем:

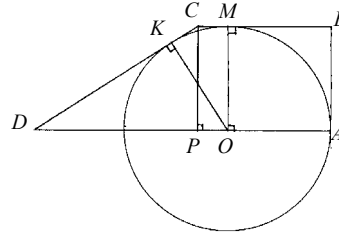
$DC = 2R$ ,  $KC = 2R - R\sqrt{3}$ .

$CM = CK = 2R - R\sqrt{3}$ ,  $AD = 3R$ ,

$BC = R + 2R - R\sqrt{3} = 3R - R\sqrt{3}$ . Т.к.  $xy = 6 - \sqrt{3}$ , то:

$\frac{3R + 3R - R\sqrt{3}}{2} = 6 - \sqrt{3}$ , откуда  $R = 2$ .

Ответ: 2.

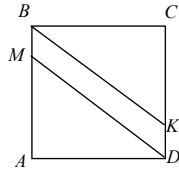


### С-38

### В-1

1. Дано:  $ABCD$  квадрат,  $AB = 4$  см,  $AM = KC = 3$  см.

Решение:  $BM \parallel KD$  т.к. они лежат на противоположных сторонах квадрата;  $BM = AB - AM = 1$  (см),  $KD = CD - CK = 1$  (см), а т.к.  $BM = KD$ , то  $MBKD$  – параллелограмм.



2.  $MD = BK = \sqrt{BC^2 + CK^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$  (см) (по теореме Пифагора).  
 $P_{MBKD} = 2(5+1) = 12$  (см).

$$S_{MBKD} = S_{ABCD} - S_{AMD} - S_{BCK} = 16 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 4 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 4 см<sup>2</sup>, 12 см.

### В-2

1. Дано:  $\angle BAM = 40^\circ$ ,  $\angle DCK = 50^\circ$ ,  $CK = 8$  см,  $BC = 20$  см.

а) Доказать, что  $\frac{BM}{CD} = \frac{AM}{KC}$ .

б) Найти:  $KD$ ,  $CD$ ,  $BM$ ,  $S_{AMCK}$ .

Решение:

б)  $\frac{KD}{CK} = \sin \angle DCK$ ,  $KD \approx 8 \cdot 0,766 \approx 6,1$  см.

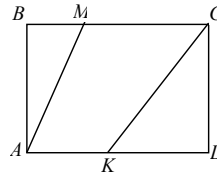
$$CD = \sqrt{CK^2 - KD^2} \approx \sqrt{64 - 37,552} \approx 5,1 \text{ (см)}, \quad \frac{BM}{AB} = \tan \angle BAM,$$

$$BM \approx 5,143 \cdot 0,839 \approx 4,3 \text{ см. } S_{AMCK} = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{CKD} = AB \cdot BC = \\ = \frac{1}{2} AB \cdot BM - \frac{1}{2} CD \cdot KD = 5,1 \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot 5,1 \cdot 4,3 - \frac{1}{2} \cdot 5,1 \cdot 6,1 = 75,48 \text{ см}^2.$$

Ответ: 6,1 см; 5,1 см; 4,3 см; 75 см, 48 см<sup>2</sup>.

а) Т.к.  $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ , то  $\sin \angle BAM = \cos \angle DCK$ .

$$\sin \angle BAM = \frac{BM}{AM} = \frac{CD}{CK} = \cos \angle DCK, \text{ следовательно } \frac{BM}{CD} = \frac{AM}{CK}.$$



### В-3

1. Дано:  $AB = 8$  см,  $BC = 4$  см,  $\frac{AK}{AB} = \frac{CP}{CD} = \frac{3}{8}$ .

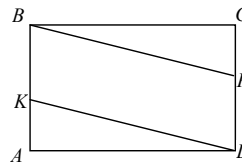
Доказать: а)  $KBPD$  – ромб; б)  $P_{KBPD}$ ;  $S_{KBPD}$ .

Решение:

$$\text{а) } \frac{AK}{AB} = \frac{3}{8}; AK = AB \cdot \frac{3}{8} = 8 \cdot \frac{3}{8} = 3 \text{ см;}$$

$$BK = AB - AK = 8 - 3 = 5 \text{ (см).}$$

Аналогично  $PD = 5$  (см).



$KD = \sqrt{AK^2 + AD^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  см. Аналогично  $BP = 5$  см, следовательно  $KBPD$  – ромб.

б)  $P_{KBPD} = 4 \cdot 5 = 20$  см;  $S_{KBPD} = S_{ABCD} - 2S_{AKD} = 8 \cdot 4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 32 - 12 = 20$  см<sup>2</sup>.

Ответ: 20 см; 20 см<sup>2</sup>.

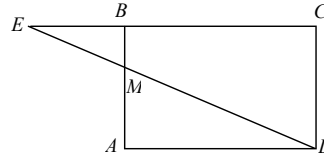
#### В-4

1. Дано:  $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{1}$ ;  $\angle MDA = 40^\circ$ ;  $AD = 10$  см.

а) Доказать, что  $\triangle AMD \sim \triangle ECD$ .

б) Найти:  $S_{\triangle DCE}$ .

Решение: а)  $\angle E = \angle ADM$  (накрест лежащие),  $\angle A = \angle C$  (прямые). Следовательно  $\triangle AMD \sim \triangle ECD$  (по 3 углам).



б)  $\frac{AM}{CD} = \tan \angle MDA$ ;  $AM = 10 \cdot \tan 40^\circ \approx 8,4$  (см);  $\frac{AM}{CD} = \frac{AD}{EC}$ ;  $\frac{AD}{EC} = \frac{2}{3}$ ;

$EC = \frac{3AD}{2} = 15$  (см),  $\frac{AM}{CD} = \frac{2}{3}$ ;  $CD = \frac{3AM}{2} = 12,6$  (см).

$S_{\triangle DCE} = \frac{1}{2} CD \cdot EC = \frac{1}{2} \cdot 12,6 \cdot 15 = 94,5$  (см<sup>2</sup>).

Ответ: 94,5 (см<sup>2</sup>)

#### В-5

Дано:  $ABCD$  – ромб,  $AB = 5$  см,  $BD = 2\sqrt{5}$  см,  $\frac{AM}{MB} = \frac{CK}{KD} = \frac{3}{2}$ .

а) Доказать, что  $MBKD$  – прямоугольник; б) Найти:  $S_{MBKD}$ ,  $P_{MBKD}$ .

Решение: а) Легко доказать, что  $MB = KD = 2$  см и  $MB \perp KD$ . Значит,  $MBKD$  – параллелограмм. Далее проведем высоту  $DE$  к  $AB$ . Тогда из  $\triangle DBE$   $DE^2 = (2\sqrt{5})^2 - BE^2$ , а из треугольника  $\triangle DAE$

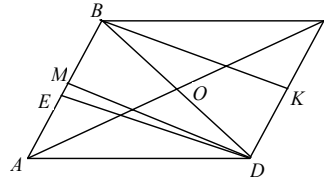
$DE^2 = 5^2 - (BE - 5)^2 - BE^2$ , т.е.

$20 - BE^2 = 25 - (5 - BE)^2 - BE^2$ , откуда  $BE = 2$  см.

Значит, точки  $E$  и  $M$  совпадают и, следовательно,  $\angle BMD = 90^\circ$ , т.е.  $MBKD$  – прямоугольник.

б)  $DM = DE = 4$  (см).

Значит,  $P_{MBKD} = 12$  (см),  $S_{MBKD} = 8$  (см<sup>2</sup>).



#### В-6

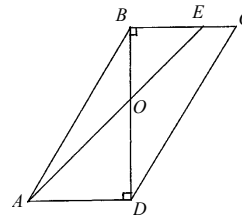
1. Дано:  $\frac{BO}{OD} = \frac{2}{3}$ ,  $BC = 9$  см,  $AE = 20$  см,  $BD \perp BC$ .

Найти:  $\angle AOD = ?$

Легко видеть, что  $\triangle AOD \sim \triangle BOE$ , откуда

$\frac{AO}{OE} = \frac{DO}{OB} = \frac{3}{2}$ , учитывая, что  $AO + OE = AE = 20$  (см),  $AO = 12$  (см).  $AD = BC = 9$  (см). Т.о.

$\sin \angle AOD = \frac{AD}{AO} = \frac{3}{4}$ , откуда  $\angle AOD = 48,35^\circ$ .



Ответ:  $\angle AOD = 48,35^\circ$ .

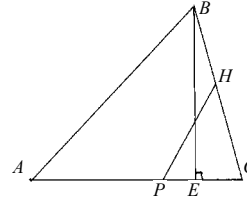
2. Дано:  $PC = 8$  см,  $\angle HPC = \angle ABC$ ,  $\frac{S_{PHC}}{S_{ABC}} = \frac{4}{25}$ ,  $\cos C = \frac{4}{3}$ .

Найти:  $BE = ?$

Решение:  $\triangle ABC \sim \triangle PHC$ , откуда

$\frac{BC}{PC} = \sqrt{\frac{S_{ABC}}{S_{PHC}}} = \frac{5}{2}$ , т.е.  $BC = 20$  (см). Тогда

$BE = BC \sin C = BC \sqrt{1 - \cos^2 C} = 20 \cdot \frac{3}{5} = 12$ .



Ответ: 12 см.

### В-7

1. Дано:  $\angle ABC = \angle ACD$ ,  $BC = 2$  см,

$AD = 8$  см,  $\angle CAD = 40^\circ$ .

Найти:  $S_{ABCD} = ?$

Решение:  $\triangle ABC \sim \triangle ACD \Rightarrow$

$AC^2 = BC \cdot AD$ , откуда  $AC = 4$  (см).

Тогда  $CH = CA \cdot \sin 40^\circ = 4 \sin 40^\circ \Rightarrow S_{ABCD} = 5 \cdot 4 \sin 40^\circ \approx 12,9$  (см<sup>2</sup>).

Ответ: 12,9 см<sup>2</sup>.

2. Дано:  $MH : AC = 3 : 4$ .

Найти:  $\frac{S_{MAH}}{S_{ABC}} = ?$

Решение: Пусть  $\angle ABC = \alpha$ . Тогда

$\angle MCH = 180^\circ - \alpha$ ,  $\angle MAH = \alpha$ ; т.к. сумма

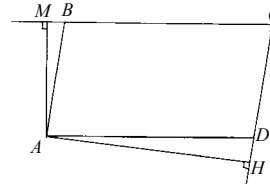
углов четырехугольника равна  $360^\circ$ , то  $\angle MAH = \angle ABC$ . Известно

также, что две высоты параллелограмма обратно пропорциональны

сторонам параллелограмма, на которые они опущены. Тогда

$\frac{AM}{CD} = \frac{AH}{BC}$  или  $\frac{AM}{AB} = \frac{AH}{BC}$ . Следовательно,  $\triangle MAH \sim \triangle ABC$ . Коэф-

фициент подобия равен  $\frac{3}{4}$ . Тогда  $\frac{S_{MAH}}{S_{ABC}} = \frac{9}{16}$ .





# **В-8**

1. Дано:  $ABCD$  – трапеция,  $\angle ABC = \angle ACD$ ,  $BC = 2$  см,  $AD = 8$  см,

$$\angle CAD = 40^\circ.$$

Найти:  $S_{ABCD} = ?$

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \Rightarrow$$

$$AC^2 = AD \cdot BC = 16 \text{ (см}^2\text{)} \Rightarrow$$

$$AC = 4 \text{ (см)}.$$

Пусть  $CE$  – высота  $\Rightarrow CE = 4 \sin 40^\circ = 2,57$  (см)  $\Rightarrow$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} CE = 12,9 \text{ (см}^2\text{)}.$$

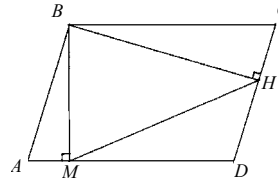
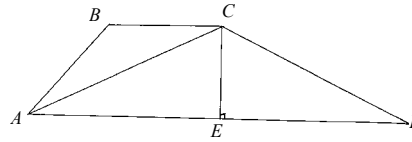
Ответ:  $12,9 \text{ см}^2$ .

2. Дано:  $\angle A$  — острый,  $\frac{MH}{BD} = \frac{2}{3}$ .

Найти:  $\frac{S_{MBH}}{S_{BDC}} = ?$

Задача решается аналогично задаче варианта 7 С-38.

Ответ:  $4 : 9$ .



## **С-39**

### **В-1**

1. Дано:  $OA = 10$  см,  $AM = 10\sqrt{3}$  см.

Найти:  $\angle AB$ .

Решение:  $\triangle OAM$  — прямоугольный, т.к.  $AM$  — ка-

сательная. Тогда  $\operatorname{tg} \angle AOM = \frac{AM}{AO} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$ .

Т.о.  $\angle AOM = 60^\circ$ ,  $\angle AB = \angle AOM = 60^\circ$ .

Ответ:  $60^\circ$ .

2. Дано:  $\triangle ABC$  — вписанный,  $OE = 3$  см.,  $OF = 3\sqrt{3}$  см.

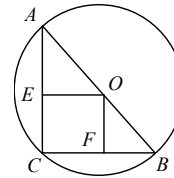
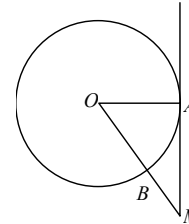
Найти:  $AO$ .

Решение: Т.к.  $AB$  проходит через центр окружности, то  $AB$  — диаметр, и  $AO = OB$ ,  $\angle EAO = \angle FOB$ , т.к.

$AE \parallel OF$ , и  $\triangle AEO = \triangle FOB$  (по гипотенузе и углу),  $EO = FB = 3$  (см).

$$OB = \sqrt{OF^2 + FB^2} = \sqrt{29 + 9} = 6 \text{ (см)}.$$

Ответ: 6 см.



## В-2

1. Дано:  $AO = 5$  см,  $AC = 10\sqrt{2}$  см.

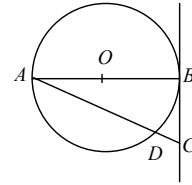
Найти:  $\angle DB$ .

Решение:

$$\angle B = 2\angle A; \cos \angle A = \frac{AB}{AC} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\angle A = 45^\circ, \angle B = 90^\circ.$$

Ответ:  $90^\circ$ .



2. Дано:  $\angle A = 90^\circ$ ,  $OC = 5$  дм,  $AO = 3\sqrt{2}$  дм.

Найти:  $AD$ ,  $DC$ .

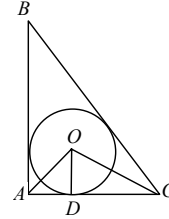
Решение: Т.к.  $AC$  — касательная, то  $OD \perp AC$  и  $\triangle AOD$  — прямоугольный, равнобедренный, тогда:

$$AO = \sqrt{AD^2 - OD^2} = \sqrt{2AD^2} = AD\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ (дм)}.$$

$AD = OD = 3$  (дм). В прямоугольном  $\triangle ODC$

$$DC = \sqrt{OC^2 - OD^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \text{ (дм)}.$$

Ответ: 3 дм, 4 дм.



## В-3

1. Дано:  $AM = 10$  см.,  $P_{OAMB} = 40$  см.

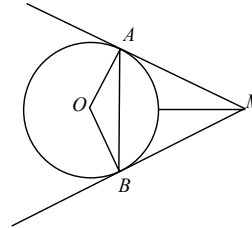
Найти:  $\angle AB$ .

Решение:  $P_{OAMB} = OA + AM + BM + OB$ .

Т.к.  $AM = BM = 10$  (см) и  $OA = OB = R_{\text{окр}}$ , то  $P_{OAMB} = 2OA + 2O = 40$  см,  $OA = OB = 10$  см, следовательно  $OAMB$ -ромб, а т.к.  $OA \perp AM$  и  $OB \perp BM$ , то  $OAMB$ -квадрат, т.е.

$$\angle AOB = \angle AB = 90^\circ.$$

Ответ:  $90^\circ$ .



2. Дано:  $\angle CAD = 30^\circ$ ,  $AD$  — диаметр,  $AB = 2$  см.

Найти:  $S_{ABCD}$ .

Решение:  $\angle ACD = 90^\circ$ , т.к.  $AD$  — диаметр.

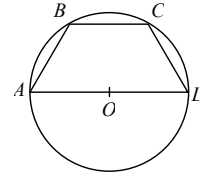
$$\angle D = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ, \Rightarrow \angle BAD = 120^\circ.$$

$$\angle B = 180^\circ - \angle D = 120^\circ; \angle BAD = 180^\circ - \angle BCD = 60^\circ,$$

$$\Rightarrow \angle BAD - \angle CAD = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ.$$

Аналогично  $\angle BCA = 30^\circ \Rightarrow \triangle ABC$  — равнобедренный и  $AB = BC = 2$  см. По теореме косинусов:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle B} = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ} = 2\sqrt{3} \text{ см}$$



$$\frac{AC}{CD} = \operatorname{tg} \angle CAD; CD = \frac{AC}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ABD}. S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}. S_{ABCD} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

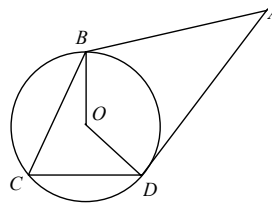
Ответ:  $3\sqrt{3}$  (см<sup>2</sup>).

#### В-4

1. Дано:  $R_{\text{окр}} = 5$  см,  $AB = 5$  см.

Найти:  $\angle BCD$ .

Решение:  $AD = AB = 5$  (см), т.к. это касательные проведенные из одной точки.  $OB = OD = 5$  (см) – радиусы окружности.  $OB \perp AB$  и  $OD \perp AD$ , следовательно  $BODA$  – квадрат и  $\angle BOD = 90^\circ$ ,  $\angle C = \frac{1}{2} \angle BOD = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$ .



Ответ:  $45^\circ$ .

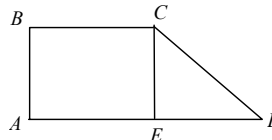
2. Дано:  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle D = 30^\circ$ ,  $CD = 12$  см.

Найти:  $S_{ABCD}$ .

Решение: проведем высоту  $CE$ ,

$$\frac{CE}{CD} = \sin \angle D;$$

$$CE = CD \cdot \sin \angle D = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6 \text{ (см)}.$$



$ED = \sqrt{CD^2 - CE^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$  (см). Обозначим:  $BC = AE = x$ ,  $AD = x + 6\sqrt{3}$ . По условию:  $AB + CD = BC + AD$ .  $6 + 12 = x + x + 6\sqrt{3}$ ,  $2x = 12 - 6\sqrt{3}$ ,  $x = 9 - 3\sqrt{3}$  (см).  $AD = 9 + 3\sqrt{3}$  (см).

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot CE = \frac{9 - 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 54 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ:  $54 \text{ см}^2$ .

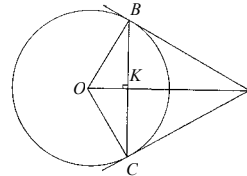
#### В-5

1. Дано:  $OA = 8$  см,  $OK = 6$  см.

Найти:  $\cup BC$ .

Решение: Пусть  $BC$  пересекает  $OA$  в точке  $K$ .

$$\triangle OBK \sim \triangle KBA \Rightarrow \frac{OK}{BK} = \frac{BK}{AK} \Rightarrow$$



$$BK^2 = OK \cdot AK = 12 \text{ (см}^2\text{)}. \text{ Т.е. } BK = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

$$\text{Тогда } \operatorname{tg} \angle BOK = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle BOK = 30^\circ \Rightarrow \angle BOC = 60^\circ = \angle BC.$$

Ответ:  $60^\circ$ .

2. Дано:  $AD = 24 \text{ см}$ ,  $BC = 10 \text{ см}$ ,  $BE = 17 \text{ см}$ .

Решение: Окружность описанная около данной трапеции, будет также описана около  $\triangle ABD$ . Несложно доказать, что  $AE = 7 \text{ см}$ ,  $ED = 17 \text{ см}$ .

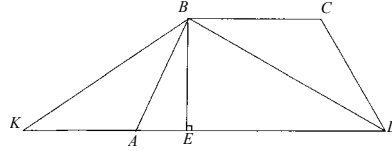
Тогда  $\angle DBE = 45^\circ$ . Отложим на луче  $EA$  от точки  $E$  отрезок  $EK = 17 \text{ (см)}$ .

Тогда  $\angle KBE = 45^\circ$ , а  $\angle ABE < 45^\circ$ .

Следовательно,  $\angle ABD < 90^\circ$ .

Таким образом,  $\triangle ABD$  — остроугольный, значит, центр окружности, описанной около него, лежит внутри этого треугольника.

Ответ: внутри трапеции.



### В -6

1. Дано:  $AD = 2 \text{ см}$ ,  $BD = 6 \text{ см}$ .

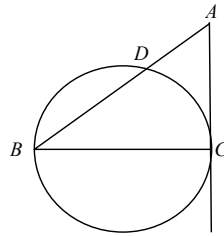
Найти:  $\angle CD = ?$

Решение: По свойству касательной и секущей к окружности, проведенных из одной точки, имеем:  $AC^2 = AD \cdot AB = 16 \text{ (см}^2\text{)}$ , откуда  $AC = 4 \text{ (см)}$ .

$$\text{Тогда } \sin \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\angle ABC = 30^\circ \Rightarrow \angle CD = 60^\circ.$$

Ответ:  $60^\circ$ .



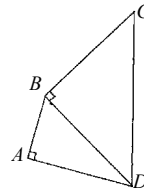
2. Дано:  $ABCD$  — четырехугольник,  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle CBD = 90^\circ$ ,  $\angle BDC = 45^\circ$ ,  $\angle BDA = 30^\circ$ .

Решение: Если биссектрисы углов данного четырехугольника пересекаются в одной точке, то существует вписанная в него окружность, и, следовательно,  $AB + CD = BC + AD$ . Обозначив  $BD$  за  $a$  получим.

$$AB = \frac{a}{2}, \quad BC = a, \quad CD = a\sqrt{2}, \quad AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad \text{откуда}$$

видно, что  $AB + CD \neq BC + AD$ , т.е. биссектрисы не могут пересекаться в одной точке.

Ответ: нет.



### В-7

1. Доказательство:

Пусть радиус окружности с центром  $O_1$  равен 1, а с центром в  $O_1 - x$ .

Тогда радиус полуокруга равен 3,  $OO_1 = 2$ ,  $OO_2 = 3 - x$ . Из  $\triangle O_1EO$  име-

ем  $OE = \sqrt{3}$ , а из  $\triangle O_2FO$   $OF = \sqrt{(3-x)^2 - x^2} = \sqrt{9-6x}$ ;  $EF = OE +$

$OF = \sqrt{3} + \sqrt{9-6x}$ .

Рассмотрим  $\triangle O_1KO_2$  ( $O_1K \perp O_2F$ ):  $O_2O_1 = 1+x$ ,  $O_2K = x-1$ ,

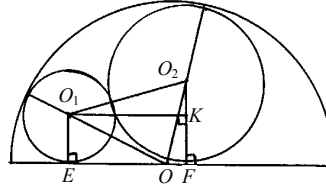
$O_1K = EF = \sqrt{3} + \sqrt{9-6x} \Rightarrow$

$(\sqrt{3} + \sqrt{9-6x})^2 = (x+1) - (x-1)^2$ ,

откуда  $25x^2 - 42x + 9 = 0$  и, учиты-

вая, что  $x > \frac{6}{5}$ ,  $x = \frac{21+6\sqrt{6}}{25}$ .

Ответ:  $x = \frac{21+6\sqrt{6}}{25}$ .



### В-8

Дано:  $AD = a$ ,  $DC = b$ ,  $AB = BC$ .

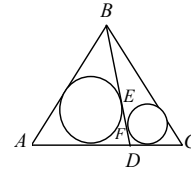
Найти:  $EF = ?$

Решение: Пусть в некоторый  $\triangle MPN$  вписана окружность и пусть  $PN = t$ . Тогда расстояние от  $MP$  и  $MN$  равно  $p - t$ , где  $p$  — полупериметр  $\triangle MPN$ . В нашем случае, получая этот факт,

имеем:  $BE = \frac{AB + BD + a}{2} - a$ ,  $BF = \frac{BC + BD + b}{2} - b$ ,

$EF = |BE - BF| = \frac{|b - a|}{2}$ .

Ответ:  $\frac{|b - a|}{2}$ .



## Контрольные работы

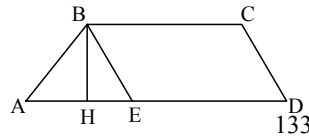
### К-1

#### В-1

1. Т.к.  $ED = AE = BC$ , то  $AD = 2BC$  и  $AH = \frac{1}{2}BC$ . Т.о. т.к.  $BH$  — высо-

та и медиана, то  $\triangle ABE$  (и  $\triangle ECD$ ) рав-

нобедренный, а т.к.  $\angle A = 60^\circ$ , то



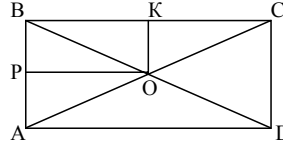
$$\angle BEA = \angle BEC = 60^\circ \Rightarrow \angle AEC = 120^\circ, \angle BCE = 60^\circ.$$

2. Необходимо построить два равных прямоугольных треугольника по трем сторонам (диагональ и две стороны ромба: нарисует диагональ, затем из двух ее концов проведем окружность радиусом равным стороне. Точка пересечения будет третьей вершиной треугольника.

3. Т.к.  $AP = PB$  и  $BO = OD$ , то  $PO$  — средняя линия,  $\triangle ABO \Rightarrow PO \parallel AD$  (аналогично  $OK \parallel AB$ ). Т.о.  $PBKO$  — прямоугольник  $\Rightarrow KP = BO = OD$ .

4. Рассмотрим  $\triangle ATM$ :

$\angle M + \angle ATM = \angle CAT$  (по свойству внешнего угла). Т.о. сумма указанных углов будет равна сумме углов  $ACEKT$ , т.е.  $540^\circ$ .

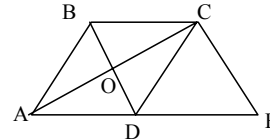


## В-2

1. Т.к. диагонали имеют общую середину, то  $ABCD$  — параллелограмм  $\Rightarrow BC \parallel AD$ .

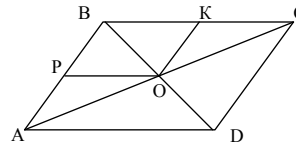
$\triangle DCE$  — равнобедренный, т.е.

$\angle E = \angle CDE = \angle A \Rightarrow ABCE$  — равнобокая трапеция.



2. Необходимо построить два равных прямоугольника (по стороне и углу). Затем соединить их гипотенузами. Построение: нарисует известный катет, затем из одного его конца проведем перпендикуляр, из другого конца под известным углом нарисует прямую до пересечения с перпендикуляром.

3. Т.к.  $OP \parallel BC$  и  $BO = OD$ , то  $AP = PB$  (аналогично  $BK = KC$ ). Т.е.  $PBKO$  — ромб. Т.к.  $\angle BPK = 40^\circ$ , то  $\angle BAC = 40^\circ$ , а т.к.  $AB = BC$ , то  $\angle BCA = \angle BAC = 40^\circ$ .

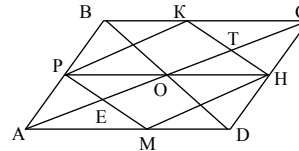
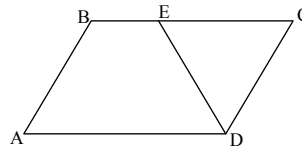


4. Нет, т.к. сумма углов выпуклого шестиугольника равна  $720^\circ$  сумма четырех острых углов меньше  $360^\circ$ , т.о. сумма двух оставшихся углов больше  $360^\circ$ , чего быть не может.

## В-3

1. Т.к.  $AB = CD$  и  $BC = AD$ , то  $ABCD$  — параллелограмм, т.о.  $\angle D = 150^\circ$ , а т.к.  $\angle EDC = 60^\circ$ , то  $\angle ADE = 90^\circ$  и т.к.  $BC \parallel AD$ , то  $ABED$  — прямоугольная трапеция.

2. Т.к. нам известен периметр, то разделив его на четыре части получим сторону квадрата. Построим отрезок равный  $(1/2)$  периметра, затем проведя две окружности из обоих концов этого отрезка радиусом  $(1/2)$  периметра полу-



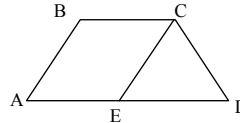
чим две их точки пересечения. Соединив их получим прямую перпендикулярную нашему отрезку и проходящую через его середину. Отложим на ней отрезок, равный  $(1/4)$  периметра. Т.о. получили две стороны квадрата, аналогично можно получить две другие стороны. Соединив их, получим квадрат.

3. Т.к.  $PM \parallel BD$ , то  $PM \perp AC$ , т.е.  $\angle PEC = 90^\circ$  и т.к.  $PK \parallel AC$ , то  $PK \perp BD \Rightarrow PK \perp KH \Rightarrow KTEP$  — прямоугольник, т.е. его диагонали равны. Т.о.  $EK = PT$  и  $KT \parallel PM \Rightarrow PK \parallel MH \Rightarrow PKHM$  — прямоугольник.

4.  $\angle BCD = \angle ACE$ ,  $\angle DEP = \angle CEH$ ,  $\angle TOM = \angle AON$ ,  $\angle MNK = \angle ONH$  (как вертикальные)  $\Rightarrow$  сумма отмеченных углов равна сумме углов  $ACEHNO$  и равна  $720^\circ$ .

#### В-4

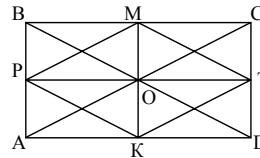
1. Т.к.  $AD \parallel BC$  и  $\angle B + \angle BCE = 180^\circ$ , то  $AB \parallel CE$  и  $ABCE$  — параллелограмм. Т.о.  $AC$  и  $BE$  имеют общую середину.



2. Необходимо построить два равных равнобедренных треугольника по основанию и углу при основании и соединить их: нарисуем отрезок равный диагонали ромба, от обоих его концов, в одну и ту же сторону отложим две прямые под данным углом. Их точка пересечения будет третьей вершиной.

3. Т.к.  $MK \parallel AB$  и  $MP = PK$ , то  $OP \perp AB$  и  $PT \perp MK$ , так что  $PMKT$  — ромб. Т.к.  $BM = MC$  и  $AK = KD$ , то точка пересечения диагоналей  $ABCD$  и  $PMKT$  совпадает. Так что  $MK \parallel CD$  и  $OK = CT$ , то  $CTKO$  — параллелограмм и  $OC = KT$ , а т.к.  $MPKT$  — ромб, то  $KT = PK = OC$ .

4.  $n=4$ , т.к. при  $n=3$  сумма двух углов треугольника меньше  $180^\circ$ , а при  $n \geq 5$  сумма  $n - 1$  углов была бы больше или равна  $360^\circ$ , т.о.  $n = 4$ .



#### К-2

##### В-1

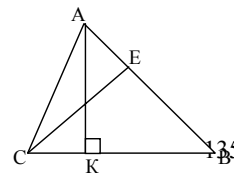
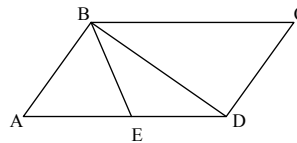
1. По теореме Пифагора:  $BD^2 = BE^2 + ED^2$ , то  $\triangle BED$  — прямоугольный и  $BE$  — высота параллелограмма, т.о.

$$S = (4 + 5)12 = 108 \text{ (см}^2\text{)}.$$

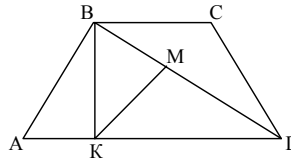
2. По теореме Пифагора:

$$CB = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ (см)}.$$

$$\text{Т.о. } S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 = 75 \text{ (см}^2\text{)}.$$



3. Из  $\triangle ABK$ :  $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{BK}{AK}$ , т.о.  $AK = \sqrt{3}$  (см)  $\Rightarrow AD = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$  (см). Т.о.  $S = \frac{1}{2} (4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$  (см<sup>2</sup>).  $S_{BKD} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$  (см<sup>2</sup>).



Т.к.  $MD : BD = \frac{1}{2}$ , то  $S_{KMD} : S_{KBD} = \frac{1}{2}$ .

Т.о.  $S_{KMD} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$  см<sup>2</sup>.

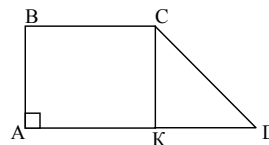
4. Т.к.  $S_{ABDE} = S_{ACDE}$ , то  $S_{ABD} = S_{ACD}$ , т.о. у них одинаковые высоты  $\Rightarrow BC \parallel AD$ .

### В-2

1. По теореме Пифагора:

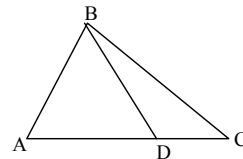
$KD = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$  см.  $AD = 4 + 6 = 10$  см,

т.о.  $S = \frac{1}{2} \cdot 8(4 + 10) = 56$  (см).



2. По теореме Пифагора  $BC^2 = BD^2 + DC^2$  то  $BD \perp AC$ , а т.к.  $\angle A = 45^\circ$ , то  $AD = BD = 12$  см,

т.о.  $S = \frac{1}{2} (12 + 5)12 = 102$  см<sup>2</sup>.

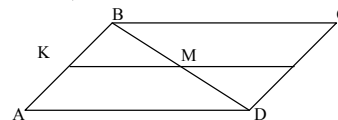


3. Т.к.  $BM = MD$  и  $KM \parallel AD$ , то  $MK$  — средняя линия  $\triangle ABD \Rightarrow KM = (1/2)AD$ . Т.о.  $AD = 8$  см,

$BD = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48}$  см, т.к.

$\angle BDA = 30^\circ$ , то  $AB = (1/2)AD = 4$  см.

$S = 4 \cdot \sqrt{48} = 16\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>.



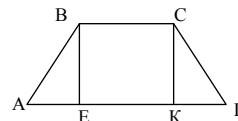
$S_{ABD} = \frac{1}{2} S = 8\sqrt{3}$  (см<sup>2</sup>). Т.к.  $BM = MD$ , то  $S_{AMD} = \frac{1}{2} S_{ABD} = 4\sqrt{3}$  (см<sup>2</sup>).

4. Т.к.  $BC \parallel KD$ , то  $KBCD$  — трапеция, а по свойству трапеции  $S_{KDB} = S_{KCD}$ , т.о.  $S_{AKCD} = S_{ABD}$ .

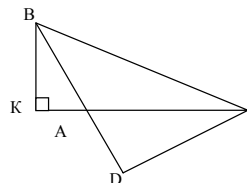
### В-3

1. По теореме Пифагора:  $AB^2 = AE^2 + BE^2$ , то  $\triangle ABE$  — прямоугольный, т.о.  $BE$  — высота

трапеции, т.о.  $S = \frac{1}{2} (3 + 6 + 1 + 6) \cdot 4 = 32$  см<sup>2</sup>.



2. По теореме Пифагора:





$$AB = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ см},$$

$$\text{т.о. } S = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10 = 75 \text{ см}^2.$$

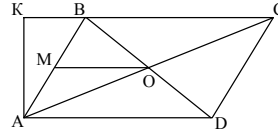
3. По теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ (дм)}.$$

$$\text{Т.о. } S = 13 \cdot AK = 2 \cdot 5 \cdot 12 = 120, \text{ т.о.}$$

$$AK = \frac{120}{13} \text{ (дм)}. S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30 \text{ (дм}^2\text{)},$$

$$\text{а т.к. } AM = MB, \text{ то } S_{AMO} = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15 \text{ (дм}^2\text{)}.$$



4. Т.к.  $S_{ABCP} = S_{DTBC}$ , то  $S_{ATD} = S_{APD}$ , т.о. т.к. у них одно и то же основание, то у них и одинаковые высоты, т.о.  $TP \parallel AD$ .

#### В-4

1. По теореме Пифагора:

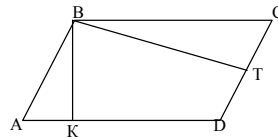
$$BC = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ (см)},$$

$$\text{т.о. } S = 10 \cdot 15 = 150 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2. По теореме Пифагора:  $BC^2 = CD^2 + BD^2$ ,  
то  $\triangle CBD$  — прямоугольный, т.о.  $BD$  —

высота  $\triangle ABD$ , т.к.  $\angle A = 45^\circ$ , то

$$AD = 15 \text{ (см)}, \text{ т.о. } S = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 15 = \frac{225}{2} \text{ (см}^2\text{)}.$$



$$3. \cos D = \frac{3}{5} = \frac{HD}{3}, \text{ т.о. } HD = 1,8 \text{ (см)}.$$

$$AC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ (см)} \text{ (по теореме Пифагора);}$$

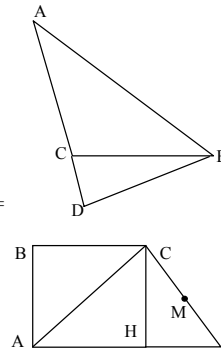
$$\sin D = \frac{4}{5} = \frac{CH}{3}, \text{ т.о. } CH = 2,4 \text{ (см)};$$

$$BC = 5 - 1,8 = 3,2 \text{ (см)}; S = \frac{1}{2} \cdot 2,4(5 + 3,2) =$$

$$8,2 \cdot 1,2 = \frac{246}{25} \text{ (см}^2\text{)};$$

$$AC = 4 \text{ (см)}, S_{ACD} = 6 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$S_{AMD} = \frac{1}{2} S_{ACD} = 3 \text{ (см}^2\text{)}, \text{ (т.к. } CM = MD\text{)}.$$

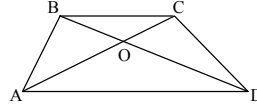


4. Т.к.  $S_{ABOC} = S_{AODCB}$ , то  $S_{AOD} = S_{BOC}$ , т.е.  $S_{ACD} = S_{DBC}$ , т.к. у этих треугольников общее основание и равные площади, то у них равные высоты  $\Rightarrow AB \parallel DC$ .

### К-3

#### В-1

1.  $S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 15 \cdot \sin BOA = 45 \sin BOA$ ;  $S_{COD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 18 \sin COD = 45 \sin BOA$ . Т.о.  $S_{ABO} = S_{COD} \Rightarrow ABCD$  — трапеция  $\Rightarrow \triangle BOC \sim \triangle AOD$  с коэффициентом  $k = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ , т.о.  $S_{BOC} : S_{AOD} = k^2 = \frac{1}{9}$ .



2.  $\triangle KBM \sim \triangle ABC$  ( $\angle B$  — общий,  $\angle BMK = 180^\circ - \angle KMC = \angle A$ ).  
Т.о.  $\frac{KM}{AC} = \frac{BK}{BC}$ ,  $\frac{S_{AKMC}}{S_{BMK}} = \frac{S_{ABC}}{S_{BMK}} - 1 = 8$ , т.о.

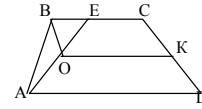
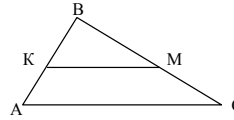
$S_{ABC} = 9S_{BMK}$ , т.е.

$k = 3$ , т.о.  $AB : BM = 3$ .

3. Т.к.  $EC \parallel AD \parallel OK$ , то по теореме Фалеса

$\frac{CK}{KD} = \frac{EO}{OA} = \frac{2}{3}$ , т.к.  $BO$  — биссектриса, то по

свойству  $\frac{AB}{AO} = \frac{BE}{OE}$ , т.о.  $\frac{AB}{BE} = \frac{AO}{OE} = \frac{3}{2}$ .



#### В-2

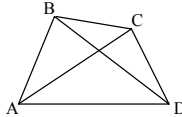
1. Т.к.  $MP \perp BD \Rightarrow MP \parallel AC$  (т.к.  $BD \perp AC$ ).

Т.о.  $\triangle BPM \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{BP}{BC} = \frac{BM}{AB}$ ,  $\frac{1}{3} = \frac{5}{AB}$

$\Rightarrow AB = 15$  (см), т.е.  $k = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{MBP} : S_{ABC} = k^2 = 1 : 9$ .

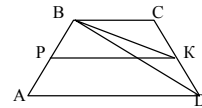
2. Т.к.  $\frac{BD^2}{BC} = AB \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BCD$  (по двум сторонам и углу между ними). Т.о.  $\angle BAD = \angle BDC$ , т.к.  $DC : AD = 3 : 2 \Rightarrow$

$k = \frac{3}{2}$ , т.о.  $\frac{S_{BDC}}{S_{ABD}} = k^2 = \frac{9}{4}$ .  $\frac{S_{ABCD}}{S_{ABD}} = 1 + \frac{S_{BDC}}{S_{ABD}} = \frac{13}{4}$ .



3. Т.к.  $BC \parallel AD \parallel PK \Rightarrow$  по теореме Фалеса

$\frac{BP}{AP} = \frac{CK}{KD}$ , а т.к.  $BK$  — биссектриса  $\triangle BCD \Rightarrow$



по свойству биссектрисы  $\frac{BC}{BD} = \frac{CK}{KD} = \frac{BP}{AP} = \frac{3}{4}$ .

### В-3

1.  $\triangle DBE \sim \triangle ADP$  по трем сторонам (т.к.  $\frac{DB}{AD} = \frac{BE}{DP} = \frac{DE}{AP} = k = \frac{2}{1}$ ). Т.о.  $\angle A = \angle BDE \Rightarrow$

$DE \parallel AC$ ;  $S_{DBE} : S_{ADP} = k^2 = 4$ .

2. Т.к.  $CE$  — медиана, и высота  $\Rightarrow \angle ACE = \angle ECD$ ,  $\angle BCO = \angle CAD = \angle D$ . Т.к.  $ABCE$  — прямоугольник  $\Rightarrow BO = OC \Rightarrow \triangle BOC \sim \triangle ACD$  (по трем углам)  $\Rightarrow$

$BO : BC = CD : AD \Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{BO}{CD} = \frac{1}{2} = k$  (т.к.

$BC = AE = ED) = \frac{S_{BOC}}{S_{ACD}} = k^2 = \frac{1}{4}$ ;

$S = S_{ACD} + \frac{1}{4} S_{ACD} \Rightarrow S_{ACD} = \frac{4}{5} S$ .

3.  $\triangle MBK \sim \triangle ABC$  по трем углам ( $\angle B$  — общий,  $\angle BMK = \angle A$ )  $\Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{MB}{BK}$ , но т.к.  $BO$  — биссектриса  $\Rightarrow BM : BK = MO : OK = 2 : 3 = BC : AB$ .

### В-4

1.  $\triangle AED \sim \triangle OEC$ , т.к.  $OC \parallel AD$ ,  $\angle E$  — общий  $\Rightarrow OC : AD = EC : ED = 2 : 6 = \frac{1}{3} = k$ . Отсюда

$EC : CD = 1 : 2 \Rightarrow S_{OEC} : S_{AED} = k^2 = 1 : 9$ .

2.  $\triangle BOC \sim \triangle ACB$  по трем сторонам (т.к.

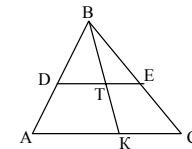
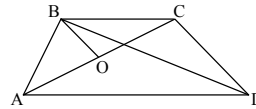
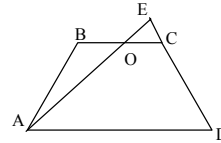
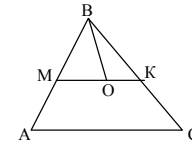
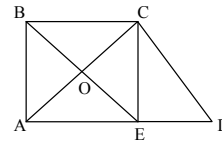
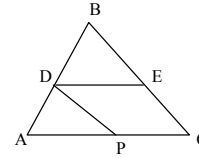
$\frac{OC}{AC} = \frac{BC}{AD} = \frac{BO}{CD} = \frac{1}{2} = k$ ).

Т.о.  $\angle BCO = \angle CAD \Rightarrow BC \parallel AD$ ;  $\frac{S_{BOC}}{S_{ACD}} = k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{BOC}} = 4$

$\Rightarrow \frac{S_{AOBCD}}{S_{BOC}} = 5 \Rightarrow S_{BOC} : S_{AOBCD} = 1 : 5$ .

3. По свойству биссектрисы :  $\frac{BE}{BD} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{AB}{CB}$

$\Rightarrow$  т.к.  $DE \parallel AC$  и  $\angle B$  — общий  $\triangle BED \sim \triangle ABC$   
 $\Rightarrow \angle C = \angle BDE$ .



**К-4**

**В-1**

1.  $\cos EMC = EM : MC = 2/3 = \frac{MC}{MB} \Rightarrow MB = 45 \text{ (мм)}$

$\Rightarrow MO = 15 \text{ (мм)}$ .

2. Нужно разделить отрезок на 5 равных частей см. С-21 В-1 (2).

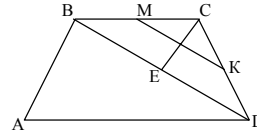
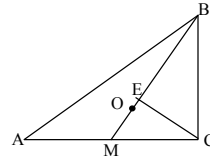
3. Т.к.  $MK$  — ср. линия  $\triangle ABC$ , то  $BD = 2\sqrt{5} \text{ (см)}$ ,

т.к.  $BC \parallel AD \Rightarrow \angle CBD = \angle BDA \cos BDA = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle CBD = 45^\circ$ ;

$\tan 45^\circ = CE/BE \Rightarrow BE = CE$ ;

$\tan ECD = \frac{2\sqrt{5} - BE}{CE} = 3 \Rightarrow 2\sqrt{5} - CE = 3CE$

$\Rightarrow CE = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ (см)}$ .



4. Пусть внешний прямоугольник имеет стороны  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ), а ширина рамки —  $c$ . Тогда если они подобны, то возможно 2 случая:

1.  $\frac{b-2c}{b} = \frac{a-2c}{a} \quad \frac{c}{b} = \frac{c}{d}$  невозможно;

2.  $\frac{b-2c}{a} = \frac{a-2c}{b} \quad b^2 - 2cb = a^2 - 2ca; (b-a)(b+a) = 2c(b-a); b+a = 2c$

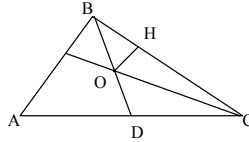
также невозможно  $\Rightarrow$  не могут.

**В-2**

1. Т.к.  $ET$  — ср. линия  $\triangle BDC$  то  $DC = 2ET = 16 \text{ (дм)}$ ;  $\tan A = \frac{BD}{25}$

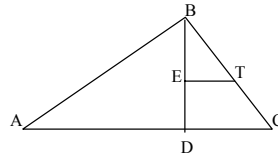
$\Rightarrow BD = 25 \tan A; \frac{1}{\tan A} = \frac{BD}{16} = \frac{25 \tan A}{16} \Rightarrow \tan A = \frac{4}{5} \Rightarrow BD = 20 \text{ (дм)}$ .

2. см. задачу С-21 В-5(2).



3.  $\sin 60^\circ = \frac{OH}{BO} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BO = 2 \text{ (см)} \Rightarrow BD = \frac{3}{2} BO = 3 \text{ (см)}$ , т.к.

$\angle B = 90^\circ \Rightarrow$  по свойству прямоугольного треугольника  $BD = AD = DC = 3 \text{ (см)} \Rightarrow \angle A = 30^\circ$ .



$$\cos 30^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 3\sqrt{3} \text{ (см.)}$$

4. Пусть данный прямоугольник имеет стороны  $a$  и  $b$ , тогда если эти прямоугольники подобны, возможны 2 случая:

1.  $\frac{a}{2b} = \frac{a}{b}$  невозможно;
2.  $\frac{a}{2b} = \frac{b}{a} \Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}b \Rightarrow$  они могут быть подобными.

### В-3

$$\begin{aligned} 1. OB &= 2OM = 2\sqrt{2} \text{ (дм)} \Rightarrow \operatorname{tg} OBC = \frac{OC}{OB} \Rightarrow OC = OB \operatorname{tg} OBC; \frac{1}{\operatorname{tg} OBC} = \\ &= \operatorname{ctg} OBC = \frac{OC}{OM} = \frac{OB \operatorname{tg} OBC}{OM} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} OBC \Rightarrow \operatorname{tg} OBC = \frac{1}{\sqrt{2}} OC = 2 \text{ (дм)}. \end{aligned}$$

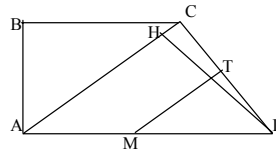
2. См. задачу С-21 В-1 (2).

3. Т.к.  $MT$  — средняя линия  $\triangle ACD \Rightarrow AC = 2MT = 2\sqrt{18}$  (см).

По т. Пифагора  $AB = \sqrt{4 \cdot 10 - 36} = 6$  (см).

Т.о.  $\angle BAC = 45^\circ = \angle CAD \Rightarrow AH = HD$ ;

$$\operatorname{tg} \angle ACD = \frac{HD}{CH} = \frac{HD}{(2\sqrt{18} - HD)} = 2. \quad HD = 4\sqrt{18} - 2HD \Rightarrow HD = 4\sqrt{2} \text{ см.}$$



4. Пусть квадрат со стороной  $c$  разрезали на 2 прямоугольника со сторонами  $a$ ,  $h$  и  $a - b$ . Если они подобны, то возможно 2 случая:

1.  $\frac{a}{b} = \frac{a}{a-b}$  невозможно;
2.  $\frac{a}{b} = \frac{a-b}{a}$ ;  $a^2 = (a-b)b$  невозможно, т.к.  $a-b < a$  и  $b < a \Rightarrow a^2 > (a-b)b$ . Значит нельзя.

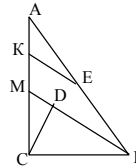
### В-4

1. Т.к.  $EK$  — ср. линия  $\triangle MAB$ , то  $MB = 2EK = 25 \Rightarrow DB = 16$ ;

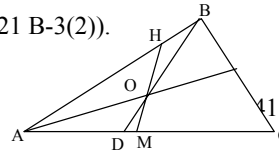
$$\triangle MBC \sim \triangle CDB (\angle DBC = \angle BCM) \Rightarrow \frac{MB}{CB} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow$$

$$CD = \sqrt{16 \cdot 9} = 12 \text{ (см)}; \quad MC = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ (см)} \text{ (по тео-}$$

$$\text{реме Пифагора)} \sin MBC = \frac{MB}{MC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$



$$2. \frac{P_1 Q_1}{P_2 Q_2} = \frac{P_2 Q_2}{AB} \Rightarrow AB = \frac{P_2 Q_2^2}{P_1 Q_1} = \frac{a^2}{b} \text{ (см. С-21 В-3(2)).}$$



$$\underline{3.} \quad \sin 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OD = 4 \quad (\text{дм}) \Rightarrow$$

$$BD = 3OD = 12 \quad (\text{дм}); \angle DOM = \angle MOB = 30^\circ \Rightarrow \angle AHO = 180 - \angle OHB =$$

$$= 180 - 180 + 60 = 60^\circ \Rightarrow \angle A = 30^\circ \Rightarrow AD = DB = 12 \text{ см} \Rightarrow AM = 14 \quad (\text{дм}),$$

$$\text{т.к. } DM = (1/2)DO = 2 \text{ дм} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{AH}{AM} = \frac{14}{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{28}{\sqrt{3}} \quad (\text{дм}).$$

4. Пусть прямоугольник со сторонами  $a, b$  разрезан на прямоугольники со сторонами  $b, c$  и  $a - c$ , тогда если они подобны, то:

$$1. \quad \frac{b}{c} = \frac{a-c}{b} \Rightarrow b^2 = (a-c)c. \text{ Подбором находим, что при } a = 2,5; b = 1;$$

$$c = 2 \text{ равенство выполняется} \Rightarrow \text{так можно разрезать.}$$

## К-5

### В-1

$$\underline{1.} \quad S = (1/2)P \cdot \tau, P = 6\sqrt{3} \quad (\text{см}),$$

$$S = \frac{1}{2} 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \sin 60^\circ = 3\sqrt{3} \quad (\text{см}^2), \text{ т.о. } \tau$$

$$= 1 \quad (\text{см}).$$

$$\underline{2.} \quad \text{Т.к. } \angle AOC = 90^\circ \quad (\text{центральный}) \Rightarrow$$

$$\angle B = \frac{\angle AOC}{2} = 45^\circ \Rightarrow \text{т.к. } \angle OBC = 15^\circ, \text{ то } \angle ABO = 30^\circ, \sin 30^\circ = (6/R)$$

$$\Rightarrow R = 12 \quad (\text{см}).$$

3. По свойству вписанной окружности:

$$AD + BC = AB + CD \Rightarrow AB = AD = 10\sqrt{2} \quad \text{дм};$$

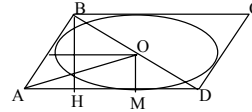
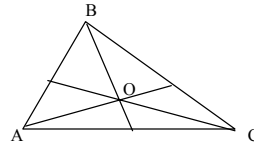
$$\sin 45^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = 10 \quad \text{дм},$$

$$\tau = (1/2)BH = 5 \quad (\text{дм});$$

$$\angle BDA = (180^\circ - 45^\circ) \frac{1}{2} = \frac{135^\circ}{2}; \quad \text{tg } \angle BDA = \frac{\tau}{MD} \Rightarrow MD = \frac{\tau}{\text{tg } \angle BDA}.$$

$$\text{Сумма расстояний: } 2MD = \frac{10}{\text{tg } \frac{135^\circ}{2}} \approx 4,1.$$

4. Через точку  $O$  проведем лучи  $AO$  и  $BO$ , которые пересекут окружность в точках  $M$  и  $H$ . Пусть  $AH$  и  $BM$  пересекаются в точке  $C$ . По свойству треугольника вписанного в окружность и построенного, как на диаметре  $\angle AHB = \angle AMB = 90^\circ \Rightarrow$  искомый перпендикуляр лежит на прямой  $CO$ .



## В-2

1. По теореме синусов  $\frac{AC}{\sin 120^\circ} = 2R = 4$  (см),  $AC = 2\sqrt{3}$  (см).

$$\angle A = \angle C = 30^\circ, \cos A = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot 2 = 2 \text{ см.}$$

2. Т.к. центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис,

$$\text{то } \angle OCT = 45^\circ \Rightarrow CT = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2 \text{ (см)} = PO = R. \angle POT$$

$$= \angle C = 90^\circ \text{ (т.к. } OP \parallel CT \text{ и } PC \parallel OT) \Rightarrow$$

$$\angle PMT = \angle POT \cdot \frac{1}{2} = 45^\circ \text{ (вписанный угол равен половине центрального).}$$

3. Т.к.  $AB \parallel CD$  и  $AB = CD \Rightarrow ABCD$  — параллелограмм, но по свойству вписанного четырехугольника  $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$ , т.е.

$$\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90^\circ \text{ и } ABCD \text{ — прямоугольник} \Rightarrow BD = 2R = 8 \text{ см} \Rightarrow \angle ABD = 30^\circ \Rightarrow$$

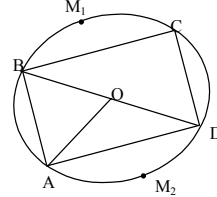
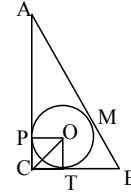
$$AD = 4 \text{ см. } AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = 4\sqrt{3} \text{ (см). Точка } M \text{ может иметь два положения: } M_1 \text{ и } M_2.$$

$$\angle AOD = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ \Rightarrow \angle BOC = 60^\circ \text{ и } \angle BM_1C = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle BOC) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 300^\circ = 150^\circ, \angle BM_2C = (1/2) \angle BOC = 30^\circ; AB = 4\sqrt{3} \text{ точка } M \text{ может иметь два различных положения, } \angle AOD = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ \Rightarrow$$

$$\angle BM_1C = 30^\circ; \angle BM_2C = 150^\circ.$$

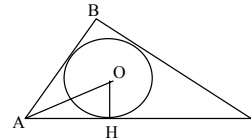
4. Построим окружность с диаметром  $BD = ET$  и окружность с центром в точке  $B$  и радиусом  $PO$ . Пусть вторая окружность пересекает первую в точках  $A$  и  $C$ , тогда  $ABCD$  — искомый.



## В-3

$$1. \angle OAH = (1/2) \angle A = 30^\circ; \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{OH}{AH} \Rightarrow$$

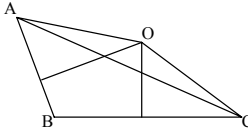
$$AH = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ (см).}$$



$$2. \text{ Т.к. } AO = OC = R, \text{ то } R = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4 \text{ (дм).}$$

По теореме синусов  $AC : \sin B = 2R \Rightarrow$

$$\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{т.к. } \angle B > 90^\circ, \text{ то } \angle B = 135^\circ.$$



3. По свойству вписанной окружности  $AB + CD = BC + AD$ ;  $\angle BCA = \angle CAD = 45^\circ$ ,  $\angle D = 45^\circ \Rightarrow CH = 2\tau = 12$  см,  $AH = HD$  (т.к.  $\angle CAD = \angle D$ )

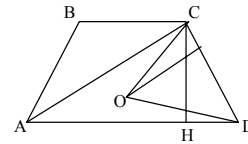
$\Rightarrow AH = HD = CH = 12$  см  $\Rightarrow CD = \sqrt{CH^2 + ND^2} = 12\sqrt{2}$  см  $\Rightarrow CD + AB = 22\sqrt{2}$  см,  $AD + BC = AB + CD = 22\sqrt{2}$  (см).

$\angle BCD = 180^\circ - \angle D = 135^\circ$ .

$\angle COD = (180^\circ - \frac{\angle D}{2} - \frac{\angle BCD}{2}) = 90^\circ$ . Тогда

$S_{OCD} = (1/2) \cdot CD \cdot \tau = 36\sqrt{2}$  (см<sup>2</sup>)  $= (1/2) CO \cdot OD$

$\Rightarrow CO \cdot OD = 72\sqrt{2}$  см<sup>2</sup>.



4. Проведем прямые  $AO$  и  $BO$ . Пусть они пересекут окружность в точках  $A_1$  и  $B_1$ .  $\angle AA_1B = \angle AB_1B = 90^\circ$  (по свойству треугольника построенного как на диаметре и вписанного в окружность). Пусть  $AB_1$  и  $A_1B$  пересекаются в точке  $O_1$ , прямая  $OO_1$  — искомая.

#### В-4

1. Т.к.  $\angle A = \angle B = 45^\circ \Rightarrow \angle C = 90^\circ \Rightarrow AB$  — диаметр (см. предыдущую задачу). Т.о.  $AB = 4\sqrt{2}$  (см),  $AC = CB = 4$  (см).

2. Т.к. центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис, то  $\tau = OE$ . Пусть  $BE = a$ . Тогда  $AB = 2a$ , т.к. против угла в  $30^\circ$  ( $\angle A = 90^\circ - \frac{\angle B}{2} = 30^\circ$ ) лежит катет равный половине гипотенузы,  $AC = 2\sqrt{3}a \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}a \cdot a =$

$= a^2\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \tau = \frac{1}{2} a(4 + 2\sqrt{3})2\sqrt{3}$  (см). Т.о.

$a = 4 + 2\sqrt{3}$ , т.о.  $BO = 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4$  (см).

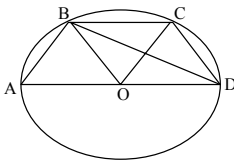
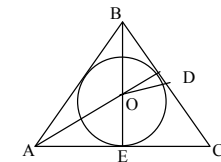
$\cos DOB = \frac{DO}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle DOB = 30^\circ \Rightarrow \angle DEB = (1/2) \angle DOB = 15^\circ$ .

3. Т.к.  $\angle ABD = 90^\circ$ , то центр описанной окружности — середина  $AD$ . А т.к.  $\angle A = 60^\circ$ , то  $AB = AO = BO = OD = OC = CD$  (т.к. угол  $\angle D = \angle A = 60^\circ$ )  $\Rightarrow R = 4$  (см). Либо

$BMC = \frac{1}{2} (360^\circ - \angle BOC)$  (т.к. вписанный угол равен половине центрального).

Т.к.  $\angle BOC = 60^\circ$ , то  $\angle BMC = 30^\circ$  или  $15^\circ$ .

4. Построим окружность с диаметром  $BD = BO + OD$ . Затем из точки  $O$  под углом  $\angle H$  проведем прямую. Из точки  $B$  радиусом  $BO$  прове-





дем окружность. Пусть точки пересечения с первой окружностью будут  $A_1$  и  $A_2$ . Проведем лучи  $BA_1$  и  $BA_2$  до пересечения с нашей прямой. Обозначим эти точки за  $A$  и  $C$ . Т.о.  $ABCD$  — искомый.

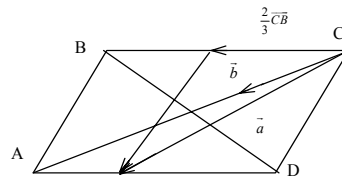
# К-6

## В-1

1.  $\vec{a} = (2/3)\vec{CB} + \vec{CD}$ ;  $\vec{b} = \frac{1}{4}(\vec{BA} - \vec{BC}) = \frac{1}{4}(\vec{BA} + \vec{CB}) = (1/4)\vec{CA}$  2.

а)  $\vec{MB}_1 = \frac{1}{2} \left( \vec{MA} + \vec{MC} \right)$ ;

б)  $\vec{CM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left( \vec{CA} + \vec{CB} \right) = \frac{1}{3} \left( \vec{CA} + \vec{CB} \right)$ ;



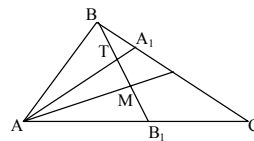
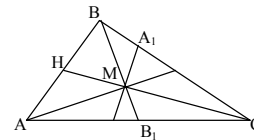
в) т.к. в  $\triangle CHB$ :  $\frac{CA_1}{BA_1} = \frac{CM}{MH} = 2 : 1 \Rightarrow$

$A_1M \parallel HB \Rightarrow \vec{MA_1} = (2/3)\vec{HB} = (1/3)\vec{AB}$ ;

г) Пусть  $T$  — середина  $BB_1 \Rightarrow$

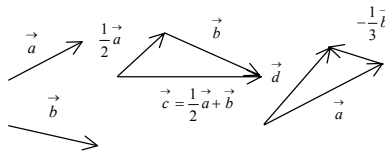
$\vec{AT} = \frac{1}{2} \left( \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} \right)$  и  $\vec{AA_1} = (2/3)\vec{AB} + (1/3)\vec{AC}$ .

Т.о.  $\vec{AA_1} = (4/3)\vec{AT} \Rightarrow T \in AA_1$ .



## В-2

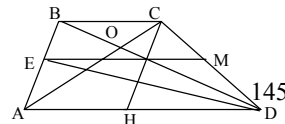
1.



2. а)  $\vec{AC} = \vec{AB} + (1/3)\vec{AD}$ ;

б) т.к.  $BC:AD = 1:3 \Rightarrow CO:OA = 1:3$ , т.о.  $\vec{BO} = (1/3)\vec{AD} - (1/3)\vec{AO}$ ;

в) т.к.  $CO : OA = \frac{1}{3} \Rightarrow$



$$\vec{AO} = (3/2)\vec{DM} - (3/2)\vec{DE};$$

г)

$$\begin{aligned} \text{т.к. } \vec{DE} &= \frac{1}{2}\vec{DA} + \frac{1}{2}(\vec{DB}) = \frac{1}{2}\vec{DA} + \frac{1}{2}(\vec{DC} + \frac{1}{3}\vec{DA}) = \frac{2}{3}\vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{DC} \\ \Rightarrow \text{т.к. } AD \parallel BC, \text{ а } DA \nparallel DC &\Rightarrow DE < (2/3)DA + (1/2)DC. \end{aligned}$$

### В-3

$$1. \vec{a} = \vec{AB} + (1/2)\vec{BC};$$

$$\vec{b} = \frac{1}{5}(\vec{BA} - \vec{BC}) = \frac{1}{5}(\vec{BA} + \vec{CB}) = \frac{1}{5}\vec{CA}.$$

$$2. \text{а) } \vec{AM} = (1/2)\vec{AD} + \vec{AB};$$

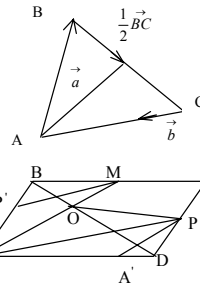
$$\text{б) т.к. } BO : BD = 1 : 3,$$

$$\text{то } \vec{BO} = (1/3)\vec{BA} + (1/3)\vec{BC};$$

$$\text{в) } P'M \parallel AP, A'P \parallel AM, P'M = (1/4)AP, A'P = (1/4)AM.$$

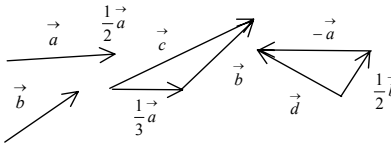
$$\text{т.о. } \vec{OD} = \frac{16}{3}(\vec{P'M} - \vec{A'P}) = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4}\vec{AP} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4}\vec{AM} = \frac{4}{3}\vec{AP} - \frac{4}{3}\vec{AM};$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \vec{OP} &= \vec{AP} - \vec{AO} = \vec{AD} + (1/2)\vec{CD} - (2/3)\vec{AB} - (1/3)\vec{AD} = (2/3)\vec{AD} - (1/6)\vec{AB}, \\ \text{т.к. } AD \nparallel AB &\Rightarrow OP < (2/3)AD + (1/6)AB. \end{aligned}$$



### В-4

1.

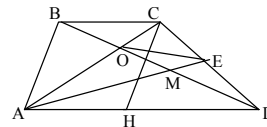


$$2. \text{а) } \vec{OE} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD});$$

$$\text{б) т.к. } BC : AD = 1 : 2, \text{ то } \vec{BO} = (1/3)\vec{AD} - (1/3)\vec{AB};$$

$$\begin{aligned} \text{в) т.к. } BC : AD = 1 : 2, \text{ то } CO : AC &= 1 : 3, \text{ т.о. } \vec{CO} = (-1/3)\vec{AC}, \\ \vec{AC} + (1/2)\vec{AD} &\Rightarrow \vec{CD} = (-1/3)\vec{AB} - (1/6)\vec{AD}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) т.к. } AM : AE = 5 : 1, \text{ то: } \vec{OM} &= (1/5)\vec{OA} + (4/5)\vec{OE}, \text{ но так же} \\ \vec{OD} &= \vec{OA} + 4\vec{OE}, \text{ т.о. } \vec{OM} = (1/5)\vec{OD} \Rightarrow \\ M &\in OD. \end{aligned}$$



**К-7**

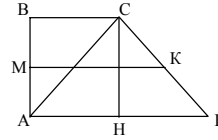
**В-1**

1. а) Это трапеция, т.к.  $AD \parallel DC \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot (6 + 8) \cdot 2\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$ ;

б)  $CH = BA = 2\sqrt{3}$ ,  $HD = 8 - 6 = 2$ , т.о.  $\operatorname{tg} D = \sqrt{3} \Rightarrow \angle D = 60^\circ$ ,  $\angle C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ;

в)  $MK$  — средняя линия трапеции  $\Rightarrow$

$$MK = \frac{1}{2} (8 + 6) = 7;$$



г) Если можно вписать, то  $AB + CD = CB + AD$ ,  $CD = 2HD = 4$ , но  $2\sqrt{3} + 4 \neq 14$ , т.о. нельзя;

д) Если можно описать окружность, то  $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$ , но  $90^\circ + 120^\circ \neq 180^\circ$ , т.о. нельзя;

е) По теореме Пифагора  $AC = \sqrt{12 + 36} = 4\sqrt{3}$ , т.о. т.к.

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ то } \triangle ABC \sim \triangle ACD \text{ (по трем сторонам);}$$

$$\text{ж) } \vec{CA} = \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{CD} + (4/3)\vec{CB}.$$

2. Пусть дан отрезок длины  $a$ , тогда построим прямоугольный треугольник с катетами  $a$  и  $2a$ , тогда гипотенуза будет равна  $a\sqrt{5}$ .

**В-2**

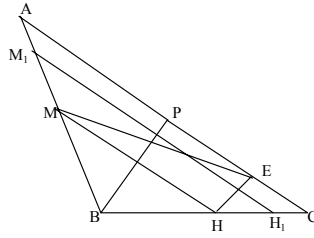
1. а)  $\angle A = (180^\circ - 120^\circ) \frac{1}{2} = 30^\circ$ , проведем  $BP \parallel AC$ . Тогда:

$$AP = (1/2)AC = 2\sqrt{3}.$$

$$AB = \frac{AP}{\cos A} \text{ т.о. } AB = 4, \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{BP}{2\sqrt{3}} \Rightarrow BP = 2, \text{ т.о. } S = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2 = 4\sqrt{3};$$

б) Т.к.  $\angle B$  — общий,  $\frac{AM_1}{AB} = \frac{H_1C}{BC}$ , то  $\triangle ABC \sim \triangle M_1BH_1$ ,

$$M_1H_1 = (3/4)AC = 3\sqrt{3};$$



в) Аналогично  $\Delta ABC \sim \Delta BMH$  с  $k = \frac{1}{2}$ , т.о.  $S_{MBH} : S_{ABC} = k^2 = \frac{1}{4}$ ;

$$\text{г) } \vec{MB} = \frac{1}{2} \left( \vec{AC} + 2\vec{HB} \right);$$

д) Можно, т.к.  $\angle A + \angle MHC = \angle C + \angle HMA = 180^\circ$  (т.к.  $MH \parallel AC$ );

е)  $HE = (1/2)BP = 1$ ,  $MH = (1/2)AC = 2\sqrt{3}$ ,  $ME = \sqrt{12+1} = \sqrt{13} \Rightarrow$

$$\sin HME = \frac{1}{\sqrt{13}};$$

ж)  $S = (1/2)P\tau$ ,  $P = 2 \cdot (1/2)AB + (1/2)AC = 4 + 2\sqrt{3}$ .

$$S = (1/4)S_{ABC} = \sqrt{3}, \text{ т.о. } \tau = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.$$

2. Пусть длина данного отрезка равна  $a$ , тогда построим прямоугольный треугольник с катетом  $2a$  и гипотенузой  $4a$ , второй катет — искомый.

### В-3

1. а)  $\angle OCB = (1/2)\angle DCB = 30^\circ$ ,  $\angle ADC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ,  
 $\angle ODC = (1/2)\angle ADC = 60^\circ$  (т.к. центр окружности должен лежать на биссектрисе);

$$\text{б) } \angle ADO = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ, \text{ т.о. } \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{AD}{2},$$

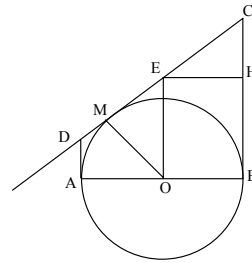
$$\text{т.о. } AD = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \angle OCB = 30^\circ, \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{CB}{OB}$$

$$\Rightarrow CB = 2\sqrt{3};$$

в) это трапеция, т.к.  $AD \parallel BC \Rightarrow S = \frac{1}{2}(2\sqrt{3}$

$$+ \frac{2\sqrt{3}}{3})4 = \frac{16\sqrt{3}}{3};$$

г)  $\angle OMC = 90^\circ$  (касательная),  $\angle B = 90^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ$ ,  
 $\angle MOB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ;



д)  $\angle OCB = \angle DOA = -\angle ADO + 90^\circ = 30^\circ$ , т.о.  $\triangle ADO \sim \triangle OCB$  (по острому углу);

е)  $\sin 60^\circ = \frac{EH}{EC}$ ,  $EC = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$ ,  $CH = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,  $MD = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,

$BC = 2\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ , т.е.  $OE = \frac{1}{2}(BC + MD)$ ;

ж) т.к.  $DM : DC = 1 : 4$ , то:

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OD} + \vec{OE}) = \frac{1}{2}(\vec{OD} + \frac{1}{2}(\vec{OD} + \vec{OC})) = \frac{3}{4}\vec{OD} + \frac{1}{4}\vec{OC}.$$

2. Пусть длина исходного равна  $a$ , тогда построив отрезок  $a\sqrt{5}$  (см. К-7 В-1 (2)), построим прямоугольный треугольник с катетами  $a\sqrt{5}$  и  $3a$ . Гипотенуза будет длиной  $a\sqrt{14}$ .

#### В-4

1. а) Т.к.  $ABCD$  — параллелограмм, от  $AB \parallel DC \Rightarrow \triangle BPT \sim \triangle PTC \Rightarrow$

$$\frac{DT}{TP} = \frac{1}{3} = k \Rightarrow \frac{S_{DTC}}{S_{TPB}} = k^2 = \frac{1}{9};$$

б) т.к.  $\angle A = 45^\circ$ , то  $PD = 4$ ,  $DT = (1/4)PD = 1 \Rightarrow S = 1 \cdot 4 = 4$ ;

в)  $PK : TK = 7 : 1$ , т.о.  $MK = (7/8)AD = \frac{7}{2}$ ;

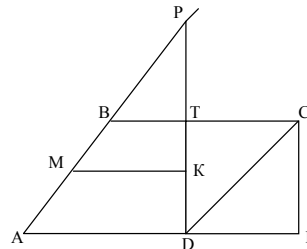
г) нет, т.к.  $\angle ADP + \angle ABC \neq 180^\circ$ ;

д)  $BT : AD = PT : PD = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$$\vec{AB} = \frac{4}{3}\vec{BT} + \vec{AC} = \frac{4}{3}\vec{BT} - \vec{CA};$$

е)  $BT = (3/4)AD = 3$ ,  $TC = 1 \Rightarrow AH = 5$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}. \text{ Т.о. } \sin CAH = \frac{1}{\sqrt{26}};$$



ж)  $BT = 3 = TP$ ,  $BP = 3\sqrt{2}$ . Т.к.  $BT = TP$ , то две точки касания отсекут один прямой угол, а третья разделит оставшийся угол пополам —  $90^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $135^\circ$ .

2. Необходимо построить прямоугольный треугольник по катету и прилежащему к нему углу в  $30^\circ$ , тогда другой катет будет искомым.

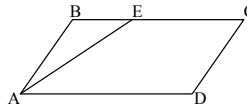
# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДИКТАНТЫ

## МД-1

### В-1

1. Сумма углов четырехугольника равна  $360^\circ$ . Пусть равные углы равны  $\alpha$ , тогда:  $3\alpha + \alpha - 40^\circ = 360^\circ$ ;  $\alpha = 100^\circ$ , т.о.  $100^\circ, 100^\circ, 100^\circ, 60^\circ$ .

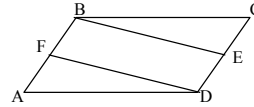
2. Т.к.  $\angle A = \angle C$ , то  $AE$  — биссектриса  $\Rightarrow \angle BEA = \angle EAD = 20^\circ \Rightarrow AB = BE = 10$  (см);  $BC = AD = 10 + 2 = 12$  (см).



3. Т.к. диагонали в параллелограмме точкой пересечения делятся пополам, то  $P_{ABO} = 10 + \frac{1}{2}(14 + 10) = 22$  (см).

4. Т.к.  $AB = CD$  и  $AB \parallel CD$ , то  $ABCD$  — параллелограмм  $\Rightarrow \angle BDA = \angle DBC = 15^\circ$  (как накрест лежащие).

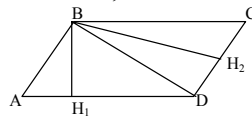
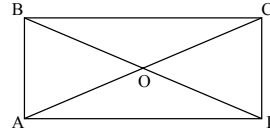
5. Т.к.  $AB \parallel CD$  и  $FB = AB - AF = CD - CE = ED$ , то  $FBED$  — параллелограмм  $\Rightarrow \angle BED = \angle BFD = 50^\circ$ .



6. Т.к.  $CO = OD$ , то  $\angle OCD = \angle ODC = (180^\circ - 60^\circ) \cdot \frac{1}{2} = 60^\circ \Rightarrow CD = CO = OD = 10 \Rightarrow$  т.к.

$BD = AC = 2OD$ , то  $BD = AC = 20$ .

7.  $\angle H_1BD = 15^\circ, \angle BDH_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle H_1BD = 75^\circ = \angle CBD = \angle CBH_2 + 15^\circ \Rightarrow \angle CBH_2 = 60^\circ \Rightarrow \angle C = 30^\circ \Rightarrow BC = 10$  см, т.о.  $P = 4 \cdot 10 = 40$  (см).



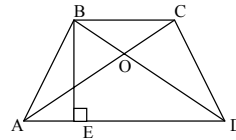
8. Расстояние в квадрате от центра до стороны равно  $\frac{1}{2}$  стороны  $\Rightarrow$

$20 = 2a$ , т.е.  $P = 4a = 40$  (см).

9.  $\triangle EBD \sim \triangle AOD$  ( $\angle BDE = \angle OAD$ , т.к.

$AB = CD \Rightarrow \angle EBD = \angle EDB$  и  $BE = ED = 4$  (см).

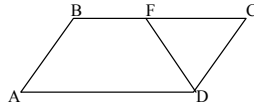
10.  $EF$  — средняя линия, т.к.  $AE = EB$  и  $EB \parallel AC \Rightarrow AC = 20$  (см), т.о., т.к.  $\angle A = 45^\circ$ , то  $CB = 20$  (см).



### В-2

1. Сумма углов четырехугольника равна  $360^\circ$ , пусть равные углы  $\alpha$ , тогда:  $3\alpha + \alpha + 80^\circ = 360^\circ \Rightarrow \alpha = 70^\circ$ , т.о.  $70^\circ, 70^\circ, 70^\circ, 150^\circ$ .

2.  $FC = 20 - 5 = 15$  (см), т.к.  $\angle B = \angle D = 140^\circ$ , то  $DF$  — биссектриса  $\Rightarrow \angle DFC = \angle CDF = 70^\circ \Rightarrow FC = CD = AB = 15$  (см).



3. Т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам, то  $BO = 8 \text{ см} \Rightarrow P = 18 + 8 + OC = 38 \Rightarrow OC = 12 \text{ (см)} \Rightarrow AC = 24 \text{ (см)}$ .

4. Т.к.  $BC = AB$ ,  $BC \parallel AB$ , то  $ABCD$  — параллелограмм.  $\angle BAC = \angle ACD = 40^\circ$ .

5. Т.к.  $AB \parallel CD$  и  $BC \parallel AD$ , то  $EC = BC - BE = AD - FD = AF \Rightarrow AECD$  — параллелограмм  $\Rightarrow AO + OF = \frac{1}{2}(AC + EF) = 15 \text{ (см)}$ .

6.  $\angle CAD = 30^\circ$ , т.к.  $BD = AC$ , то  $CD = (1/2)AC = 5 \text{ (см)}$ .

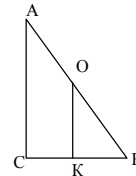
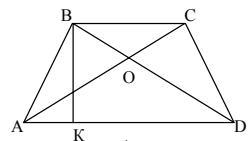
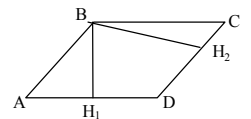
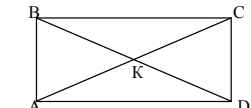
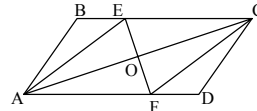
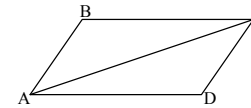
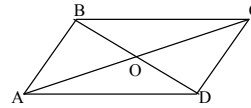
7.  $BH$  и высота и медиана  $\Rightarrow BH$  и биссектриса  $\Rightarrow \angle ABH_1 = \angle H_1BH_2 = \angle H_2BC = \alpha$ , т.о.  $3\alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$ .

8. см. МД-1 В-1 (8) расстояние равно

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{P}{4} = \frac{P}{8} = 10 \text{ (см)}.$$

9.  $\triangle AOD \sim \triangle KBD$  (по 3-м углам)  $\Rightarrow$  (т.к.  $AB = CD$ , то  $AO = OD$ )  $BK = KD = 7 \text{ (см)}$ .

10. Т.к.  $\angle B = 45^\circ$ , то  $AC = BC = 18$ , т.к.  $KO = OB$  и  $OK \parallel AC$ , то  $OK$  — средняя линия и  $OK = 9 \text{ (см)}$ .

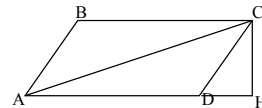


## МД-2

### В-1

1. По т. Пифагора диагональ равна  $4\sqrt{2} \text{ см}$ , т.о.  $S = (4\sqrt{2})^2 = 32 \text{ см}^2$ .

2.  $\sin 30^\circ = CH / AC \Rightarrow CH = 6 \text{ (см)}$ , т.о.  $S = 6 \cdot 10 = 60 \text{ (см}^2\text{)}$ .

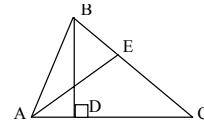
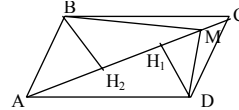


3. Т.к.  $S_{ABC} = S_{ACD} \Rightarrow BH_2 = DH_1 \Rightarrow S_{BMC} = \frac{1}{2} MC \cdot BH_2 = \frac{1}{2} MC \cdot BH_1 = S_{DMC} = Q$ .

4. Пусть  $a_1 = a_2$ ,  $h_1 = 3h_2 \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2} a_1 h_1 = \frac{1}{3} S_2$

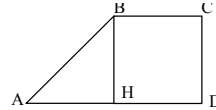
$\Rightarrow S_1 : S_2 = 1 : 3$ .

5.  $\triangle AEC \sim \triangle BDC$  (т.к.  $\angle C$  — общий)  $\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AE} \Rightarrow AE = \frac{8 \cdot 10}{16} = 5$  (см).



6.  $AH = AD - BC = 4$  (см),  $\tan 30^\circ = \frac{BH}{AH} \Rightarrow BH = \frac{4\sqrt{3}}{3}$  (см), т.о.

$S = \frac{1}{2} (6+2) \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$  (см<sup>2</sup>).

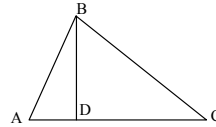


7. Пусть  $a = 15$ , тогда  $b = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ ,

$S = 15 \cdot 20 = 300 = \frac{1}{2} a_1^2 \Rightarrow a_1 = 10\sqrt{6} = a_2$ .

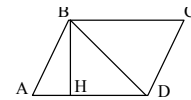
8. По теореме Пифагора:

$AC = \sqrt{m^2 - h^2} + \sqrt{n^2 - h^2}$ .



9.  $\angle BDA = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) = 60^\circ$ ,  $\sin 60^\circ = \frac{BH}{BD}$ ,

$BH = BD \cdot \sin 60^\circ = \frac{3}{2}$ .

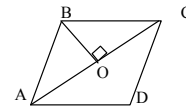


10. Треугольник прямоугольный, т.к.  $7^2 + 24^2 = 25^2 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 7 = 84$ .

## В-2

1. Диагональ равна  $\sqrt{8}$  см, затем по теореме Пифагора сторона равна 2.

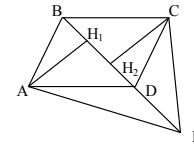
2.  $BO = (1/2)AC = 5$  (см)  $\Rightarrow$  т.к.  $S_{ABC} = S_{ACD}$ , то  $S_{ABCD} = 5 \cdot 10 = 50$  см<sup>2</sup>.



3. Т.к.  $S_{ABD} = S_{BDC}$ , то  $AH_1 = CH_2 \Rightarrow$

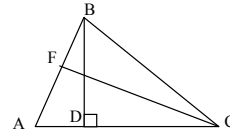
$S_{ADP} = (1/2)DP \cdot AH_1 = (1/2)DP \cdot AH_2 = S_{DCP} = S$ .

4.  $h_1 = h_2$ ,  $a_1 = \frac{a_2}{2}$ ,  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}h_1 \cdot \frac{a_2}{2}}{\frac{1}{2}h_1 \cdot a_2} = \frac{1}{2}$ .

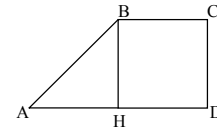




5.  $\triangle BDA \sim \triangle AFC$  (т.к.  $\angle A$  — общий)  $\Rightarrow$   
 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{FC} \Rightarrow AB = \frac{BD \cdot AC}{FC} = 6.$



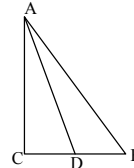
6.  $BH = CD = 6 = AH$  (т.к.  $\angle A = 45^\circ$ )  $\Rightarrow$   
 $S = \frac{1}{2} (2+2+6) \cdot 6 = 30.$



7. Т.к.  $BH = HC$  и  $AO = OC$ , то  $HO$  — средняя линия и  $AB = 2OH = 12$ ,  $BH = \sqrt{6,5^2 - 6^2} = 2,5.$

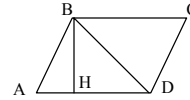
$BC = 2BH = 5$ , т.о.  $S = 5 \cdot 12 = 60 = a^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{15}.$

8. По теореме Пифагора:  $DB = \sqrt{a^2 - m^2} - \sqrt{b^2 - m^2}.$



9.  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{AB} \Rightarrow AB = 2$ , т.к.  $\angle D = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow$

$\angle BDA = 60^\circ$ , т.о.  $AB = AD = BD = 2.$



10. Этот треугольник прямоугольный, т.к.

$8^2 + 15^2 = 17^2$ , т.о.  $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 = 60.$

### МД-3

#### В-1

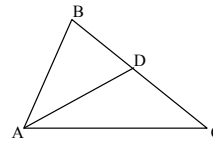
1. По свойству биссектрисы:  $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$   
 $\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{3}{5}$ . Высота у  $\triangle BDA$  и  $\triangle ADC$  одна и та

же, т.о.  $S_{BDA} : S_{ADC} = \frac{3}{5}$ , т.о.  $S_{ADC} = \frac{5}{3} \cdot 9 = 15.$

2.  $\triangle ABC \sim \triangle MPL$  (по 3-м углам)  $k = \frac{2}{3}$ , т.о.  $\frac{AC}{ML} = \frac{2}{3} \Rightarrow ML = 15$  (см).

3.  $\triangle EBF \sim \triangle ABC$  по 2-м сторонам и общему  $\angle B \Rightarrow \angle BFE = \angle A = 40^\circ.$

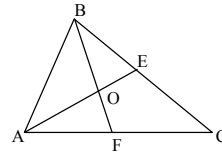
4.  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  по 3-м сторонам,  $k = \frac{5}{2}$ ,  $\begin{cases} S_1 = \frac{25}{4} S_2 \\ S_1 + S_2 = 58 \end{cases};$



$$\frac{29}{4}S_2 = 58 \Rightarrow \begin{cases} S_2 = 8 \\ S_1 = 50 \end{cases}.$$

5. Т.к.  $BO = \frac{2}{3}BF$ , а высота  $\triangle ABO$  и  $\triangle ABF$

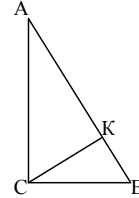
$$\text{одна и та же, то } S_{ABO} = \frac{4}{9}S_{ABF} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}S_{ABC} = \\ = \frac{2}{9} \cdot 12 = \frac{24}{9} = \frac{8}{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$



6. Т.к.  $DE$  — средняя линия, то  $\triangle DBE \sim \triangle ABC$ ,  $k = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{DBE} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \\ = 3 \text{ см}^2$ .  $S_{ADEC} = 12 - 3 = 9 \text{ (см}^2\text{)}.$

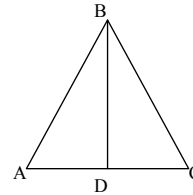
7.  $\triangle ACK \sim \triangle KCB$  ( $\angle CAK = \angle KCB = 90^\circ - \angle B$ )  $\Rightarrow$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CK}{KB} = \frac{3}{4} = k \Rightarrow \frac{S_{ACK}}{S_{CKB}} = k^2 = \frac{9}{16}.$$



8.  $AD = \frac{1}{2}AC = 5$ ,  $AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ , т.о.

$$\sin \angle ABD = \cos A = \frac{AD}{AB} = \frac{5}{13}.$$



9. По теореме синусов (пусть сторона равна  $a$ ):

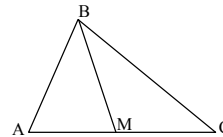
$$\frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{\sin \alpha}; \quad a = \frac{d}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

10.  $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{n}{2} \sin 60^\circ \cdot 4 = \frac{mn}{4} \sqrt{3}$  (т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам).

## В-2

1. Т.к.  $\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \frac{1}{3} \Rightarrow AM : MC = 1:3$ , а по свойст-

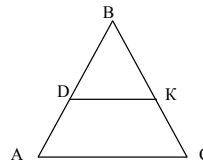
ву биссектрисы  $\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MC} = \frac{1}{3} \Rightarrow BC = 12 \text{ (см)}.$



2.  $\triangle EPF \sim \triangle CDK$  по 2-м углам и стороне -  $DK : PF = 5 : 2 \Rightarrow PF = 4 \text{ (см)}.$

3.  $\triangle DBK \sim \triangle ABC$  по 2-м сторонам и общему углу  $\Rightarrow \angle BCA = \angle BDK = 50^\circ.$

4.  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ,  $k = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ , т.о.:



$$\begin{cases} AC : A_1C_1 = 3 : 4 \\ AC + A_1C_1 = 14 \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{4} A_1C_1 = 14 \Rightarrow A_1C_1 = 8 \text{ (см)}, AC = 6 \text{ (см)}.$$

$$5. S_{ABC} = 2S_{BKC} = 2 \cdot 3S_{COK} = 6 \cdot 30 = 180 \text{ (см}^2\text{)}.$$

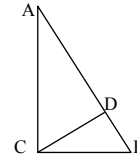
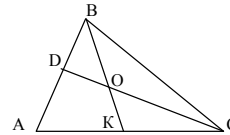
6. Т.к.  $EF$  — средняя линия  $\Rightarrow \triangle EFA \sim \triangle ABC$ ,

$$k = \frac{1}{2}, \text{ т.о. } S_{ABC} = 4S_{EFA} \Rightarrow S_{ABC} - \frac{1}{4} S_{ABC} = 9 \Rightarrow$$

$$S_{ABC} = 12 \text{ (см}^2\text{)}.$$

7.  $\triangle ADC \sim \triangle CDB$  ( $\angle B = \angle ACD$ ).

$$k = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{5}{6}.$$



8.  $AD = \frac{1}{2} AC = 24$ . По теореме Пифагора:

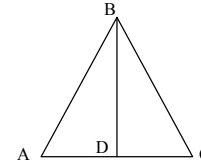
$$BD = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7, \text{ т.о. } \cos \angle ABD = \sin A = \frac{BD}{AB} = \frac{7}{25}.$$

9. По теореме синусов (пусть  $d$  — диагональ)

$$\frac{d}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow d = a \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2}.$$

10. Т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам, то:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \cdot \sin 45^\circ \cdot 4 = \frac{\sqrt{2} d_1 d_2}{4}.$$



#### МД-4

##### В-1

1.  $\angle A = 30^\circ \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$ , по теореме Пифагора:  $AC = \sqrt{12 - 3} = 3 > 2,7$   
 $\Rightarrow$  нет общих точек.

2. По теореме Пифагора:  $OB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$  см,  
 $OK = 5$  см  $\Rightarrow KB = 13 - 5 = 8$  (см).

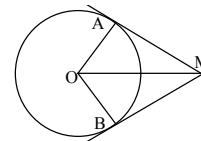
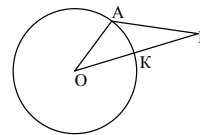
3. Т.к. центр описанной окружности лежит на биссектрисе, то  $\angle OMA = 30^\circ \Rightarrow OM = 4\sqrt{3}$ ,

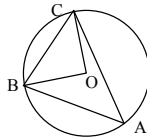
$$AM = \sqrt{48 - 12} = 6, \text{ т.к. } \angle OMA = 30^\circ \Rightarrow$$

$$AB = \frac{1}{2} AM \cdot 2 = AM = 6.$$

4.  $\angle BOC = 2\angle A$  (как центральный)  $\Rightarrow$

$$\angle BOC = 90^\circ \Rightarrow S_{BOC} = \frac{1}{2} a^2.$$





5.  $\angle HAB = \angle C = 20^\circ \Rightarrow$   
 $\angle MAB = 180^\circ - \angle HAB = 160^\circ$ .

6.  $CB \perp CA$  (свойство треугольника, построенного на диаметре). По теореме Пифагора:

$$CA = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}, \cos A = \frac{KA}{CA} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{CA}{AB} \Rightarrow AB = 10$$

$$\Rightarrow BK = 8.$$

7. Гипотенуза равна  $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ ,  $S = \frac{1}{2} Pr \Rightarrow$

$$r = \frac{2S}{P} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12}{5+12+13} = \frac{60}{30} = 2.$$

8.  $BH = CD = 10$  (см),  $AB = 20$  (см),

$AH = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3}$  (см). Т.к. можно вписать окружность  $\Rightarrow BC + BC + 10\sqrt{3} = 30$  (см). Откуда  $BC = 15 - 5\sqrt{3}$  см  $\Rightarrow P = 30 - 10\sqrt{3} + 30 + 10\sqrt{3} = 60$  (см).

9. По теореме синусов:  $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin \alpha}.$

10. Т.к. можно описать окружность  $\Rightarrow \angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$  и  $\angle A = \angle D = 40^\circ \Rightarrow \angle C = \angle B = 140^\circ$  (т.к. трапеция должна быть равнобокой).

## В-2

1.  $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{CB}{2\sqrt{3}} \Rightarrow CB = 2$ ,  $\sin 30^\circ = \frac{CB}{AB}$ ,  $AB = 4 \Rightarrow$

окружность имеет с  $AC$  одну общую точку.

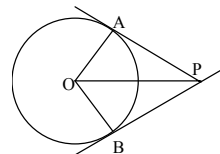
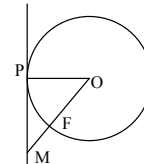
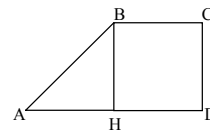
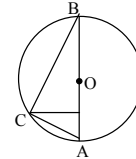
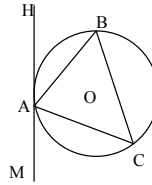
2. Т.к.  $OF = 8$  (см), то  $OM = 8 + 9 = 17$  (см)  $\Rightarrow$

$$MP = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15 \text{ (см)}.$$

3. Т.к.  $AP = PB$  (св-во касательной), то

$$\sin 45^\circ = \sin APO = \frac{\sqrt{5}}{2} : AP \Rightarrow AP = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

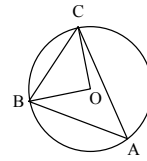
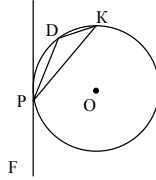
$$\Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{AP}{OP} \Rightarrow OP = \sqrt{5}.$$



4.  $\angle BOC = 2\angle A = 60^\circ$  (как центральный), а т.к.  $BO = OC$ , то  $\triangle BCO$  — равносторонний  $\Rightarrow$

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$

5. По свойству хорды и касательной:  
 $\angle PDK = \angle FPK = 160^\circ$ .



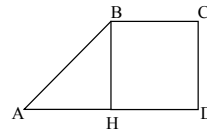
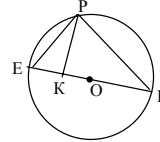
6. По свойству треугольника, построенного как на диаметре  $EP \perp PF$ ,  
 $\operatorname{tg} F = \frac{PK}{9}$ ,  $\operatorname{ctg} F = \frac{PK}{4} \Rightarrow \frac{9}{PK} = \frac{PK}{4} \Rightarrow PK = 6$ .

$$7. S = \frac{1}{2} Pr \Rightarrow r = \frac{2S}{P} = \frac{12 \cdot \sqrt{13^2 - 12^2}}{50} = \frac{6}{5}.$$

8. Т.к.  $ABCD$  описана около окружности  $\Rightarrow$   
 $AB + CD = BC + AD = \frac{P}{2} = 12 \Rightarrow AB + CD = 12$ ,  
 но  $2CD = AB \Rightarrow CD = 4$ ,  $AB = 8$ .

$$9. \text{ По теореме синусов: } \frac{b}{\sin \beta} = 2R \Rightarrow R = \frac{b}{2\sin \beta}.$$

10. Если вокруг трапеции описать окружность, то  $\angle A = \angle C$ ,  
 $\angle C = \angle B = 160^\circ \Rightarrow \angle A = \angle D = 20^\circ$ .



#### МД-5

##### В-1

1. 1)  $\overrightarrow{AM}$  и  $\overrightarrow{BC}$ ;  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{MD}$ ; 2)  $\overrightarrow{BO}$  и  $\overrightarrow{OD}$ .

2.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = 0$ .

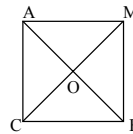
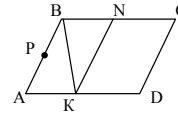
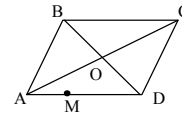
3.  $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EF}$ .

4.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = k(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}) = k(\overrightarrow{DA})$  верно при  $k = -1$ .

$$5. 3\vec{a} + 5\vec{b} = x\vec{a} + (2y+1)\vec{b}, \begin{cases} x=3 \\ 2y+1=5 \end{cases}; \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}.$$

6.  $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BA} = (1/3)\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BP}$ .

7. Построим  $\triangle ABC$  до прямоугольника, откуда видно, что  $CM = AB = 10$ .

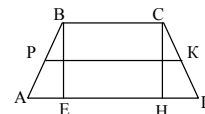


$$8. \overrightarrow{OM} = \vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}.$$

$$9. \overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DA}) \frac{1}{2}.$$

10. Т.к.  $KM$  — средняя линия, то  $AE = HD = 2KP$   
 $\Rightarrow$  т.к.  $\angle A = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BE \Rightarrow AD + BC = 2PK =$

$$= AB + CD = 2AB; 2AB = 24, AB = 12 \Rightarrow BE = 6 \Rightarrow r = \frac{BE}{2} = 3.$$



## B-2

1. 1)  $\overrightarrow{BE}$  и  $\overrightarrow{CD}$ ; 2)  $\overrightarrow{AD}$  и  $\overrightarrow{BC}$ ;  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OC}$ .

$$2. \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FC} = 0.$$

$$3. \overrightarrow{KM} = -\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{PM}.$$

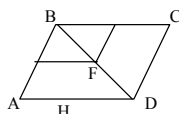
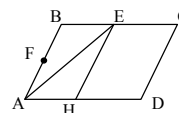
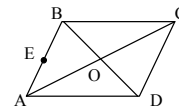
$$4. \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{PC} = k(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) = k\overrightarrow{CP}, \text{ верно при } k = -1.$$

$$5. (2x-6)\vec{a} + 3\vec{b} = 2\vec{a} + (y-3)\vec{b}, \begin{cases} 2x-6=2 \\ y-3=3 \end{cases}; \begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}.$$

$$6. \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AF} + (2/3)\overrightarrow{AD}.$$

$$7. \overrightarrow{BF} = (1/2)\overrightarrow{BA} + (1/2)\overrightarrow{BC} \Rightarrow BF = (1/2)BD = 14.$$

$$8. \overrightarrow{OM} = -1 \left( \vec{m} + \frac{|\vec{m}|}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \right) = -\vec{m} - \frac{|\vec{m}|}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}.$$



$$9. \overrightarrow{PK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB}).$$

$$10. BE = 2r = 12 \sim AB = CD = 24,$$

$$AD + BC = AB + CD = 48. PK = \frac{1}{2}(AP + BC) = 24.$$

