

# **Решение контрольных и самостоятельных работ по геометрии за 9 класс**

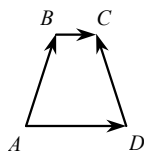
к пособию «Дидактические материалы по геометрии  
для 9 класса  
Зив Б.Г., Мейлер В.М.  
7-е изд.  
М.: Просвещение, 2003»

*учебно-методическое пособие*

# САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

## Вариант 1

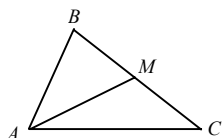
### С-1



1.

$$1) BC = 2, AD = 5 \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AD} \Rightarrow k = \frac{2}{5}.$$

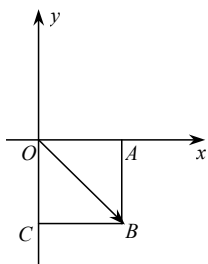
2) Не существует, т.к. иначе  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{DC}$  были бы не-симметричны, что противоречит условию.



2.

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{4} (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}).$$

### С-2.



$$1. 1) \overrightarrow{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j} = \{5, -4\}; 2) \overrightarrow{b} = -3\vec{j} = \{0, -3\}.$$

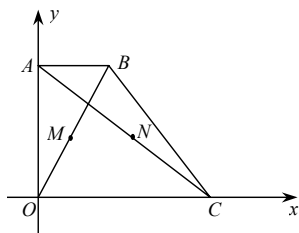
2. Т.к.  $OABC$  — квадрат, по теореме Пифагора из  $\triangle OAB$ :  $OA^2 = OB^2 + AB^2$ ;  $2OA^2 = OB^2 \Rightarrow OA = 2$ ;  
то  $OA = OC = 1$  и  $AB \perp OX$  и  $CB \perp OY \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\vec{i} - 2\vec{j}.$$

$$3. \overrightarrow{a} \{-2; 3\}, b \{1; 1\}, c \{-2; 8\};$$

$$1) \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \{-1; 4\}; 2) \text{будут, т.к. } \overrightarrow{c} = 2(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}).$$

### С-3



$$1. 1) O = (0, 0), A = (0, 3), C = (5, 0)$$

Т.к.  $AB \parallel OC$ , то ордината точки  $B$  должна быть равна ординате точки  $A$ , т.е. 3, а т.к.  $AB = 3$ , то  $B = (3, 3)$ .

$$2) \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} \{3; 3\} = \left\{ \frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \left( \frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right);$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} =$$

$$= \frac{1}{2} \{0; 3\} + \frac{1}{2} \{5; 0\} = \left\{ \frac{5}{2}; \frac{3}{2} \right\} \Rightarrow N = \left( \frac{5}{2}; \frac{3}{2} \right).$$

3) Очевидно,  $\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$ .

2.  $\bar{a} = 2\bar{i} - 5\bar{j}$ ,  $\bar{b} = -3\bar{i} + \bar{j} \Rightarrow \bar{a} + \bar{b} = -\bar{i} - 4\bar{j} \Rightarrow |\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$ .

#### С-4

По теореме Пифагора

$$BC = \sqrt{BH^2 + HC^2} = \sqrt{100} = 10;$$

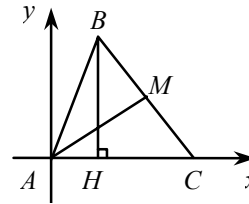
$$AH = 6 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 6 \Rightarrow AB = 6\sqrt{2}.$$

Введем систему координат как показано на рис., тогда

$$B = (6, 6) \text{ и } C = (14, 0) \Rightarrow \overline{AB} + \overline{AC} = \{20, 6\}, \text{ но}$$

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) \Rightarrow \overline{AM} = \{10, 3\} \Rightarrow M = (10, 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{AM} = \sqrt{10^2 + 3^2} = \sqrt{109}.$$



#### С-5

1. 1) Очевидно,  $(2, -4)$ ,  $R = \sqrt{20}$ .

2) Проходит, т.к.  $(0 - 2)^2 + (0 + 4)^2 = 20$ .

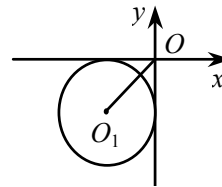
2.

Пусть  $R$  — радиус окружности  $\Rightarrow O_1 = (-R, -R) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (2\sqrt{2})^2 = R^2 + R^2 \text{ (по теореме Пифагора)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = 2 \Rightarrow O_1 = (-2, -2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{уравнение окружности: } (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4.$$



#### С-6

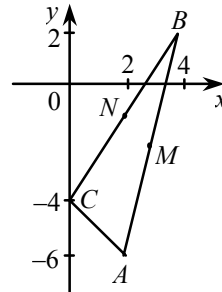
1. Т.к. прямая перпендикулярна  $OX$ , то ее уравнение имеет вид  $x = \alpha$ , т.к. прямая проходит через точку  $A(9; 3)$ , то  $\alpha = 9 \Rightarrow x = 9$  — искомая прямая.

2. Очевидно,  $N\left(\frac{4+0}{2}; \frac{2-4}{2}\right) = (2; -1)$ , а

$$M\left(\frac{4+2}{2}; \frac{2-6}{2}\right) = (3; -2).$$

Пусть уравнение прямой  $MN$ :  $y = kx + b$ , тогда имеем систему:

$$\begin{cases} -1 = 2k + b \\ -2 = 3k + b \end{cases}; \begin{cases} b = -1 - 2k \\ -2 = 3k - 1 - 2k \end{cases}; \begin{cases} k = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow y = -x + 1.$$



### С-7

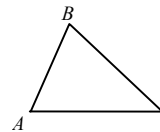
1.  $(7; -6)$  — координаты центра окружности, 9 — радиус окружности  $\Rightarrow \Rightarrow$  абсцисса крайней правой точки окружности равна  $7 + 9 = 13 < 19 \Rightarrow \Rightarrow$  не пересекаются.
2. Радиус окружности равен 4  $\Rightarrow$  это 2 окружности с тем же центром и радиусами, равными 7 и 1. Ответ:  $x^2 + y^2 = 49$  и  $x^2 + y^2 = 1$ .

### С-8

1. Т.к. угол при основании равен  $15^\circ$ , то угол против основания равен  $180^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 150^\circ \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 150^\circ = 1$ .
2.  $8\sqrt{2} = a^2 \sin 45^\circ \Rightarrow a = \sqrt{\frac{8\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{2}}} = 4$  см, где  $a$  — сторона ромба.

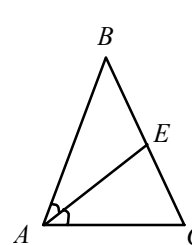
### С-9

1. По теореме синусов имеем:



$$\frac{4\sqrt{6}}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 120^\circ} \Rightarrow AC = \frac{4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12.$$

2.  $\angle B = 180^\circ - 2\alpha$ .



$$\begin{aligned} \frac{BC}{\sin \alpha} &= \frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin (180^\circ - 2\alpha)}; \quad AB = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = b; \\ \angle AEB &= 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - \frac{\alpha}{2} = \frac{3\alpha}{2}; \\ \angle B &= 180 - 2\alpha \Rightarrow \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin (180 - 2\alpha)} = \frac{b}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \\ \Rightarrow BC &= \frac{b \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{2 \cos \alpha} \Rightarrow \\ \Rightarrow EC &= \frac{b}{4 \cos \alpha} \cdot \frac{AE}{\sin (180^\circ - 2\alpha)} = \frac{AB}{\sin \frac{3\alpha}{2}}; \\ AE &= AB \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin \frac{3\alpha}{2}} = \frac{b \cdot \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha \cdot \sin \frac{3\alpha}{2}} = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{3\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

### С-10

1. По теореме косинусов имеем:  $c^2 = 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cos 120^\circ =$   
 $= 136 + 120 \cdot \frac{1}{2} = 196 \Rightarrow c = 14$  (см), где  $c$  — 3-я сторона.

2. Т.к. против большей стороны лежит больший угол, то ищем угол против стороны, длина которой равна 7. По теореме косинусов:

$$49 = 9 + 25 - 30 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  угол тупой  $\Rightarrow$  треугольник тупоугольный.

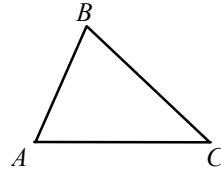
### C-11

1. По теореме синусов:

$$\frac{BC}{\sin 32^\circ} = \frac{0,3}{\sin 70^\circ} \Rightarrow BC = \frac{0,3 \cdot \sin 32^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 0,17;$$

$\angle C = 180^\circ - 70^\circ - 32^\circ = 78^\circ \Rightarrow$  по теореме синусов:

$$AB = \frac{AC \cdot \sin 78^\circ}{\sin 70^\circ} = \frac{0,3 \sin 78^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 0,31.$$



2.  $BC$  — меньшая сторона  $\Rightarrow$  по теореме косинусов:

$$BC^2 = a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2295}{2982} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{2295}{2982} \approx 41^\circ 25'.$$

### C-12

$$1. \overrightarrow{AO} \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}, \overrightarrow{CO} \left\{ -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\}, \overrightarrow{BD} \{1; -1\};$$

$$\overrightarrow{CD} \{0; -1\}; \overrightarrow{AB} \{0; 1\}; \overrightarrow{DB} \{-1; 1\}.$$

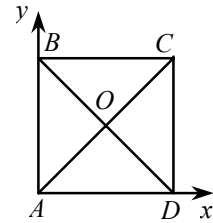
$$1) \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \cdot (1) + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0;$$

$$2) \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2};$$

$$3) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 1.$$

$$2. \vec{a} \{-1; 3\}; \vec{b} \{2; 1\}; \vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 3 = 1; |\vec{a}| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2; |\vec{b}| = \sqrt{5};$$

$$\cos \angle(a, b) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \approx 81^\circ 52'.$$



### C-13

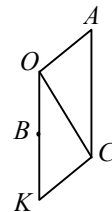
$$1. |\vec{a}| = 2\sqrt{2}; |\vec{b}| = 4; \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ;$$

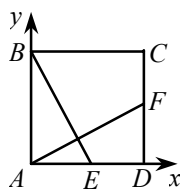
$$OC = |\vec{a} + 2\vec{b}|. \text{ найдем } OC.$$

Т.к.  $\angle AOB = 135^\circ$ , то  $\angle OAC = \angle OKC = 45^\circ$ .

Т.к.  $OACK$  — параллелограмм, то  $AC = OK = 8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow OC^2 = 8^2 + 64 - 32\sqrt{2} \cos 45^\circ = 72 - 32 = 40 \Rightarrow OC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

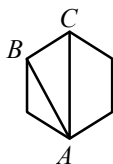




2. Пусть  $ABCD$  — квадрат со стороной  $a$ . Введем систему координат как показано на рисунке, тогда  $\overrightarrow{AB} \{0; a\}$ ,  $\overrightarrow{AD} \{a, 0\}$ ,  
 $\overrightarrow{AE} \left\{ \frac{a}{2}; 0 \right\}$ ,  $\overrightarrow{DF} \left\{ 0; \frac{a}{2} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{BE} = \left\{ \frac{a}{2}; -a \right\}$  и  $\overrightarrow{AF} \left\{ a, \frac{a}{2} \right\}$ ;  
 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow BE \perp AF$ .

### С-14

1. Пусть  $O$  — центр 20-тиугольника. Соединим  $O$  со всеми его вершинами, получим 20 треугольников. Очевидно, что сумма их всех углов равна  $180^\circ \cdot 20$ , если вычесть из нее все углы, противолежащие основанию, то останется только сумма углов при сторонах многоугольника и останется только разделить ее на 20, чтобы получить угол при вершине.



Итак,  $\angle A = \frac{180^\circ \cdot 20 - 360^\circ}{20} = \frac{180^\circ \cdot 18}{20} = 9^\circ \cdot 18 = 162^\circ$ .

2. По предыдущей задаче угол при вершине

6-тиугольника равен  $\frac{180^\circ \cdot 4}{6} = 120^\circ$ . Пусть сторона его

равна  $b$ , тогда по теореме косинусов

$$a^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos 120^\circ \Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{2(1 - \cos 120^\circ)} = \frac{a^2}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{1}{3} a^2 \Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Из  $\triangle ABC$  по теореме Пифагора имеем:  $AC^2 = a^2 + \frac{a^2}{3} = \frac{4a^2}{3} \Rightarrow AC = 2 \frac{\sqrt{3}a}{3}$ .

### С-15

1. Пусть сторона треугольника равна  $a$ , тогда

$$S = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}, \text{ а } P = \frac{3}{2}a \Rightarrow \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{3}{2}a \cdot \sqrt{3}, a^2 = 6a \Rightarrow a = 6.$$

Значит,  $S = 9\sqrt{3} \text{ см}^2$ ;  $P = 3a = 18 \text{ см}$ .

2. Пусть радиус окружности равен  $r$ , тогда по теореме Пифагора:

$$a^2 = 2r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

3. Проведем какую-нибудь хорду и построим к ней серединный перпендикуляр. Затем проведем серединный перпендикуляр к нему. Соединим точки пересечения серединных перпендикуляров с окружностью — получим квадрат.

### С-16

1. Радиус окружности равен 4  $\Rightarrow$  длина диагонали квадрата равна 8  $\Rightarrow$   $\Rightarrow$  сторона квадрата равна  $4\sqrt{2}$   $\Rightarrow$  периметр равен  $16\sqrt{2}$ .
2.  $l = \frac{105^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \cdot 22 = \frac{21 \cdot 22\pi}{36} = \frac{21 \cdot 11\pi}{18} = \frac{77\pi}{6} \approx 40,3$  (м)

### С-17

1. Пусть  $r$  — радиус круга, тогда сторона 6-тиугольника тоже равна  $r$ , тогда  $\pi r^2 - 6 \cdot \frac{\sqrt{3}r^2}{4} = 4\pi - 6\sqrt{3} \Rightarrow r^2 = \frac{4\pi - 6\sqrt{3}}{\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}} = 4 \Rightarrow r = 2$ .
2.  $S = \frac{1}{2} \cdot 115^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} (12,7)^2 \approx 161,9$  см<sup>2</sup>.
3. Проведем какую-нибудь хорду. Построим к ней серединный перпендикуляр и найдем его середину — это будет центр круга. Найдем его радиус. Построим отрезок в 3 раза больший. Построим круг с таким радиусом.

### С-18

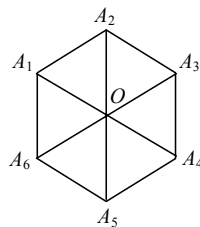
1. Строим  $B'$  симметрично  $B$ ,  $A'$  симметрично  $A$  и  $C'$  симметрично  $C$ . Строим  $B'A'$  и  $B'C'$ .
2. Пусть имеются две пересекающиеся прямые, тогда они образуют две пары вертикальных углов, т.к. при движении прямые переходят в прямые, то пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся, следовательно, вертикальные углы отображаются на вертикальные.

### С-19

1. Отложим вектор  $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{AA_1}$  от точки  $O$ . Через точку  $O_1$  проведем луч, параллельный  $OM$  в том же направлении.
2. Перенесем параллельно одну прямую вдоль прямой, которой она перпендикулярна, в направлении к другой на расстояние, равное длине отрезка, соединяющего точки их пересечения с 3-й прямой. Очевидно, прямые полностью совместятся  $\Rightarrow$  если одна из них перпендикулярна 3-й, то и другая тоже.

### С-20

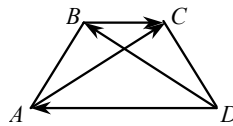
1. От  $OB$  в направлении против часовой стрелки отложим угол, равный  $45^\circ$ . Пусть другая его сторона пересекает окружность в точке  $B_1$ . Аналогично, строим точку  $A_1$ . Соединим точки  $A_1$  и  $B_1$ .  $A_1B_1 = AB$ , т.к. поворот является движением, а оно сохраняет расстояния.



2. Т.к.  $\angle A_2OA_6$  равен  $120^\circ$ , то при вращении вокруг точки  $O$  точка  $A_2$  перейдет в точку  $A_6$ . Аналогичные утверждения имеют место и для других вершин шестиугольника  $\Rightarrow$  при таком повороте он перейдет сам в себя.

## Вариант 2

### С-1



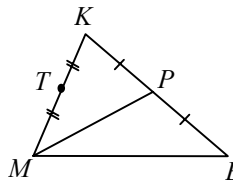
1. 1) Т.к.  $BC \parallel AD$  и  $BC = 7$ , а  $AD = 20$ ,

то  $\overrightarrow{DA} = -\frac{20}{7}\overrightarrow{BC}$ .

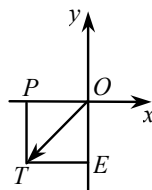
2) Т.к.  $AC \nparallel DB$ , то не существует.

2.

$$\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MK}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EM} + 2\overrightarrow{MT}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}.$$



### С-2



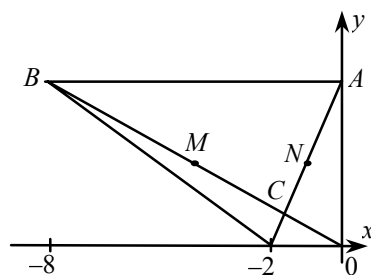
1. 1)  $\overrightarrow{m} = -3\vec{i} + 7\vec{j} \Rightarrow m\{-3; 7\}$ ; 2)  $\overrightarrow{p} = -4\vec{i} \Rightarrow p\{-4; 0\}$ .

2. По теореме Пифагора  $PO = OE = 5 \Rightarrow \overrightarrow{OT} = -5\vec{i} - 5\vec{j}$ .

3.  $\overrightarrow{p}\{-3; 4\}$ ,  $\overrightarrow{l}\{1; 2\}$ ,  $\overrightarrow{k}\{4; -2\}$ ;

1)  $\overrightarrow{p} - \overrightarrow{l} = \{-4; 2\}$ . 2) Будут, т.к.  $\overrightarrow{p} - \overrightarrow{l} = -\overrightarrow{k}$ .

### С-3



1. 1)  $A(0; 4)$ ;  $O(0; 0)$ ;  $C(-2; 0)$ .

Т.к.  $ABCO$  — трапеция,

то  $AB \parallel OX \Rightarrow B(-8; 4)$ .

$$2) N\left(\frac{0-2}{2}, \frac{4-0}{2}\right) = N(-1; 2);$$

$$M\left(\frac{0-8}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = M(-4; 2).$$

3) Очевидно, трем.

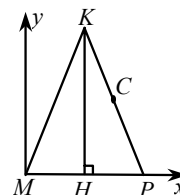


$$2. \bar{m} = -2\bar{i} + 3\bar{j}, \quad \bar{n} = 3\bar{i} + 5\bar{j};$$

$$\bar{m} - \bar{n} = -5\bar{i} - 2\bar{j} \Rightarrow |\bar{m} - \bar{n}| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}.$$

#### C-4

Введем систему координат как показано на рисунке, тогда  $M(0; 0), K(4; 4), P(10; 0) \Rightarrow C(7; 2) \Rightarrow MC = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}.$



#### C-5

1. 1)  $C(-1; 2)$  — центр,  $\sqrt{40}$  — радиус.
- 2)  $(5 + 1)^2 + (0 - 2)^2 = 36 + 4 = 40 \Rightarrow$  пересекает.
2. Из теоремы Пифагора находим  $O_1(3; -3) \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9.$

#### C-6

1. Т.к. прямая перпендикулярна  $OY$ , то ее уравнение имеет вид  $y = \beta$ , а т.к. она проходит через  $B(-3; 10)$ , то  $\beta = 10 \Rightarrow y = 10$  — искомая прямая.
2. Т.к.  $P$  и  $K$  середины сторон, то  $A(4; 6)$ , а  $B(-2; 4)$ .

Пусть уравнение прямой  $y = kx + b \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 = 4k + b \\ 4 = -2k + b \end{cases}; \begin{cases} 2 = 6k \\ b = 4 + 2k \end{cases}; \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ b = \frac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x}{3} + \frac{14}{3}.$$

#### C-7

1.  $(5; 10)$  — центр,  $10$  — радиус  $\Rightarrow$  самая верхняя точка окружности имеет координаты  $(5; 20) \Rightarrow$  касается.
2.  $A(2; 0), B(6; 0).$

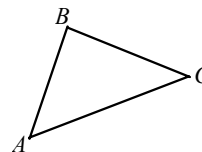
Очевидно, это серединный перпендикуляр к  $AB \Rightarrow x = \frac{6+2}{2} = 4.$

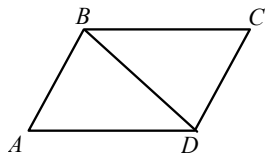
#### C-8

1.

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 120^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \frac{2S}{AB \sin 120^\circ} = \frac{12\sqrt{3}}{6 \frac{\sqrt{3}}{2}} = 4.$$



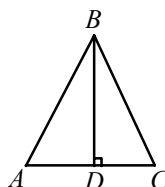
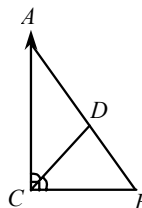


2. Т.к.  $\triangle BCD$  — равнобедренный, то  
 $\angle C = \angle BDC = \angle ABD = \angle BAD = 30^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle CBD = 120^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow S = 2S_{\triangle BCD} = BC \cdot BD \cdot \sin 120^\circ = 27 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ см}^2.$

### C-9

1. По теореме синусов имеем:

$$\frac{AD}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 120^\circ} \Rightarrow AD = \frac{AC \sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2}.$$



2.  $AB = \frac{h}{\sin \alpha}$ . По теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{AC}{\sin \beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \frac{AB \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{h \sin \beta}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}.$$

### C-10

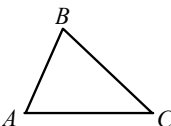
1. По теореме косинусов:  $a^2 = 8 + 9 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 \cos 135^\circ = 17 + 12 = 29.$

Значит,  $a = \sqrt{29}$  см, где  $a$  — неизвестная сторона.

2. Найдём угол против большей стороны:  $36 = 16 + 25 - 40 \cos \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{41 - 36}{40} > 0 \Rightarrow \alpha \text{ — острый} \Rightarrow \text{остроугольный треугольник.}$$

### C-11

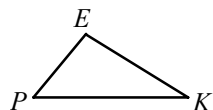


1. По теореме косинусов  $BC^2 = 144 + 324 - 432 \cos 50^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow BC = \sqrt{468 - 432 \cos 50^\circ}.$

По теореме синусов:  $\frac{BC}{\sin 50^\circ} = \frac{12}{\sin \angle C} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle C = \arcsin \frac{12 \sin 50^\circ}{\sqrt{468 - 432 \cos 50^\circ}} \approx 41^\circ 47' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle B = 130^\circ - \arcsin \frac{12 \sin 50^\circ}{\sqrt{468 - 432 \cos 50^\circ}} \approx 88^\circ 13'.$$



2.  $\angle E = 180^\circ - 40^\circ - 25^\circ = 115^\circ \Rightarrow$  по теореме синусов

$$\Rightarrow \frac{PK}{\sin 115^\circ} = \frac{0,75}{\sin 25^\circ} \Rightarrow PK = \frac{3 \sin 65^\circ}{4 \sin 25^\circ} \approx 1,6.$$

### С-12

1. Введем систему координат как показано на рисунке, тогда  $A(0; 0)$ ,  $C(1; 0)$ ,

$$B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), M\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right), N\left(\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow$$

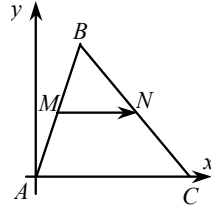
$$1) \overrightarrow{MN} \left\{ \frac{1}{2}; 0 \right\}, \overrightarrow{CA} \{-1; 0\} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2};$$

$$2) \overrightarrow{CB} \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{4};$$

$$3) \overrightarrow{AC} \{1; 0\}, \overrightarrow{CB} \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}.$$

$$2. \overline{m} \{3; -1\}, \overline{n} \{2; 4\}; -\frac{1}{2}\overline{n} \{-1; -2\};$$

$$\angle(\overline{m}; \overline{n}) = \arccos \frac{(\overline{m}; \overline{n})}{|\overline{m}| |\overline{n}|} = \frac{2}{\arccos \sqrt{10} \sqrt{20}} = \frac{\sqrt{2}}{\arccos 10} \approx 98^\circ 8'.$$



### С-13

$$1. |\overline{a}| = 2\sqrt{3}, |\overline{b}| = 2, \angle(\overline{a}, \overline{b}) = 150^\circ$$

Построим параллелограмм на векторах  $\overline{b}$  и  $2\overline{a}$ , тогда

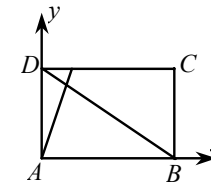
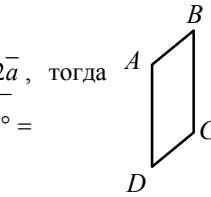
$$|2\overline{a} - \overline{b}| = BD, \text{ но } BD = \sqrt{|2\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 - 2|2\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos 150^\circ} =$$

$$= \sqrt{48 + 4 + 2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot 2 \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{48 + 28} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}.$$

2. Введем систему координат как показано на рисунке, тогда  $A(0; 0)$ ,  $B(2a; 0)$ ,  $C(2a; a)$ ,  $D(0; a)$ ,

$$E\left(\frac{a}{2}; a\right) \Rightarrow \overrightarrow{AE} \left\{ \frac{a}{2}; a \right\}, \overrightarrow{BD} \{-2a; a\},$$

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = a^2 - a^2 = 0 \Rightarrow AE \perp BD.$$

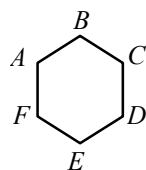


### С-14

1. Пусть  $n$  — число сторон многоугольника, тогда

$$144^\circ = \frac{180^\circ(n-2)}{n} \Rightarrow 144n = 180n - 360 \Rightarrow 36n = 360 \Rightarrow n = 10.$$

Ответ: 10-тиугольник.



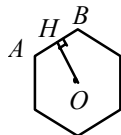
2.

Т.к. угол при вершине 6-тиугольника равен  $120^\circ$ , то

$$BF = \sqrt{2b^2(1 - \cos 120^\circ)} = \sqrt{2b^2 \cdot \frac{3}{2}} = b\sqrt{3},$$

то по теореме Пифагора  $FC = \sqrt{3b^2 + b^2} = 2b$ .

### C-15



$$1. \angle HOB = 30^\circ \Rightarrow HO = 40 \operatorname{tg} 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 \Rightarrow$$

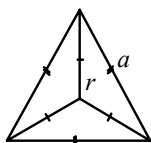
$$\Rightarrow AB = 4 \Rightarrow P = 4 \cdot 6 = 24 \text{ см};$$

$$S = 3AB \cdot OH = 3 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

$$2. \text{ По теореме косинусов } m^2 = 2r^2(1 - \cos 120^\circ) = 2r^2 \cdot \frac{3}{2} = 3r^2 \Rightarrow r = \frac{m}{\sqrt{3}}.$$

3. Построим угол в  $60^\circ$  с вершиной на окружности. Точки пересечения его сторон с окружностью соединим. Получим правильный треугольник.

### C-16



$$1. 12\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 6 \text{ см. Тогда по теореме косинусов}$$

$$a^2 = 2r^2(1 - \cos 120^\circ) = 2r^2 \cdot \frac{3}{2} = 3r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 6\sqrt{3} \Rightarrow P = 3a = 18\sqrt{3} \text{ см.}$$

$$2. l = r^2 \Rightarrow 15 = r \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 138^\circ \Rightarrow r = \frac{15 \cdot 180^\circ}{\pi \cdot 138^\circ} \approx 6,23 \text{ (см)}.$$

### C-17

1. Пусть  $\triangle ABC$  — данный равносторонний треугольник, со стороной  $a$ ,

$$\text{тогда } S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, \text{ а } p = \frac{3a}{2} \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3}{2}a} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{12}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\text{окр}} = \pi r^2 = \frac{\pi a^2}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\pi}{12}a^2 = 27\sqrt{3} - 9\pi \Rightarrow a^2 = 12 \cdot 9 \Rightarrow a = 6\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} = 3.$$

$$2. S = r^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 162 = \frac{1}{2}(9,7)^2 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \beta \Rightarrow \beta = \frac{162 \cdot 180^\circ \cdot 2}{(9,7)^2 \pi} \approx 197^\circ 18'.$$

3. Найдите радиус данного круга, разделите его пополам, постройте круг с радиусом, равным половине радиуса данного круга.

### С-18

1. Строим  $B'$  симметрично  $B$  отн-но  $O$ ,  $A'$  симметрично  $A$  и  $C'$  симметрично  $C$ . Далее соединяем точки  $A'$  и  $B'$ , точки  $B'$  и  $C'$ .

2. Пусть имеются две пересекающиеся прямые, тогда они образуют две пары смежных углов, т.к. при движении прямые переходят в прямые, то пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся, следовательно, смежные углы отображаются на смежные.

### С-19

1. Очевидно, вектор  $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{MM_1}$ , от точки  $O$  строим точку  $O_1$ , строим 2 луча, параллельных  $OF$  и  $OE$ .

2. Перенесем одну из боковых сторон трапеции в направлении другой вдоль основания на расстояние, равное длине меньшего из оснований, получим равнобедренный треугольник, у которого, как известно, углы при основании равны, значит, равны и углы при основаниях трапеции, по свойствам параллельного переноса.

### С-20

1. На  $AO$  отложите угол  $\angle A_1OA = 60^\circ$  в направлении по часовой стрелке, и от  $OB$  отложите угол  $\angle B_1OA = 60^\circ$  в направлении по часовой стрелке так, чтобы точки лежали на данной окружности. Дуги  $A_1B_1$  и  $AB$  равны, так как радиусы и градусные меры равны.

2.

Так как диагонали квадрата пересекаются под углом в  $90^\circ$ , то при вращении на  $90^\circ$  он переходит в себя, следовательно, и при вращении на  $n \cdot 90^\circ (n \in \mathbb{N})$  он переходит в себя, и в частности при  $n = 2$  ч.т.д.

## Вариант 3

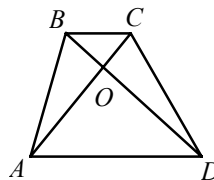
### С-1

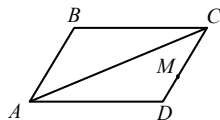
1.

1)  $\triangle AOD \sim \triangle COB$  (по двум углам:  $\angle OBC = \angle ODA$ ,  $\angle OCB = \angle OAD$ , как накрест-лежащие углы при пересечении параллельных прямых  $AD$  и  $BC$  секущими  $AC$  и  $BD$ )  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow BC = \frac{1}{3} AD \Rightarrow k = 3.$$

2) Очевидно,  $k = -\frac{1}{3}$ .

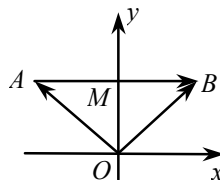




2.

$$\overline{DM} = \frac{2}{5} \overline{DC} = \frac{2}{5} (\overline{DA} + \overline{AC}) = \frac{2}{5} \overline{a} + \frac{2}{5} \overline{b}.$$

## C-2



1.  $\overline{a} \cdot \overline{b} = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \overline{a} \perp \overline{b}.$

2.  $AB = 8$  (по теореме Пифагора)  $\Rightarrow \overline{AB} = 8i;$

$\overline{OB} = 4\overline{i} + 3\overline{j}; \overline{OA} = -4\overline{i} + 3\overline{j}.$

3.  $\overline{a} \{-2; 4\}, \overline{b} \{1; 3\}, \overline{n} \{-14; -2\}.$

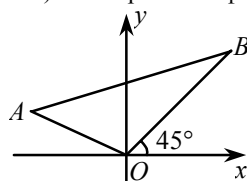
1)  $\overline{m} = 2\overline{a} - 3\overline{b} = -4\overline{i} - 3\overline{i} - 8\overline{j} - 2\overline{j} = -7\overline{i} - \overline{j} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{m} \{-7; -1\};$

2) т.к.  $k = 2 > 0$ , то сонаправлены.

## C-3

1. 1) Из теоремы Пифагора следует, что  $A(-4; 3)$ , а  $B(4; 4)$ .



2)  $AB = \sqrt{(4+4)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}.$

3) Пусть  $M$  — середина  $AB$ , тогда

$$M\left(\frac{4-4}{2}; \frac{4+3}{2}\right) = M(0; 3,5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{3,5^2} = 3,5.$$

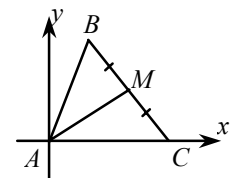
2.  $A(-1; 3), B(1; 1).$

Пусть  $M$  — искомая точка, тогда  $M(x, 0) \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 9} = 2\sqrt{(x-1)^2 + 1};$

$$(x+1)^2 + 9 = 4(x-1)^2 + 4; x^2 + 2x + 10 = 4x^2 - 8x + 8; 3x^2 - 10x - 2 = 0;$$

$$D_1 = 25 + 6 = 31; x = \frac{5 \pm \sqrt{31}}{3} \Rightarrow M\left(\frac{5 \pm \sqrt{31}}{3}; 0\right).$$

## C-4



Введем систему координат как показано на рисунке, тогда

$$B(2; 2\sqrt{3}) \Rightarrow M\left(\frac{6+2}{2}; \frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = M(4; \sqrt{3}) \Rightarrow AM = \sqrt{4^2 + 3} = \sqrt{19}.$$

### C-5

1.  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16 \Rightarrow r=4 \Rightarrow d=8$ ;

$(-1+1)^2 + (6-2)^2 = 16 \Rightarrow A$  принадлежит окружности,

$AB = \sqrt{(-1+1)^2 + (-2-6)^2} = 8 \Rightarrow AB$  — диаметр.

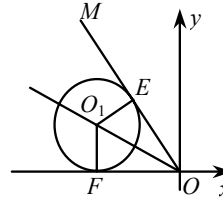
2.

$\triangle FOO_1 = \triangle EO_1O \Rightarrow \angle FO_1O = \angle EO_1O = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow FO = OO_1 \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$ , а

$O_1F = O_1O \sin 30^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1(-3; \sqrt{3}) \Rightarrow (x+3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 3$ .

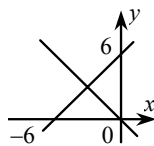


### C-6

1.  $AD \parallel BC$ ,  $\overline{BC} \{-10; 2\}$ . Пусть  $y = kx + b$  — уравнение  $AD$ ,

$k = \frac{2}{-10} = -\frac{1}{5}$ , т.к.  $A$  принадлежит прямой, то

$2 = -\frac{2}{5} + b \Rightarrow b = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5} \Rightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{12}{5}$ .



2.

$y = -x, y = x + 6$ ;

$-x = x + 6 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow S = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6 = 9$ .

### C-7

1.  $x^2 + y^2 = 4, y = 3 - x$

Найдем расстояние от начала координат до

$y = 3 - x$ ;

$OH = \sqrt{AH \cdot HB} = \sqrt{AH^2} = AH = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2}\sqrt{2} > 2 = r$ ,

т.к. радиус окружности меньше расстояния до прямой, то они не пересекаются.

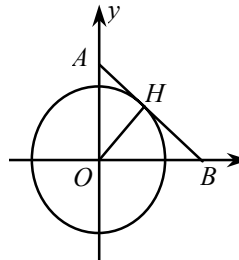
2.  $A(0; 0); B(0; 2)$ .

пусть  $M(x; y)$  удовлетворяет  $2MA = MB$ , т.е.

$2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$ ;  $4x^2 + 4y^2 = x^2 + y^2 + 4 - 4y$ ;

$3x^2 + 3y^2 + 4y - 4 = 0$ ;  $x^2 + y^2 + \frac{4}{3}y - \frac{4}{3} = 0$ ;  $x^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  окружность с центром  $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$  и радиусом  $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$ .



### С-8

1. По теореме косинусов имеем:

$$AC^2 = 25 - 24\cos 2\alpha = 49 - 48\cos^2 \alpha =$$

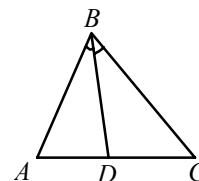
$$= 1 + 48\sin^2 \alpha \Rightarrow AC = \sqrt{1 + 48\sin^2 \alpha} \quad , \quad \text{тогда по}$$

теореме синусов:

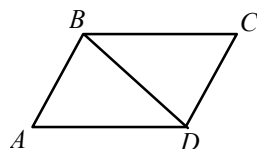
$$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{BC}{\sin \angle A} \Rightarrow \frac{\sqrt{1 + 48\sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha} = \frac{4}{\sin \angle A} \Rightarrow \sin \angle A = \frac{4\sin 2\alpha}{\sqrt{1 + 48\sin^2 \alpha}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{24\sin 2\alpha}{\sqrt{1 + 48\sin^2 \alpha}}.$$

$$2. S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha = \frac{1}{2} 8 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}.$$



### С-9



1. По теореме синусов:

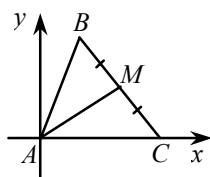
$$\frac{d}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{AD}{\sin \alpha} \Rightarrow AD = \frac{d \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$\text{Аналогично, } DC = \frac{d \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = AD \cdot DC \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{d^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$2. 2R = \frac{10}{\sin 150^\circ} \Rightarrow R = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10 \text{ см.}$$

### С-10



1.

Введем систему координат как показано на рисунке, тогда  $A(0; 0)$ ,  $C(2\sqrt{21}, 0)$ ,

$$B(\sqrt{21}, \sqrt{21} \operatorname{tg} 30^\circ) = B\left(\sqrt{21}; \frac{\sqrt{63}}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{3}{2}\sqrt{21}; \frac{\sqrt{63}}{6}\right) \Rightarrow AM = \sqrt{\frac{9 \cdot 21}{4} + \frac{63}{36}} = \sqrt{\frac{81 \cdot 21}{36} + 63} = \frac{42}{6} = 7.$$

2. По теореме косинусов:

$$49 = 25 + 64 - 80\cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$



### C-11

$$1. AB = \frac{BE}{\sin 25^\circ 30'} = \frac{7,6}{\sin 25^\circ 30'}.$$

По теореме косинусов:

$$BC = \sqrt{(10,8)^2 + \frac{(7,6)^2}{\sin^2 25^\circ 30'} - 2 \cdot 10,8 \cdot \frac{7,6}{\sin 25^\circ 30'} \cos 25^\circ 30'} \approx 9,2.$$

По теореме синусов:

$$\frac{BC}{\sin 25^\circ 30'} = \frac{AC}{\sin \angle B} \Rightarrow \sin \angle B = \frac{10,8 \cdot \sin 25^\circ 30'}{9,2} \approx 30^\circ 21' \Rightarrow \angle C \approx 124^\circ 9'.$$

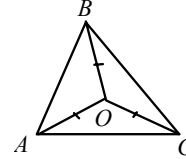
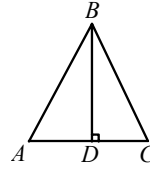
2. Пусть  $\angle OAC = \alpha$ , тогда  $\angle BAO = \angle ABO = 52^\circ - \alpha$ , а  $\angle OCB = \angle OBC = 58^\circ - \alpha \Rightarrow 70^\circ = 52^\circ - \alpha + 58^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha = 20^\circ \Rightarrow AC = 2AO \cdot \cos 20^\circ = 14 \cdot \cos 20^\circ$ .

По теореме синусов:

$$\frac{14 \cos 20^\circ}{\sin 70^\circ} = \frac{AB}{\sin 58^\circ} = \frac{BC}{\sin 52^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \frac{14 \cos 20^\circ \sin 58^\circ}{\sin 70^\circ}, BC = \frac{14 \cos 20^\circ \sin 52^\circ}{\sin 70^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 70^\circ = \frac{196 \cdot \cos^2 20^\circ \cdot \sin 58^\circ \cdot \sin 52^\circ}{2 \sin 70^\circ} \approx 61,5.$$



### C-12

1. Введем систему координат как показано на рисунке, тогда

$$D(0; 0), A(-4; 0), C(4; 0), B(0; 3), E(0; \alpha) \Rightarrow$$

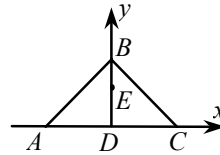
$$1) \overline{AB} \{4; 3\}, \overline{AC} \{8; 0\} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 32;$$

$$2) \overline{BD} \{0; -3\} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{BD} = -9;$$

$$3) \overline{CA} \{-8; 0\}, \overline{BE} \{0; 3 - \alpha\} \Rightarrow \overline{CA} \cdot \overline{BE} = 0.$$

$$2. A(4; -7), B(-2; 3), \overline{AB} \{-6; 10\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos \frac{-6}{\sqrt{136} \cdot \sqrt{1}} = \arccos \left( -\frac{6}{\sqrt{136}} \right) \approx 120^\circ 58'.$$



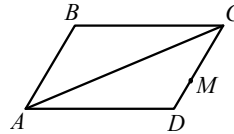
### C-13

1. Построим параллелограмм на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , тогда

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}, \text{ т.к. } \angle BAD = 60^\circ, \text{ то } \angle ABC = 120^\circ \Rightarrow$$

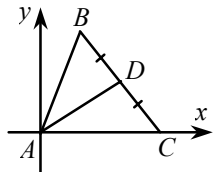
$\Rightarrow$  по теореме косинусов:

$$AC = \sqrt{5 - 4 \cos 120^\circ} = \sqrt{5 + 2} = \sqrt{7} \Rightarrow$$



по теореме синусов:

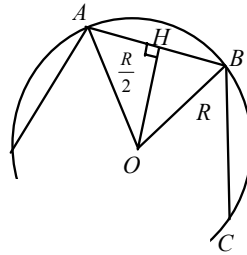
$$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sin \angle DAC} \Rightarrow \sin \angle DAC = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \Rightarrow \angle DAC = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$$



2. Введем систему координат как показано на рисунке, тогда  $A(0; 0)$ ,  $C(3\sqrt{2}; 0)$ ,  $B(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ , тогда

$$D\left(2\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow AD = \sqrt{8 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{17}{2}}.$$

### C-14



1.

Из  $\triangle OHB \Rightarrow \angle HBO = 30^\circ \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow 60^\circ = \frac{180^\circ(n-2)}{n} \Rightarrow 60n = 180n - 360 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 120n = 360 \Rightarrow n = 3.$$

Ответ: 3.

### C-15

1. Т.к. площадь квадрата равна  $Q$ , то сторона равна  $\sqrt{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  диагональ равна  $\sqrt{2Q} \Rightarrow$  радиус равен  $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{Q} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{т.к. } 2R = \frac{a}{\sin 60^\circ} \Rightarrow a = 2R \sin 60^\circ = \sqrt{2Q} \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}Q \Rightarrow P = 3\sqrt{\frac{3}{2}}Q, \text{ а}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{2}Q = \frac{3\sqrt{3}}{8}Q.$$

2. Пусть  $R$  — радиус окружности, тогда площадь вписанного 6-

$$\text{тиугольника равна } 6 \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin 60^\circ = 3R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2},$$

$$\text{а описанного — } 6 \cdot \frac{1}{2} R \cdot (2R \operatorname{tg} 30^\circ) = 6R^2 \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_B}{S_0} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{4}. \quad \text{Ответ: } \frac{3}{4}.$$

3. Находим центр окружности (см. Вар. 2. С-15.3). Затем проводим через него 2 взаимно перпендикулярных диаметра. В точках их пересечения с окружностью строим к ним перпендикулярные прямые.

### С-16

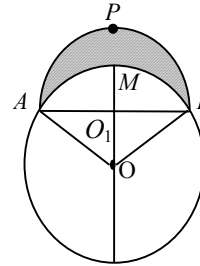
1.  $\triangle AOB$  равнобедренный, значит,  $OO_1$  — биссектриса, высота и медиана.  $\angle BOM = \frac{\angle BOA}{2} = 60^\circ$ ;

Из прямоугольного  $\triangle OO_1B$  находим

$$O_1B = OB \cdot \sin \angle BOM = \frac{R\sqrt{3}}{2}. \text{ Длина дуги } APB$$

$$\text{равна } \pi O_1B = \frac{\pi R\sqrt{3}}{2}, \text{ длина дуги } AMB \text{ равна } \frac{2\pi R}{3},$$

$$\text{следовательно искомый периметр } P = \frac{\pi R\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi R}{3} = \frac{\pi R}{6}(3\sqrt{3} + 4).$$



$$2. \text{ Длина дуги } l = 2\pi R = 2a\pi \Rightarrow l = 135 \frac{\pi}{180^\circ} R_1 \Rightarrow$$

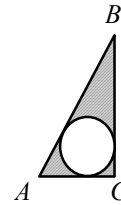
$$\Rightarrow R_1 = \frac{180l}{135\pi} = \frac{4l}{3\pi} = 32 \text{ (см)}.$$

### С-17

1.

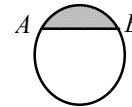
$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6, AB = 5 \Rightarrow P = \frac{1}{2}(3 + 4 + 5) = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = Pr \Rightarrow r = \frac{S}{P} = 1 \Rightarrow S_0 = \pi \Rightarrow S' = 6 - \pi \text{ (см}^2\text{)}.$$



$$2. S' = \frac{1}{2} 120^\circ \frac{\pi}{180^\circ} R^2 - \frac{1}{2} R^2 \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 =$$

$$= \frac{R^2}{12} (4\pi - 3\sqrt{3}).$$



3. Площадь искомого круга по условию  $S = \pi R^2 - \pi r^2$ , значит, радиус искомого круга  $R' = \sqrt{R^2 - r^2}$ . Строим перпендикулярные прямые (серединный перпендикуляр к отрезку). От точки пересечения прямых, на одной из прямых, откладываем отрезок длиной  $r$ , из другого конца отрезка проводим окружность с радиусом  $R$ , она пересечет другую прямую в двух точках, отрезок, соединяющий одну из этих точек с точкой пересечения прямых, является радиусом искомого круга.

### С-18

1. По т. косинусов  $AB = \sqrt{2R^2(1 - \cos 120^\circ)} = R\sqrt{2\left(1 + \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3}R \Rightarrow$

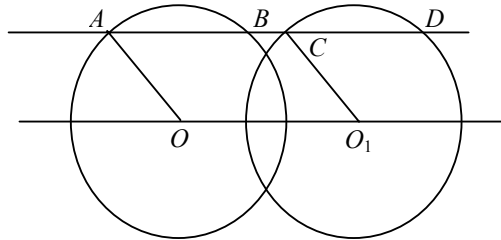
$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow P = \frac{1}{3}2\pi R + \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \frac{2\pi R}{3} + \frac{\sqrt{3}\pi R}{2} = \frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{6}R.$$

2. См. Вар.-4. С-18.2.

### С-19

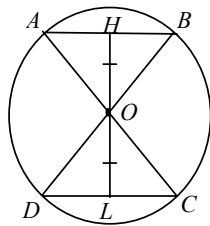
1. Строим векторы  $\overline{BB'} = \overline{AA'} = \overline{CC'} = \overline{FE}$ ,  $\triangle A'B'C'$  — искомый.

2.



Т.к. окружности равны, то их можно совместить параллельным переносом по  $\overline{OO_1}$ , а т.к.  $AC \parallel OO_1$ , то точки A и C совместятся  $\Rightarrow AC = OO_1 = 15$  см.

### С-20



1. Откладываем  $\angle ABF = 60^\circ$  влево от BA, а  $\angle CBE = 60^\circ$ , тоже влево от CB.

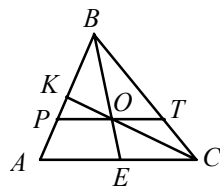
$\angle FBE$  — искомый.

2. По теореме Пифагора

$$AH = HB = DL = LC \Rightarrow AB = DC.$$

### Вариант 4

### С-1



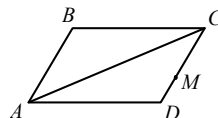
1.

1)  $\triangle ABS \sim \triangle PBT$  и  $k = \frac{2}{3} \Rightarrow \overline{PT} = \frac{2}{3}\overline{AC}$ .

2) Т.к. медианы делятся точкой пересечения в отношении 2 к 3 считая от вершины, то  $\overline{BO} = 2\overline{OE}$ .

2.

$$\overrightarrow{KB} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{7}\overrightarrow{DC} = \frac{3}{7}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{7}(\overrightarrow{n} - \overrightarrow{m}).$$



### C-2

$$1. \overrightarrow{m} = -\vec{i} + \vec{j}; \overrightarrow{n} = \vec{i} + \vec{j} \Rightarrow (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n}) = -1 + 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n}.$$

2. По теореме Пифагора

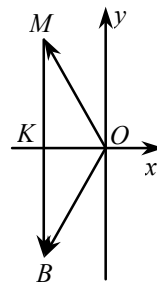
$$MK = \frac{1}{2}MP = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{9 \cdot 25} = 15 \Rightarrow MP = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MP} \{0; -30\}, \overrightarrow{OM} \{-8; 15\}, \overrightarrow{OP} \{-8; -15\}.$$

$$3. \overrightarrow{l} \{3; -2\}, \overrightarrow{p} \{-4; 1\}, \overrightarrow{b} \{-34; 16\}.$$

$$1) \overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{l} - 2\overrightarrow{p} \Rightarrow a \{9 + 8; -6 - 2\} = a \{17; -8\}.$$

2) противоположно направлены, т.к.  $\overrightarrow{b} = -2\overrightarrow{a}, -2 < 0$ .



### C-3

$$1. 1) A(-OA \cos 45^\circ; OA \cos 45^\circ) =$$

$$= A\left(-8\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2}; 8\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = A(-8; 8).$$

$$B(8; \sqrt{OB^2 - 8^2}) = B(8; \sqrt{36}) = B(8; -6).$$

$$2) AB = \sqrt{(8+8)^2 + (-6-8)^2} = \sqrt{256 + 196} = \sqrt{452} = 2\sqrt{113}.$$

3) Пусть M — середина AB, тогда

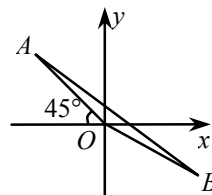
$$M\left(\frac{-8+8}{2}; \frac{-6+8}{2}\right) = M(0; 1) \Rightarrow OM = \sqrt{1} = 1.$$

2. M(3; -1), P(-8; 2). Пусть K(0; y) — искомая точка, тогда

$$KM = 2KP \Rightarrow \sqrt{9 + (y+1)^2} = 2\sqrt{64 + (y-2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 + y^2 + 1 + 2y = 256 + 4y^2 + 16 - 16y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y^2 - 18y + 26 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{30}}{3} \Rightarrow M_{1,2}\left(0; \frac{-6 \pm 2\sqrt{30}}{2}\right)$$



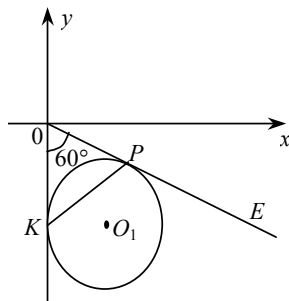
### C-4

Выберем систему координат так чтобы K(0;0), H(-8;8), P(18;0), тогда если D — середина HP, то D(13; 4)  $\Rightarrow KD = \sqrt{169 + 16} = \sqrt{185}.$

### C-5

1. Радиус окружности равен 3, следовательно, диаметр равен 6.

$$MH = \sqrt{(-5+1)^2 + (\sqrt{5} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{16 + 20} = 6 \Rightarrow \text{является.}$$



2. Т.к.  $OK = OP$ , то по теореме косинусов:  
 $KP^2 = 2OK^2(1 - \cos 60^\circ) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow OK = KP = 2\sqrt{3}$ , т.к.  
 $\angle KO O_1 = \frac{1}{2} \angle KOP = 30^\circ$ , то  $KO_1 =$   
 $= OK \operatorname{tg} 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 \Rightarrow O_1(2; -2\sqrt{3}) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 2\sqrt{3})^2 = (2)^2 = 4.$

### C-6

1.  $M(-1; 2)$ ,  $P(3; 1)$ ,  $K(1; -2)$ . Пусть  $T(x; 4)$ , тогда  $\overline{MP} = \overline{TK} \Rightarrow 1 - x = 4$  и  $-2 - y = -1 \Rightarrow x = -3, y = -1$ . Пусть  $y = kx + b$  — уравнение  $PT$ , тогда

$$\begin{cases} -1 = -3k + b \\ 1 = 3k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ k = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 3y - x = 0.$$

2.  $y = x + 4$ ,  $y = -x$  и  $x = 0$ . Первые две прямые пересекаются в точке  $(-2; 2)$ , следовательно, расстояние от нее до оси ординат равно 2. Первая прямая пересекает ось ординат в точке  $(0; 4)$ , следовательно, площадь треугольника равна  $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$ .

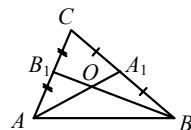
### C-7

1. По теореме Пифагора расстояние до прямой  $y = x + 4$  равно  $2\sqrt{2}$ . Радиус окружности тоже  $2\sqrt{2} \Rightarrow$  касается.

2. Пусть  $M(x; y)$  — искомые, тогда

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y + 2)^2 \Rightarrow 2x + 1 - 4y + 4 = -4x + 4 + 4y + 4 \Rightarrow 6x - 8y - 3 = 0 \text{ — искомое множество точек.}$$

### C-8



1. Т.к.  $BB_1$  — медиана, то  $S(ABB_1) = \frac{1}{2} S(ABC)$ .

$$\begin{aligned} \text{Т.к. } B_1O &= \frac{1}{3} BB_1, \text{ то } S(AOB_1) = \frac{1}{3} S(ABB_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow S(AOB_1) &= \frac{1}{6} S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{12} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \sin \alpha = 4 \sin \alpha. \end{aligned}$$

$$2. S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}.$$

### C-9

1. По теореме синусов:

$$\frac{CA}{\sin \alpha} = \frac{m}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow CA = \frac{m \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)},$$

(т.к.  $\angle CAD = \angle BCA$ )

$\angle BAC = \alpha - \beta$ , тогда по теореме синусов:

$$\frac{BC}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{AC}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow BC = \frac{AC \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{m \sin \alpha \sin(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \Rightarrow$$

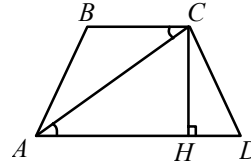
$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} (BC + AD) CH = \frac{1}{2} (BC + AD) \cdot m \cdot AC \sin \beta =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) + m \sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \cdot \frac{m \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} =$$

$$= \frac{m^2 \sin \alpha \sin \beta (\sin \alpha \cdot \sin(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha + \beta))}{2 \sin^3(\alpha + \beta)}.$$

2.  $\angle B = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ$ , а т.к.

$$\frac{AC}{\sin \angle B} = 2R, \text{ то } AC = 2R \sin \angle B = 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6.$$



### C-10

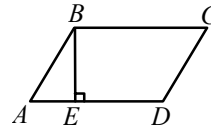
$$1. AB = \frac{BE}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4 \Rightarrow \text{по теореме косинусов:}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC} = \sqrt{16 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{16 + 4 + 8} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

2. Наибольший угол лежит против большей стороны, значит по теореме

$$\text{косинусов } 49 = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{15}{30} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120^\circ.$$



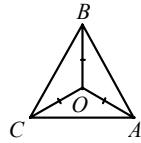
### C-11

1.  $a = 3,9$ ;  $b = 4,1$ ;  $c = 2,8$ . По теореме косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 64^\circ 44'.$$

$$\text{По теореме синусов: } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = \arcsin \frac{b \sin \alpha}{a} \approx 73^\circ 24', \text{ аналогично, } \gamma = \arcsin \frac{c \sin \alpha}{a} \approx 41^\circ 52'.$$



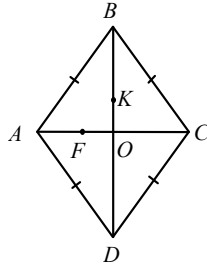
2. Пусть  $O$  — центр окружности, тогда по теореме косинусов:

$$\cos \angle AOC = \frac{2R^2 - b^2}{2R^2}, \text{ а } \cos \angle BOC = \frac{2R^2 - a^2}{2R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle C = \frac{1}{2} \angle BOA = \frac{1}{2} \left( 360^\circ - \arccos \frac{2R^2 - b^2}{2R^2} - \arccos \frac{2R^2 - a^2}{2R^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \angle C \approx 475,8.$$

### C-12



1. Введем систему координат как показано на рисунке, тогда по теореме Пифагора  $AB = OD =$

$$= \sqrt{100 - 64} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1) \overline{AB} \{8; 6\}, \overline{AC} \{16; 0\} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 128;$$

$$2) \overline{BD} \{0; -12\} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{BD} = -6 \cdot 12 = -72;$$

$$3) \overline{KD} \{0; \alpha\}, \overline{FC} \{\beta; 0\} \Rightarrow \overline{FC} \cdot \overline{KD} = 0.$$

$$2. \overline{PT} \{6; -9\} \Rightarrow \angle \alpha = \arccos \frac{-9}{\sqrt{36 + 81} \cdot \sqrt{1}} \approx 148^\circ 19'.$$

### C-13

1. Построим на векторах  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  параллелограмм, так, чтобы  $\overline{AB} = \vec{m}$ ,  $\overline{AD} = \vec{n}$ , тогда  $\overline{DB} = \vec{m} - \vec{n}$ . По теореме косинусов:

$$BD = \sqrt{9 + 4 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{13 - 6} = \sqrt{7}, \text{ тогда по теореме синусов}$$

$$\frac{AB}{\sin \angle ABD} = \frac{BD}{\sin 120^\circ} \Rightarrow \sin \angle ABD = \frac{AD \cdot \sin 120^\circ}{BD} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow \angle ABD \approx 23^\circ 59'.$$

2. Выберем систему координат так, чтобы  $F(0;0)$ ,  $K(-3;3)$ ,  $E(2;0)$ , тогда

$$M\left(\frac{-1}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow FM = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

### C-14

1. Рассмотрим треугольник, образованный радиусом, проведенным в вершину многоугольника, половиной его стороны, и отрезком, соединяющим эту середину с центром окружности, очевидно, что косинус

$$\text{угла с вершиной в центре окружности равен } \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}R}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{этот угол}$$



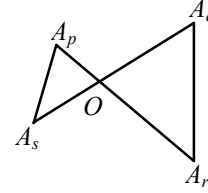
равен  $30^\circ \Rightarrow$  угол опирающийся на сторону многоугольника равен  $60^\circ$   
 $\Rightarrow$  многоугольник является 6 – угольником.

2.

Опишем вокруг него окружность. Пусть  $A_p A_q A_v A_s$  — какие-то вершины многоугольника.

Имеем  $\angle A_p A_s A_q = \angle A_p A_v A_q$ , т.к. опираются на одну дугу.

Очевидно,  $\angle A_s A_p A_v = \angle A_s A_q A_v \Rightarrow \Delta A_s O A_p \sim \Delta A_v O A_q \Rightarrow$   
 $\Rightarrow A_s O \cdot O A_q = A_p O \cdot O A_v$ . Ч.т.д.



### С-15

1. Пусть  $R$  — радиус окружности  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow Q = 6 \cdot \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin 60^\circ = 3R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{2Q}{3\sqrt{3}}}.$$

По теореме Пифагора сторона квадрата равна  $\sqrt{2}R = \sqrt{\frac{4Q}{3\sqrt{3}}} \Rightarrow S = \frac{4Q}{3\sqrt{3}}.$

2. Пусть радиус окружности равен  $R$ ,

$$\text{тогда } S_{\text{en}} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin 120^\circ = \frac{3}{2} R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2.$$

Т. к. центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис, то половина стороны описанного треугольника равна

$R \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}R$ , следовательно, сторона его равна

$$2\sqrt{3}R \Rightarrow S_{\text{on}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \cdot 3 \cdot R^2 = 3\sqrt{3}R^2 \Rightarrow \frac{S_{\text{on}}}{S_{\text{en}}} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 4}{3\sqrt{3}} = 4.$$

3. Находим центр окружности (Вар. 2. С-15.3).

Строим угол в  $60^\circ$  с вершиной в центре. Откладываем от него еще такой же. Повторяем эту операцию 3 раза. Далее выбираем 3 точки пересечения сторон углов с окружностью, лежащие через одну, и проводим в них по касательной.

### С-16

1. Рис. 21.

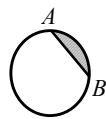
$$\begin{aligned} \text{По т. Пифагора } AB = R\sqrt{2} \Rightarrow r &= \frac{\sqrt{2}}{2} R \Rightarrow P = \frac{1}{4} \cdot 2\pi R + \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \\ &= \frac{\pi R}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi R}{2} = \frac{\pi}{2} R(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

$$2. \tilde{l}_{AB} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 120^\circ \cdot 6 = 4\pi \Rightarrow r = \frac{\tilde{l}_{AB}}{2\pi} = 2 \text{ (см)}. \text{ Ответ: 2 см.}$$

### С-17

1. По формуле Герона  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1} = 12 \Rightarrow$

$$\Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow S_0 = \pi r^2 = \frac{16\pi}{9} \Rightarrow S' = S - S_0 = 12 - \frac{16\pi}{9}.$$



2. Рис. 23.

$$S' = S_{\text{сект}} - S_{\text{мп}} = \frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 \sin 60^\circ = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2.$$

3. Пусть радиусы кругов равны  $r_1$  и  $r_2$ . Строим прямоугольный треугольник с катетами  $r_1$  и  $r_2$ , тогда его гипотенуза равна  $\sqrt{r_1^2 + r_2^2} = r$ .

Строим круг с радиусом  $r$ . Он искомый.

### С-18

1. Строим все высоты треугольника. Далее см. Вар. 2. С-18.1.

2. Пусть  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$  и при движении они отобразятся на  $\Delta A'_1B'_1C'_1$  и  $\Delta A''B''C''$ . Т.к. движение сохраняет расстояние между точками и углами, то  $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ ,  $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A'B'C' \Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta A'_1B'_1C'_1$  и т.д.

### С-19

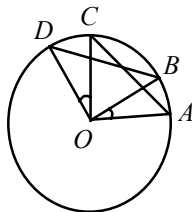
1. Пусть при параллельном переносе на вектор  $\overline{PK}$ , точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  переходят соответственно в точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , тогда  $\Delta A_1B_1C_1$  – искомый.

2. Перенесем  $\Delta ABC$  на вектор  $\overline{MM_1}$ , тогда точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $E$ ,  $F$  и  $M$  совмещаются соответственно с точками  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $K$ ,  $P$  и  $M_1$ , значит  $FP = |\overline{MM_1}| = 8$  см.

### С-20

1. Пусть при повороте вокруг т.  $O$  на  $120^\circ$  против часовой стрелки точки  $M$ ,  $H$  и  $P$  переходят соответственно в точки  $M_1$ ,  $H_1$  и  $P_1$ , тогда  $\angle M_1H_1P_1$  – искомый.

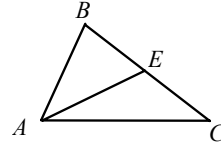
2.



$\Delta AOC = \Delta BOD$  по 1-му признаку  $\Rightarrow AC = DB$ . **Вариант 5**

**C-1**

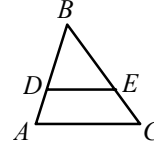
$$1. \overline{AE} = \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AC} + \frac{5}{8}\overline{CB} = \overline{AC} + \frac{5}{8}(\overline{CA} + \overline{AB}) = \\ = \overline{b} + \frac{5}{8}(-\overline{b} + \overline{a}) = \frac{3}{8}\overline{b} + \frac{5}{8}\overline{a}.$$



2.

$$\overline{DE} = \overline{DB} + \overline{BE};$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \frac{5}{3}(\overline{DB} + \overline{BE}) \Rightarrow \overline{DE} \uparrow \uparrow \overline{AC} \Rightarrow DE \parallel AC.$$



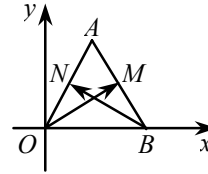
**C-2**

$$1. \overline{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}, \overline{b} = \vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \overline{a} + \overline{b} = 3\vec{i} - \vec{j}.$$

$$2. \overline{OA} \left\{ \frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2} \right\}.$$

$$\text{Аналогично, } \overline{BA} \left\{ -\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2} \right\}, \overline{OB} \{a; 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{OM} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2} + a \right); \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}a + 0 \right) \right\} \Rightarrow \overline{OM} \left\{ \frac{3a}{4}; \frac{\sqrt{3}a}{4} \right\} \Rightarrow \overline{BN} \left\{ -\frac{3a}{4}; \frac{\sqrt{3}a}{4} \right\}.$$



$$3. \overline{a} \{-1; 5\}, \overline{b} \{m; 2\}.$$

Пусть  $\overline{a}$  и  $\overline{b}$  — коллинарны, тогда  $-k = m$  и  $5k = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{5} \Rightarrow m = -\frac{2}{5}$  ..

**C-3**

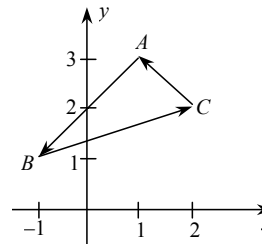
$$1. \overline{AB} \{3; 2\}, \overline{CD} \{-3; -2\} \Rightarrow |\overline{AB}| = |\overline{CD}| \text{ и } \overline{AB} \downarrow \uparrow \overline{CD} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD} \Rightarrow ABCD$  — параллелограмм  $\Rightarrow AC$  и  $BD$  — пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

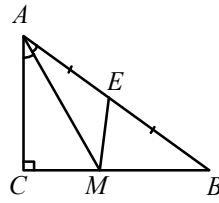
$$2. \overline{AB} \{-2; -2\}, \overline{BC} \{3; 1\}, \overline{CA} \{-1; 1\};$$

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -2 + 2 = 0 \Rightarrow AB \perp AC \Rightarrow$  треугольник прямоугольный  $\Rightarrow$  центр описанной окружности — середина  $BC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left( \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right), \text{ а } R = \sqrt{\left( \frac{3}{2} - 2 \right)^2 + \left( \frac{1}{2} - 2 \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$



#### C-4



По свойству биссектрисы:

$$\frac{AC}{CM} = \frac{AB}{MB} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}.$$

По теореме Пифагора  $CB=4 \Rightarrow MB=2,5$ , а  $CM=1,5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow M(1,5;0), E(2; 1,5) \Rightarrow ME = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

#### C-5

1.  $x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0$ ;  $(x-4)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$  это окружность с радиусом 1 и центром  $(4; 0)$ . Точка  $(4; -1)$  удовлетворяет обоим уравнениям, очевидно, что в этой точке они не касаются  $\Rightarrow$  они пересекаются.

2. Пусть  $M$  — середина  $AC$ , тогда очевидно, что  $AC = 8$ ,  $AM = MC = 4$ ,  $MB = 3$  и по теореме Пифагора  $AB = BC = 5$ , тогда радиус вписанной

$$\text{окружности равен } r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{9 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1}}{4+5} = \frac{3 \cdot 4}{9} = \frac{4}{3}.$$

Центр окружности  $O$  лежит на  $BM$  и удален от  $BC$  на расстояние, равное

$$\frac{4}{3} \Rightarrow O\left(0; \frac{4}{3} - 1\right) \Rightarrow O\left(0; \frac{1}{3}\right) \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}.$$

#### C-6

1. Угловой коэффициент  $OC$  равен  $\frac{4}{3} \Rightarrow$  угловой коэффициент искомой

прямой равен  $-\frac{3}{4} \Rightarrow$  она имеет вид:  $y = -\frac{3}{4}x + b$ . Т.к.  $C$  лежит на этой

прямой, то  $4 = -\frac{3}{4} \cdot 3 + b$ , откуда  $b = \frac{25}{4} \Rightarrow y = -\frac{3x}{4} + \frac{25}{4}$ .

2.  $y - x = 0$ ,  $y + x = 0$ ,  $y - 2x + 4 = 0$

Очевидно, что треугольник прямоугольный, с прямым углом в начале

$$\text{координат. } \begin{cases} y - x = 0 \\ y = 2x - 4 \end{cases}; \begin{cases} y = x \\ y = 2x - 4 \end{cases}; \begin{cases} y = x \\ -x = -4 \end{cases}; \begin{cases} y = x \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

одна из вершин имеет координаты  $(4; 4)$ .

$$\begin{cases} y = -x \\ y - 2x + 4 = 0 \end{cases}; \begin{cases} y = -x \\ -x - 2x + 4 = 0 \end{cases}; \begin{cases} y = -x \\ 3x = 4 \end{cases}; \begin{cases} y = -x \\ x = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  другая —  $\left(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$ . Расстояние от этих вершин до начала координат

$$\text{равно соответственно } 4\sqrt{2} \text{ и } \frac{4}{3}\sqrt{2} \Rightarrow \text{площадь равна } \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{2} = \frac{16}{3}.$$

### С-7

$$1. \begin{cases} 2y + x - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = 4 - 2y \\ (4 - 2y)^2 + y^2 = 5 \end{cases};$$

$$4y^2 - 16y + 16 + y^2 = 5; 5y^2 - 16y + 11 = 0; D_1 = 64 - 55 = 9;$$

$$y_1 = \frac{8-3}{5} = 1, y_2 = \frac{8+3}{5} = \frac{11}{5} \Rightarrow x_1 = 2, \text{ а } x_2 = \frac{20}{5} - \frac{22}{5} = -\frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2; 1) \text{ и } \left(-\frac{2}{5}; \frac{11}{5}\right) \text{ — концы хорды} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(2 - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{11}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{36}{25}} = \frac{10}{5} \Rightarrow 2 \text{ — ее длина.}$$

2. Выберем систему координат так, чтобы  $A(-2; 0), B(2; 0)$ .

Пусть  $M(x; y)$  — искомая точка, тогда  $(x-2)^2 + y^2 + (x+2)^2 + y^2 = 10$ ;

$2x^2 + 8 + 2y^2 = 10; x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$  окружность с центром в середине отрезка  $AB$  и радиусом равным 1.

### С-8

1. Т. к.  $AA_1$  и  $CC_1$  — медианы, то  $AO = 6, CO = 8$ , тогда

$$S(AOC) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}, \text{ т.к. } AO = \frac{2}{3} AA_1,$$

$$\text{то } S(AOC) = \frac{2}{3} S(AA_1C) \Rightarrow S(AA_1C) = \frac{3}{2} \cdot 12\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \Rightarrow S(ABC) = 36\sqrt{3}.$$

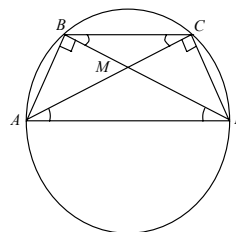
2. Т. к. трапеция вписана, то она равнобокая  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha, \text{ откуда } \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle AMD = 150^\circ.$$

Пусть  $\angle CAD = \angle BDA = \beta$ , тогда из

$\triangle AMD \quad \beta = 15^\circ \Rightarrow$  т.к.  $\triangle ACD$  — прямоугольный, то  $\angle CDA = \angle BAD = 75^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle BCD = 105^\circ$ . Ответ:  $75^\circ$  и  $105^\circ$ .



### С-9

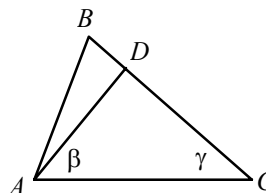
1. По теореме синусов:

$$\frac{AD}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{AB}{\sin(\beta + \gamma)} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)};$$

$$\frac{S(ADC)}{S(ABC)} = \frac{AD \cdot AC \cdot \sin \beta}{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha} = \frac{\sin(\alpha + \gamma) \cdot \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma) \cdot \sin \alpha}.$$

2. По теореме Пифагора  $AE = 4$ , аналогично,

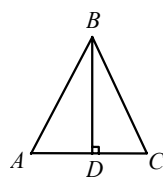
$$CE = \sqrt{81 - 9} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \Rightarrow AC = 6\sqrt{2} + 4,$$



$$S(ABC) = (4 + 6\sqrt{2}) \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 6 + 4\sqrt{2} \Rightarrow R =$$

$$\frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S} = \frac{45(4 + 6\sqrt{2})}{24 + 36\sqrt{2}} = \frac{180 + 270\sqrt{2}}{24 + 36\sqrt{2}} = \frac{30 + 45\sqrt{2}}{4 + 6\sqrt{2}} = 7,5.$$

### C-10



1. Т.к.  $\cos \angle ABC < 0$ , то  $\angle B$  — тупой.

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin \angle B = 5\sqrt{3} \Rightarrow \sin \angle B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle B = 120^\circ \Rightarrow$$

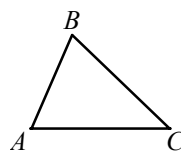
$$\Rightarrow AC = \sqrt{16 + 25 + 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{16 + 25 + 20} = \sqrt{61} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} BD \cdot AC \Rightarrow BD = \frac{2S}{AC} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{61}}.$$

$$2. \frac{1}{R} = \frac{4S}{abc} = \frac{4\sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}}{13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 7 \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2}}{13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{4 \cdot 6}{13 \cdot 15} = \frac{8}{65}. R = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8}.$$

### C-11

1.  $\angle C = 66^\circ$ . По теореме синусов:

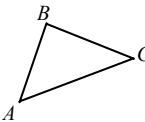


$$\frac{c}{\sin 66^\circ} = \frac{a}{\sin 64^\circ} = \frac{b}{\sin 50^\circ}.$$

По свойству пропорции:

$$\frac{c}{\sin 66^\circ} = \frac{a+b}{\sin 64^\circ + \sin 50^\circ} = \frac{21}{\sin 64^\circ + \sin 50^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{21 \sin 66^\circ}{\sin 64^\circ + \sin 50^\circ} \Rightarrow a = \frac{21 \sin 66^\circ \sin 64^\circ}{\sin 64^\circ + \sin 50^\circ}, \text{ а } b = \frac{21 \sin 50^\circ}{\sin 64^\circ + \sin 50^\circ}.$$

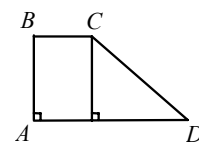


2. Т.к.  $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 130^\circ$ , то

$$AB = \frac{2S}{BC \sin 130^\circ} = \frac{7,2}{3,4 \sin 130^\circ}, \text{ тогда}$$

$$AC = \sqrt{\frac{(7,2)^2}{(3,4)^2 \sin^2 130^\circ} + (3,4)^2 - 2 \frac{7,2 \cdot 3,4}{3,4 \sin 130^\circ} \cos 130^\circ} \approx 5,6.$$

### C-12



1. По теореме Пифагора  $CD = 5$ .

$A(0; 0), B(0; 3), C(2; 3), D(6; 0);$

1)  $\overline{BA} \{0; -3\}, \overline{CD} \{4; -3\} \Rightarrow \overline{BA} \cdot \overline{CD} = 9;$

2)  $\overline{AD} \{6; 0\} \Rightarrow \overline{AD} \cdot \overline{DC} = 6 \cdot (-4) = -24;$

3)  $\overline{BC} \{2; 0\}, \overline{DA} \{-6; 0\} \Rightarrow \overline{BC} \cdot \overline{DA} = -12.$

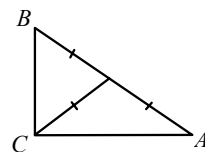
2.  $\overline{BC}\{-3;3\}$ ,  $\overline{CA}\{x+2;-1\}$ , т.к.  $BC \perp AC$ ,

то  $-3x - 6 - 3 = 0 \Rightarrow -3x = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3;3) \Rightarrow E(2;2) \Rightarrow \overline{CE}\{4;-2\}$ , а

$\overline{AB}\{-2;-2\} \Rightarrow \cos \angle CEB =$

$$= \frac{(\overline{AB}, \overline{CE})}{\overline{AB} \cdot \overline{CE}} = \frac{-2 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2)}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{-4}{4\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \angle CEB \approx 143^\circ 8'.$$



### C-13

1.  $\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BE} + \overline{AB} \cdot \overline{CF} =$

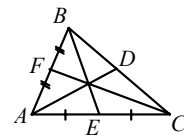
$$= \frac{1}{2}(\overline{BC}(\overline{AB} + \overline{AC}) + \overline{CA}(\overline{BA} + \overline{BC}) + \overline{AD}(\overline{CA} + \overline{CB})) =$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{BC} \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{AC} + \overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{BC} \cdot \overline{AC} - \overline{AC} \cdot \overline{AB} - \overline{AB} \cdot \overline{BC}) = 0.$$

2.  $\overline{CD} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})$ , а  $\overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA}$ .

Из условия следует, что  $\overline{CD}^2 > \frac{1}{4}\overline{AB}^2$ , тогда  $\frac{1}{4}(\overline{CA} + \overline{CB})^2 > \frac{1}{4}(\overline{CB} - \overline{CA})^2$ ,

$2\overline{CA} \cdot \overline{CB} > -2\overline{CA} \cdot \overline{CB}$  и  $\overline{CA} \cdot \overline{CB} > 0 \Rightarrow \angle C$  — острый.

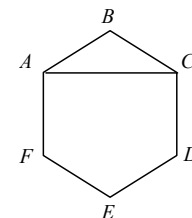


### C-14

1.  $S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{48}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{48}{\sqrt{3}}} = \sqrt{16\sqrt{3}} = 4\sqrt{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(ABCDEF) = 6S(AOB) = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{48 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 4} = 72.$$



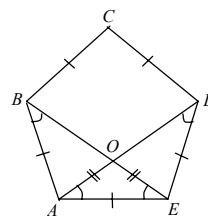
2. Т.к.  $ABCDE$  — правильный, то его можно вписать в окружность  $\Rightarrow \angle ADE = \angle ABE$ , а т.к.  $AB = AE = DE$ , то  $\angle ABE = \angle ADE = \angle OAE = \angle OEA \Rightarrow$

$$\Rightarrow \triangle AOE \sim \triangle AED \text{ (по 2-м углам)} \Rightarrow \frac{AO}{AE} = \frac{AE}{AD}, \quad AO = \frac{AE^2}{AD}.$$

По теореме косинусов:

$$AD = \sqrt{2AE^2 \left(1 - \cos \frac{180^\circ \cdot 3}{5}\right)} = 2\sqrt{2(1 - \cos 108^\circ)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AO = \frac{4}{2\sqrt{2(1 - \cos 108^\circ)}} = \frac{2}{\sqrt{2(1 - \cos 108^\circ)}}.$$



### C-15

1. Угол, опирающийся на сторону, равен  $\frac{360^\circ}{20} = 18^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 = 2R^2(1 - \cos 18^\circ) \Rightarrow a = R\sqrt{2(1 - \cos 18^\circ)} \Rightarrow P = 6R\sqrt{2(1 - \cos 18^\circ)}.$$

$$2. a^2 = 2r_1^2(1 - \cos 120^\circ) \Rightarrow r_1 = \frac{a}{\sqrt{2(1 - \cos 120^\circ)}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

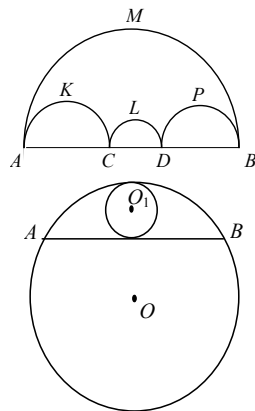
Аналогично,  $r_2 = \frac{a}{\sqrt{2(1 - \cos 60^\circ)}} = a;$

$$\rho(O_1, O_2) = r_1 \cos 60^\circ + r_2 \cos 30^\circ =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} + a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}.$$

3. Откладываем от апофемы углы в  $30^\circ$  в обе стороны с вершинами в один из его концов. Через другой конец проведем серединный перпендикуляр. 5 раз подряд поворачиваем получившийся треугольник на  $60^\circ$ .

### C-16



$$1. \overset{\cup}{AMB} = r\pi;$$

$$\overset{\cup}{AKC} + \overset{\cup}{CLL} + \overset{\cup}{DPB} = \pi(r_1 + r_2 + r_3), \text{ а т.к.}$$

$$2r = 2(r_1 + r_2 + r_3), \text{ то } r = r_1 + r_2 + r_3. \text{ Ч.т.д.}$$

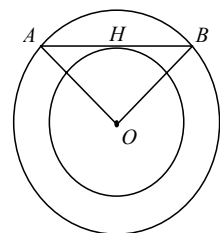
$$2. l = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 120^\circ \cdot R \Rightarrow R = \frac{3l}{2\pi} \Rightarrow$$

высота  $\triangle AOB$ , проведенная к  $AB$ , равна

$$R \cos 60^\circ = \frac{3l}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3l}{4\pi} \Rightarrow d_1 = R - R \cos 60^\circ =$$

$$= \frac{3l}{4\pi} \Rightarrow r_1 = \frac{3l}{8\pi} \Rightarrow l_1 = 2\pi r_1 = \frac{3l}{4}.$$

### C-17



1.

$$2R^2(1 - \cos \alpha) = a^2 \Rightarrow R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{a^2}{4}; \quad (1)$$

$$r = R \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow r^2 = R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad (2)$$

$$\frac{a}{2} = R \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{4} = R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (3)$$



$$\text{Из (1) и (2)} \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow r = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Сложим (1) и (3): } r^2 + \frac{a^2}{4} = R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_k = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

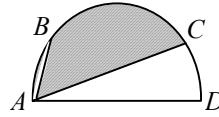
$$2. Q = \frac{1}{2} \pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{2Q}{\pi}} \Rightarrow \text{имеем } S(\overset{\cup}{ACD}) =$$

$$= S_{\Delta}(AOC) + S(OCD) = \frac{1}{2} R^2 \sin 150^\circ + \frac{\pi}{12} R^2 =$$

$$= \frac{R^2}{2} \left( \sin 150^\circ + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{Q}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} \right). \quad S(AOB) = S(COD) = \frac{\pi}{12} R^2 = \frac{Q}{6}.$$

$$S_1(AOB) = \frac{1}{2} R^2 \sin 30^\circ = \frac{R^2}{4} = \frac{Q}{2\pi} \Rightarrow S' = Q - S_{\Delta}(AOC) - S(OCD) -$$

$$- (S(ACB) - S_{\Delta}(AOB)) = Q - \frac{Q}{2\pi} - \frac{Q}{6} - \left( \frac{Q}{6} - \frac{Q}{2\pi} \right) = \frac{2}{3} Q.$$



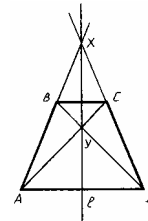
3. Пусть  $r_1$  — искомый радиус, тогда

$\pi r_1^2 = \pi r^2 - \pi r_1^2 \Rightarrow 2r_1^2 = r^2 \Rightarrow r = r_1 \Rightarrow r_1$  — катет равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой  $r \Rightarrow r_1$  — легко найти.

### С-18

1. Продолжим боковые стороны до их пересечения. Соединим точку их пересечения и точку пересечения диагоналей. Получим ось симметрии.

2. Т.к. движение сохраняет расстояние, то равно либо 2 либо 10.

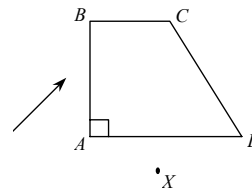


### С-19

1. Первая часть задачи описана в Вар. 4. С-19.1.

Проведем через точку  $X$  прямую, параллельную  $\vec{a}$ . Затем отложим на ней отрезок в направлении  $\vec{a}$  длиной  $|\vec{a}|$ .

Строим прямоугольный  $\Delta ACD_1$  по двум данным отрезкам ( $\angle ACD_1 = 90^\circ$ ), данные отрезки — катеты. Через точки  $A$  и  $C$  проведем прямые, перпендикулярные  $AD_1$ . Точка их пересечения — вершина  $B$ . После этого отрезок  $CD_1$  параллельно переносим на , при этом  $D_1 \rightarrow D$ . Трапеция  $ABCD$  — искомая.



2. Постройте прямоугольный треугольник  $ACD_1$ , по двум катетам, равным данным отрезкам. Затем через т.  $A$  проведите прямую перпендикулярную  $AD$ , а через т.  $C$  – параллельную  $AD_1$ . Точка их пересечения будет вершиной  $B$ . Затем отрезок  $CD_1$  параллельно перенесите на вектор  $\overrightarrow{CB}$ , при этом т.  $D_1$  перейдет в т.  $D$ .  $ABCD$  – искомая трапеция.

### С-20

1. Повернем окружность с центром в  $O_2$  на  $60^\circ$  против часовой стрелки. Точки ее пересечения с окружностью с центром в  $O_1$  будут искомыми для этой окружности, и те точки, которые в них перешли при повороте — искомыми для другой окружности.

2. При повороте вокруг точки  $O$  на  $120^\circ$   $AB \rightarrow AC, AC \rightarrow \overline{BC}$ .

Очевидно, что  $E \rightarrow P, F \rightarrow K$ , тогда  $EF \rightarrow KP \Rightarrow EF = KP$ .

## Вариант 6

### С-1

$$1. \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OP} + \frac{10}{7}\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{OP} + \frac{10}{7}(\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OP}) = \frac{10}{7}\overrightarrow{OK} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OP} = \frac{10}{7}\overrightarrow{m} - \frac{3}{7}\overrightarrow{n}.$$

$$2. \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} = \frac{2}{7}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}); \quad \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CP} = \frac{7}{10}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{7}{10}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}),$$

значит,  $\overrightarrow{ME} \parallel \overrightarrow{PT}$ .

### С-2

1. Постройте вектора  $\overrightarrow{m}$  и  $\overrightarrow{n}$ . Проведите вектор из конца вектора  $\overrightarrow{n}$  в конец вектора  $\overrightarrow{m}$  - это вектор разности  $\overrightarrow{m}$  и  $\overrightarrow{n}$ , его координаты:  $\overrightarrow{m} - \overrightarrow{n} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{i} - 6\vec{j} = 8\vec{i} - 10\vec{j}$ .

2. Рис. 31.

$$O(0;0), \quad A\left(-\frac{m}{2}; \frac{\sqrt{3}m}{2}\right), \quad B\left(\frac{m}{2}; \frac{\sqrt{3}m}{2}\right) \Rightarrow F\left(-\frac{m}{4}; \frac{\sqrt{3}m}{4}\right), \quad E\left(\frac{m}{4}; \frac{\sqrt{3}m}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AE} \left\{ \frac{3m}{4}; -\frac{\sqrt{3}m}{4} \right\}, \quad \overrightarrow{BF} \left\{ -\frac{3m}{4}; -\frac{\sqrt{3}m}{4} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{3m}{4}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}m}{4}\vec{j},$$

$$\overrightarrow{BF} = -\frac{3m}{4}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}m}{4}\vec{j}.$$

3. Т. к. не существует такого  $m$ , что  $\frac{4}{m} = \frac{-3}{0}$ , то вектора  $\overrightarrow{a}$  и  $\overrightarrow{b}$  колли-

неарны только при  $m = 0$ , т.к.  $\overrightarrow{0}$  коллинеарен любому вектору.

### С-3

1. Найдем уравнение  $AC$ :

$$\begin{cases} -6 = -4k + b \\ 14 = 16k + b \end{cases}; \begin{cases} b = -6 + 4k \\ 14 = 16k - 6 + 4k \end{cases} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow y = x - 2.$$

Найдем уравнение  $BD$ :

$$\begin{cases} 8 = 2k + b \\ 0 = 10k + b \end{cases}; \begin{cases} b = -10k \\ 8 = 2k - 10k \end{cases} \Rightarrow k = -1 \Rightarrow b = 10 \Rightarrow y = -x + 10.$$

Найдем точку их пересечения

$$\begin{cases} y = -x + 10 \\ y = x - 2 \end{cases}; \begin{cases} 2y = 8 \\ x = y + 2 \end{cases}; \begin{cases} y = 4 \\ x = 6 \end{cases} \text{ — очевидно, точка принадлежит}$$

обоим отрезкам. Отрезки перпендикулярны, т.к. перпендикулярны прямые, их содержащие.

$$2. \overline{AB} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \sqrt{\left(2 - \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{8} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что и  $CA = \sqrt{2} \Rightarrow \triangle ABC$  — равносторонний со стороной равной  $\sqrt{2} \Rightarrow$  радиус описанной окружности равен  $\frac{2}{3}$  его

$$\text{высоты, т.е. } R = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{3}.$$

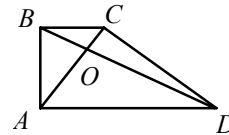
### С-4

Т.к.  $\triangle AOD \sim \triangle COB$ , то  $BC = \frac{4}{3} \Rightarrow$

$$A(0; 0), B(0; 4), D(4; 0), C\left(\frac{4}{3}; 4\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow E$  — середина  $BD \Rightarrow E\{2; 2\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow CE = \sqrt{\left(\frac{8}{3} - 2\right)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + 4} = \sqrt{\frac{48}{9}} = \frac{2}{3} \sqrt{10}.$$



### С-5

1.  $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ ,  $x^2 + (y^2 - 6y + 9) + 5 - 9 = 0$ ,  $x^2 + (y - 3)^2 = 4 \Rightarrow$  это окружность с центром  $(0; 3)$  и радиусом 2. Вторая окружность имеет центр  $(4; 0)$  и радиус 3.

Т. к. расстояние между центрами равно сумме радиусов, то окружности касаются.

$$2. AB = BC = \sqrt{(1+3)^2 + 3^2} = 5. AB = 6 \Rightarrow R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S} = \frac{25 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{25}{8}.$$

Найдем уравнение серединного перпендикуляра к  $AC$ :

Пусть  $AC$  задается уравнением  $y = kx + b$ , тогда

$$\begin{cases} 3 = k + b \\ 0 = -3k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4k = 3 \\ b = 3 - k \end{cases} \Rightarrow k = \frac{3}{4}, b = \frac{9}{4}, \text{ пусть далее } y_1 = k_1x + b_1 - \text{урав-}$$

нение серединного перпендикуляра к  $AC$ , то  $\frac{3}{2} = -1 \cdot (-\frac{4}{3}) + b_1$ ,

$$b_1 = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{9} - \text{уравнение серединного перпендикуляра}$$

к  $AC$ , а  $x = 0$  - к  $AB$ . Найдем точку их пересечения:

$$y = \frac{1}{9}, x = 0 \Rightarrow \text{уравнение описанной окружности } x^2 + (y - \frac{1}{9})^2 = \frac{625}{64}.$$

### С-6

$$1. y = -2x + 1 \Rightarrow k = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}, \text{ найдем } b: 1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1.$$

2. Найдем точки пересечения прямых.

$$\begin{cases} y = -x \\ y = -2x + 4 \end{cases}; \begin{cases} y = -x \\ -x = -2x + 4 \end{cases}; \begin{cases} y = -4 \\ x = 4 \end{cases}; (4; -4).$$

$$\begin{cases} y = -x \\ y = 3x + 4 \end{cases}; \begin{cases} y = -x \\ -x = 3x + 4 \end{cases}; \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}; (1; -1).$$

$$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x + 4 \end{cases}; \begin{cases} 3x + 4 = -2x + 4 \\ y = 3x + 4 \end{cases}; \begin{cases} y = 4 \\ x = 0 \end{cases}; (0; 4).$$

Найдем длины сторон:  $\sqrt{(4-1)^2 + (-4+1)^2} = 3\sqrt{2}$ ;

$$\sqrt{(1-0)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{26}; \sqrt{(4-0)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{80}.$$

По теореме косинусов:

$$80 = 18 + 26 - 2 \cdot 6\sqrt{13} \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{44 - 80}{12\sqrt{13}} = \frac{-36}{12\sqrt{13}} = \frac{-3}{\sqrt{13}} =$$

$$= \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{18} = 6.$$

### С-7

1. Пусть  $A$  и  $B$  - точки пересечения прямой с окружностью, а т.  $O$  - начало координат. Найдем расстояние от т.  $O$  до прямой

$$y = \frac{-3}{4}x + 3 \Rightarrow k = \frac{-1}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \text{перпендикулярна прямой.}$$

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ y = -\frac{3}{4}x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}x = -\frac{3}{4}x + 3 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{25}{12}x = 3 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{36}{25} \\ y = \frac{48}{25} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 = \left(\frac{36}{25}\right)^2 + \left(\frac{48}{25}\right)^2 = \frac{12^2 \cdot 3^2 + 12^2 \cdot 4^2}{25^2} = \frac{12^2 \cdot 5^2}{25^2} = \frac{12^2}{5^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{144}{25}.$$

2. Пусть  $A(2; 0)$ ,  $B(-2; 0)$ .  $M(x; y)$  — искомая точка, тогда

$$(x-2)^2 + y^2 - (x+2)^2 - y^2 = 4; -8x = 4 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ — искомое мн-во точек.}$$

### С-8

$$1. S(AA_1C) = \frac{1}{2} S(ABC);$$

$$S(AOC) = \frac{2}{3} S(AA_1C) \Rightarrow S(AOC) = \frac{1}{3} S(ABC) = 3.$$

По свойствам медианы

$$AO = 3, CO = 4 \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin \angle AOC \Rightarrow$$

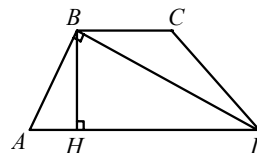
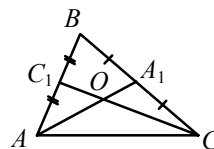
$$\Rightarrow \sin \angle AOC = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle AOC = 30^\circ \text{ или } \angle AOC = 150^\circ.$$

$$2. AB = m \cos \alpha \Rightarrow BH = AB \sin \alpha = m \cos \alpha \sin \alpha, \text{ а}$$

$$AH = m \cos^2 \alpha \Rightarrow BC = m - 2m \cos^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} (BC + AD) BH = m \cos \alpha \sin \alpha (m - m \cos^2 \alpha) =$$

$$= m^2 \cos \alpha \sin \alpha \sin^2 \alpha = m^2 \cos \alpha \sin^3 \alpha.$$



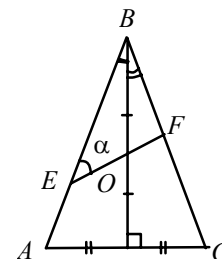
### С-9

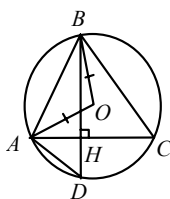
1.  $\angle BFO = \pi - \beta - \alpha \Rightarrow$  по теореме синусов

$$\frac{\frac{h}{2}}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{OF}{\sin \frac{\beta}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OF = \frac{h \sin \frac{\beta}{2}}{2 \sin(\alpha + \beta)}, \text{ аналогично,}$$

$$EO = \frac{h \sin \frac{\beta}{2}}{2 \sin \alpha} \Rightarrow EF = h \sin \frac{\beta}{2} \left( \frac{1}{2 \sin \alpha} + \frac{1}{2 \sin(\alpha + \beta)} \right).$$

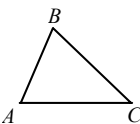




2. Пусть  $O$  — центр окружности  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \triangle AOB$  — равносторонний  $\Rightarrow \angle AOB = 60^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle BCA = 30^\circ \Rightarrow \angle BDA = 30^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow AH = \frac{3}{2} \Rightarrow BH = \sqrt{25 - \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{91}}{2};$   
 $\triangle AHD \sim \triangle BHC \Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow$

$$\Rightarrow BC = \frac{BH \cdot AD}{AH} = \frac{\sqrt{91} \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \sqrt{91}.$$

**C-10**



$$1. S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \Rightarrow 3\sqrt{3} = \frac{1}{2} 4\sqrt{3} \cdot 3 \sin \angle B \Rightarrow \sin \angle B = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

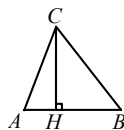
$$A \quad C \quad 1) \angle B = 30^\circ \Rightarrow AC^2 = 48 + 9 - 24\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = 48 + 9 - 36 = 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{21}, \text{ тогда } R = \frac{AC}{2 \sin 30^\circ} = \sqrt{21}.$$

$$2) \angle B = 150^\circ \Rightarrow AC^2 = 48 + 9 + 36 = 93 \Rightarrow AC = \sqrt{93}$$

$$\sqrt{93} \vee 4\sqrt{3} + 3, 93 \vee 48 + 9 + 24\sqrt{3}, 36 \vee 24\sqrt{3}, 3 \vee 2\sqrt{3} \Rightarrow 3 < 2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$R = \frac{\sqrt{93}}{2 \sin 150^\circ} = \frac{\sqrt{93}}{2}.$$



2. Пусть  $AB = 56$ ,  $BC = 39$ ,  $CA = 25$ , тогда  
 $CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2AB \cdot BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \sqrt{1 - \left( \frac{BA^2 + BC^2 - CA^2}{2AB \cdot BC} \right)^2} \Rightarrow CH = CB \cdot \sin \beta = 15.$$

**C-11**

1. По теореме косинусов имеем:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \Rightarrow a - b = a - \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = 0,85 \Rightarrow a = \frac{0,85 \sin \alpha}{1 - \sin \beta}$$

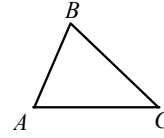
$$\Rightarrow b = \frac{0,85 \sin \beta}{1 - \sin \beta} \Rightarrow a \approx 2,32; b \approx 1,47.$$

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 32^\circ.$$

2. По теореме косинусов имеем:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 53^\circ}.$$

Из теоремы синусов следует:  $R = \frac{AC}{2\sin 53^\circ} \approx 1,6$ .



### С-12

1. По т. Пифагора  $CE = 12$ , т.к. трапеция равнобедренная и следовательно-

$$\text{но } \frac{1}{2}AE = ED = BC = 5 \Rightarrow$$

$$1) \overline{DC}\{-5;12\}, \overline{DA}\{-15;0\} \Rightarrow \overline{DC} \cdot \overline{DA} = 75;$$

$$2) \overline{CE}\{0;-12\}, \overline{AB}\{5;12\} \Rightarrow \overline{CE} \cdot \overline{AB} = -144;$$

$$3) \overline{BC}\{5;0\}, \overline{AD}\{15;0\} \Rightarrow \overline{BC} \cdot \overline{AD} = 75;$$

$$2. \overline{AC}\{1;4\}, \overline{BD}\{1-x;3\} \Rightarrow \text{т.к. } AC \perp BD:$$

$$1-x+12=0 \Rightarrow x=13 \Rightarrow B(13;-1) \Rightarrow M(7;-2); \overline{DM}\{6;-4\}, \overline{DA}\{0;5\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \angle(DM, DA) = \frac{\overline{DM} \cdot \overline{DA}}{|\overline{DM}| \cdot |\overline{DA}|} = \frac{-20}{10 \cdot 5} = -\frac{1}{5} \Rightarrow \angle(DM, DA) = \arccos \frac{1}{5} = 56^\circ 19'.$$

### С-13

1. Из условия следует:

$$\overline{AC^2} + \overline{BC^2} = \frac{1}{2}\overline{AB^2}, \quad \overline{AC^2} + \overline{BC^2} = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{BC})^2,$$

$$\overline{AC^2} + \overline{BC^2} = \frac{1}{2}\overline{AC^2} - \overline{AC} \cdot \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{BC^2},$$

$$2\overline{AC^2} + 2\overline{BC^2} = \overline{AC^2} - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} + \overline{BC^2}, \quad \overline{AC^2} + 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} + \overline{BC^2} = 0.$$

$$\text{Отсюда, } (\overline{AC} + \overline{BC})^2 = 0 \Rightarrow \overline{AC} + \overline{BC} = 0. \text{ Ч.т.д.}$$

$$2. \overline{CD} = \frac{1}{2}(\overline{CB} + \overline{CA}), \overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA}, \overline{CD} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2}(\overline{CB^2} - \overline{CA^2}).$$

Т.к.  $BC > AC$ , то угол между  $\overline{CD}$  и  $\overline{AB}$  — острый  $\Rightarrow \angle BDC$  — тупой, ч.т.д.

### С-14

$$1. S = 144 = 6 \cdot \frac{1}{2}R^2 \sin 60^\circ = 3R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 144 \Rightarrow R^2 = \frac{288}{3\sqrt{3}}.$$

$$S_\Delta = 3 \cdot \frac{1}{2}R^2 \sin 120^\circ = \frac{3}{2} \cdot \frac{288}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 72.$$

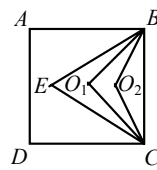
2.  $\angle ABO = \angle BAO$ , т.к. они опираются на хорды равной длины, следовательно,  $AO = BO = 2$ . Внутренний угол 5 – угольника равен  $\frac{188(5-2)}{5} = 108^\circ$ , т.к. диагонали 5 – угольника проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на 3 равные части, то  $\angle ABO = \angle BAO = \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ \Rightarrow \angle AOB = 180^\circ - 36^\circ \cdot 2 = 108^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow AB = \sqrt{2^2(1 - \cos 108^\circ)} = 2\sqrt{1 - \cos 108^\circ}$  по теореме косинусов.

### C-15

1. Пусть  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$  – данный 8 – угольник, а т.  $O$  – его центр,

тогда  $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \Rightarrow A_1A_2 = \sqrt{2R^2(1 - \cos 45^\circ)} =$

$$R\sqrt{2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}} \Rightarrow S_8 = 8 \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}R^2.$$



2. По теореме Пифагора  $R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ .

По теореме косинусов:

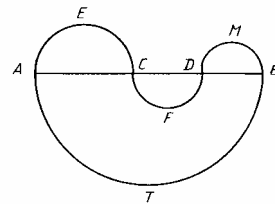
$$a^2 = 2R_2^2(1 - \cos 120^\circ) = 2R_2^2 \cdot \frac{3}{2} = 3R_2^2 \Rightarrow R_2 = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_2H = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a, \text{ а } O_1H = \sqrt{R_1^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(O_1, O_2) = O_1H - O_2H = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{3}).$$

3. Строим по этому отрезку равносторонний треугольник, затем поворачиваем его на  $60^\circ$ . Затем соединяем вершины треугольников.

### C-16



1. Длина угла  $ATB$  равна  $\frac{AB}{2} \cdot \pi$ , длина дуги

$AEC$  равна  $\frac{AC}{2} \cdot \pi$ , длина дуги  $CFD$  равна

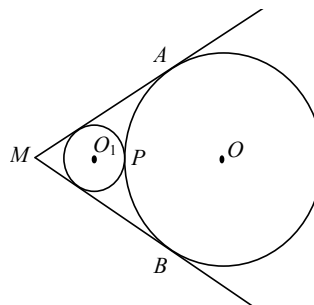
$\frac{CD}{2} \cdot \pi$ , длина дуги  $DMB$  равна  $\frac{DB}{2} \cdot \pi$ .

Т.к.  $AB = AC + CD + DB$ , имеем,

$$\frac{Ab}{2} \pi = \frac{AC}{2} \pi + \frac{CD}{2} \pi + \frac{DB}{2} \pi.$$



2. Т.к.  $l = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 120^\circ \cdot R$ , то  $R = \frac{3l}{2\pi}$ .  
 Т.к.  $\angle AOB = 120^\circ$ , то  $\angle AOM = 60^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle AMO = 30^\circ \Rightarrow MO = \frac{R}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow$   
 $\Rightarrow MP = R$ , но  $\angle AMB = 60^\circ \Rightarrow$  если в  
 точку  $P$  провести касательную, то ок-  
 ружность будет вписана в равносторон-  
 ный треугольник с высотой  $R \Rightarrow$  его сто-  
 рона равна  $R \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$  радиус вписанной

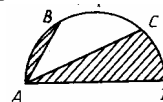


окружности равен  $\frac{R}{3} \Rightarrow$  длина вписанной окружности  $2\pi \frac{R}{3} = \frac{2\pi \cdot 3l}{3 \cdot 2\pi} = l$ .

### С-17

1. Пусть хорда  $AB$  большей окружности касается меньшей в т.  $C$ , а т.  $O$  — их общий центр, тогда  $S = \pi(R^2 - r^2) = 4\pi$ , где  $R$  и  $r$  — радиусы соответ-  
 ственно большей и меньшей окружностей, но  $R^2 - r^2$  по теореме Пифа-  
 гора равно четверти хорды, следовательно, длина хорды равна 4 см.

2.  $S' = (\frac{\pi}{8}R^2 - \frac{1}{2}R^2 \sin 45^\circ) + \frac{\pi}{8}R^2 + \frac{1}{2}R^2 \sin 135^\circ = Q$ .



$S_{ABC} = (\frac{\pi}{8}R^2 - \frac{1}{2}R^2 \sin 45^\circ) + \frac{\pi}{8}R^2 + \frac{1}{2}R^2 \sin 135^\circ \Rightarrow S = 2Q$ .

3. Пусть радиус внешней окружности кольца равен  $R_1$ , а внутренней —  $R_2$ , тогда строим прямоугольный треугольник с гипотенузой  $R_1$  и катетом  $R_2$ , пусть другой катет равен  $R_3$ . Окружность с радиусом  $R_3$  — искомая.

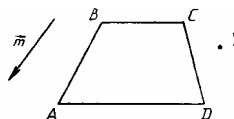
### С-18

1. Пусть  $AA_1 \cap BB_1 = O$ , тогда проведем  $OM$ . Отложим на  $OM$  от точки  $O$   $OM_1 = OM$ , точка  $M_1$  — искомая.

2. Т.к. неизвестно конкретно, куда отображаются концы отрезка  $MH$ , и  
 известно, что движение сохраняет расстояние, а, следовательно, и от-  
 ношения, то  $ET:TP$  равно либо  $\frac{2}{3}$  либо  $\frac{3}{2}$ .

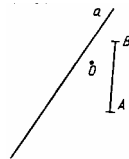
### С-19

1. Перенесите точки  $A, B, C$  и  $D$  на вектор  $\vec{m}$ ,  
 пусть при этом они отобразятся соответственно  
 на  $A_1, B_1, C_1$ , и  $D_1$ . Проведите окружности с  
 центрами  $A_1$  и  $D_1$ , и радиусами  $A_1Y$  и  $D_1Y$ , точ-  
 ка их пересечения, располагающаяся выше  $A_1D_1$  будет искомой т.  $Y_1$ .



2. Строим  $\triangle ABC$ , у которого  $AB$  и  $BC$  равны соответственно диагоналям,  $\angle ABC$  — углу между ними. Строим  $\angle DAC$ , равный углу между боковой стороной и основанием. Через точку  $B$  проводим прямую, параллельную  $AC$ . Пусть она пересекает  $\angle DAC$  в точке  $F$ . Через  $F$  проводим прямую, параллельную  $BC$ . Пусть она пересекает  $AC$  в точке  $E$ . Трапеция  $AFBE$  — искомая.

### С-20



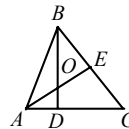
1. Проведите данную прямую вокруг т.  $O$  на  $30^\circ$  в одну и другую сторону, точки полученные при ее пересечении с отрезком и их прообразы на прямой  $a$  — искомые.

2. Пусть  $MNPQ$  четырехугольник образованный точками пересечения данных прямых со сторонами квадрата.

Проведем через центр квадрата т.  $O$  прямые перпендикулярные сторонам квадрата, тогда все из образовавшихся прямоугольных треугольников равны по катету и острому углу (углы из-за параллельности прямых, катеты по свойству квадрата), следовательно, равны и их гипотенузы, следовательно,  $MP = NQ$  ч.т.д.

### Вариант 7

#### С-1

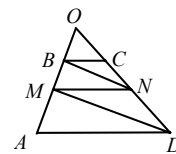


1. Пусть  $BO : OD = m : n$ , тогда

$$\overrightarrow{AO} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AD} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{AB} + \frac{2m}{5(m+n)} \overrightarrow{AC}. \quad (1)$$

С другой стороны

$$\overrightarrow{AO} = k \overrightarrow{AE} = \frac{5k}{9} \overrightarrow{AB} + \frac{4k}{9} \overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{5k}{9} = \frac{n}{m+n} \text{ и } \frac{4k}{9} = \frac{2m}{5(m+n)} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2}{1}.$$



2. Пусть продолжения сторон  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $O$ . Тогда  $\overrightarrow{OA} = k_1 \overrightarrow{OB}$  и  $\overrightarrow{OD} = k_1 \overrightarrow{OC}$ .

$\overrightarrow{OM} = k_2 \overrightarrow{OB}$  и  $\overrightarrow{ON} = k_2 \overrightarrow{OC}$ . Следовательно,

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{k_2} \overrightarrow{OM} \text{ и } \overrightarrow{ON} = \frac{1}{k_2} \overrightarrow{OD}.$$

$$\text{Тогда } \overrightarrow{OA} = \frac{k_1}{k_2} \overrightarrow{OM} \text{ и } \overrightarrow{ON} = \frac{k_1}{k_2} \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON} = \frac{k_1}{k_2} (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}) = \frac{k_1}{k_2} \overrightarrow{CM}.$$

$$\text{Итак, } \overrightarrow{NA} = \frac{k_1}{k_2} \overrightarrow{CM} \Rightarrow AN \parallel MC.$$

#### С-2

1.  $\bar{a} \{3; -1\}$ ,  $\bar{b} \{1; -2\}$ ,  $\bar{c} \{-1; 7\}$ ;  $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} \Rightarrow \bar{p} \{3; 4\}$ .

$$\text{Пусть } \bar{p} = k\bar{a} + m\bar{b} \Rightarrow \begin{cases} 3k + m = -3 \\ -k - 2m = 4 \end{cases} \Rightarrow k = 2, m = -3 \Rightarrow \bar{p} = 2\bar{a} - 3\bar{b}.$$

2. Пусть  $MH \perp AB$ , тогда  $AM^2 = AH \cdot HB \Rightarrow AH = \frac{AM^2}{AB} = \frac{25}{13}$ .

Аналогично,  $HB = \frac{MB^2}{AB} = \frac{144}{13} \Rightarrow MH = \sqrt{HB \cdot AH} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \overline{AM} = \frac{25}{13}\bar{i} + \frac{60}{13}\bar{j}$ .

### С-3

1.  $A(1; 2), B(7; 10)$ . Очевидно,  $C\left(\frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 7}{4}; \frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 10}{4}\right) \Rightarrow C(2,5; 4)$ .

2.  $\overline{AB} \{5; 0\}, \overline{AC} \{5; 12\}$ . Т.к.  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$  не коллинарны, то не лежит.

3.  $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ . Разделим  $\bar{a}$  на  $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ , тогда

$$\bar{l} = \frac{1}{5}\bar{a} = \frac{3}{5}\bar{i} + \frac{4}{5}\bar{j}. \quad |\bar{l}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1.$$

### С-4

Пусть  $A(0; 0), B(b; h), C(a; 0)$ . Пусть  $BE$  медиана и  $M \in BE$ :

$$\frac{BM}{ME} = \frac{2}{1}, \text{ но } B(b; h) \text{ и } E\left(\frac{a}{2}; 0\right) \Rightarrow M\left(\frac{a+b}{3}; \frac{h}{3}\right).$$

Рассмотрим медиану  $AF$  и точку  $M_1$  на ней такую, что

$$\frac{AM}{M_1F} = \frac{2}{1}, \text{ но } A(0; 0), F\left(\frac{a+b}{2}; \frac{h}{2}\right) \Rightarrow M_1\left(\frac{a+b}{3}; \frac{h}{3}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow M$  и  $M_1$  совпадают. Аналогично и с медианой  $CG$ . Ч.т.д.

### С-5

1. Пусть  $A(-a; a), B(-a; -a), C(a; -a), D(a; a)$ , тогда уравнение окружности:  $x^2 + y^2 = a^2$ . Пусть  $M(x; y)$  — произвольная точка окружности, тогда  $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = (x+a)^2 + (y-a)^2 + (x+a)^2 + (y+a)^2 + (x-a)^2 + (y+a)^2 + (x-a)^2 + (y-a)^2 = 12a^2$  (т.к.  $x^2 + y^2 = a^2$ ). Ч.т.д.

2.  $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0, (x-2)^2 + y^2 = 1$ ;

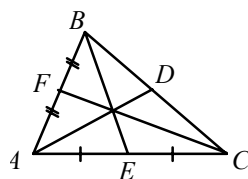
$$OO_1 = \sqrt{(5-2)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow R_1 = 4 \Rightarrow (x-5)^2 + (y-4)^2 = 16.$$

### С-6

1. Прямая  $y = kx + 5$  перпендикулярна прямой  $y = -(1/k)x$ , проходящей через начало координат

$$\begin{cases} y = kx + 5 \\ y = -\frac{1}{k}x \end{cases}; -\frac{1}{k}x = kx + 5, x = \frac{-5}{k + \frac{1}{k}} = \frac{-5k}{k^2 + 1} \Rightarrow y = \frac{5}{k^2 + 1}, \text{ но по условию}$$

$$\left(\frac{-5k}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{5}{k^2+1}\right)^2 = 9 \Rightarrow \frac{25}{(k^2+1)^2}(k^2+1) = 9; \frac{25}{k^2+1} = 9 \Rightarrow k = \pm \frac{4}{3}.$$



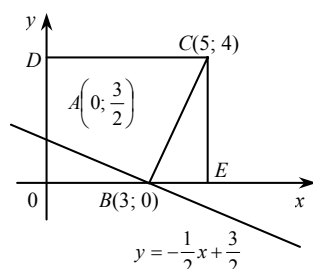
2. Пусть  $F$  — середина  $AB$ , тогда  $F\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ .

Т.к.  $CM:MF = 2:1$ , то  $C(2; 1)$ .

Пусть  $AC$  задается  $y = kx + b$ , тогда  $\begin{cases} 1 = 2k + b \\ 2 = -k + b \end{cases}$ ;

$$\begin{cases} b = 2 + k \\ 1 = 2k + 2 + k \end{cases}; \quad \begin{cases} k = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{x}{3} + \frac{5}{3}.$$

### С-7



1. На рисунке  $BE = 2$ ,  $CE = 4$ ,  $OB = 3$ ,

$$OA = \frac{3}{2} \Rightarrow \triangle CBE \sim \triangle AOB \Rightarrow CB \perp AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CB = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{20 + 16} = 6 \Rightarrow (x-5)^2 + (y-4)^2 = 36.$$

2. Пусть  $C(0; 0)$ ,  $A(0; a)$ ,  $B(b; 0)$ . Пусть  $M(x; y)$  — искомая точка, тогда имеем:  
 $x^2 + (y-a)^2 + (x-b)^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2$   
 $2ay + 2bx = a^2 + b^2$  — прямая.

### С-8

$$1. \frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{AO}{OC}; \frac{S_{AOD}}{S_{COD}} = \frac{AO}{OL} \Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{S_{AOD}}{S_{COD}}; \frac{S_{AOB}}{20} = \frac{60}{40} \Rightarrow S_{AOB} = 30.$$

$$\text{С другой стороны: } S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot AB \cdot \sin \angle BAO \Rightarrow \sin \angle BAO = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle BAO = 150^\circ$  или  $\angle BAO = 30^\circ$ , но 1-й случай невозможен, т.к.

$\angle AOB > 31^\circ \Rightarrow \angle BAO = 30^\circ$ .

2. Пусть  $BD = x$ . Т.к.  $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{DBC}$ , то

$$\frac{1}{2} ab \sin \alpha = \frac{1}{2} xa \sin \beta + \frac{1}{2} xb \sin(\alpha - \beta) \Rightarrow x = \frac{ab \sin \alpha}{a \sin \beta + b \sin(\alpha - \beta)}.$$

### С-9

1. Из  $\triangle ABM$  имеем по теореме синусов:  $\frac{AM}{\sin \angle ABM} = \frac{AB}{\sin 20^\circ}$ , аналогич-

но,  $\frac{AM}{\sin \angle ACM} = \frac{AC}{\sin 30^\circ}$ , т.к.  $AB = AC$ , то получаем

$$\frac{\sin \angle ACM}{\sin \angle ABM} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}. \quad (1)$$

Пусть  $\angle MAB = \alpha$ , тогда  $\angle ABM = 180^\circ - (\alpha + 20^\circ)$ ,  $\angle CAM = 60^\circ - \alpha$  и

$$\angle ACM = 90^\circ + \alpha. \text{ Из (1) } \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + 20^\circ)} = \frac{1}{2 \sin 20^\circ}.$$

Далее  $\sin(\alpha + 20^\circ) = 2 \sin 20^\circ \cos \alpha$ ;  $\sin(\alpha - 20^\circ) = 0$  и  $\alpha = 20^\circ$ .

2. Пусть  $h$  — высота трапеции, тогда  $n = m - h \operatorname{ctg} \alpha - h \operatorname{ctg} \beta \Rightarrow$

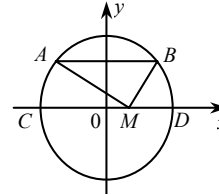
$$\Rightarrow h = \frac{m-n}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} \Rightarrow S = \frac{1}{2}(m+n) \frac{(m-n)}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}.$$

### C-10

1. Пусть  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$ ,  $M(x; 0)$ , но  $x_A = -x_B$  и  $y_A = y_B$ , тогда  $MA^2 + MB^2 = (x_A - x)^2 + y^2 + (x_B - x)^2 + y^2 = x_A^2 + y^2 - 2x_A x + x_B^2 + y^2 - 2x_B x = 2R^2 - 2x(x_A + x_B) = 2R^2$ , т.к.  $(x_A + x_B = 0)$ .

2. По теореме косинусов имеем:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C, \text{ но } a = 2R \sin \angle A, \\ b &= 2R \sin \angle B, c = 2R \sin \angle C \Rightarrow \sin^2 \angle C = \sin^2 \angle A + \sin^2 \angle B - \\ &- 2 \sin \angle A \cdot \sin \angle B \cdot \cos \angle C, \text{ но } \sin^2 \angle C = 1 - \cos^2 \angle C, \text{ а } \sin^2 \angle A = 1 - \cos^2 \angle A \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos^2 \angle A = \cos^2 \angle C + \sin^2 \angle B - 2 \sin \angle A \cdot \sin \angle B \cdot \cos \angle C. \end{aligned}$$



### C-11

1. По теореме косинусов имеем:  $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \alpha$ ,  $BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \alpha + AC^2 - AB^2 = 0$ .

$$D_1 = AC^2 \cos^2 \alpha - AC^2 + AB^2 = AB^2 - AC^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = AC \cos \alpha \pm \sqrt{AB^2 - AC^2 \sin^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 \approx 145,6 \text{ или } P_2 \approx 74,2.$$

2. Пусть  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$ ,  $AC = l$ , тогда по теореме косинусов  $b^2 = a^2 + l^2 -$

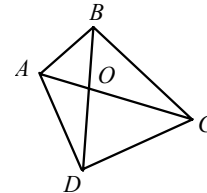
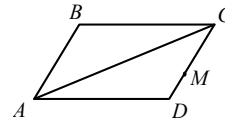
$$- 2a \cdot l \cos \angle BAC \Rightarrow \angle BAC = \arccos \frac{a^2 + l^2 - b^2}{2al},$$

$$\text{аналогично } \angle CAD = \arccos \frac{d^2 + l^2 - c^2}{2dl} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \left( \arccos \frac{a^2 + l^2 - b^2}{2al} + \arccos \frac{d^2 + l^2 - c^2}{2dl} \right)}.$$

Тогда по формуле Герона  $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ .

$$\text{С другой стороны } S = \frac{1}{2} BD \cdot AC \cdot \sin \angle AOB \Rightarrow \angle AOB = \arcsin \frac{2S}{BD \cdot AC} \approx 93^\circ 9'.$$



### C-12

1. Пусть  $\angle CDA = \alpha$ , тогда  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CD} + \overline{CD} \cdot \overline{DA} + \overline{DA} \cdot \overline{AB} =$   
 $= 0 + 3CD\cos\alpha + 5CD(-\cos\alpha) + 0 = CD\cos\alpha(3 - 5) = -2CD\cos\alpha$ ,  
 но  $CD\cos\alpha = AD - BC = 2 \Rightarrow$  Ответ:  $-4$ .

2.  $AB\{1; 3\}$ ,  $BC\{3; 5\}$ ,  $\overline{CA}\{-4; -8\}$ .

Пусть  $AH$  — искомая высота, тогда  $\overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0 \Rightarrow \overline{AH} = k\{-5; 3\} \Rightarrow$   
 $\cos\angle BAH = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AH}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AH}|} = \frac{-5k + 9k}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{34} \cdot k} = \frac{4}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{34}} \Rightarrow AH = \frac{AB}{\cos\angle BAH} = \frac{2\sqrt{34}}{17}$ .

### C-13

1. Предположим, что  $MA^2 + MC^2 = MD^2 + MB^2$ , тогда  
 $\overline{MA}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{MB}^2$ .

Рассмотрим разность  $\overline{MA}^2 + \overline{MC}^2 - \overline{MB}^2 - \overline{MD}^2 =$   
 $= (\overline{MA} + \overline{MD})(\overline{MA} - \overline{MD}) + (\overline{MC} + \overline{MB})(\overline{MC} - \overline{MB}) =$   
 $= (\overline{MA} + \overline{MD})\overline{DA} + (\overline{MC} + \overline{MB})\overline{BC} =$   
 $= \overline{DA}(\overline{MA} + \overline{MD} - \overline{MC} - \overline{MB}) = \overline{DA} \cdot (\overline{BA} + \overline{CD}) = 2\overline{DA} \cdot \overline{BA} = \overline{0}$ .

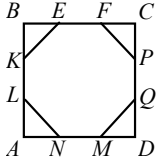
Все преобразования верны и в обратную сторону  $\Rightarrow$  требуемое равенство доказано.

2. Т.к.  $AC \perp BD$ , то  $(\overline{AB} + \overline{BC})(\overline{AD} - \overline{AB}) = \overline{0}$ ;

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} - \overline{AB}^2 - \overline{BC} \cdot \overline{AB} = \overline{0}$ ,  $\overline{0} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} - \overline{AB}^2 - \overline{0} = \overline{0} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot AD$ .

### C-14

1. Пусть  $\alpha$  — внутренний угол правильного многоугольника, тогда для того, чтобы покрыть плоскость без просветов, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое натуральное  $n$ , что  $n\alpha = 360^\circ \Rightarrow$  покрыть можно треугольниками, квадратами и шестиугольниками.

2. По теореме Пифагора  
  
 $CQ = PD = DN = MA = AK = LB = BF = EC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow CP = QD = MD = NA = AL = BK = BE = CF = a - \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow PQ = NM = KL = EF = a - 2\left(a - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = a\sqrt{2} - a$  и, кроме того, по

теореме Пифагора  $MQ = FP = EK = LN = \sqrt{2} CP = \sqrt{2} a - a \Rightarrow$  все стороны восьмиугольника равны и, кроме того, его углы, очевидно, равны  $135^\circ \Rightarrow$  он — правильный.

### C-15

1. Пусть  $R$  — радиус описанной окружности, тогда, очевидно,

$A_1A_7 = 2R$ ;  $\angle A_2A_1A_{12} = \frac{180^\circ \cdot 10}{12} = 150^\circ$ ;  $\angle A_4A_1A_{10} = 90^\circ$ , т.к. опирается на диаметр;  $\angle A_4A_1A_2 = \angle A_{10}A_1A_{12} = 30^\circ \Rightarrow \angle A_6A_1A_{14} = 30^\circ$ , т.к. опирается на равные дуги  $\Rightarrow \angle A_6OA_8 = 60^\circ \Rightarrow A_6A_8 = R \Rightarrow S = \frac{1}{2} 2R \cdot R \cdot \sin 90^\circ = R^2$ .

$$A_6A_8 = R = \sqrt{2a^2(2 - \sqrt{3})(1 - \cos 150^\circ)} = a\sqrt{2(2 - \sqrt{3})(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} = a \Rightarrow S = a^2.$$

2. Опишем окружность около трапеции.

Углы при  $AD$  равны  $75^\circ$ . Т.к.  $AC \perp BD$ , то  $\angle CAD = \angle BDA = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAC = 30^\circ$  и  $\cup BC = 60^\circ \Rightarrow r = a$ . С другой стороны, угол между диагоналями равен полусумме дуг  $BC$  и  $AD \Rightarrow \cup AD = 120^\circ$  и  $AD = a\sqrt{3}$ .

Пусть диагонали пересекаются в точке  $F$ , тогда по теореме Пифагора

$$AF = FD = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \text{ а } BF = FC = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow AC = BD = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{a^2(1 + \sqrt{3})^2}{2} = \frac{a^2(1 + \sqrt{3})^2}{4}.$$

3. Т.к.  $S \sim a^2$ , то строим отрезок  $\sqrt{2}a$ , а затем строим шестиугольник с такой стороной.

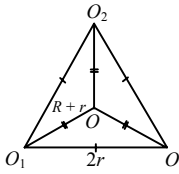
### C-16

1. Пусть  $O_1, O_2, O_3$  — центры окружностей.  $r = \frac{c}{2\pi}$  —

их радиус. Очевидно, центр искомой окружности

центр  $\Delta O_1O_2O_3$ , тогда  $O_1O = \frac{2}{3} O_1H = \frac{2}{3} \cdot 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow R = \frac{2r}{\sqrt{3}} - r. \quad l = 2\pi R = 2\pi r \left( \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) = \frac{c(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3}}.$$



2. Пусть  $O_2H \perp O_1A \Rightarrow \cos \angle HO_1O_2 =$

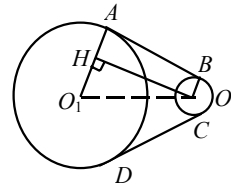
$$= \frac{O_1H}{O_1O_2} = \frac{AO_1 - BO_2}{O_1O_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle HO_1O_2 = 60^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle BO_2O_1 = 120^\circ$  (т.к.  $ABO_2O_1$  — прямоугольная трапеция) и  $\angle AO_1D = \angle BO_2C = 120^\circ \Rightarrow$

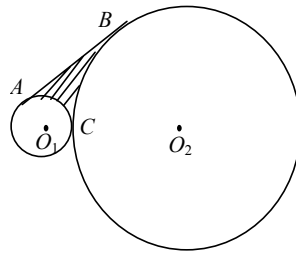
$$\Rightarrow l = (2/3) \cdot 2\pi R_1 + 2AB + (1/3) 2\pi R_2 =$$

$$= (2/3) \cdot 2\pi \cdot 8 + (1/3) \cdot 2\pi \cdot 2 + \sqrt[3]{144 - 36} =$$

$$= (1/3) (32\pi + 4\pi) + 2\sqrt{108} = (1/3) (36\pi) + 12\sqrt{3} = 12(\pi + \sqrt{3}).$$

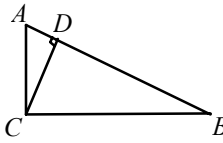


### С-17



1. Аналогично предыдущей задаче  $\angle AO_1C = 120^\circ$ ,  $\angle BO_2C = 60^\circ \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \frac{1}{2} (r + 3r) \cdot AB - \frac{1}{3} \pi r^2 - \frac{1}{6} \pi (3r)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4r \cdot \sqrt{(4r)^2 - (2r)^2} - \frac{1}{3} \pi r^2 - \frac{1}{6} \pi (3r)^2 = \\ &= 4r^2 \sqrt{3} - \pi r^2 \left( \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \right) = 4r^2 \sqrt{3} - \frac{11}{6} \pi r^2. \end{aligned}$$



2.  $\triangle ADC \sim \triangle CDB \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{a} \Rightarrow$

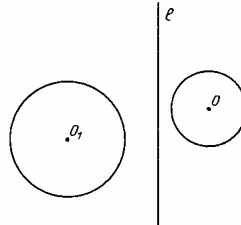
$$r_2 = \frac{r_1 a}{b} = \frac{\frac{c}{2\pi} a}{b} = \frac{ac}{2\pi b} \Rightarrow S = \pi r_2^2 = \frac{a^2 c^2}{4\pi b^2}$$

3. Нужно построить окружности с радиусами  $\frac{R}{\sqrt{3}}$  и  $\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$ .

Для этого строим прямоугольный треугольник с катетом  $R$  и противолежащим углом в  $60^\circ$ , тогда другой катет равен  $\frac{R}{\sqrt{3}}$ . Далее строим равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами  $\frac{R}{\sqrt{3}}$ , тогда его гипотенуза равна  $\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$ .

### С-18

1. Отобразите левую окружность на правую от прямой  $l$ . Точки пересечения и их прообразы на первой окружности будут искомыми.



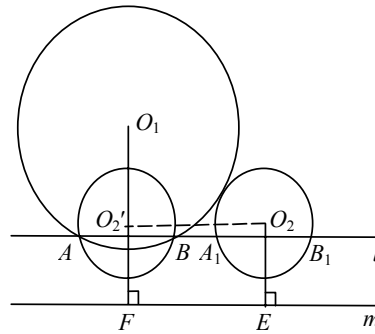
2. Т.к. трапеции равнобедренные, то  $\angle CBA = \angle C_1B_1A_1$  и  $CB = C_1B_1$ , тогда равны и проекции боковых сторон на  $AB$  (соответственно  $A_1B_1$ ), тогда равны и отрезки  $C_1D_1$  и  $CD \Rightarrow$  трапеции равны, т.к. тогда их можно совместить некоторым движением.



### С-19

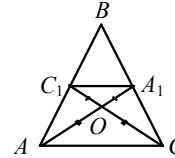
1.

Опустим перпендикуляры  $O_1F$  и  $O_2E$  на  $m$ . Параллельно перенесем окружность с центром  $O_2$  на  $\overrightarrow{EF}$ . Через точку пересечения окружностей проведем искомую прямую  $l$ .



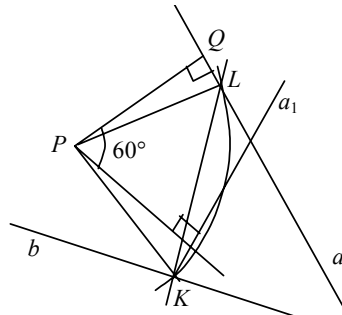
2.

Пусть  $O$  — точка пересечения медиан, тогда, т.к. медианы равны, то  $C_1O = A_1O$  и  $AO = OC \Rightarrow \triangle AOC_1 = \triangle COA_1 \Rightarrow AC_1 = A_1C \Rightarrow AB = BC$ . Ч.т.д.



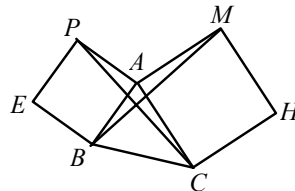
### С-20

1.



Повернем прямую  $a$  относительно  $P$  на  $60^\circ$  по часовой стрелке — получим прямую  $a_1$ .  $a_1 \cap b = K$ . Проведем окружность с центром  $P$  и радиусом  $PK$ . Пусть она пересечет  $a$  в точке  $L$ .  $\triangle PQL$  — искомый.

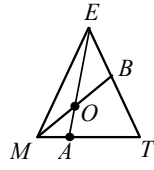
2.



При повороте на  $90^\circ$  вокруг точки  $A$ :  $P \rightarrow B$ ,  $C \rightarrow M \Rightarrow PC \rightarrow BM \Rightarrow PC = BM$  и  $PC \perp BM$ .

**Вариант 8**

**C-1**

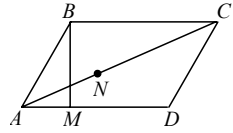


1. Пусть  $\frac{EB}{BT} = \frac{m}{n}$ , тогда  $\overrightarrow{MB} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{ME} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{MT}$ ;

$$\overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MO} = \frac{3}{7} k \cdot \overrightarrow{ME} + \frac{4}{7} k \cdot \overrightarrow{MA} =$$

$$= \frac{3}{7} k \cdot \overrightarrow{ME} + \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{7} k \cdot \overrightarrow{MT}, \text{ значит, } \frac{n}{m+n} = \frac{3}{7} k ;$$

$$\frac{m}{m+n} = \frac{8k}{49}, \text{ откуда находим } k = \frac{7n}{m+n}; \frac{EB}{BT} = \frac{m}{n} = \frac{8}{21}.$$



$$2. \overrightarrow{BM} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB};$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{6} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AD} - \frac{5}{6} \overrightarrow{AB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{5}{6} \overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{BN} \uparrow \overrightarrow{BM} \Rightarrow \text{все три точки лежат на одной прямой.}$$

**C-2**

1.  $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{t} = \{3; -4\}$ . Пусть  $\vec{a} = \alpha \vec{m} + \beta \vec{p}$ , тогда

$$\begin{cases} 3 = -\alpha + 4\beta \\ -4 = 2\alpha - 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4\beta - 3 \\ -4 = 8\beta - 6 - 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{3} \\ \alpha = -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{5}{3} \vec{m} + \frac{1}{3} \vec{p}.$$

2.  $OC = \frac{6}{2} = 3$ ; по теореме Пифагора из  $\triangle OBC$  находим

$$OB = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{25 - 9} = 4;$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AF \cdot BC = \frac{1}{2} BO \cdot AC \Rightarrow AF = \frac{BO \cdot AC}{BC} = \frac{4 \cdot 6}{5} = \frac{24}{5}.$$

Из  $\triangle ABF$  по теореме Пифагора

$$BF = \sqrt{BA^2 - FA^2} = \sqrt{25 - \frac{24^2}{25}} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{BF}{BO} = \frac{FK}{OC} \Rightarrow FK = \frac{BF \cdot OC}{BO} = \frac{21}{20};$$

$$\frac{FK}{AF} = \frac{21}{20} \cdot \frac{5}{24} = \frac{7}{32} \Rightarrow KA = (1 - \frac{7}{32})FA = \frac{25}{32}FA. \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BA};$$

$$\overrightarrow{FB} = \frac{7}{25} \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CB} = \{-3; -4\} \Rightarrow \overrightarrow{FA} = \left\{ -\frac{21}{25}; -\frac{28}{25} \right\};$$

$$\overline{BA} = \{-3; -4\} \Rightarrow \overline{FA} = \left\{-\frac{96}{25}; -\frac{72}{25}\right\} \Rightarrow \overline{KA} = \frac{25}{32} \overline{FA} = \left\{-3; -\frac{9}{4}\right\} = -3i - \frac{9}{4}.$$

$$3. \overline{BA} = -\overline{AB} = \{-2; 1\}; \overline{DC} = -\overline{CD} = \{-3; -1\};$$

$$2\overline{BA} = \{-4; -2\} \Rightarrow 2\overline{BA} + \overline{DC} = \{-7; 1\}.$$

### C-3

$$1. \frac{PM}{MK} = \frac{3}{1}. M(2; -4), K(3; 5). \overline{MK} \{1; 9\} \Rightarrow \overline{PK} = 4 \cdot \overline{MK} = \{4; 36\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{если } P \{x; y\} \Rightarrow \overline{PK} = \{3-x; 5-y\} = \{4; 36\} \Rightarrow P \{-1; -31\}.$$

$$2. M(1; 2), H(3; 5), P(5; -8). y = kx + b;$$

$$1) \begin{cases} -2 = k + b \\ -5 = 3k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k = -3 \\ -2 + \frac{3}{2} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -\frac{3}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y_1 = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$$

$$2) \begin{cases} -8 = 5k + b \\ -5 = 3k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k = -3 \\ -5 + \frac{9}{2} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -\frac{3}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y_2 = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$  точки лежат на одной прямой.

$$3. \overline{m} = 5\overline{i} - 12\overline{j}, |\overline{m}| = 13 \Rightarrow |\overline{e}| = \frac{|\overline{m}|}{13}. \overline{e} = -\frac{\overline{m}}{13} \Rightarrow \overline{e} \left\{-\frac{5}{13}; \frac{12}{13}\right\}.$$

### C-4

Пусть  $A(-b, -a), B(-b, a), C(b, a), D(b, -a)$ .  $M(x, y)$ , тогда имеем:

$$(x+b)^2 + (y-a)^2 + (x-b)^2 + (y+a)^2 = (x+b)^2 + (y+a)^2 - (x-b)^2 + (y-a)^2 \Rightarrow$$

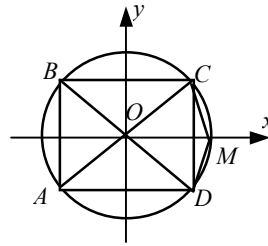
$\Rightarrow$  равенство является тождеством  $\Rightarrow$  действительно не зависит от  $x$  и  $y$ .

### C-5

1. Поместим квадрат  $ABCD$  в прямоугольную систему координат так, чтобы центр квадрата совпадал с началом квадрата. Пусть  $A(-a; -a), B(-a; a), C(a; a)$  и  $D(a; -a)$ . Уравнение окружности вписанной около квадрата имеет вид:  $x^2 + y^2 = 2a^2$ . Выберем на окружности произвольную точку  $M$  с координатами  $x$  и  $y$ .

$$\text{Тогда } MA = \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2},$$

$$MB = \sqrt{(x+a)^2 + (y-a)^2}, MC = \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2},$$



$MD = \sqrt{(x-a)^2 + (y+a)^2}$ . Учитывая, что  $x^2 + y^2 = 2a^2$  имеем

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 16a^2$ , где  $16a^2$  — величина постоянная.

2.  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 11 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$ .

$M(3;1)$ ,  $K(2;1)$ , тогда  $MK = \sqrt{1+0} = 1 \Rightarrow$  радиус искомой окружности

$R = 4 - MK = 4 - 1 = 3 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$ .

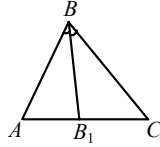
### C-6

1. Прямая  $y = 4 + mx$  пересекает оси координат в точках  $x(0,4)$  и

$\left(-\frac{4}{m}, 0\right) \Rightarrow E\left(-\frac{2}{m}, 2\right) \Rightarrow OE^2 = \frac{4}{m^2} + 4 = 49 \Rightarrow \frac{4}{m^2} = 45 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 = \frac{4}{45} \Rightarrow m = \pm \frac{2}{3\sqrt{5}}$ .

2.  $\overline{AB}\{-8; -6\}$   $\overline{BC}\{+3; -4\}$



Пусть  $\overline{BB_1}\{x; y\} \Rightarrow \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BB_1}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{BB_1}|} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BB_1}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{BB_1}|}$ ,

$\frac{+8x+6y}{10} = \frac{3x-4y}{5} \Rightarrow 8x+6y = 6x-8y, 14y+2x=0$ , т.е.

$\overline{BB_1}\{1; 7\} \Rightarrow k = -\frac{1}{7} \Rightarrow 0 = +4 \cdot \frac{1}{7} + b \Rightarrow b = -\frac{4}{7} \Rightarrow y = -\frac{x}{7} - \frac{4}{7}$

### C-7

1.  $y = 4 - 2x; (x-4)^2 + (y-2)^2 - 16 = y + 2x - 4; (x-4)^2 + (2-2x)^2 = 16;$

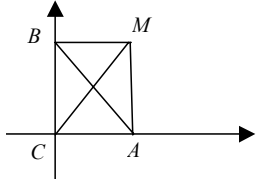
$x^2 - 8x + 16 + 4 - 8x + 4x^2 - 16 = 0; 5x^2 - 16x + 4 = 0;$

$x = \frac{16 \pm 4\sqrt{11}}{10} = \frac{8 \pm 2\sqrt{11}}{5} \Rightarrow y_1 = 4 - \frac{16 + 4\sqrt{11}}{5} = \frac{4 - 4\sqrt{11}}{5},$

$y_2 = 4 - \frac{16 - 4\sqrt{11}}{5} = \frac{4 + 4\sqrt{11}}{5} \Rightarrow AB = \sqrt{\left(\frac{8 + 2\sqrt{11}}{5} - \frac{8 - 2\sqrt{11}}{5}\right)^2 +}$

$+\sqrt{\left(\frac{4 - 4\sqrt{11}}{5} - \frac{4 + 4\sqrt{11}}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{11}}{5}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{11}}{5}\right)^2} = \sqrt{5 \cdot \left(\frac{4\sqrt{11}}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{11}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{55}}{5},$

где  $AB$  — искомая хорда.



2.  $M(x;y), A(a;0), B(0;b);$

$\overline{MA} = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}; \overline{MB} = \sqrt{x^2 + (b-y)^2};$

$MC^2 = x^2 + y^2; MA^2 - MB^2 = 2MC^2;$

$(a-x)^2 + y^2 - x^2 - (b-y)^2 = 2x^2 + 2y^2;$

$$a^2 - 2ax + x^2 + y^2 - x^2 - b^2 + 2by - y^2 = 2x^2 + 2y^2 ;$$

$$2x^2 + 2ax - a^2 + 2y^2 - 2by + b^2 = 0 ; x^2 + ax - \frac{a^2}{2} + y^2 - by + \frac{b^2}{2} = 0 ;$$

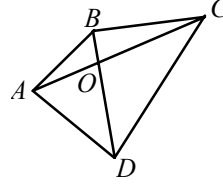
$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{b}{2})^2 = \frac{-a^2}{4} + \frac{3b^2}{4} \text{ — окружность.}$$

### C-8

$$1. S_{AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot AD \cdot \sin \angle OAD = 90$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin \angle OAD = 90 + 60 = 150 ,$$

$$\text{значит, } \frac{S_{AOD}}{S_{ACD}} = \frac{AO}{AO + OC} = \frac{3}{5} \Rightarrow OC = \frac{2}{3} AO = \frac{20}{3} .$$



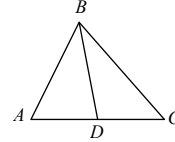
$$\text{Тогда } S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin \angle BOC = 30 \Rightarrow \sin \angle BOC = \frac{30 \cdot 2 \cdot 3}{9\sqrt{2} \cdot 20} = \frac{1}{\sqrt{2}} ;$$

$\angle AOB = 180^\circ - \angle BOC$ , значит,  $\angle AOB = 45^\circ$  или  $\angle AOB = 135^\circ$ , но первый случай невозможен, т.к.  $\angle AOB > 134^\circ$ , значит,  $\angle AOB = 135^\circ$ .

$$2. \text{ По теореме косинусов: } DC^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \beta .$$

По теореме синусов:

$$\frac{DC}{\sin \beta} = \frac{BD}{\sin(\angle BCA)} \Rightarrow \sin(\angle BCA) = \frac{m \sin \beta}{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \sin \beta}} .$$



$$\text{Из } \triangle ABC : \angle BAC = 180^\circ - 2\beta - \arcsin\left(\frac{m \sin \beta}{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \sin \beta}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\sin(\angle BAC)} = \frac{AB}{\sin(\angle BCA)} \Rightarrow AB = \frac{n \cdot m \cdot \sin \beta}{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \sin \beta}} .$$

$$\cdot \frac{1}{\sin(\alpha + \beta + \arcsin(\frac{m \sin \beta}{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \sin \beta}}))} = \frac{mn \sin \beta}{n \sin(\alpha + \beta) - m(\sin \alpha)} .$$

### C-9

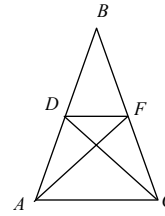
$$1. \angle BAC = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 60^\circ ;$$

$$\angle BAF = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ \Rightarrow BF = AF = a .$$

$$\angle ADC = 180^\circ - 80^\circ - 50^\circ = 50^\circ \Rightarrow AD = AC = b .$$

Пусть  $\angle AFD = x$ .

По теореме синусов из  $\triangle ADF$ :



$$\frac{AF}{\sin(20^\circ + x)} = \frac{b}{\sin x} \Rightarrow AF = \frac{b \sin(20^\circ + x)}{\sin x}.$$

Из  $\triangle AFC$ :  $\angle AFC = 180^\circ - \angle FAC - \angle ACF = 40^\circ$ , тогда

$$\frac{AF}{\sin 80^\circ} = \frac{b}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AF = \frac{b \sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} \Rightarrow \frac{\sin(20^\circ + x)}{\sin x} = 2 \cos 40^\circ \Rightarrow \sin(x - 20^\circ) = 0 \Rightarrow x = 30^\circ.$$

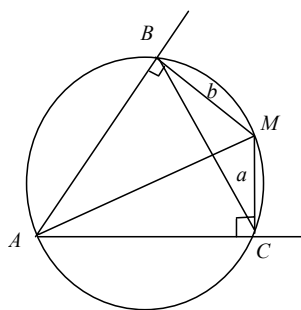
2. По теореме синусов:

$$\frac{AK}{\sin \angle ACK} = \frac{AC}{\sin \alpha}; \quad \frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow \frac{AK}{\sin \angle ACK} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$\text{Пусть } \angle BCK = \gamma, \text{ тогда } 4\gamma + 2\alpha + 2\beta = 2\pi \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \angle ACK = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \beta\right) = \cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \Rightarrow AK = \frac{a \cos \frac{\beta - \alpha}{2}}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

### C-10



1. По теореме косинусов:

$$BC^2 = b^2 + a^2 + 2ab \cos \alpha.$$

Т.к. суммы противоположных углов равны  $\pi$ , то можно описать окружность, тогда

$$AM = 2R = 2 \cdot \frac{BC}{2 \sin \alpha} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}{\sin \alpha}.$$

2. По теореме косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

По теореме синусов:

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C \Rightarrow$$

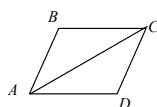
$$\Rightarrow \sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B - 2 \sin A \sin B \cos C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sin A \sin B \cos C = \sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C \Rightarrow$$

$$2 \sin A \sin B \cos C = 1 - \cos^2 A + 1 - \cos^2 B - 1 + \cos^2 C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sin A \sin B \cos C - 1 = \cos^2 C - \cos^2 A - \cos^2 B, \text{ ч.т.д.}$$

### C-11



1. По теореме синусов:

$$\frac{AC}{\sin D} = \frac{CD}{\sin \angle CAD} \Rightarrow \sin \angle D = \frac{AC \cdot \sin \angle CAD}{CD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2CD = \arcsin \frac{AC \cdot \sin \angle BCA}{CD} \Rightarrow \angle ACD = 180^\circ - \angle BCA - \angle D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = AC \cdot CD \cdot \sin \angle ACD.$$

После подстановки имеем:  $S_1 = 627,4$ ,  $S_2 = 119,9$  два ответа получают-ся из-за двух значений угла D.

2. Пусть  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ , тогда по теореме косинусов:

$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle B \Rightarrow$  по теореме синусов:

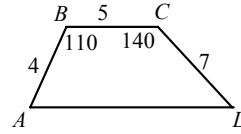
$$\frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{AB}{\sin \angle BCA} \Rightarrow \sin \angle BCA = \frac{AB \sin \angle B}{AC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ACD = 140^\circ - \arcsin \frac{AB \sin \angle B}{AC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cos \angle ACD} =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle B + c^2 - 2c \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle B} \cdot}$$

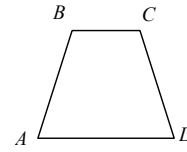
$$\cdot \cos \left( 140^\circ - \arcsin \frac{a \sin \angle B}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle B}} \right) \approx 11,8.$$



### C-12

1.

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CD} + \overline{CD} \cdot \overline{DA} + \overline{DA} \cdot \overline{AB} &= \\ = \overline{BC}(\overline{AB} + \overline{CD}) + \overline{DA}(\overline{CD} + \overline{AB}) &= \\ = (\overline{AB} + \overline{CD})(\overline{BC} + \overline{DA}) = 0 \cdot 0 + m \cdot (-m) = -m^2. \end{aligned}$$



2.  $\overline{AD} \{2; 4\}$ ,  $\overline{BC} \{1; 2\} \Rightarrow AD \parallel BC \Rightarrow ABCD$  — трапеция.  $\overline{AB} \{2; -4\}$

$$\cos \angle BAD = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}|} = \frac{4 - 16}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-12}{20} = -\frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \angle ABC = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \angle ABC = \frac{4}{5} \Rightarrow AH = AB \cdot \sin \angle ABC = \sqrt{20} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

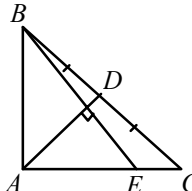
### C-13

1.

Предположим, что равенство верное, тогда рассмотрим разность:

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{DC} &= \\ = (\overline{AC} - \overline{AD})(\overline{AC} + \overline{AD}) + (\overline{BD} - \overline{BC})(\overline{BD} + \overline{BC}) - 2\overline{AB} \cdot \overline{DC} &= \\ = \overline{DC}(\overline{AC} + \overline{AD}) + \overline{CD}(\overline{BD} + \overline{BC}) - 2\overline{AB} \cdot \overline{DC} &= \\ = \overline{DC}(\overline{AC} + \overline{AD} - \overline{BD} - \overline{BC}) - 2\overline{AB} \cdot \overline{DC} = \overline{DC}(\overline{AB} + \overline{AB}) - 2\overline{AB} \cdot \overline{DC} = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

отсюда обратными преобразованиями можно получить требуемые равенства.

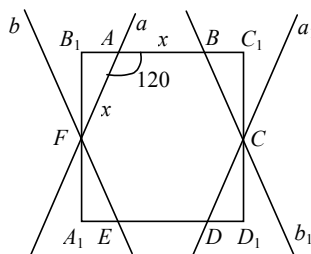


2.  $\overline{AD} = \overline{BD} - \overline{BA} = \frac{1}{2}\overline{BC} - \overline{BA}$ ;  
 $\overline{BE} = \frac{1}{4}\overline{BA} + \frac{3}{4}\overline{BC}$ ;  $\left(\frac{1}{2}\overline{BC} - \overline{BA}\right)\left(\frac{1}{4}\overline{BA} + \frac{3}{4}\overline{BC}\right) = 0$ ;  
 $\frac{1}{8}\overline{BC} \cdot \overline{BA} - \frac{1}{4}\overline{BA}^2 + \frac{3}{8}\overline{BC}^2 - \frac{3}{4}\overline{BC} \cdot \overline{BA} = 0$ ;  
 $\frac{3}{8}\overline{BC}^2 - \frac{1}{4}\overline{BA}^2 - \frac{5}{8}\overline{BC} \cdot \overline{BA} = 0$ .  
 Пусть  $BC = x$ , тогда  $\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{4} \cdot 4 - \frac{5}{8} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$ ;  $3x^2 - 5x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$ .

### C-14

1. Очевидно, они должны быть равны.

2.

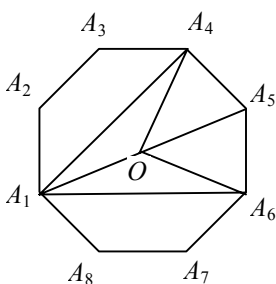


Пусть сторона шестиугольника равна  $x$ .  $\angle B_1A = 60^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow B_1A = \frac{x}{2} \text{ и } B_1F = \frac{\sqrt{3}}{2}x \Rightarrow B_1C_1 = 2x \text{ и } A_1B_1 = x\sqrt{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  стороны относятся как  $\sqrt{3} : 2$ .

### C-15



1. Пусть т.  $O$  – центр 8 – угольника, тогда:

$$\angle A_4OA_5 = \angle A_5OA_6 = 45^\circ.$$

$$\angle A_1OA_4 = \angle A_1OA_6 = 135^\circ.$$

Опишем вокруг 8 – угольника окружность и найдем ее радиус.

По теореме косинусов:

$$(a\sqrt{2 - \sqrt{2}})^2 = 2R^2(1 - \cos 45^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2(2 - \sqrt{2}) = R^2(2 - \sqrt{2}) \Rightarrow R = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 4 \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin 45^\circ = 2a^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}a^2.$$



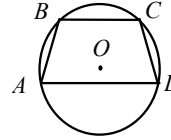
2. Очевидно  $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = 60^\circ$ ,  $\overset{\frown}{BC} = 90^\circ$  и  $\overset{\frown}{AD} = 150^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BAD = \frac{1}{2}(90^\circ + 60^\circ) = 75^\circ;$$

$$AD = \sqrt{2R^2(1 - \cos 150^\circ)} = R\sqrt{3};$$

$$BC = \sqrt{2}R \Rightarrow AB = \sqrt{2R^2(1 - \cos 60^\circ)} = R \Rightarrow$$

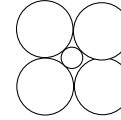
$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}R(\sqrt{3} + \sqrt{2})R \cdot \sin 75^\circ.$$



### C-16

1.

Радиусы окружностей равны  $\frac{c}{2\pi} = R$ .



Пусть искомый радиус равен  $r$ , тогда по теореме Пифагора:

$$(2R + 2r)^2 = R^2 \Rightarrow 2R + 2r = 2\sqrt{2}R \Rightarrow r = R(\sqrt{2} - 1) = \frac{c}{2\pi}(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = c(\sqrt{2} - 1).$$

2. См. задачник стр. 50.

Пусть  $AB \cap CD \cap O_1O_2 = O$ , тогда  $O_1O = OO_2 = 50$ , а т.к.

$$O_1A = O_2D = 25, \text{ то } \angle O_1OA = \angle O_1OC = \angle O_2OD = \angle O_2OB = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AO_1C = \angle DO_2B = 120^\circ \Rightarrow l = 2 \cdot \frac{1}{3}2\pi \cdot 25 + 2(2 \cdot \sqrt{50^2 - 25^2}) = \frac{200\pi}{3} + 100\sqrt{3}.$$

### C-17

$$1. \text{ Т.к. } \angle COO_1 = 30^\circ, \text{ то } r = \frac{1}{2}(R - r) \Rightarrow 2r = R - r \Rightarrow r = \frac{R}{3} \Rightarrow$$

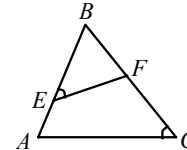
$$\Rightarrow S' = \frac{1}{6}\pi R^2 - \pi r^2 - \frac{\sqrt{3}OC^2}{4} + \frac{\pi r^2}{6} - \frac{1}{2}r^2 \sin 120^\circ =$$

$$= \frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{1}{9}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \left( R - \frac{R}{3} \right)^2 - \left( \frac{R}{3} \right)^2 \right) + \frac{\pi}{54}R^2 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{9} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2}{54} (5\pi - 6\sqrt{3}).$$

$$2. r = \frac{c}{2\pi} = \frac{m}{2\sin \alpha} \text{ (где } \alpha = \angle BEF) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{m\pi}{c} \Rightarrow R = \frac{n}{2\sin \alpha} = \frac{nc}{2m\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \pi R^2 = \frac{n^2 c^2}{4m^2 \pi}.$$





## РАБОТЫ НА ПОВТОРЕНИЕ

### II-1

#### Вариант 1

1. 1) Т.к.  $DE \parallel AC$ , то  $AD = EC$ . Т.к.  $AB = BC$ , то  $\angle ADE = \angle DEC \Rightarrow \triangle ADE = \triangle CED$  по 1-му признаку.

2) Т.к.  $CF \parallel AB$ , то  $\angle ECF = \angle ABC$ , т.к.  $DE \parallel AC$ , то  $\angle FEC = \angle ECA \Rightarrow \triangle ECF \sim \triangle ABC$  по 2-му признаку.

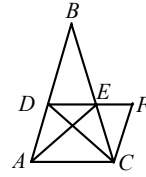
3)  $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ , причем  $k = \frac{13}{7} \Rightarrow$

$$\Rightarrow DE = \frac{7}{13} AC = \frac{70}{13} \Rightarrow EF = AC - DE = 10 - \frac{70}{13} = \frac{60}{13}.$$

$$4) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7} = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60 \Rightarrow h = CF = \frac{2S}{AB} = \frac{120}{13}.$$

$$5) \frac{S(ADE)}{S(DCF)} = \frac{S(CDE)}{S(DCF)} = \frac{DE}{DF} = \frac{\frac{70}{13}}{10} = \frac{7}{13}.$$

2. Проведите высоты треугольника, точка их пересечения должна находиться вне его.



#### Вариант 2

1. 1)  $DB \perp AC \Rightarrow BD$  — биссектриса  $\Rightarrow \angle ABM = \angle CBM$ ,  $AB = BC$ ,

т.к. треугольник равнобедренный,  $BM$  — общая  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle CBM$  по 1-му признаку.

2)  $\angle AKM = \angle BMA$  и  $\angle BAM$  — общий  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AKM \sim \triangle AMB$  по 2-м углам, но  $\triangle AMB = \triangle CMB \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BMC \sim \triangle AKM$ .

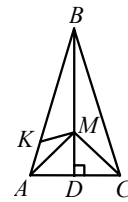
3)  $AM = \sqrt{64 + 36} = 10$  по теореме Пифагора  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{KM}{MB} = \frac{KM}{BD-6} = \frac{KM}{\sqrt{289-64}-6} \Rightarrow KM = \frac{AM \cdot MB}{AB} = \frac{10 \cdot (\sqrt{15}-6)}{17} = \frac{10 \cdot 9}{17}.$$

$$4) r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{25 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 9}}{25} = \frac{5 \cdot 8 \cdot 3}{25} = \frac{24}{5}.$$

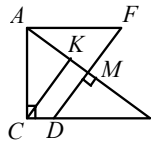
$$5) S(AKM) = \left(\frac{10}{17}\right)^2 S(ABM) = \left(\frac{10}{17}\right)^2 \frac{19}{25} S(ABD) =$$

$$= \left(\frac{10}{17}\right)^2 \cdot \frac{9}{25} \cdot \frac{1}{2} S(ABC) = \frac{3660}{289}.$$



2. Строим серединные перпендикуляры к 2-м сторонам. Затем проводим окружность с центром в точке пересечения и радиусом, равным расстоянию от нее до вершины.

### Вариант 3



1. 1)  $\angle FAM = \angle MBD$ , т.к.  $AF \parallel DB$ ,  
 $AM = MB$ , т.к.  $M$  — середина  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \triangle AFM = \triangle DMB$  по катету и острому углу.  
 2)  $\angle FAM = \angle MBD \Rightarrow \triangle AFM \sim \triangle ABC$  по острому углу  
 $(\angle C = \angle M = 90^\circ)$ .

$$3) DB = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17; \triangle ACB \sim \triangle AMP \Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle DMB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CB}{MB} = \frac{AB}{DB} = \frac{2MB}{DB} \Rightarrow CB = \frac{2MB^2}{DB} = \frac{2 \cdot 225}{17} \text{ и}$$

$$\frac{AC}{DM} = \frac{2MB}{DB} \Rightarrow AC = \frac{2MB \cdot DM}{DB} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 8}{17}, AB = 2MB = 30.$$

$$4) r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{20 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 5}}{20} = \frac{10 \cdot 6}{20} = 3;$$

$$CM = \frac{1}{2} AB = MB = 15.$$

$$5) CK = \frac{AC \cdot CB}{AB} = \frac{225 \cdot 15 \cdot 16}{30 \cdot 289} = \frac{225 \cdot 8}{289} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S(ACK)}{S(CKB)} = \sqrt{\frac{\left(\frac{15 \cdot 16}{17}\right)^2 - \left(\frac{1000}{289}\right)^2}{\left(\frac{350}{17}\right)^2 - \left(\frac{1000}{289}\right)^2}} = \frac{64}{225}.$$

2. См. П-1, Вариант-2.2.

### Вариант 4

1. 1) Т.к.  $BB_1$  и  $AA_1$  — медианы и  $BB_1 = 9$ , то  $MB_1 = 3 \Rightarrow$

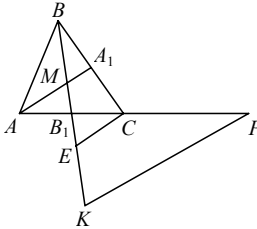
$$\Rightarrow \triangle B_1CE = \triangle AMB_1 \text{ по 1-му признаку.}$$

$$2) AC = 2AB_1 =$$

$$= 2\sqrt{AM^2 + MB_1^2 - 2BM \cdot MB_1 \cos 60^\circ} =$$

$$= 2\sqrt{64 + 9 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}} = 2\sqrt{64 - 24 + 9} = 2 \cdot 7 = 14;$$

$$\frac{AB_1}{B_1P} = \frac{MB_1}{B_1K} = \frac{1}{3} \Rightarrow \triangle B_1PK \sim \triangle AMB_1 \text{ по 2-му признаку.}$$



3) Из подобия следует,  $KP = 3AM = 24$ .

4) Из подобия следует,  $\angle MAB_1 = \angle B_1PK \Rightarrow KP \parallel AA_1$ .

$$5) S(ABC) = 6S(AMB_1) = \frac{6}{9} S(B_1KP) = \frac{6}{9} \sqrt{27 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 18} = \frac{6}{9} \cdot 18 \cdot 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3}.$$

2. Постройте две биссектрисы треугольника, затем постройте окружность с центром в точке их пересечения и радиусом, равным длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на одну из сторон.

### Вариант 5

1. 1) Очевидно, они равны по 2-му признаку.

2)  $\angle BB_1A = \angle BB_1E = \angle BMC$ , т.к.  $MC \parallel B_1E \Rightarrow$  треугольники подобны по двум углам.

3) По свойству биссектрисы

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC} = \frac{7}{8} \Rightarrow 7x + 8x = 3 = AC \Rightarrow x = \frac{1}{5} \Rightarrow AB_1 = B_1E = \frac{7}{5};$$

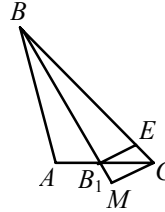
$$BE = BA = 7. \triangle B_1BE \sim \triangle MBC \Rightarrow \frac{MC}{B_1E} = \frac{BC}{BE} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MC = \frac{BC \cdot B_1E}{BE} = \frac{8 \cdot \frac{7}{5}}{7} = \frac{8}{5}.$$

$$4) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6} = 3 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

$$5) R = \frac{abc}{4S} = \frac{\frac{7}{5} \cdot 1 \cdot \frac{8}{5}}{4 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot \frac{2}{5}}} = \frac{\frac{7 \cdot 8}{25}}{4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{5}} = \frac{56}{30\sqrt{3}} = \frac{7}{5\sqrt{3}}.$$

2. Разделим одну из сторон на 4 части, затем отложим последовательно от нее эту часть 6 раз. Затем соединим конец новой стороны с вершиной, противоположащей исходной стороне.



### Вариант 6

1. 1)  $\triangle AED = \triangle AFC$  по 2-му признаку  $\Rightarrow FD = EC \Rightarrow$

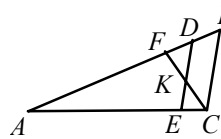
$\Rightarrow \triangle FKD = \triangle EKC$  по 2-му признаку.

2) Очевидно, по 2-м углам.

3) По теореме синусов имеем:  $\frac{FC}{\sin 25^\circ} = \frac{AF}{\sin 55^\circ} \Rightarrow$

$$\Rightarrow FC = \frac{4 \sin 25^\circ}{\sin 55^\circ}. \text{ Аналогично } AC = \frac{AF \sin 100^\circ}{\sin 55^\circ} = \frac{4 \sin 100^\circ}{\sin 55^\circ}.$$

$$4) \triangle AFC \sim \triangle ACB, \text{ причем } k = \frac{AF}{AC} = \frac{\sin 55^\circ}{\sin 100^\circ} \Rightarrow P(AFC) = \frac{\sin 55^\circ}{\sin 100^\circ} P(ABC).$$



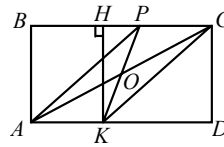
$$5) S(ABC) = \left( \frac{\sin 100^\circ}{\sin 55^\circ} \right)^2 S(AFC) =$$

$$= \left( \frac{\sin 100^\circ}{\sin 55^\circ} \right)^2 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 25^\circ \cdot 4 \frac{\sin 100^\circ}{\sin 55^\circ} = 8 \left( \frac{\sin 100^\circ}{\sin 55^\circ} \right)^2 \sin 25^\circ.$$

2. Начертите прямоугольный треугольник. Проведите его медианы (достаточно две). Точка их пересечения — искомая.

## II-2

### Вариант 1



1. 1)  $AO = OC$ ,  $\angle BCA = \angle CAD$ ,  $\angle POC = \angle AOK \Rightarrow \triangle POC = \triangle KOA \Rightarrow PC = AK$ , а т.к.  $PC \parallel AK$ , то  $APCK$  — параллелограмм.

2)  $CD = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow S = 4 \cdot 5 = 20$ .

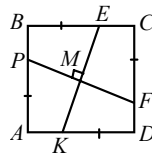
3)  $HK = 5$ ,  $HP = 4 \Rightarrow KP = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$

(по теореме Пифагора).

4) По теореме косинусов:

$$\cos \angle AOK = \frac{(6,5)^2 + \left( \frac{\sqrt{41}}{2} \right)^2 - 16}{2 \cdot 6,5 \cdot \frac{\sqrt{41}}{2}}; \angle AOK \approx 28^\circ 13'.$$

### Вариант 2



1. 1) Из условия следует, что

$EC = FD = AK = BP \Rightarrow$  по теореме Пифагора

$PE = EC = FK = PK \Rightarrow \triangle PBE = \triangle ECP = \triangle FDK = \triangle KAP \Rightarrow$

$\Rightarrow PEFK$  — квадрат  $\Rightarrow EK \perp PF \Rightarrow PE = \frac{\sqrt{2}}{2} EK \Rightarrow S = PE^2 = 50$ .

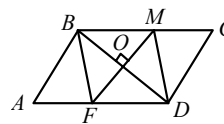
2) Пусть  $EC = x$ , тогда по теореме Пифагора имеем:

$$100 = (1 - x)^2 + (1 + x)^2, 100 = 2 + 2x^2 \Rightarrow 2x^2 = 49 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow AB = 8.$$

3) Т.к.  $\angle A + \angle M = \pi$ , то и  $\angle P + \angle M = \pi$  (т.к. сумма всех углов равна  $2\pi$ )  $\Rightarrow$  можно описать окружность.

4) Очевидно, что  $PK$  — диаметр  $\Rightarrow r = \frac{1}{2} PK = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 49} = \frac{\sqrt{50}}{2}$ .

### Вариант 3



1)  $\triangle BOM = \triangle DOF$  по катету и острому углу  $\Rightarrow$

$MO = OF = 3 \Rightarrow \triangle BOF = \triangle DOM$  по 2-м катетам и

$\triangle BOF = \triangle BOM$  тоже по 2-м катетам  $\Rightarrow BM = MD = DF = FB \Rightarrow BMDF$  — ромб.

2) Очевидно, радиус равен высоте одного из треугольников, опущенной из прямого угла, тогда  $r = \frac{BO \cdot OM}{BM} = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5}$ .

$$3) \angle CDF = \arctg \frac{3}{4} \approx 36^\circ 52'.$$

$$4) AB = \sqrt{100 + 64 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos \angle CDF} = \sqrt{164 - 160 \cdot \frac{4}{5}} = \sqrt{164 - 128} = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow P = 6 + 6 + 10 + 10 = 32.$$

#### Вариант 4

1)  $\triangle ABC \sim \triangle EBC$ ,  $\triangle BCD \sim \triangle FCM$  по 2-му признаку  $\Rightarrow EF \parallel AC$  и  $FM \parallel BD \Rightarrow EF \perp FM$ . Аналогично доказывается перпендикулярность других сторон  $\Rightarrow EFMK$  — прямоугольник, но  $\triangle AEK = \triangle DMK \Rightarrow EF = FM \Rightarrow EFMK$  — квадрат.

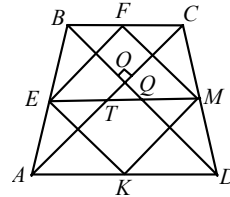
2)  $S(EFMK) = 100 \Rightarrow EF = FM = 10 \Rightarrow$  из подобия треугольников следует, что  $AC = BD = 20 \Rightarrow$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 = 200.$$

$$3) \text{ Очевидно, } \angle OAD = \angle ODA = 45^\circ \Rightarrow CH = AC \cdot \sin 45^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}.$$

$$4) EM = \frac{S}{CH} = \frac{200}{10\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2} \Rightarrow ET = QM = \frac{10\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = 8\sqrt{2} \Rightarrow AD = 12\sqrt{2} \quad (\text{т.к. } \frac{1}{2}(AD + BC) = EM).$$



#### Вариант 5

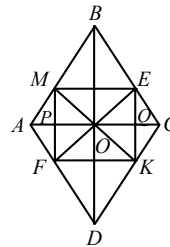
1)  $\triangle MOF = \triangle EOK$  по 2-м сторонам и углу между ними  $\Rightarrow MF = EK$ , но  $MF \parallel EK \Rightarrow MEKF$  — прямоугольник.  $\triangle MOP = \triangle FOP = \triangle EOQ$  по гипотенузе и острому углу  $\Rightarrow MP = PF = EQ = QK \Rightarrow PQ \parallel ME \Rightarrow ME \perp BO \Rightarrow ME \perp MF$  (т.к.  $BO \parallel MF$ )  $\Rightarrow MEKF$  — параллелограмм.

$$2) \text{ Из } \triangle ABO: MO = \frac{AO \cdot BO}{AB} = \frac{6 \cdot 8}{\sqrt{64 + 36}} = 4,8 \Rightarrow$$

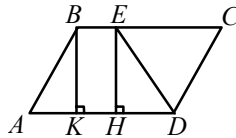
$$\Rightarrow MK = FE = 9,6.$$

$$3) \angle ABC = 2\arctg(6/8) = 2\arctg(3/4) \approx 73^\circ 44'.$$

$$4) S(MEKF) = (1/2) MK \cdot FE \cdot \sin \angle MOF = (1/2) MK \cdot FE \cdot \sin \angle ABC = (1/2) \cdot 9,6 \cdot 9,6 \cdot \sin \angle ABC \approx 44,2.$$



### Вариант 6



- 1) Т.к.  $ED = 5$ , то  $HD = \sqrt{25 - 16} = 3 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow BE = AD - AK - HD = 8 - 3 - 3 = 2$ .  
 2) Т.к.  $BE + AD = AB + ED$ , то в  $ABED$  можно  
 вписать окружность.  
 Т.к.  $BK = 4$ , то  $r = \frac{BK}{2} = 2 \Rightarrow S = \pi r^2 = 4\pi$ .

3)  $\cos \angle BAK = \frac{3}{5} \Rightarrow$  по теореме косинусов:

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAK} = \sqrt{25 + 64 - 80 \cdot \frac{3}{5}} = \sqrt{41}.$$

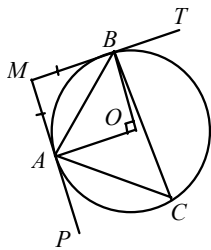
Т.к.  $\angle ABC = \pi - \angle BAK$ , то  $\cos \angle ABC = -\frac{3}{5} \Rightarrow AC = \sqrt{25 + 64 + 80 \cdot \frac{3}{5}} = \sqrt{137}$ .

4)  $S = BK \cdot AD = 32$ . С другой стороны,  $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle BOC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BOC = \arcsin \frac{2BK \cdot AD}{AC \cdot BD} = \arcsin \frac{64}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{137}} \approx 58^\circ 39'.$$

### П-3

### Вариант 1



- 1)  $\angle BSA = 45^\circ \Rightarrow \angle BOA = 90^\circ$ ;  
 $\angle MBO = \angle MAO = 90^\circ$ , т.к.  $MT$  и  $MP$  — касатель-  
 ные  $\Rightarrow MBOA$  — прямоугольник, но  $MB = MA$   
 (как отрезки касательных)  $\Rightarrow MBOA$  — квадрат.  
 2) Т.к.  $MB + MA = 20$ , то  $MB = MA = 10 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  по теореме Пифагора  $AB = 10\sqrt{2}$ .  
 3) Пусть  $\angle OBC = x$ , тогда  $\angle OAC = 45^\circ - x$ , а  
 $\angle CBT = \frac{\pi}{2} - x$ ,

а  $\angle BAC = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow \angle CBT = \angle BAC$ .

4) По теореме косинусов:  $BC^2 = 2BO^2(1 - \cos \angle BOC) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos \angle BOC = \frac{280^2 - BC^2}{2BO^2} = \frac{200 - 25}{200} = \frac{8 - 1}{8} = \frac{7}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BOC = \arccos \frac{7}{8} \Rightarrow \angle AOC = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{7}{8} = \frac{3\pi}{2} - \arccos \frac{7}{8}.$$



### **Вариант 2**

1) Пусть  $r$  — радиус окружности, тогда по свойству хорд имеем:

$$6 \cdot 4 = (r-5)(r+5) \Rightarrow r^2 = 49 \Rightarrow r = 7.$$

2) Из  $\triangle KOF$  по теореме косинусов имеем:

$$KF^2 = KO^2 + OF^2 - 2KO \cdot OF \cdot \cos \angle AOF \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \angle AOF = \frac{KO^2 + OF^2 - KF^2}{2KO \cdot OF} = \frac{2+36}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{38}{70} = \frac{17}{35} \Rightarrow$$

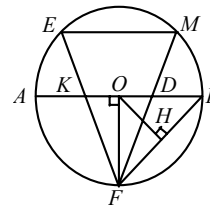
$$\Rightarrow \angle ABF = \frac{1}{2} \angle AOF = \frac{1}{2} \arccos \frac{17}{35} \Rightarrow OH = 7 \cdot \sin \left( \frac{1}{2} \arccos \frac{17}{35} \right);$$

3) Аналогично п.2.

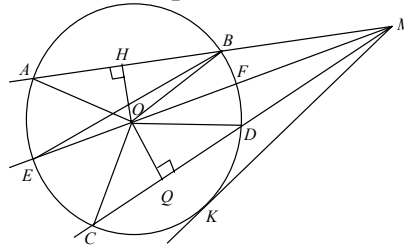
$$\angle FKO = \arccos \frac{KF^2 + KO^2 - OF^2}{2KF \cdot KO} = \arccos \frac{36+25-49}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \arccos \frac{12}{60} = \arccos \frac{1}{5}.$$

4)  $\Delta EFM \sim \Delta KFO$  по 1-му признаку  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2KO}{EM} = \frac{KF}{EF} = \frac{6}{10} \Rightarrow EM = \frac{2KO \cdot 10}{6} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}.$$



### Вариант 3



1) Т.к.  $AB = CD$ , то  $\angle AOB = \angle COD \Rightarrow \Delta AOB = \Delta COD \Rightarrow$

$$\Rightarrow OH = OQ \Rightarrow \triangle OHM = \triangle OQM \text{ по 2-м катетам} \Rightarrow \angle AME = \angle CME.$$

2) Пусть  $r$  — радиус окружности, тогда по свойству секущих

$$5 \cdot 9 = 3 \cdot (2r + 3) \Rightarrow r = 6.$$

3) По тому же свойству  $MK^2 = 5 \cdot 9 \Rightarrow MK = 3\sqrt{5}$

4)  $\angle AEB = (1/2) \angle AOB = \angle HOB = \arcsin(2/6) = \arcsin(1/3) \approx 19^\circ 28'$ .

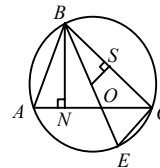
### Вариант 4

1)  $\angle BAC = \angle BEC$ , т.к. они вписанные и опираются на одну дугу.

$$\angle BNA = \angle BCE = 90^\circ \Rightarrow \angle ABN = \angle EBC.$$

2) По теореме Пифагора:

$$BO = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = \sqrt{16} = 4.$$

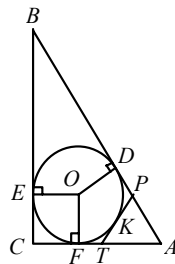


$$3) \triangle ABN \sim \triangle EBC \text{ по острому углу} \Rightarrow \frac{AB}{EB} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow AB = \frac{BN \cdot EB}{BC} = \frac{5 \cdot 8}{4\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}.$$

4) Из теоремы косинусов следует:

$$\angle BOA = \arccos \frac{2BO^2 - AB^2}{2BO^2} = \arccos \frac{32 - \frac{100}{3}}{32} \approx 92^\circ 23'.$$

### Вариант 5



1) Очевидно  $\angle EOF = 90^\circ$ ,  $\angle A = 60^\circ \Rightarrow \angle DOF = 120^\circ$ .  
Аналогично,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $\angle EOD = 150^\circ \Rightarrow$  углы в отношении  $90^\circ:120^\circ:150^\circ = 3:4:5$ .

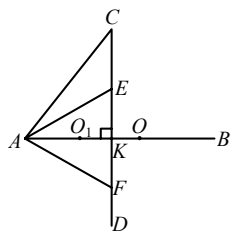
2) Из теоремы Пифагора следует, что  $r = 4$ .

$$3) P(APT) = AP + AT + PT = AP + AT + PK + KT = AP + AT + P + FT = 2AF = 2(AC - CF) =$$

$$= \left( 2 \cdot \frac{CO}{\sin 30^\circ} - CF \right) = 2 \left( \frac{4\sqrt{2}}{1/2} - 4 \right) = 8(2\sqrt{2} - 1).$$

$$4) R = \frac{AC}{2 \sin 30^\circ} = \frac{8\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 8\sqrt{2}.$$

### Вариант 6



$$1) \text{ Очевидно } O_1K = 1, \text{ а } r_1 = 2 \Rightarrow EK = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AE = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}.$$

По свойству прямоугольного треугольника

$$CK^2 = AK \cdot KB \Rightarrow CK = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CA = \sqrt{9+15} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

2)  $AF = AE = 2\sqrt{3} \Rightarrow$  по теореме косинусов:

$$\cos \angle AO_1F = \frac{2AO_1^2 - AK^2}{2AO_1^2} = \frac{8-12}{8} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AO_1F = 120^\circ \Rightarrow \overset{\cup}{AF} = \frac{1}{3} 2\pi AO_1 = \frac{2}{3} \pi \cdot 2 = \frac{4\pi}{3}.$$

$$3) S = \frac{\pi AO_1^2}{3} - \frac{1}{2} AO_1^2 \sin 120^\circ = \frac{\pi}{3} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

$$4) \text{ Из } \triangle ACE: \angle AEC = 120^\circ; R = \frac{AC}{2 \sin \angle AEC} = \frac{2\sqrt{6}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

## П-4

### Вариант 1

1) Пусть  $D(x, y)$ , тогда  $\overline{AD} = \overline{BC} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = -3 \\ y+2 = 1 \end{cases} \Rightarrow D(-2; -1).$

2)  $\overline{EB} = \overline{EC} + \overline{CB} = \frac{2}{3}\overline{DC} + \overline{CB} = \frac{2}{3}\overline{AB} - \overline{AD}.$

3)  $\overline{AB}\{1; 6\}, \overline{AD}\{-3; -3\} \Rightarrow$

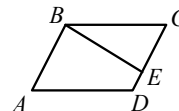
$$\Rightarrow \angle A = \arccos \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}|} = \arccos \frac{-3-18}{3\sqrt{37} \cdot \sqrt{2}} = \arccos \frac{-7}{\sqrt{74}}.$$

4) Пусть  $y = kx + b$  — уравнение прямой  $AC$ , тогда

$$\begin{cases} 5 = -k + b \\ -2 = k + b \end{cases}; \begin{cases} +3 = 2b \\ k = -2 - b \end{cases}; \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ k = -\frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{7x}{2} + \frac{3}{2}.$$

Пусть  $M$  — середина  $AC$ , тогда  $M\left(0; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$



### Вариант 2

1)  $AB\{14; -2\}, BC\{-6; 6\}, AC\{8; -8\};$

$\overline{BC} \cdot \overline{AC} = 0 \Rightarrow$  треугольник — прямоугольный.

2)  $\overline{AM} = \frac{2}{3}(\overline{AA_1}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})\right) = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC}) =$

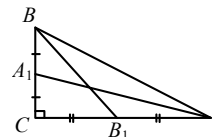
$$= \frac{1}{3}(\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{AC}) = -\frac{2}{3}\overline{CA} + \frac{1}{3}\overline{CB}.$$

3)  $A_1(5; 5), B_1(-2; 6) \Rightarrow \overline{AA_1}\{11; -5\}$  и  $\overline{BB_1}\{-10; -2\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos \angle AMB = \frac{\overline{AA_1} \cdot \overline{BB_1}}{|\overline{AA_1}| \cdot |\overline{BB_1}|} = \frac{-110 + 10}{\sqrt{121 + 25} \sqrt{100 + 4}} = \frac{-100}{\sqrt{146} \sqrt{104}} < 0 \Rightarrow$$

острый угол равен  $\arccos \frac{100}{\sqrt{146} \sqrt{104}} \approx 35^\circ 45'.$

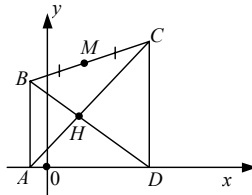
4) Пусть  $y = kx + b$  — уравнение  $AA_1$ , тогда  $\begin{cases} 5 = 5k + b \\ 10 = -6k + b \end{cases}; \begin{cases} -5 = 11k \\ b = -5k + 5 \end{cases};$



$$\begin{cases} k = \frac{-5}{11} \\ b = +\frac{25}{11} + \frac{55}{11} = +\frac{80}{11} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{5}{11}x + \frac{80}{11}. \text{ Т.к. } \overline{AC} \cdot \overline{BC} = 0, \text{ то } AB \text{ — ги-}$$

потенуза, тогда  $(1; 9)$  — ее центр, а  $r = \sqrt{(1+6)^2 + (9-80)^2} = \sqrt{50} \Rightarrow \Rightarrow (x-1)^2 + (y-9)^2 = 50$ .

### Вариант 3



1) Т.к.  $M$  — середина  $BC$ , то  $M\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right); \overline{AM}\left\{\frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right\};$

$$\overline{AB}\{0; 3\}, \overline{AD}\{5; 0\}; \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{3}{2}\overline{AB}.$$

2) Найдем уравнение  $AC$ :

$$\begin{cases} 6 = 4k + 6 \\ 0 = -k + b \end{cases}; \begin{cases} 6 = 5k \\ b = k \end{cases}; \begin{cases} k = \frac{6}{5} \\ b = \frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}.$$

$$\text{Найдем уравнение } BD: \begin{cases} 3 = -k + 6 \\ 0 = 4k + b \end{cases}; \begin{cases} 3 = -5k \\ b = 4k \end{cases}; \begin{cases} k = -\frac{3}{5} \\ b = \frac{12}{5} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{12}{5}.$$

Найдем точку их пересечения:

$$\begin{cases} 5y = 6x + 6 \\ 5y = -3x + 12 \end{cases}; \begin{cases} 9x - 6 = 0 \\ y = \frac{6}{5}x + \frac{6}{5} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{12}{15} + \frac{18}{15} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}; 2\right).$$

$$3) \overline{AH}\left\{\frac{5}{3}; 2\right\} \Rightarrow \overline{AH} = \frac{5}{3}\vec{i} + 2\vec{j}.$$

$$4) \overline{AM}\left\{\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right\}, \overline{BD}\{5; -3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos \frac{\overline{AM} \cdot \overline{BD}}{|\overline{AM}| \cdot |\overline{BD}|} = \arccos \frac{\frac{5}{2} - \frac{27}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{82} \cdot \sqrt{34}} = \arccos \frac{-22}{\sqrt{82} \cdot \sqrt{34}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(ABMD) = \frac{1}{2} \overline{AM} \cdot \overline{BD} \cdot \sin \alpha = \frac{1}{4} \sqrt{82} \cdot \sqrt{34} \sin \left( \arccos \frac{-22}{\sqrt{82} \cdot \sqrt{34}} \right).$$

#### Вариант 4

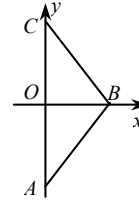
$$1) M\left(\frac{9}{2}; 6\right) \Rightarrow CM = \sqrt{36 + \frac{33^2}{4}} \approx 18,6.$$

$$2) AC = 24; AB = BC = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15 \Rightarrow \\ \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{27 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 3}}{27} = 4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow O(4; 0)$  — центр окружности и  $(x-4)^2 + y^2 = 16$  — ее уравнение.

$$3) \overline{AO}\{4; -12\}, \overline{BC}\{9; 12\} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{\overline{AO} \cdot \overline{BC}}{|\overline{AO}| \cdot |\overline{BC}|} = \arccos \frac{36 - 144}{\sqrt{16 + 144} \cdot \sqrt{225}} = \\ = \arccos \frac{-108}{4\sqrt{10} \cdot 15} = \arccos \frac{-27}{15\sqrt{10}} = \arccos \frac{-9}{5\sqrt{10}}.$$

$$4) \overline{OB}\{5; 0\}, \overline{OA}\{-4; 12\}, \overline{OC}\{-4; -12\} \Rightarrow \overline{OB} = -\frac{5}{8}(\overline{OA} + \overline{OC}).$$



#### Вариант 5

$$1) AB^2 = 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58; BC^2 = 7^2 + 3^2 = 58; CD^2 = 3^2 + 7^2 = 58; \\ DA^2 = 7^2 + 3^2 = 58 \Rightarrow \text{все стороны } \sqrt{58} \Rightarrow ABCD — \text{ромб}.$$

$$2) \overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{BC} \cdot \overline{AC} = (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{AC} + \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \\ = \overline{AC} \cdot \overline{AC} = AC^2 \text{ (т.к. } \overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0); AC^2 = 10^2 + 10^2 = 200.$$

$$3) \angle A = \arccos \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{AB^2} = \arccos \frac{42}{58} = \arccos \frac{21}{29} \Rightarrow \arccos \frac{21}{29} \text{ и } \left(\pi - \arccos \frac{21}{29}\right).$$

4) Т.к.  $O$  — середина  $AC$ , то  $O(3; 2)$ ;

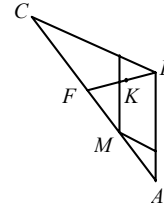
$$OC = \frac{1}{2} AC = 5\sqrt{2}; BO = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{OC \cdot OB}{BC} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{158} = \frac{20}{\sqrt{58}} \Rightarrow \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 200/29.$$

#### Вариант 6

$$1) \overline{BM} = (1/4)\overline{BC} + (3/4)\overline{BA}.$$

2) Пусть  $F$  — середина  $AC$ , тогда  $F\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ , тогда  $K$  делит  $BF$  в отношении 2:1 считая от точки  $B \Rightarrow$

$$K\left(\frac{2 + \frac{1}{2}}{3} - \frac{1}{2}; \frac{2-2}{3} + 2\right) \Rightarrow K = \left(\frac{1}{3}; 2\right).$$



- 3)  $\overline{AB} \{0; 3\} \Rightarrow |\overline{AB}| = 3$ .  $\overline{AC} \{-5; 6\} \Rightarrow \overline{a} = \alpha \overline{AC}$  и  $|\overline{a}| = 3$ ;  
 $252^2 + 362^2 = 9 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{9}{61} \Rightarrow \overline{a} \left\{ -\frac{15}{\sqrt{61}}; \frac{18}{\sqrt{61}} \right\}$ .  
4)  $\alpha = \arccos \frac{\{1; 3\} \cdot \overline{AC}}{1 \cdot |\overline{AC}|} = \arccos \frac{-5}{\sqrt{61}} \approx 129^\circ 48'$ .

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДИКТАНТЫ

### МД-1

#### Вариант 1

1. Т.к.  $\overline{a}$  и  $\overline{b}$  не коллинарны, то  $x = -3$ , а  $y = 0$ .
2.  $\overline{m} \{-3; 2\}$ .
3.  $2\overline{a} = \overline{b} \Rightarrow \overline{a}$  и  $\overline{b}$  — коллинарны.
4.  $(\overline{a} + \overline{b}) \{1; 1\} \Rightarrow (\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = 0$ , то искомый угол  $90^\circ$ .
5.  $|a - b|$ .
6.  $\overline{EF} \{3; -1\}$ .  $|\overline{EF}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ .
7.  $O(2; -2)$ .
8.  $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$ .
9. Высота равна 2, основание — 4  $\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$ .
10.  $|a| < 2$ , т.к. 2 — радиус окружности.

#### Вариант 2

1. Т.к.  $\overline{m}$  и  $\overline{n}$  не коллинарны, то  $x = 0$ , а  $y = 5$ .
2.  $\overline{k} = 5\overline{i} - 2\overline{j}$ .
3.  $-2\overline{c} = \overline{m} \Rightarrow \overline{c}$  и  $\overline{m}$  — коллинарны.
4.  $(\overline{a} - \overline{b}) \{1; -1\} \Rightarrow (\overline{a} - \overline{b}) \cdot \overline{c} = 0$ , то искомый угол равен  $90^\circ$ .
5.  $|m - n|$ .
6.  $\overline{EF} \{2; 5\}$ .  $|\overline{EF}| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$ .
7.  $(-1; 4)$ .
8.  $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 9$ .
9. Высота равна 3, основание — 6  $\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$ .

10.  $|m| > 4$ , т.к. 4 — радиус окружности. МД-2

**Вариант 1**

1.  $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 150^\circ \Rightarrow S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

2. Т.к.  $S = a^2 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{S}{a^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$ .

3. По теореме синусов  $\frac{BC}{AC} = \frac{\sin \angle A}{\sin \angle B} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

4.  $R = \frac{AB}{2 \sin \angle C} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$ .

5. Т.к.  $4^2 + 7^2 < 8^2$ , то треугольник — тупоугольный  $\Rightarrow$  вне его.

6. Очевидно  $180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ , т.к. вектор  $\vec{b}$  поменял направление.

7.1)  $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \frac{1+0}{1\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 2)  $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$  (т.к.  $AC \perp BD$ ); 3)  $\overline{AD} \cdot \overline{CB} = -1$

8.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 3 = -1 < 0 \Rightarrow$  угол тупой

9.  $(\overline{BC} - \overline{BA})(\overline{AC} - \overline{AB}) = \overline{AC} \cdot \overline{BC} = 0$ , т.к.  $AC \perp BC$

10. Т.к.  $|\vec{e}| = 1$ , то  $x = \cos \alpha$

**Вариант 2**

1. Внешний угол при вершине  $E$  равен  $120^\circ \Rightarrow$  внутренний

$180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow S = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$ .

2.  $S = ab \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{S}{ab} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$ .

3. По т. синусов  $\frac{BC}{AB} = \frac{\sin \angle C}{\sin \angle A} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ .

4.  $R = \frac{EF}{2 \sin \angle H} \Rightarrow EF = 2R \sin \angle H = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$

5.  $4^2 + 6^2 < 9 \Rightarrow$  треугольник тупоугольный  $\Rightarrow$  центр описанной окружности вне его.

6. Очевидно, что  $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ , т.к.  $\overline{m}$  поменял направление.  
7. Вероятно, в условии опечатка и имеется ввиду не ромб, а квадрат, т.к. иначе можно вычислить только 2).  
Если  $ABCD$  – квадрат: 1) 0; 2) 0; 3) 1.  
8.  $\overline{m} \cdot \overline{n} = 6 - 2 = 4 > 0 \Rightarrow$  острый.  
9.  $(\overline{CD} - \overline{CA})(\overline{BD} - \overline{BC}) = \overline{AD} \cdot \overline{CD} = 0$ . 10. Т.к.  $|e|$ , то  $y = \cos \beta$ .

### МД-3

#### Вариант 1

1. Угол  $n$ -угольника равен  $2\left(\frac{180^\circ - \alpha}{2}\right) = 180^\circ - \alpha \Rightarrow$  внешний угол равен  $\alpha$ .  
2.  $160^\circ = \frac{180^\circ(n-2)}{n} \Rightarrow 160n = 180n - 360 \Rightarrow 20n = 360; n = 18$ .  
3. Это прямоугольный треугольник с катетами  $R$  и  $R\sqrt{3} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{2} R^2$ .  
4. Здесь  $r$  — радиус окружности, тогда  $r$  — сторона 6-угольника, а  $2r$  — сторона квадрата  $\Rightarrow \frac{1}{2}$ . 5.  $S = 12 \cdot \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{12} = 6R^2 \sin 30^\circ = 3R^2$ .  
6.  $l = l_2 - l_1 = 2\pi(R_2 - R_1) \Rightarrow \Delta R = \frac{1}{2\pi}$ . 7.  $R = 3 \Rightarrow l = \frac{2\pi R}{3} = 2\pi \Rightarrow r = 1$ .  
8. Пусть сторона ромба равна  $a$ , тогда  $S_p = a^2 \sin 30^\circ = \frac{a^2}{2}$ , с другой стороны  $S_p = 2ar \Rightarrow r = \frac{S}{2a} = \frac{a}{4} \Rightarrow S_k = \frac{\pi a^2}{16} \Rightarrow \frac{S_p}{S_k} = \frac{8}{\pi}$ .  
9.  $\frac{S_k}{S} = \frac{\pi(9-1)}{\pi} = 8$ . 10.  $3\pi = \pi R^2 \cdot \frac{1}{12} \Rightarrow R = 6$ .

#### Вариант 2

1. Внутренний угол равен  $180^\circ - \beta \Rightarrow$  его половина  $\frac{180^\circ - \beta}{2} \Rightarrow 180^\circ - 2 \cdot \frac{180^\circ - \beta}{2} = \beta$  — искомая дуга.  
2.  $140^\circ = \frac{180^\circ(n-2)}{n} \Rightarrow 148^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ \Rightarrow 360^\circ = 40^\circ n \Rightarrow n = 9$ .  
3. Если угол между этими сторонами тупой, то



$$S = \frac{1}{2}R^2 \sin 90^\circ + \frac{1}{2}R^2 \sin 60^\circ - \frac{1}{2}R^2 \sin 150^\circ = \frac{1}{2}R^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{R^2}{4}(3 + \sqrt{3}).$$

Если острый, то:

$$S = \frac{1}{2}R^2 \sin 60^\circ + \frac{1}{2}R^2 \sin 30^\circ - \frac{1}{2}R^2 \sin 90^\circ = \frac{1}{2}R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{R^2}{4}(\sqrt{3} - 1).$$

4. Пусть  $2R$  – сторона квадрата, тогда  $R$  – радиус окружности  $\Rightarrow \sqrt{2R^2(1 - \cos 120^\circ)} = \sqrt{3}R$  – сторона треугольника  $\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$$5. S = 8 \cdot \frac{1}{2}R^2 \sin \frac{360^\circ}{8} = 4R^2 \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}R^2. \quad 6. \Delta l = 2\pi(R+1) - 2\pi R = 2\pi.$$

7. Пусть боковая сторона трапеции равна  $a$ , тогда  $P = 4a$ , а

$$r = \frac{1}{2}a \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}a}{4} \Rightarrow l = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a \Rightarrow \frac{P}{l} = \frac{8}{\sqrt{3}\pi}.$$

$$9. \frac{S_k}{S_v} = \frac{25-4}{25} = \frac{21}{25}. \quad 10. \frac{\pi r^2}{12} = 2\pi \Rightarrow r^2 = 24 \Rightarrow r = 2\sqrt{6}.$$

## МД-4

### Вариант 1

1.  $a_1 \parallel b_1$ , т.к. движение сохраняет углы.
2. Равнобокая трапеция.
3.  $k = 3$ ,  $b = -4$ .
4. Да, середина отрезка, соединяющего 2 параллельные прямые.
5.  $B(4; 1) \rightarrow B_1(2; 1)$ .
6. Да, нужно сдвинуть эту сторону вдоль смежной стороны на ее длину.
7. Параллельный перенос должен осуществляться вдоль одной из диагоналей.
8. Выберите две произвольные точки на прямой  $a$  и поверните их относительно точки  $O$  на  $45^\circ$  против часовой стрелки. Затем через получившиеся точки проведем прямую.
9. Пусть  $\angle ACD = \alpha \Rightarrow \angle CAD = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ,  $\angle O_1C_1A_1 = \alpha \Rightarrow \angle FAD = \frac{\pi}{2} + \alpha$ ,  
 $\angle DC_1F = \pi - \alpha \Rightarrow \angle F = 10^\circ$ , т.к.  $\angle AD_1C = 80^\circ$ .
10. Очевидно при повороте относительно  $(1; 0)$  и  $(5; 0)$ .

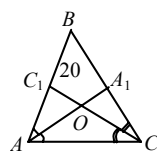
### Вариант 2

1. Очевидно, он равен  $\alpha$ , т.к. движение сохраняет угол.
2. Равносторонний треугольник.
3.  $k = 2$ ,  $b = -1$ .
4. Все  $2n$  – угольники.
5.  $(1; 5)$ .
6. Нет, т.к. стороны треугольника не параллельны.
7. Это параллелограмм, т.к. его стороны попарно параллельны.

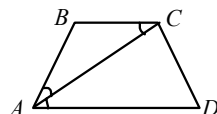
8. Выберите две произвольные точки на прямой  $b$  и поверните их вокруг т.  $O$  на  $60^\circ$  по часовой стрелке, через их образы проведите прямую – она будет искомой.
9. Т. к. осуществляется поворот на  $180^\circ$ , то острый угол равен  $20^\circ$ .
10.  $(0;-1)$  и  $(0;5)$ .

# МД-5

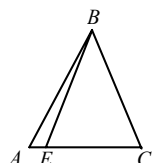
## Вариант 1



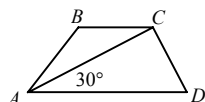
1. Пусть  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle C = \gamma$ , тогда  $\alpha + \gamma = 160^\circ \Rightarrow \Rightarrow \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 80^\circ \Rightarrow \angle AOC = 100^\circ$ .



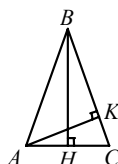
2.  $\angle BAC = \angle BCA \Rightarrow AB = BC = 6 \Rightarrow \Rightarrow$  средняя линия равна  $\frac{1}{2}(6 + 10) = 8$ .



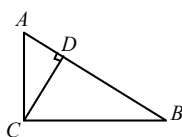
3. Пусть  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $\angle C = \gamma \Rightarrow \Rightarrow \angle BEC = \beta \Rightarrow$  из  $\triangle BEA$ :  $\alpha + (\beta - \alpha) + (\pi - \gamma) = \pi \Rightarrow \Rightarrow \beta - \gamma = 0 \Rightarrow \angle C = \angle B = \angle BEC \Rightarrow BE = 3, AB = 5 \Rightarrow \frac{S(ABC)}{S(BEC)} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{25}{9}$ .



4.  $S(ABD) = S(ACD) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ = 8$ .

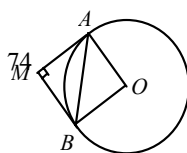


5. По теореме Пифагора  $AB = BC = 5$ ;  
 $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 = 12 \Rightarrow AK = \frac{2S}{BC} = \frac{24}{5}$ .



6.  $DB = AB - AD = 8 - 2 = 6 \Rightarrow \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{2 \cdot 6} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \Rightarrow AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$ .

7. Т. к. центральный угол в два раза больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу, получаем, что  $\angle AOB = 60^\circ \Rightarrow \triangle AOB$  — равнобедренный и  $P = 3 \cdot R = 3 \cdot 5 = 15$ .



- 8.

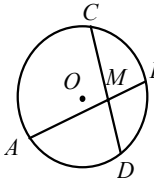
$\angle AMB = 120^\circ \Rightarrow \angle AMO = \angle OMB = 60^\circ$ , т.к.  $OA \perp MA$  и  $OM \perp MB$ , то  $\angle AOM = \angle MOB = 30^\circ \Rightarrow$  т.к.  $MO = 10$ , то  $AM = BM = 5 \Rightarrow MA + MB = 10$ .

9. По т. Пифагора  $BE = 4 \Rightarrow \sin \angle BAM = \frac{4}{5} \Rightarrow S(ABM) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AM \cdot \sin \angle BAM = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 10.$$

10.

По свойству хорд:  $AM \cdot MB = CM \cdot MD \Rightarrow MB = 10 \Rightarrow \Rightarrow AB = 12$ , а  $AD = 9 \Rightarrow AB$  ближе к центру, т.к. она длиннее.

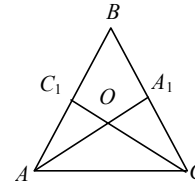


## Вариант 2

1.

Т.к.  $\angle AOC = 140^\circ$ , то

$$\frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 40^\circ \Rightarrow \angle A + \angle C = 80^\circ \Rightarrow \angle B = 100^\circ.$$



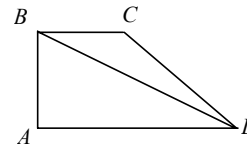
2.

Т.к.  $BC \parallel AD$ , то

$$\angle CBD = \angle BDA = \angle CDA \Rightarrow BC = CD = 5.$$

$CH \perp AD$ . По теореме Пифагора  $HD = 3 \Rightarrow$  средняя линия равна

$$\frac{1}{2}(BC + AD) = \frac{1}{2}(5 + (5 + 3)) = \frac{13}{2}.$$

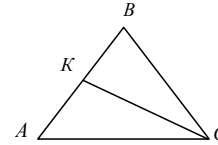


3.

$$\angle BAC = \angle BCK, \angle B - \text{общий} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle BAC \sim \triangle BCK \Rightarrow$$

$$\frac{P(BAC)}{P(BCK)} = \frac{BC}{BK} = \frac{7}{4}.$$

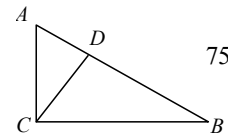


$$4. S = \frac{1}{2} BD \cdot AD \cdot \sin \angle BDA = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ = 15.$$

$$5. S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24.$$

По т. Пифагора сторона ромба равна:  $5 \Rightarrow S = 5 \cdot h \Rightarrow h = \frac{S}{5} = \frac{24}{5}.$

6.

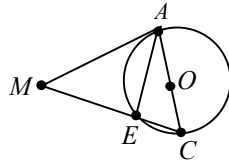


75

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = 4.$$

$$7. \angle AMB = 45^\circ \Rightarrow \angle AOB = 90^\circ \Rightarrow AB = \frac{R}{\cos 45^\circ} = 2\sqrt{2}.$$

8.  $MA = MB$ ,  $\triangle AMB$  — равнобедренный, значит,  
 $MA = AB \cdot \cos \angle MAB = 10 \cdot \cos 45^\circ = 5\sqrt{2}$ .  $\triangle MAO$  — равнобедренный т.к.  
 $OA$  — радиус, проведенный в точку касания. Получаем, что  $MAOB$  —  
 квадрат и  $MO = MA \cdot \sqrt{2} = 10$ .



9.  $OA \perp MA$ , как радиус проведенный в точку касания  $\Rightarrow \triangle MAC$  — равнобедренный  $\Rightarrow$   
 по теореме Пифагора

$$MC = \sqrt{MA^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13. \text{ Вписанный}$$

треугольник, опирающийся на диаметр является  
 равнобедренным, значит,  $\triangle AEC$  —

равнобедренный,  $AE$  — высота

$$\triangle MAC \Rightarrow S = \frac{1}{2} MC \cdot AE = \frac{1}{2} MA \cdot AC \Rightarrow AE = \frac{MA \cdot AC}{MC} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}.$$

$$10. \triangle CMA \sim \triangle BMD \Rightarrow \frac{CM}{BM} = \frac{AM}{MD} \Rightarrow MD = \frac{AM \cdot BM}{CM} = 10 \Rightarrow$$

$\Rightarrow CD = CM + MD = 14$ ;  $AB = AM + MB = 13 \Rightarrow AB$  — расположена  
 дальше от центра.

## КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

### К-1

#### Вариант 1

$$1.1) \overline{AB} \{1; 6\} \Rightarrow \overline{AB} = \bar{i} + 6\bar{j}.$$

$$2) D \{2; 12\} \Rightarrow \overline{CD} = 2\overline{AB} \Rightarrow CD \parallel AB. \quad 3) x = 1.$$

$$2.1) \overline{AB} \{4; 0\}, \overline{CB} \{-2; 3\}, \overline{CA} \{-2; -3\} \Rightarrow \text{при этом } |\overline{BC}| = \sqrt{13} \text{ и}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{13} \Rightarrow BC = CA \Rightarrow \angle A = \angle B.$$

$$2) |\overline{AB}| = 4 \quad S(ABC) = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} =$$

$$= \sqrt{(2+\sqrt{13})(\sqrt{13}-2) \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot \sqrt{13-4} = 2 \cdot 3 = 6; \quad CD = \frac{2S}{AB} = \frac{2 \cdot 6}{4} = 3.$$

3. Подставим  $y = -2$  в уравнение окружности:

$$(x-2)^2 + 1 = 1, (x-2)^2 = 0 \Rightarrow \text{единственную.}$$

$$4. \text{ Пусть } \vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}, \text{ тогда } \begin{cases} 6 = -4k + m \\ 2 = 3k - 4m \end{cases}; \begin{cases} m = 6 + 4k \\ 2 = 3k - 24 - 16k \end{cases};$$

$$\begin{cases} k = -2 \\ m = -2 \end{cases} \Rightarrow \vec{c} = -2(\vec{a} + \vec{b}).$$

### Вариант 2

$$1. \overline{AB} = 2\vec{i} - 3\vec{j};$$

$$1) \text{ Пусть } A(x, y), \text{ тогда } \begin{cases} -1 - x = 2 \\ 4 - y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow A(-3; 7).$$

$$2) \text{ Пусть } M \text{ — середина } AB, \text{ тогда } M\left(-2; \frac{11}{2}\right).$$

$$3) \text{ Пусть } y = kx + b \text{ — уравнение } AB, \text{ тогда}$$

$$\begin{cases} 4 = -n + b \\ 7 = -3n + b \end{cases}; \begin{cases} b = 4 + k \\ 3 = -2k \end{cases}; \begin{cases} k = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}.$$

$$2. AB = \sqrt{(2+3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34};$$

$$BC = \sqrt{(-1-2)^2 + (a-1)^2} = \sqrt{a^2 - 2a + 10} = \sqrt{34} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3 - 2a + 10 = 34 \Rightarrow 2a^2 - 2a - 24 = 0 \Rightarrow D_1 = 1 + 24 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 1 + 5 = 6, a_2 = 1 - 5 = -4. \text{ Ответ: } 6; -4.$$

$$3. \text{ Т.к. } 6 > 5, \text{ то } (x-11)^2 + y^2 = 36.$$

$$4. \text{ Т.к. } \vec{a} \uparrow \vec{b}, \text{ то } \vec{a} \in \{-x; 2x\}, \text{ тогда}$$

$$\sqrt{x^2 + 4x} = x\sqrt{5} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{a} \in \{-\sqrt{5}; 2\sqrt{5}\}.$$

### Вариант 3

$$1. E(-1;4), M(2;3), F(1;-3), K(4;4). \quad 1) \overline{EM} = 3\vec{i} - 7\vec{j}.$$

$$2) \overline{FK} = 3\vec{i} + 7\vec{j} \Rightarrow \overline{FK} \text{ не параллелен } \overline{EM} \Rightarrow \text{пересекает.}$$

$$3) y = kx + b, \text{ имеем: } \begin{cases} -3 = 2x + b \\ -3 = k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow y = -3.$$

$$2. 1) D(3; -1), \text{ т.к. } D \text{ — середина } DC.$$

$$2) \overline{AD} \{3; -2\}, \overline{BC} \{4; 6\} \Rightarrow \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 12 - 12 = 0 \Rightarrow AD \perp BC.$$

$$3. \text{ Центр окружности — } (-2;1). \text{ Радиус — } 2 \Rightarrow \text{две точки.}$$

$$4. \vec{m} \{-4;5\}, \vec{n} \{-7;1\}, \vec{l} \{6;8\}.$$

$$\bar{l} = \alpha \bar{m} + \beta \bar{n}; \begin{cases} 6 = -4\alpha - 7\beta \\ 8 = 5\alpha + \beta \end{cases}; \begin{cases} \beta = 8 - 5\alpha \\ 6 = -4\alpha - 56 + 35\alpha \end{cases}; \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Rightarrow \bar{l} = 2\bar{m} - 2\bar{n}.$$

#### Вариант 4

1.  $\overline{EF} = 6\bar{i} - 6\bar{j}$ . 1)  $E(-2;1) \Rightarrow F(4;-5)$ . 2)  $(\frac{-2+4}{2}; \frac{1-5}{2}) = (1;-2)$ .

3)  $y = kx + b; \begin{cases} 1 = -2k + b \\ -5 = 4k + b \end{cases}; \begin{cases} b = 1 + 2k \\ -5 = 4k + 1 + 2k \end{cases}; \begin{cases} k = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow y = -x - 1.$

2.  $(m-4)^2 + (3-1)^2 = (4-2)^2 + (1-4)^2.$

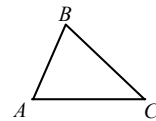
$m^2 - 8m + 16 + 4 = 4 + 9, m^2 - 8m + 7 = 0, m = 7$  или  $m = 1.$

3. Т. к. центр имеет отрицательную ординату, то  $O(-6;0) \Rightarrow x^2 + (y+6)^2 = 16.$

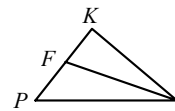
4. Т. к.  $\bar{m} \downarrow \bar{b}$ , то  $\bar{m}\{2x; -4x\} \Rightarrow \sqrt{4x^2 + 16x^2} = 2x\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow \bar{m}\left\{2\sqrt{\frac{2}{5}}; -4\sqrt{\frac{2}{5}}\right\}.$

#### К-2

#### Вариант 1



1.  $\angle B = 180^\circ - 75^\circ - 40^\circ = 65^\circ \Rightarrow$  по теореме синусов  
 $\frac{BC}{\sin 40^\circ} = \frac{AB}{\sin 75^\circ} = \frac{AC}{\sin 65^\circ} \Rightarrow AB = \frac{BC \sin 75^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{17 \sin 75^\circ}{\sin 40^\circ}$  и  
 $AC = \frac{17 \sin 65^\circ}{\sin 40^\circ}; R = \frac{BC}{2 \sin 40^\circ} = \frac{17}{2 \sin 40^\circ}.$



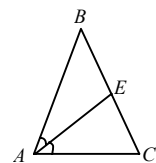
2. Наверное, имеется ввиду медиана  $HF$ , а не  $NF$ , потому что в  $\triangle PKH$  нет медианы  $NF$ .

т. к.  $HF$  — медиана, то  $FE = 3 \Rightarrow$  по теореме косинусов:

$$HF = \sqrt{FK^2 + KH^2 - 2FK \cdot KH \cos 100^\circ} = \sqrt{34 - 30 \cos 100^\circ}.$$

Т. к.  $PF = \frac{1}{2} PK$ , то  $S(PFH) = \frac{1}{2} S(PKH) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \sin 100^\circ = \frac{15}{2} \sin 100^\circ.$

3.



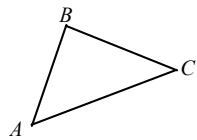
$\angle EAC = \frac{1}{2} \angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle AEC = \pi - 3\alpha \Rightarrow \angle BEA = 3\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$  по теореме синусов:  $\frac{4}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin 3\alpha} \Rightarrow$

$$\Rightarrow AB=BC=\frac{a \sin 3\alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow S=\frac{1}{2} AB^2 \sin 4\alpha = \frac{a^2 \sin 23\alpha \cdot \sin 4\alpha}{2 \sin^2 \alpha}.$$

### Вариант 2

1.



По теореме косинусов:

$$AC = \sqrt{16 + 25 - 2 \cos 110^\circ} = \sqrt{41 - 40 \cos 110^\circ}.$$

По теореме синусов:  $\frac{5}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin 110^\circ} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle A = \arcsin \frac{5 \sin 110^\circ}{AC} = \arcsin \frac{5 \sin 110^\circ}{\sqrt{41 - 40 \cos 110^\circ}} \Rightarrow$$

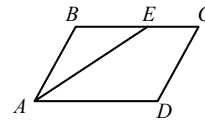
$$\Rightarrow \angle C = 70 - \arcsin \frac{5 \sin 110^\circ}{\sqrt{41 - 40 \cos 110^\circ}}.$$

2.  $\angle BAD = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ \Rightarrow \angle BAE = 40^\circ \Rightarrow$

по теореме синусов:  $\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{BE}{\sin 40^\circ} \Rightarrow$

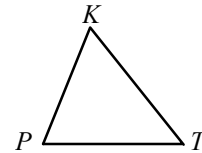
$$\Rightarrow BE = \frac{AB \sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} = 10 \sin 40^\circ \Rightarrow BC = 20 \sin 40^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 5 \cdot 20 \sin 40^\circ \sin 110^\circ = 100 \sin 40^\circ \sin 110^\circ. R = \frac{AB}{\sin 30^\circ} = DB = 5.$$



3.

Имеем: 
$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} PK \cdot PT \sin \alpha \\ S = \frac{1}{2} PK \cdot KT \cdot \sin(\alpha + \beta) \Rightarrow \\ KT \sin \beta = PK \sin \alpha \end{cases}$$



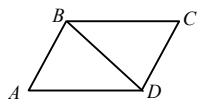
$$S = \frac{1}{2} PK \cdot \frac{PK \sin \alpha}{\sin \beta} \sin(\alpha + \beta) \Rightarrow PK = \sqrt{\frac{2S \sin \beta}{\sin \alpha (\sin(\alpha + \beta))}}.$$

### Вариант 3

1.  $\angle B = 180^\circ - 50^\circ - 20^\circ = 110^\circ. R = \frac{AC}{2 \sin \angle B} = \frac{15}{2 \sin 10^\circ}.$

$$BC = \frac{AC \cdot \sin \angle A}{\sin \angle B} = \frac{15 \cdot \sin 20^\circ}{\sin 110^\circ}. AB = \frac{AC \cdot \sin \angle C}{\sin \angle B} = \frac{15 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 110^\circ}.$$

2.

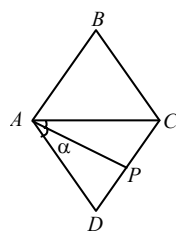


$$\angle CBD = \angle BDC = \arcsin \frac{BD^2 + AD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD} = \arccos \frac{36 + 25 - 16}{2 \cdot 65} =$$

$$= \arccos \frac{45}{60} = \arccos \frac{3}{4};$$

$$S = 2S(ABD) = 2 \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= 2 \sqrt{\frac{15}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{15 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{15}{2} \sqrt{7}.$$



$$3. \angle ACD = \alpha \Rightarrow \angle ADC = \pi - 2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle APD = \pi - \frac{\alpha}{2} - (\pi - 2\alpha) = \frac{3\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{по теореме синусов: } \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{AD}{\sin \frac{3\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = \frac{a \sin \frac{3\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow S = AD^2 \sin 2\alpha = \frac{a^2 \sin^2 \frac{3\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin 2\alpha.$$

### Вариант 4

$$1. \text{ По теореме косинусов: } MP = \sqrt{29 - 20 \cos 40^\circ}.$$

По теореме синусов:

$$\frac{PK}{\sin \angle M} = \frac{MP}{\sin \angle K} \Rightarrow \sin \angle M = \frac{PK \sin \angle K}{MP} = \frac{2 \sin 40^\circ}{\sqrt{29 - 20 \cos 40^\circ}} \Rightarrow$$

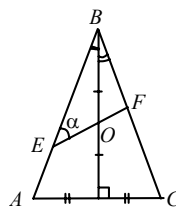
$$\Rightarrow \angle P = 160^\circ - \arcsin \frac{2 \sin 40^\circ}{\sqrt{29 - 20 \cos 40^\circ}}.$$

$$2. \angle BAC = \angle BCA = 65^\circ \Rightarrow \angle B = 50^\circ \Rightarrow \angle BEK = 110^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  по теореме синусов

$$EK = \frac{5 \sin 50^\circ}{\sin 20^\circ}, BE = \frac{5 \sin 110^\circ}{\sin 20^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \frac{10 \sin 110^\circ}{\sin 20^\circ} \text{ и } R = \frac{AB}{2 \sin 65^\circ} = \frac{10 \sin 110^\circ}{2 \sin 20^\circ \sin 65^\circ}$$



$$S = \frac{1}{2} EB \cdot BK \cdot \sin 50^\circ = \frac{25 \sin 110^\circ}{2 \cdot \sin 20^\circ} \sin 50^\circ.$$

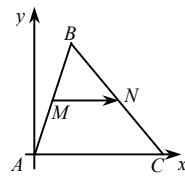
$$3. \text{ По теореме синусов: } a = 2R \sin \alpha, b = 2R \sin \beta, c = 2R \sin(\alpha + \beta) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow S = \frac{abc}{4R} = 2R \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta) \Rightarrow R = \frac{S}{2 \sin \alpha \sin \beta} \sin \alpha + \beta.$$

**К-3**

**Вариант 1**



1. По теореме косинусов:

$$AC = \sqrt{2 \cdot 16(1 - \cos 120^\circ)} = 4\sqrt{2(1 + \cos 60^\circ)} =$$

$$= 4\sqrt{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)} = 4\sqrt{3} \Rightarrow BH \perp AC, \text{ тогда}$$

$$BH = AB \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \Rightarrow \text{тогда выберем систему координат так, чтобы } A(0;0), C(4\sqrt{3};0), B(2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}), \text{ тогда}$$

ординат так, чтобы  $A(0;0)$ ,  $C(4\sqrt{3};0)$ ,  $B(2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$ , тогда

$$1) \overline{BA} \{-2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\}, \overline{BC} \{2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\} \Rightarrow \overline{BA} \cdot \overline{AC} = -8;$$

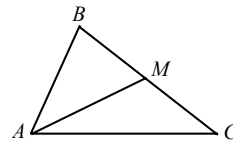
$$2) \overline{BA} \{-2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\}, \overline{AC} \{4\sqrt{3}; 0\} \Rightarrow \overline{BA} \cdot \overline{BC} = -24;$$

$$3) \overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AC} \Rightarrow \overline{MN} \{2\sqrt{3}; 0\} \Rightarrow \overline{MN} \cdot \overline{AC} = 24.$$

2. 1) Т.к.  $M$  — середина  $BC$ , то  $M(-2; 4) \Rightarrow \overline{AM} \{-2; 0\}$ ,

$$\overline{AC} \{-1; -1\} \Rightarrow \angle MAC = \arccos \frac{\overline{AM} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AM}| \cdot |\overline{AC}|} =$$

$$= \arccos \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4};$$



$$2) \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CA} = \overline{PB}(\overline{BC} \cdot \overline{CP}) = \overline{AB} \cdot \overline{BA} = -\overline{AB}^2 = -(3^2 + (5-4)^2) = -10.$$

3. Т.к.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то  $\vec{a} \{3x; x\} \Rightarrow 10 = 9x^2 + x^2 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow a_1 \{3; 1\}; a_2 \{-3; -1\}$ , составляет с  $Ox$  тупой угол, а  $\vec{a}_1$  — острый угол. Ответ:  $\{3; 1\}$ .

**Вариант 2**

$$1. AD = AC \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}, CD = 6 \sin 60^\circ = 3,$$

тогда выберем систему координат так, чтобы  $A(0; 0)$ ,

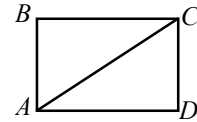
$B(0; 3), D(3\sqrt{3}; 0), C(3\sqrt{3}; 3)$ , тогда

$$1) \overline{CA} \{-3\sqrt{3}; -3\}, \overline{CP} \{0; -3\} \Rightarrow \overline{CA} \cdot \overline{CP} = 9;$$

$$2) \overline{AD} \{3\sqrt{3}; 0\} \Rightarrow \overline{AD} \cdot \overline{CA} = -27; 3) \overline{BC} \{3\sqrt{3}; 0\}, \overline{DA} \{-3\sqrt{3}; 0\} = -27.$$

2.  $A(-1; 4), B(1; -2), C(0; 4), D(2; 2)$ .

$$1) E(0; 1), F(1; -1) \Rightarrow \overline{EF} \{1; -2\}, \overline{CD} \{2; 6\}.$$



$$\cos \angle(\overline{EF}, \overline{CD}) = \frac{\overline{EF} - \overline{CD}}{|\overline{EF}| \cdot |\overline{CD}|} = \frac{2 - 16}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{40}} = \frac{-14}{5 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{14\sqrt{2}}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle(\overline{EF}, \overline{CD}) = \arccos\left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right) \Rightarrow \text{острый. Угол равен } \pi - \arccos\left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right).$$

2)  $\overline{BC}\{-1; -2\}, \overline{BD}\{0; 4\}$ .

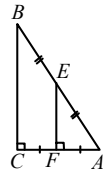
$$\overline{CD} \cdot \overline{BC} - \overline{CD} \cdot \overline{BD} = \overline{CD}(\overline{BC} - \overline{BD}) = \overline{CD} \cdot \overline{DC} = -\overline{CD}^2 = -40.$$

3.  $\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BE} + \overline{AB} \cdot \overline{CF} =$

$$= \frac{1}{2}(\overline{BC}(\overline{AB} + \overline{AC}) + \overline{CA}(\overline{BA} + \overline{BC}) + \overline{AB}(\overline{CA} + \overline{CB})) =$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{BC} \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{AC} + \overline{AC} \cdot \overline{AB} - \overline{AB} \cdot \overline{BC} - \overline{AC} \cdot \overline{AC} - \overline{AB} \cdot \overline{BC}) = 0.$$

### Вариант 3



1.  $AC = 4$ ,  $BC = 4 \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$ , тогда выберем систему координат так, чтобы:  $C(0; 0)$ ,  $A(2; 0)$ ,  $B(0; 2\sqrt{3})$ , тогда  $E(1; \sqrt{3})$ ,  $F(1; 0)$ .

1)  $\overline{BA}\{2; -2\sqrt{3}\}$ ,  $\overline{BC}\{0; -2\sqrt{3}\} \Rightarrow \overline{BA} \cdot \overline{BC} = 12$ ;

2)  $\overline{AC}\{-2; 0\} \Rightarrow \overline{BA} \cdot \overline{AC} = -4$ ; 3)  $\overline{EF}\{0; -\sqrt{3}\} \Rightarrow \overline{EF} \cdot \overline{BC} = 6$ .

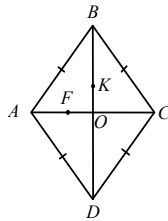
2. 1)  $F(1; 3) \Rightarrow \overline{CF}\{0; 6\}$ ,  $\overline{AC}\{2; -7\}$ .

$$\cos \angle(\overline{AC}, \overline{FC}) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{FC}}{|\overline{AC}| \cdot |\overline{FC}|} = \frac{-42}{6 \cdot \sqrt{55}} < 0 \Rightarrow \angle(\overline{AC}, \overline{FC}) = \pi - \arccos\left(-\frac{7}{\sqrt{55}}\right);$$

2)  $\overline{CF} \cdot \overline{FA} - \overline{FC} \cdot \overline{AC} = \overline{CF}(\overline{FA} + \overline{AC}) = \overline{CF} \cdot \overline{FC} = -\overline{CF}^2 = -36$ .

3. Т.к.  $\overline{m} \perp \overline{k}$  и угол между  $\overline{m}$  и  $Oy$  тупой, то  $\overline{m}\{\alpha; 2\alpha\}$ , где  $\alpha < 0 \Rightarrow 5\alpha^2 = 16 \cdot 5 \Rightarrow \alpha^2 = 16 \Rightarrow \alpha = -4 \Rightarrow \overline{m}\{-4; -8\}$ .

### Вариант 4



1. Из  $\triangle AOB$ :  $CB = 3$ ,  $AO = 3\sqrt{3}$ , тогда выберем систему координат так, чтобы  $A(0; 3\sqrt{3})$ ,  $C(0; -3\sqrt{3})$ ,  $B(3; 0)$ ,  $D(-3; 0)$ , тогда:

1)  $\overline{AB}\{3; -3\sqrt{3}\}$ ,  $\overline{PC}\{0; -6\sqrt{3}\} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 54$ ;

2)  $\overline{AD}\{-3; -3\sqrt{3}\}$ ,  $\overline{DB}\{6; 0\} \Rightarrow \overline{AP} \cdot \overline{DB} = -18$ ;

- 3)  $(\overline{PB} + \overline{AP})(\overline{PB} - \overline{AD}) = \overline{PB}^2 - \overline{AD}^2 = 36 - 36 = 0$ .
2.  $\overline{EK} \{4; 3\}$ .  $\overline{PM} \{-6; a-1\}$ , т.к.  $\overline{EK} \perp \overline{PM}$ , то  $-24 + 3a - 3 = 0 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow P(-4; 9)$ . Далее см. Вариант 1.
3. Выберем систему координат так, чтобы  $A(0; 0)$ ,  $B(0; b)$ ,  $C(a; b)$ ,  $D(a; 0)$ ,  $M(x; y)$ , тогда  $\overline{MP} \{x; y\}$ .  $\overline{MC} \{x-a; y-b\}$ .  $\overline{MB} \{x; y-b\}$ ,  $\overline{MD} \{x-a; y\}$ , тогда  $\overline{MP} \cdot \overline{MC} = x(x-a) + y(y-b) = x^2 - ax + y^2 - yb$ ;  $\overline{MB} \cdot \overline{MD} = x(x-a) + y(y-b) \Rightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MB} \cdot \overline{MD}$ .

#### К-4

##### Вариант 1

1.  $R = \frac{4\pi}{2\pi} = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow S_{\text{ш}} = 6 \cdot a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$ ;  
 $r = a \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\text{к}} = \pi(R^2 - r^2) = \pi(4 - 3) = \pi$ .
2. По теореме Пифагора  $R = 5 \Rightarrow \overset{\cup}{AB} = \frac{1}{4} 2\pi R = \frac{5}{2}\pi$ ;  $S = \frac{1}{4} \pi R^2 = \frac{25\pi}{4}$ .
3. По теореме косинусов:  $AC = \sqrt{2R^2(1 - \cos 120^\circ)} = R\sqrt{2(1 + \cos 60^\circ)} = \sqrt{3}R$ ;  
 $AB = \sqrt{2R^2(1 - \cos 60^\circ)} = R \Rightarrow$   
 $\Rightarrow S = \pi R^2 - \frac{1}{3} \pi R^2 - \frac{1}{6} \pi R^2 + R^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = R^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ .
4. Пусть  $l_1, l_2, \dots, l_n$  — длины перпендикуляров, тогда  $S = \frac{1}{2} a(l_1 + \dots + l_n)$ , с другой стороны  $S = \frac{1}{2} n a r_n \Rightarrow l_1 + \dots + l_n = nr$ . Ч.т.д.

##### Вариант 2

1. Радиус вписанной окружности равен 4  $\Rightarrow$  радиус описанной равен 8  
 $\Rightarrow S = \pi(8^2 - 4^2) = 48\pi$ .  $S_{\text{мп}} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8^2 \cdot \sin 120^\circ = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 64 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3}$ .
2. Т.к. дуга равна  $60^\circ$ , то радиус равен 6  $\Rightarrow l = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 6 = 2\pi$ ,  
 а  $S = \frac{1}{6} \pi 6^2 = 6\pi$ .
3.  $S = \pi R^2 - \frac{1}{2} \pi R^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{2} \pi R^2 - R^2$ .
4. Пусть сторона восьмиугольника равна  $a$ , тогда  $DE = a$ .

$$\begin{aligned}\angle A_2A_3A_4 &= \frac{180(8-2)}{8} = \frac{180 \cdot 6}{8} = 45 \cdot 3 = 135^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow EF &= \sqrt{2a^2(1 - \cos(360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 135^\circ))} = a\sqrt{2(1 - \cos 45^\circ)} = \\ &= a\sqrt{2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = a\sqrt{2 - \sqrt{2}} \neq DE \Rightarrow \text{многоугольник неправильный.}\end{aligned}$$

Примечание: если бы квадраты были построены как шестиугольники, то неправильный 12-угольник был бы правильным.

### Вариант 3

1. Радиус большей окружности равен 4  $\Rightarrow$  радиус меньшей равен  $2\sqrt{2} \Rightarrow$  длина стороны равна  $4\sqrt{2} \Rightarrow S_{\kappa_6} = 32$ , а  $S = \pi(16 - 8) = 8\pi$ .
2. По теореме косинусов:  $144 = 2R^2(1 - \cos 120^\circ)$ ;  
 $144 = 2R^2 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow R^2 = 48 \Rightarrow R = 4\sqrt{3} \Rightarrow l = \frac{1}{3} 2\pi 4\sqrt{3} = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ , а  $S = \frac{1}{3} \pi 48 = 16\pi$ .
3.  $S = \pi R^2 - \frac{1}{2} \pi R^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} R^2$ .
4. Рассмотрим  $\triangle BCO$ , т.к.  $AC \perp BO$ ,  $S(ABCO) = BO \cdot AC = R \cdot a_n$ ,  
но  $S_{2n} = nS(ABCO) = (na_n / 2)R$ .

### Вариант 4

1. По теореме синусов:  $R = \frac{4}{2 \sin 60^\circ} = \frac{4}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ;  
 $r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} 4^2}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow l = 20 \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$ , а  
 $S_{\text{кольца}} = \pi \left( \frac{48}{9} - \frac{12}{9} \right) = \pi \frac{36}{9} = 4\pi$ .
2.  $(1/6)2\pi r = 2\pi \Rightarrow r = 6 \Rightarrow$  длина хорды тоже равна 6.  $S = (1/6)2\pi r^2 6\pi$ .
3.  $S = \pi R^2 - (1/2)\pi R^2 - R^2 = (1/2)\pi R^2 - R^2$ .
4.  $\angle A_1AB_1 = \angle B_1BC_1 = \angle C_1CD_1 = \angle D_1DE_1 = \angle E_1FF_1 = \angle F_1FD_1$ , как внешние углы правильного шестиугольника.  $A_1A = B_1B = C_1C = F_1F = D_1D = E_1E$  по условию  $\Rightarrow \triangle A_1AB_1 = \triangle B_1BC_1 = \triangle C_1CD_1 = \triangle D_1DE_1 = \triangle E_1EF_1 = \triangle F_1FA_1$  по 1-му признаку  $\Rightarrow A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1E_1 = E_1F_1 = F_1A_1 \Rightarrow A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  — правильный шестиугольник.

**К-5**

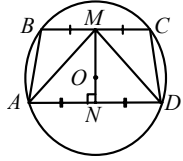
**Вариант 1**

1.

1) Перенесите точки  $B$ ,  $C$  и  $D$  на вектор  $\overrightarrow{AM}$ . Пусть они переходят в точки  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ , тогда  $B_1C_1D_1M$  — искомый квадрат.

2) Поверните точки  $A$  и  $B$  вокруг точки  $C$  на  $10^\circ$  по часовой стрелке. Пусть они переходят в точки  $A_1$ ,  $B_1$ , тогда  $\triangle A_1CB_1$  — искомый.

2. Пусть это углы  $\angle ABC$  и  $\angle A_1B_1C_1$ , тогда необходимо и достаточно, чтобы  $\overrightarrow{BA} \uparrow \uparrow \overrightarrow{B_1A_1}$  и  $\overrightarrow{BC} \uparrow \uparrow \overrightarrow{B_1C_1}$ .



3.  $ABCD$  — равнобокая трапеция  $\Rightarrow \triangle ABM = \triangle DCM \Rightarrow AM = MD \Rightarrow \triangle AMN = \triangle DMN \Rightarrow \angle MNA = \angle MND = 90^\circ \Rightarrow BMN = 90^\circ \Rightarrow MN$  — ось симметрии окружности  $\Rightarrow$  проходит через центр.

4. Пусть  $O$  — искомая точка. Тогда  $AO = OC$ ,  $OB = OD$ ,  $\angle AOC = \angle BOD$ . Пусть  $OF \perp AB$  и  $OF = OE$ , тогда из  $\triangle AOB = \triangle COD \Rightarrow OE \perp CD$  и  $OE = OF$ .  $\angle FOB = \angle COE \Rightarrow BF = CE$ , но  $AF = CE$  и  $BF = ED \Rightarrow AF = FB = CE = ED \Rightarrow OF$  и  $OE$  — серединные перпендикуляры.

**Вариант 2**

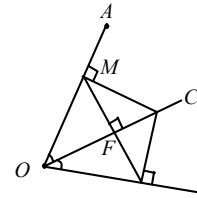
1. 1) Перенесите точки  $B$ ,  $C$ , и  $D$  на вектор  $\overrightarrow{AM}$ , пусть при этом они переходят в точки  $B_1$ ,  $C_1$ , и  $D_1$ , тогда  $MB_1C_1D_1$  — искомый.

2) Поверните точки  $B$  и  $A$  вокруг центра  $C$  на  $60^\circ$  против часовой стрелки, пусть при этом они переходят в точки  $A_1$ , и  $B_1$ , тогда  $\triangle A_1B_1C$  — искомый, а угол между  $AB$  и  $A_1B_1$  равен, очевидно,  $60^\circ$ .

2.  $\triangle OMF = \triangle ONF \Rightarrow MF = FN \Rightarrow M$  и  $N$  — симметричны относительно  $OC$ .

3.  $\overrightarrow{OA} \{-5; 3\}$ ;  $\overrightarrow{OB} \{3; 5\} \Rightarrow |\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{BO}|$  и  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow \Rightarrow AO \perp BO \Rightarrow B$  может быть получена из  $A$  поворотом вокруг точки  $O$  на  $90^\circ$ .

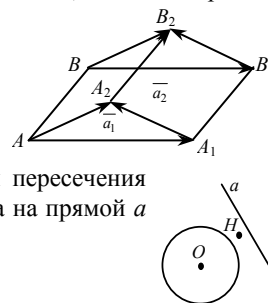
4. Постройте  $\triangle A_1B_1C_1$  с основанием  $A_1C_1 \in a$ , затем проведите  $b_1 \parallel a$  так, чтобы  $B \in b_1$ . Пусть  $b_1 \cap b = D$ . Перенесите  $\triangle P_1B_1C_1$  на вектор  $\overrightarrow{B_1D}$ .



**Вариант 3**

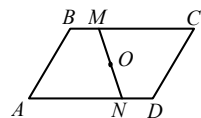
1. 1) Перенесите точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , и  $D$  на вектор  $\overrightarrow{MD}$ , пусть при этом они переходят в точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , и  $D_1$ , тогда  $A_1B_1C_1D$  — искомая.

- 2) Поверните некоторую точку прямоугольника на  $90^\circ$  вокруг точки  $A$  по часовой стрелке и соедините полученные точки. Т.к. поворот осуществлялся на  $90^\circ$ , то  $\angle(BD, B_1D_1) = 90^\circ$ .
2. Стороны должны быть противоположно направлены, а величины равны.
3. Пусть  $\overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{A_1B_1}$  параллельным переносом на вектор  $\overline{a_1}$ , а  $\overrightarrow{A_1B_1} \rightarrow \overrightarrow{A_2B_2}$  параллельным переносом на  $\overline{a_2}$ , тогда  $\overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{A_2B_2}$  параллельным переносом на вектор  $\overline{a_1 + a_2}$ .
4. Поверните прямую  $a$  на  $60^\circ$ , тогда точки пересечения образа прямой с окружностью  $a$  их прообраза на прямой  $a$  являются искомыми.



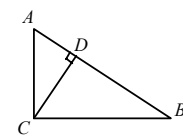
### Вариант 4

1. 1) Перенесите вершины трапеции на вектор  $\overrightarrow{PA}$ , затем их образы соедините.
- 2) Поверните вершины трапеции вокруг середины  $AC$  на  $60^\circ$  по часовой стрелке, а затем соедините их образы. Угол между  $AB$  и  $A_1B_1$  равен, очевидно,  $60^\circ$ .
2. Очевидно, что  $\angle A = \angle C$ ,  $\angle B = \angle D$ ,  $\angle BMN = \angle MND$ ,  $\angle MNA = \angle NMC \Rightarrow$  фигуры как минимум подобны, но  $AB = CD$  по свойствам параллелограмма  $\Rightarrow$  фигуры равны.
3. В условии опечатка: либо в координатах точки, либо в угле поворота. Если угол равен  $180^\circ$ , то все очевидно.
4. Пусть  $a \cap c = M$ ,  $b \cap d = N \Rightarrow \overrightarrow{MN}$  — искомый вектор.



### К-6

#### Вариант 1



1. 1)  $\angle A$  — общий, оба треугольника — прямоугольные  $\Rightarrow$  они подобны.

По теореме Пифагора:  $AD = \sqrt{(3-2,4)(3+2,4)} = \sqrt{0,6 \cdot 5,4} =$

$$= \frac{1}{10} \sqrt{6 \cdot 6 \cdot 9} = \frac{6 \cdot 3}{10} = 1,8,$$

$$\text{т.к. } CD^2 = AD \cdot DB, \text{ то } DB = \frac{CD^2}{AD} = \frac{5,76}{1,8} = \frac{0,96}{0,3} = 3,2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = AD + DB = 5 \Rightarrow CB = 4 \Rightarrow S = (1/2) \cdot 3 \cdot 4 = 6.$$

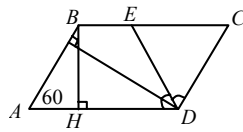
$$2) r = \frac{S}{p} = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow S_k = \pi r^2 = \pi.$$

$$3) R_{ADC} = (3/2), R_{CDB} = (4/2) = 2 \text{ (т.к. треугольники прямоугольные)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{R_{ADC}}{R_{CDB}} = \frac{3/2}{2} = \frac{3}{4}.$$

$$4) \overline{CD} = \overline{CB} + \overline{BD} = \overline{CB} + \frac{3,2}{5} \overline{BA} = \overline{CB} + \frac{6,4}{10} (\overline{CA} - \overline{CB}) = 0,36 \overline{CB} + 0,64 \overline{CA}$$

$$5) (\overline{BC} - \overline{BA})(\overline{AC} + \overline{CB}) = \overline{AC} \cdot \overline{AB}, \text{ где } \overline{CA} \{0; 3\}, \overline{AB} \{4; -3\} \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{AB} = -9.$$

### Вариант 2



$$1) BH = 6 \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}; DF = 12 \cdot \sin 60^\circ = 6\sqrt{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow S = AB \cdot DF = 36\sqrt{3}.$$

$$2) \angle C = \angle A = 60^\circ \Rightarrow \angle D = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle EDC = 60^\circ \Rightarrow \triangle ECD \text{ — равносторонний} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(ECD) = \frac{\sqrt{3}}{4} CD^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 36 = 9\sqrt{3}.$$

3) По теореме косинусов:

$$AC = \sqrt{36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{180 + 144 \cdot \frac{1}{2}} = \\ = \sqrt{180 + 72} = \sqrt{252} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7} = 6\sqrt{7}.$$

$$4) \text{Т.к. } CE=6, \text{ то } BE=6 \Rightarrow \overline{DE} = \frac{1}{2}(\overline{DC} + \overline{DB}) = -\frac{1}{2}\overline{CD} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\overline{DA} + \overline{DC}) = \\ = -(1/2)\overline{CD} - (1/4)\overline{CD} + (1/4)\overline{CB} = (1/4)\overline{CB} - (3/4)\overline{CD}.$$

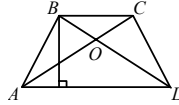
$$5) (\overline{AB} + \overline{BE})(\overline{CE} - \overline{CD}) = \overline{AE} \cdot \overline{ED},$$

$$\text{где } \overline{AE} \{6+6\cos 60^\circ; 6\} \Rightarrow \overline{AE} \{9; 6\} \Rightarrow \overline{ED} \{3; -6\} \Rightarrow \overline{AE} \cdot \overline{DE} = -27+36=9.$$

### Вариант 3

$$1) \text{Очевидно, что } 2AE = AD - BC \Rightarrow AE = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BE = \operatorname{tg} 30^\circ \cdot 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S = \frac{1}{2} (10 + 6) \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$



$$2) \text{Т.к. } BC \parallel AD, \text{ то } \angle CBO = \angle ODA \text{ и } \angle BCO = \angle OAD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle BOC \sim \triangle DOA \text{ и } k = \frac{AD}{BC} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{S(AOD)}{S(BOC)} = k^2 = \frac{25}{9}.$$

3) По теореме Пифагора:

$$BD = \sqrt{BE^2 + ED^2} = \sqrt{\frac{4}{3} + 64} = \frac{14\sqrt{3}}{3}; \quad R = \frac{BD}{2 \sin 30^\circ} = \frac{\frac{14\sqrt{3}}{3}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{14\sqrt{3}}{3}.$$

$$4) \overline{BE} = \overline{BA} + \overline{AE} = \overline{BA} + \frac{1}{5} \overline{AD} = \overline{BA} + \frac{1}{5} (\overline{BD} + \overline{BA}) = \frac{1}{5} \overline{BD} + \frac{4}{5} \overline{BA}.$$

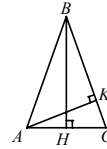
$$5) \overline{BD} \left\{ 8; -\frac{2\sqrt{3}}{3} \right\}, \overline{BE} \left\{ 0; -\frac{2\sqrt{3}}{3} \right\} \Rightarrow (\overline{BC} + \overline{CD})(\overline{AE} - \overline{AB}) = \overline{BD} \cdot \overline{BE} = \frac{4}{3}.$$

#### Вариант 4

$$1) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \angle ABC = \frac{2S}{AB \cdot BC} = \frac{24}{25}.$$

2)  $\angle C$  — общий и оба они прямоугольные  $\Rightarrow$  и подобны.



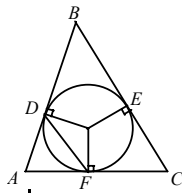
$$AK = \frac{2S}{BC} = \frac{24}{5} \Rightarrow KC = \sqrt{\left(6 - \frac{24}{5}\right)\left(6 + \frac{24}{5}\right)} = \sqrt{\frac{6}{5} \cdot \frac{54}{5}} = \frac{1}{5} \sqrt{6 \cdot 6 \cdot 9} = \frac{6 \cdot 3}{5} = \frac{18}{5}.$$

$$3) R = \frac{AC}{2 \sin \angle ABC} = \frac{6}{\frac{24}{25}} = \frac{150}{48} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}; \quad l_{окр} = 2\pi R = 2\pi \cdot \frac{25}{8} = 6,25\pi \text{ см}.$$

$$4) \overline{AK} = \overline{AC} + \overline{CK} = \overline{AC} + \frac{18}{5} \overline{CB} = \overline{AC} + \frac{18}{25} \overline{CB}.$$

$$5) (\overline{BD} + \overline{BC}) \cdot \overline{AC} = 2\overline{BD} \cdot \overline{AC} = 0, \text{ т.е. } BD \perp AC.$$

#### ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

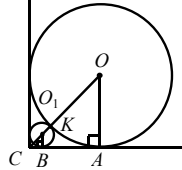


1. Пусть  $CF = x = CE$ , тогда  $p = 8 + x$ , тогда

$$S = \sqrt{(p+x) \cdot 3 \cdot 5 \cdot x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(8+x) \cdot x \cdot 15}}{8+x} = \frac{5}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{15x}{8+x} = \frac{25}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 45x = 200 + 35x \Rightarrow 20x = 200 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow BC = 13.$$

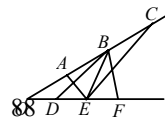


2.

Пусть  $r$  — радиус меньшей окружности, тогда

$$OE = \sqrt{2}r, \quad OC = \sqrt{2} \Rightarrow OC = CD + r + OE,$$

$$\sqrt{2} = 1 + r + r\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

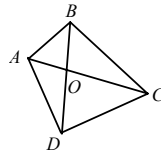


3.

$\triangle AEC = \triangle OEB$ , т.к.  $OB = AC$ ;



$\triangle DBE = \triangle OEB$ , т.к.  $OE = DF \Rightarrow \triangle AEC = \triangle DBF$ .

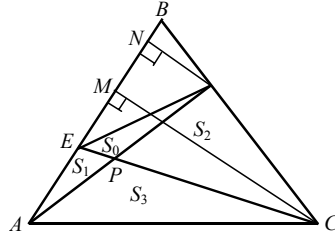


$$4. S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle B < \frac{1}{2};$$

$$S(ADC) = \frac{1}{2} AD \cdot DC \cdot \sin \angle D < \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = S(ABC) + S(ADC) < (1/2) + (1/2) = 1.$$

5.  $S(AEC) > S(AEF)$ , т.к.  $FN < CM$ , тогда



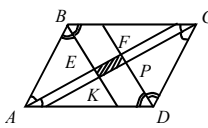
$$S_1 + S_3 > S_0 + S_1; S_3 > S_0;$$

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{AP}{PF}, \frac{S_3}{S_2} = \frac{AP}{PF} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_0} = \frac{S_3}{S_2}, \text{ но } S_0 < S_3 \Rightarrow \frac{S_3}{S_2} > \frac{S_0}{S_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_0} > \frac{S_0}{S_2} \Rightarrow S_0 < \sqrt{S_1 \cdot S_2}.$$

6. По теореме косинусов  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$ . Но  $a = 2R \sin \angle A$ ,  $b = 2R \sin \angle B$  и  $c = 2R \sin \angle C$  по теореме синусов, тогда теорема косинусов примет вид:  $4R^2 \sin^2 \angle A = 4R^2 \sin^2 \angle B + 4R^2 \sin^2 \angle C - 8R^2 \sin \angle B \cdot \sin \angle C \cdot \cos \angle A \Rightarrow \sin^2 \angle A = \sin^2 \angle B + \sin^2 \angle C - 2 \sin \angle B \cdot \sin \angle C \cdot \cos \angle A$ . Ч.т.д.



7. Пусть  $\angle BAD = \alpha, \angle ABC = \beta \Rightarrow \alpha + \beta = \pi$  и  $\angle FAD = \frac{\alpha}{2}$ , а

$$\angle EDA = (1/2) \angle CDA = (1/2) \angle ABC = (\beta/2),$$

$$\text{но } \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle AED = 90^\circ.$$

Аналогично можно показать, что и другие углы равны  $90^\circ \Rightarrow EDKF$  — прямоугольник.

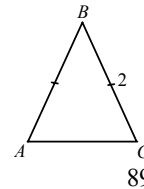
Пусть  $AB = b, BC = a$ . Тогда  $BK = a \sin(\alpha/2), BE = b \sin(\alpha/2) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow EK = BK - BE = (a - b) \sin(\alpha/2)$ . Аналогично,  
 $EF = (a - b) \cos(\alpha/2) \Rightarrow S(EFDK) = (a - b)^2 \cos(\alpha/2) \sin(\alpha/2)$ , а

$$S(ABCD) = ab \sin \alpha \Rightarrow \frac{S(EKDF)}{S(ABCD)} = \frac{(a - b)^2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{ab \sin \alpha} = \frac{(a - b)^2}{2ab},$$

$$\text{но } a = 7, b = 5 \Rightarrow \frac{(a - b)^2}{2ab} = \frac{4}{70} = \frac{2}{35}.$$

8.  $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle B$ , т.к.  $S$  — целое число, то

$\sin \angle B = \frac{1}{2}$  или  $\sin \angle B = 1 \Rightarrow \angle B$  равен  $30^\circ$  или  $90^\circ$  или  $150^\circ$ .



1)  $\angle B = 30^\circ$  по теореме косинусов:

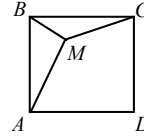
$$AC = \sqrt{2 \cdot 2^2 (1 - \cos 30^\circ)} = 2 \sqrt{2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

2)  $\angle B = 150^\circ$ , тогда  $AC = \sqrt{2 \cdot 2^2 (1 + \cos 30^\circ)} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$

3)  $\angle B = 90^\circ \Rightarrow$  по теореме Пифагора:  $AC = 2\sqrt{2}.$

9. Пусть  $\angle ABM = \alpha$ ,  $\angle CBM = \beta$ , а сторона квадрата равна  $x$ . Тогда по теореме косинусов:

$$\begin{cases} 49 = 9 + x^2 - 6x \cos \alpha \\ 25 = 9 + x^2 - 6x \cos \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{x^2 - 40}{6x} \\ \cos \beta = \frac{x^2 - 16}{6x} \end{cases}.$$



Но  $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha = \sin \beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 40}{6x} = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2 - 16}{6x}\right)^2}, \left(\frac{x^2 - 40}{6x}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x^2 - 16}{6x}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 - 80x^2 + 1600 = 36x^2 - x^4 + 32x^2 - 256 \Rightarrow x^4 - 74x^2 + 928 = 0, \text{ откуда } x_1 = \sqrt{58}, x_2 = 4, \text{ т.е. } 4 < \sqrt{40}, \text{ то } x_2 \text{ — посторонний } \Rightarrow x = \sqrt{58}.$$

10. Пусть  $AB = x$ ,  $AK = y$ ;  $S(BAK) + S(CAK) = S$ ;

$$S(BAK) = \frac{1}{2} xy \cdot \sin 30^\circ = \frac{xy}{4};$$

$$S(CAK) = \frac{1}{2} (a - x)y \cdot \sin 30^\circ = \frac{(a - x)y}{4};$$

$$S(ABC) = \frac{x(a - x)}{2} \sin 60^\circ = \frac{x(a - x)\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sqrt{3} x(a - x) = xy + (a - x)4,$$

откуда,  $y = \frac{\sqrt{3}x(a - x)}{4}$ . По теореме косинусов:

$$BC^2 = x^2 + (a - x)^2 - 2x(a - x)(1/2) = x^2 + a^2 - 2ax + x^2 - ax + x^2 = 3x^2 - 3ax + a^2, \text{ но}$$

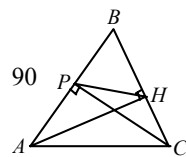
$$y = \frac{2}{3} BC \Rightarrow \frac{x(a - x)\sqrt{3}}{4} = \frac{2}{3} \sqrt{3x(x - a) + a^2}.$$

$$\text{Обозначим, } x(a - x) = t, \text{ тогда: } \frac{t\sqrt{3}}{4} = \frac{2}{3} \sqrt{a^2 - 3t}; \quad 3t\sqrt{3} = 2a\sqrt{a^2 - 3t},$$

$$27t^2 = 4a^2(a^2 - 3t), \quad 27t^2 + 12a^2t - 4a^4 = 0, \text{ откуда } t = \frac{2a^2}{9} \Rightarrow x(a - x) = \frac{2a^2}{9} \Rightarrow$$

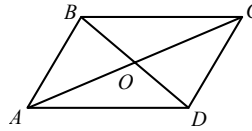
$$\Rightarrow 9x^2 - 9ax + 2a^2 = 0, \text{ откуда } x_1 = a/3, x_2 = 2a/3 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}/3.$$

11. Пусть  $PC$  и  $AH$  пересекаются в точке  $O$ .



Т.к.  $\angle APC = \angle AHC = 90^\circ$ , то вокруг  $APHC$  можно описать окружность  
 $\Rightarrow \triangle POH \sim \triangle AOC$  и  $k = 2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle BAH = 30^\circ$  (т.к.  $(PO/AO) = 1/2$  и  $\angle APO = 90^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ - \angle BAH = 60^\circ$ .

**12.** Пусть  $R$  — радиус окружности, тогда сумма квадратов сторон квадрата равна  $4 \cdot 2R^2 = 8R^2$ , а сумма квадратов сторон 16-угольника равна  $16 \cdot 2R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{8}\right) = 32R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow 8R^2 > 32R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{8}\right)$ .



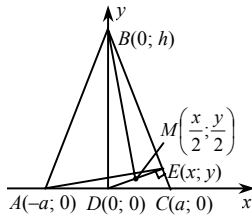
**13.** Пусть  $a$  и  $b$  — длины сторон параллелограмма, а  $\angle BAD = \alpha$ ,

тогда  $BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$  и

$AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$ , тогда

$$AC \cdot BD = \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \alpha}, \text{ а } BC^2 - AB^2 = b^2 - a^2;$$

$$\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \alpha} \vee b^2 - a^2, (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \alpha \vee (b^2 - a^2)^2, \\ (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 \vee 4a^2b^2 \cos^2 \alpha, (a^2 + b^2 - a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + a^2 - b^2) \vee 4a^2b^2 \cos^2 \alpha, \\ 4a^2b^2 \vee 4a^2b^2 \cos^2 \alpha \Rightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \alpha} > b^2 - a^2 \Rightarrow \text{ч.т.д.}$$



**14.** Выберем систему координат, как показано на рисунке, тогда

$$x = \frac{ah^2}{a^2 + h^2}, y = \frac{a^2h}{a^2 + h^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{AE} \left\{ a + \frac{ah^2}{a^2 + h^2}; \frac{a^2h}{a^2 + h^2} \right\}, \text{ и}$$

$$\overline{BM} \left\{ \frac{ah^2}{2(a^2 + h^2)}; \frac{a^2h}{2(a^2 + h^2)} - h \right\} \Rightarrow \overline{AE} \cdot \overline{BM} =$$

$$= \frac{a(2h^2 + a^2)}{a^2 + h^2} \cdot \frac{ah^2}{2(a^2 + h^2)} - \frac{a^2h}{a^2 + h^2} \cdot \frac{h(a^2 + 2h^2)}{2(a^2 + h^2)} = 0. \text{ Ч.т.д.}$$

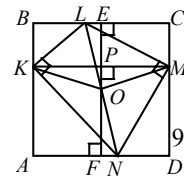
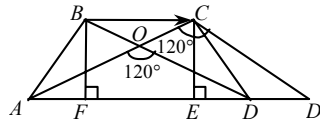
**15.** Пусть  $AC = a$ , тогда перенесем  $BD$  на  $\overline{BC}$ , получим,  $CD_1$ .

$$\frac{CE}{AC} = \frac{1}{2} \text{ и } \angle CEA = 90^\circ \Rightarrow \angle CAD = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ODA = 30^\circ \Rightarrow \angle CBO = 30^\circ \Rightarrow \angle BCO = 30^\circ \Rightarrow \angle ODD_1 = 150^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CD_1D = 30^\circ \Rightarrow \triangle ACD_1 \text{ — равнобедренный} \Rightarrow AC = CD_1 = BD = 4.$$

**16.** Т.к.  $\angle LKN = \angle LMN = 90^\circ$ , то вокруг  $KLMN$  можно описать окружность с центром в точке  $O$  — середине  $LN$ .  $KO = OM$  — радиусы  $\Rightarrow KP = PM$ . Продлим  $OP$



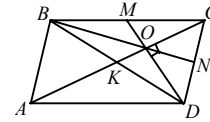
до пересечения с  $BC$  и  $AD$  в точках  $E$  и  $F$ , соответственно. Т.к.  $KM \parallel AD$  и  $KM \parallel BC$ ,

то  $BE = EC = FA = FD$ ;  $\triangle LOE = \triangle NOF$  по гипотенузе и острому углу  $\Rightarrow EO = OF \Rightarrow O$  — центр квадрата.

17. Пусть  $DM \cap AC = O$ .  $BN$  — медиана  $\triangle CBD \Rightarrow O \in BN$ .

Т.к.  $\angle COD = 90^\circ$ , то  $NO = (1/2) CD$ , но  $ON = (1/3) BN \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{BN}{CD} = \frac{3}{2}.$$



18. Очевидно, что площадь любого треугольника с углами в узлах сетки есть число вида  $\frac{n}{2}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), так как

основание и высота суть натуральные числа.

$$S(ADC) = (1/2) AC \cdot AD \cdot \sin \angle DAC,$$

$$S(DBC) = (1/2) BD \cdot BC \cdot \sin \angle DBO,$$

но  $\angle DPC = \angle DBC = \alpha$  (т.к.  $PBCD$  — вписанный)  $\Rightarrow AC \cdot AD \cdot \sin \alpha = m_1$ ,

$$BC \cdot BD \cdot \sin \alpha = m_2 \Rightarrow AC \cdot AD - BD \cdot BC = \frac{m_1 - m_2}{\sin \alpha} \geq 1, \text{ т.к. } m_1 \neq m_2,$$

т.к.  $PBCD$  — не трапеция.

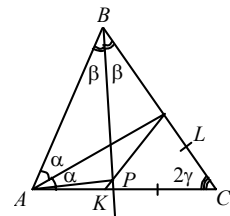
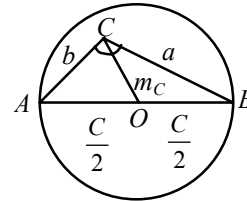
19. Построим круг с диаметром  $AD$ , т.к.

$\angle ABC > \frac{\pi}{2}$ , то точка  $C$  находится в центре круга  $\Rightarrow CO < \frac{c}{2} = \frac{c}{4} + \frac{c}{4}$ , т.к.

$$c < a + b, \text{ то } \frac{c}{4} < \frac{a+b}{4} \Rightarrow CO < \frac{c}{4} + \frac{a+b}{4} = \frac{p}{4}.$$

$$c < a + b, \text{ то } \frac{c}{4} < \frac{a+b}{4} \Rightarrow CO < \frac{c}{4} + \frac{a+b}{4} = \frac{p}{4}.$$

Ч.т.д.



20. Т.к.  $CL = CK$ , то  $\angle KLC = 90^\circ - \gamma$

$$\angle ALC = 180^\circ - \alpha - 2\gamma,$$

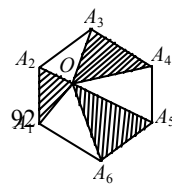
$$\angle ALP = 180^\circ - \alpha - 2\gamma - (90^\circ - \gamma) = 90^\circ - (\alpha + \gamma), \text{ но}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 90^\circ - \beta \Rightarrow \angle ALC = \beta.$$

$\angle ADP = \angle ALC = \beta \Rightarrow$  вокруг  $ABCP$  можно описать окружность  $\Rightarrow$  т.к.  $\angle ABP = \angle PBL$ , то  $AP = PL$  как хорда, стягивающая одинаковые дуги.

21. Пусть точки  $D$  и  $B$  находятся на расстоянии 1, тогда точка  $C$  может находиться лишь в пересечении окружностей единственного радиуса с

$$\text{центром } A \text{ и } B \Rightarrow \triangle ABC \text{ — равносторонний} \Rightarrow R = \frac{1}{2 \sin 60^\circ} = \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

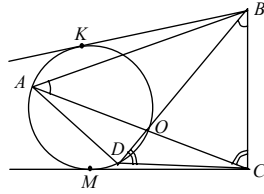


22. Очевидно, что либо

$$S(A_1OA_2) + S(A_3OA_4) + S(A_5OA_6) + S(A_2OA_3) \geq \frac{S}{2} \text{ либо}$$

$S(A_2OA_5) + S(A_4OA_5) + S(A_6OA_1) \geq S/2$ . Построим на сторонах равностороннего треугольника  $ABC$  (со стороной, равной стороне шестиугольника) шестиугольники, равные тем 3-м, сумма площадей которых больше  $S/2$ . Обозначим получившийся 6-угольник  $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ , тогда

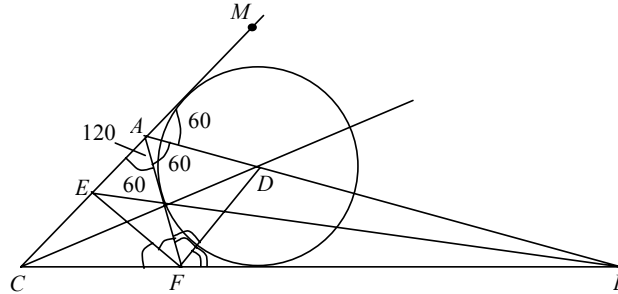
$$S(B_1B_2B_3B_4B_5B_6) > S(OBC) + \frac{S}{2} = \frac{1}{6}S + \frac{S}{2} = \frac{2}{3}S. \text{ Ч.т.д.}$$



23.  $\triangle ABC \sim \triangle BCO$ , т.к.  $\angle BAC = \angle OBC$  и  $\angle BCA$  — общий  $\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CB} \Rightarrow BC^2 = AC \cdot CO$ ,  
но  $CM^2 = AC \cdot CO \Rightarrow BC = MC \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \triangle BDC \sim \triangle BCO \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{BC}{BO} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BC^2 = BD \cdot BO$ ,

но  $BD \cdot BO = BK^2 \Rightarrow BK = BC \Rightarrow MC = BK$ . Ч.т.д.

24.



Строим вписанную окружность  $\triangle ACM$ , касающуюся  $AF$ ;  $CD$  — биссектриса  $\angle C$ ,  $AD$  — биссектриса  $\angle MAF \Rightarrow$  точка  $D$  — центр окружности  $\Rightarrow FD$  — биссектриса  $\angle AFB$  и  $\angle DFA = (1/2) \angle BFA$ . Аналогично,  $\angle EFA = (1/2) \angle CFA \Rightarrow \angle EFD = \angle EFA + \angle PFA = (1/2) (\angle CFA + \angle BFA) = 90^\circ$ . Ч.т.д.

25.

По теореме синусов:  $\frac{PO}{\sin \alpha} = \frac{CO}{\sin \beta}$ , но

$$PX_1 = PO - OX_1, \text{ причем } \angle X_1 XO = \angle CPO = \beta \Rightarrow PX_1 = PO - OX \cdot \sin \beta. \angle OXC = \\ = \angle PCO = \alpha, OX = \frac{CO}{\sin \alpha} \Rightarrow PX_1 = PO - \frac{CO}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta.$$

Сравнивая (2) и (3), получим, что  $PA_1 = PX_1$ , т.е.  $A_1$  и  $X_1$  — совпадают  $\Rightarrow$   $XA \perp OP$ . Ч.т.д.