Решение контрольных работ по алгебре за 9 класс

к учебному изданию «Алгебра. 9 кл.
Контрольные работы: учебное пособие
для общеобразоват. учреждений / Ю.П. Дудницын,
Е.Е. Тульчинская; под. ред. А.Г. Мордковича. —
8-е изд. — М.: Мнемозина, 2006»

2009

СОДЕРЖАНИЕ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1

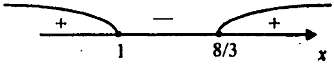
1. а) $2(1-x) \geq 5x-(3x+2)$; $2-2x \geq 5x-3x-2$; $-2x-5x+3x \geq -2-2$; $-4x \geq -4$. $x \leq 1$;

Ответ: $x \in (-\infty;\ 1]$

б) $3x^2+5x-8 \geq 0$; $3x^2+5x-8=0$; $D=5^2-4\cdot3\cdot(-8)=25+96=121$;

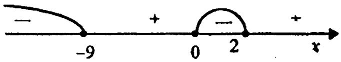
$\sqrt{D}=11$; $x_1=\dfrac{-5-11}{6}=-\dfrac{8}{3}$; $x_2=\dfrac{-5+11}{6}=1$;

$3x^2+5x-8=3(x-1)\left(x+\dfrac{8}{3}\right) \geq 0$



Ответ. $x \in (-\infty;1] \cup [8/3;+\infty)$

в) $\dfrac{x^2+9x}{x-2}<0$; ОДЗ: $x \neq 2$; $\dfrac{x(x+9)}{x-2}<0$



Ответ: $x \in (-\infty;-9) \cup (0;2)$

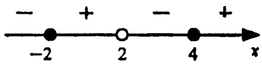
2. $-5<\dfrac{4-3x}{7} \leq 2$; $-35<4-3x \leq 14$; $-35-4<-3x \leq 14-4$; $-39<-3x \leq 10$;

$-10/3 \leq x<39/3$; $-10/3 \leq x<13$; $-3\dfrac{1}{3} \leq x<13$; $\Rightarrow x_{\min}=-3$, $x_{\max}=12$.

Ответ $x_{\min}=-3$, $x_{\max}=12$.

3. $f(x)=\sqrt{x-\dfrac{8}{x-2}}$; ОДЗ : $\dfrac{x^2-2x-8}{x-2} \geq 0$;

$\dfrac{(x+2)(x-4)}{x-2} \geq 0$; $x \in [-2;2) \cup [4;\infty)$.



4. Пусть t_1 — время, которое идет дачник со скоростью 4 км/ч, t_2 — время, которое дачник идет со скоростью $4+2=6$ км/ч, тогда.

$\begin{cases}4t_1+6\cdot t_2=10\\ t_1+t_2=2\end{cases}$; $\begin{cases}t_1=2-t_2\\ 8-4t_2+6t_2=10\end{cases}$; $\begin{cases}t_2=1\\ t_1=1\end{cases}$;

тогда искомое расстояние равно $t_1\cdot4=1\cdot4=4$ (км).

Ответ: не более 4 км.

Вариант 2

1. а) $7x+3>5(x-4)+1$; $7x+3>5x-20+1$; $7x-5x>-3-20+1$; $2x>-22$; $x>-11$.

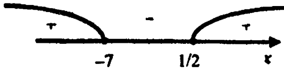
Ответ: $x \in (-11;+\infty)$

б) $2x^2+13x-7>0$; $2x^2+13x-7=0$.

$D=13^2-4\cdot2\cdot(-7)=169+56=225$; $\sqrt{D}=15$

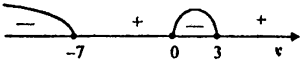
$x_1=\dfrac{-13-15}{4}$=-7; $x_2=\dfrac{-13+15}{4}=\dfrac{1}{2}$

$(2x^2+13x-7)=2(x+7)\left(x-\frac{1}{2}\right)>0.$



Ответ: $x \in (-\infty;-7) \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right).$

в) $\frac{x^2+7x}{x-3}<0$; $\frac{x(x+7)}{x-3}<0$; ОДЗ: $x \neq 3$.



Ответ: $x \in (-\infty; -7) \cup (0; 3).$

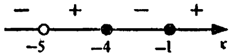
2. $-1 \le \frac{4-5x}{6} < 1; -6 \le 4-5x < 6; -6-4 \le -5x < 6-4; -10 \le -5x < 2;$

$-2 < 5x \le 10;\ -\frac{2}{5} < x \le 2;\ x_{min}=0,\ x_{max}=2.$

Ответ: $x_{min}=0,\ x_{max}=2.$

3. $f(x)=\sqrt{\frac{4}{x+5}+x}$; ОДЗ : $\frac{x^2+5x+4}{x+5}\ge 0$, $\frac{(x+1)(x+4)}{x+5}\ge 0$,

$x \in (-5; -4] \cup [-1; +\infty).$



4. Пусть t_1 — время, за которое будет работать ученик, t_2 — мастер, тогда:

$\begin{cases} t_1+t_2=60 \\ 2t_1+3t_2=140 \end{cases}$; $\begin{cases} t_1=60-t_2 \\ 120-2t_2+3t_2=140 \end{cases}$; $\begin{cases} t_2=20 \\ t_1=40 \end{cases}$,

тогда искомое число деталей $t_1 \cdot 2 = 40 \cdot 2 = 80$

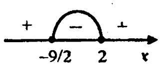
Ответ: Не более 80 деталей.

Вариант 3

1. а) $4x+1 \le 43-3(7+x); 4x+1 \le 43-21-3x; 4x+3x \le 43-21-1,$
$7x \le 21; x \le 3.$
Ответ: $x \in (-\infty; 3]$
б) $2x^2+5x-18 \le 0; 2x^2+5x-18=0.\ D=5^2-4\ \ 2(-18)=25+144=169.$

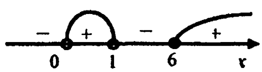
$\sqrt{D}=13; x_1=\frac{-5-13}{4}=-\frac{9}{2}; x_2=\frac{-5+13}{4}=2;$

$2x^2+5x-18=2(x-2)\left(x+\frac{9}{2}\right) \le 0.$



Ответ: $x \in \left[-\frac{9}{2};\ 2\right].$

в) $\frac{x^2-6x}{x-1}>0$; ОДЗ: $x \neq 1$; $\frac{x(x-6)}{x-1}>0;$



Ответ: $x \in (0; 1) \cup (6; +\infty).$

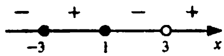
2. $-3 < \dfrac{5x+7}{4} < 2$; $-12-7 < 5x < 8-7$; $-19 < 5x < 1$, $-\dfrac{19}{5} < x < \dfrac{1}{5}$,

$-3\dfrac{4}{5} < x < \dfrac{1}{5}$. $x_{min} = -3$, $x_{max} = 0$

Ответ. $x_{min} = -3$, $x_{max} = 0$.

3. $f(x) = \sqrt{x + \dfrac{5x-3}{x-3}}$; ОДЗ : $\dfrac{x^2-3x+5x-3}{x-3} \geq 0$, $\dfrac{x^2+2x-3}{x-3} \geq 0$,

$\dfrac{(x+3)(x-1)}{x-3} \geq 0$; $x \in [-3;1] \cup (3;+\infty)$.



4. Пусть x — количество двухместных номеров, y — трехместных номеров, тогда:

$$\begin{cases} 2x+3y=48 \\ x+y=18 \end{cases}; \begin{cases} x=18-y \\ 36-2y+3y=48 \end{cases}; \begin{cases} y=12 \\ x=6 \end{cases}.$$

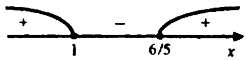
Ответ. не более 6 номеров.

Вариант 4

1. а) $5(x+1)-x > 2x+13$; $5x+5-x > 2x+13$; $5x-x-2x > 13-5$, $2x > 8$; $x > 4$.

Ответ: $x \in (4; +\infty)$

б) $5x^2-11x+6 \geq 0$; $5x^2-11x+6=0$;

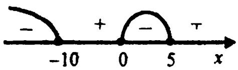


$D = 11^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6 = 121 - 120 = 1$;

$\sqrt{D} = 1$. $x_1 = \dfrac{11+1}{10} = \dfrac{6}{5}$; $x_2 = \dfrac{11-1}{10} = 1$; $5x^2 - 11 + 6 = 5(x-1)\left(x - \dfrac{6}{5}\right) \geq 0$;

Ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup \left[\dfrac{6}{5}; +\infty\right)$.

в) $\dfrac{x^2+10x}{x-5} < 0$; ОДЗ: $x \neq 5$; $\dfrac{x(x+10)}{x-5} < 0$.



Ответ: $x \in (-\infty; -10) \cup (0; 5)$.

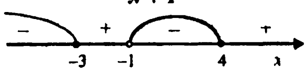
2. $-2 \leq \dfrac{8x+1}{5} < 3$; $-10 \leq 8x+1 < 15$; $-10-1 \leq 8x < 15-1$; $-11 \leq 8x < 14$

$-\dfrac{11}{8} \leq x < \dfrac{14}{8}$; $-1\dfrac{3}{8} \leq x < 1\dfrac{3}{4}$; $x_{min} = -1$, $x_{max} = 1$

Ответ: $x_{min} = -1$, $x_{max} = 1$.

3. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2(x+6)}{x+1} - x}$; ОДЗ : $\dfrac{2x+12-x^2-x}{x+1} \geq 0$; $\dfrac{x^2-x-12}{x+1} \leq 0$:

$\dfrac{(x-4)(x+3)}{x+1} \leq 0$; $x \in (-\infty; -3] \cup (-1; 4]$.



4. Пусть x — количество меньших ящиков, y — больших, тогда.

$\begin{cases} 3x+5y=100 \\ x+y=24 \end{cases}$; $\begin{cases} x=24-y \\ 72-3y+5y=100 \end{cases}$; $\begin{cases} y=14 \\ x=10 \end{cases}$.

Ответ: Не более 10 меньших ящиков.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1

1. $\begin{cases} xy=12 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=12 \\ y=8-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(8-x)=12 \\ y=8-x \end{cases}$;

$x(8-x)=12$; $8x-x^2=12$; $x^2-8x+12=0$;

$D=8^2-4\cdot 12=16$; $\sqrt{D}=4$; $x_1=\dfrac{8-4}{2}=2$; $x_2=\dfrac{8+4}{2}=6$;

$y_1=8-2=6$; $y_2=8-6=2$.

Ответ: (2; 6); (6; 2).

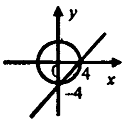
2. $\begin{cases} x^2-2y^2=14 \\ x^2+2y^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2y^2-x^2-(-2y^2)=18-14 \\ x^2+2y^2+x^2-2y^2=18+14 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2=4 \\ 2x^2=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=1 \\ x^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm 1 \\ x=\pm 4 \end{cases}$;

$x_1=4, y_1=1$; $x_2=-4, y_2=-1$;

$x_3=4, y_3=-1$; $x_4=-4, y_4=1$.

Ответ: (4; 1), (–4; –1), (4; –1), (–4; 1).



3. $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=16 \\ y=x-4 \end{cases}$ окружность с центром в точке (0;0) и радиусом $\sqrt{16}=4$; прямая, проходящая через точки (4; 0) и (0; –4).

Ответ: (4; 0), (0; –4)

4. $\overline{xy}=10x+y$ — данное двузначное число, где x — первая цифра; y — вторая цифра; $\overline{yx}=10y+x$ — число, полученное из данного переменой цифр местами.

По условию задачи запишем систему:

$\begin{cases} x+y=10 \\ (10y+x)-36=10x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=10-x \\ 10y+x-36-10x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=10-x \\ 9y-9x=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=10-x \\ y-x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=10-x \\ y=4+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=10-x \\ 0=10-4-x-x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=10-x \\ 2x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=10-3=7 \\ x=3 \end{cases}$

Таким образом, $x = 3$. $y = 7$ и заданное число есть 37

Ответ 37

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ y = x^2 + a \end{cases}$ $x^2 + y^2 = 3$ – окружность с центром в точке (0, 0) и радиусом $\sqrt{3}$, $y = x^2 + a$ – парабола с вершиной в точке (0; а).

Итак при $\begin{cases} a \in \left(\sqrt{-3}, \sqrt{3}\right) - 2 \text{ решения;} \\ a = \sqrt{3} - 1 \text{ решение;} \\ a = -\sqrt{3} - 3 \text{ решения.} \end{cases}$ *Ответ.* а) $a = \sqrt{3}$; б) $a = -\sqrt{3}$

Вариант 2

1. $\begin{cases} xy = -2 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -2 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - x) = -2 \\ y = 1 - x \end{cases}$,

$x(1 - x) = -2$, $x - x^2 = -2$, $x^2 - x - 2 = 0$; $D = 1^2 - 4 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$;

$\sqrt{D} = 3$; $x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$; $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$; $y_1 = 1 - (-1) = 2$; $y_2 = 1 - 2 = -1$

Ответ (–1, 2); (2; –1).

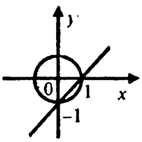
2. $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 22 \\ x^2 + 3y^2 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3y^2 - x^2 - (-3y^2) = 28 - 22 \\ x^2 + 3y^2 + x^2 - 3y^2 = 22 + 28 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y^2 = 6 \\ 2x^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = \pm 5 \end{cases}$;

$x_1 = 5$, $y_1 = 1$, $x_2 = -5$, $y_2 = -1$,

$x_3 = 5$, $y_3 = -1$, $x_4 = -5$, $y_4 = 1$.

Ответ (5; 1), (–5; –1), (5; –1), (–5; 1).



3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$ окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом $\sqrt{1} = 1$, прямая, проходящая через точки (0; –1) и (1; 0)

Ответ (0; –1), (1, 0).

4. $\overline{xy} = 10x + y$ — данное двузначное число, где x — первая цифра, y — вторая, $\overline{yx} = 10y + x$ — число, полученное из данного переменой цифр местами.

Из условий задачи запишем систему

$$\begin{cases}\dfrac{(10x+y)-3}{10y+x}=4\\ \dfrac{(10x+y)-7}{x+y}=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10x+y-3=40y+4x\\ 10x+y-7=8x+8y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x-39y=3\\ 2x-7y=7\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+13y=-1\\ 2x-7y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+13y+2x-7y=-1+7\\ 2x=7+7y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6y=6\\ x=\dfrac{7+7y}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=\dfrac{7+7\cdot 1}{2}=7\end{cases}$$

Таким образом, $x = 7$, $y = 1$, и заданное число есть 71. Число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, есть 17.

Ответ: 71; 17.

5. $\begin{cases}y+x^2+2=0\\ x^2+y^2=m\end{cases}$;

$\begin{cases}x^2+y^2=m & \text{– окружность с центром в точке } (0,\,0) \text{ и радиусом } \sqrt{m};\\ y=-2-x^2 & \text{– парабола с вершиной } (0;-2)\text{, ее ветви направлены вниз}\end{cases}$

а) при $m=4$; б) нет таких m.

Вариант 3

1. $\begin{cases}xy=-2\\ x+3=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+3)=-2\\ x+3=y\end{cases}$; $x(x+3)=-2$; $x^2+3x+2=0$;

$D=3^2-4\cdot 2=9-8=1$; $\sqrt{D}=1$, $x_1=\dfrac{-3-1}{2}=-2$; $x_2=\dfrac{-3+1}{2}=-1$;

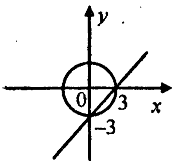
$y_1=-2+3=1$; $y_2=-1+3=2$. *Ответ:* $(-2;\,1)$, $(-1;\,2)$.

2. $\begin{cases}2x^2-y^2=-1\\ 2x^2+y^2=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-y^2+2x^2+y^2=-1+17\\ 2x^2+y^2-2x^2-(-y^2)=17-(-1)\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2=16\\ 2y^2=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=4\\ y^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm 2\\ y=\pm 3\end{cases}$

$x_1=2,\ y_1=3$; $x_2=-2,\ y_2=-3$;
$x_3=2,\ y_3=-3$; $x_4=-2,\ y_4=3$.

Ответ: $(2;\,3)$, $(-2;\,-3)$, $(2;\,-3)$, $(-2;\,3)$.



3. $\begin{cases}x^2+y^2=9\\ x-y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=9\\ y=x-3\end{cases}$ окружность с центром в точке $(0;\,0)$ и радиусом $\sqrt{9}=3$; прямая, проходящая через точки $(0;\,-3)$ и $(3;\,0)$.

Ответ: $(0;\,-3)$, $(3;\,0)$.

4. $\overline{xy}=10x+y$ — данное двузначное число, где x — первая цифра, y — вторая.

Из условий задачи запишем систему:

$$\begin{cases}\dfrac{10x+y}{x+y}=4\\ \dfrac{10x+y}{x\cdot y}=2,\ x\neq 0, y\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}10x+y=4x+4y\\ 10x+y=2xy\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6x=3y\\ 10x+y-2xy=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=2x\\ 10x+2x-2x\cdot(2x)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x\\ 12x-4x^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x\\ 4x(3-x)=0\end{cases}$$

$x_1=0$; $x_2=3$;

$y_1=2\cdot 0=0$; $y_2=2\cdot 3=6$.

$x_1=0$, $y_1=0$ не удовлетворяют условию задачи, т.к. $x\neq 0$ и $y\neq 0$. Таким образом, $x=3$ и $y=6$, и заданное число 36.

Ответ: 36.

5. $\begin{cases}y+x^2=b\\ x^2+y^2=5\end{cases}$;

$\begin{cases}y=b-x^2 & \text{– парабола с вершиной } (0;\ b)\text{, ее ветви направлены вниз;}\\ x^2+y^2=5 & \text{– окружность с центром в точке } (0;\ 0) \text{ и радиусом } \sqrt{5}.\end{cases}$

а) $b=-\sqrt{5}$; б) $b=\sqrt{5}$.

Вариант 4

1. $\begin{cases}xy=12\\ x-y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(x-1)=12\\ y=x-1\end{cases}$

$x(x-1)=12$; $x^2-x-12=0$; $D=1^2-4(-12)=1+48=49$; $\sqrt{D}=7$,

$x_1=\dfrac{1-7}{2}=-3$; $x_2=\dfrac{1+7}{2}=4$; $y_1=-3-1=-4$; $y_2=4-1=3$.

Ответ: (4; 3), (–3; –4)

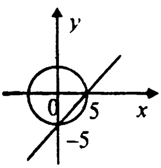
2. $\begin{cases}x^2-y^2=-5\\ x^2+y^2=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2+x^2+y^2=-5+13\\ x^2+y^2-x^2-(-y^2)=13-(-5)\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2=8\\ 2y^2=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=4\\ y^2=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm 2\\ y=\pm 3\end{cases}$

$x_1=2$; $y_1=3$; $x_2=-2$; $y_2=-3$;

$x_3=2$; $y_3=-3$; $x_4=-2$; $y_4=3$.

Ответ: (2; 3), (–2; –3), (2; –3), (–2; 3).



3. $\begin{cases}x^2+y^2=25\\ x-y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=25\\ y=x-5\end{cases}$ окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом $\sqrt{25}=5$; прямая, проходящая через точки (0; –5) и (5; 0)

Ответ: (0; –5); (5; 0).

4. Пусть x — первое число, y — второе.
Из условий задачи запишем систему:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 100 \\ 3x - 2y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\dfrac{3x-30}{2}\right)^2 = 100 \\ y = \dfrac{3x-30}{2} \end{cases}$$

Из первого уравнения системы найдем x: $x^2 - \left(\dfrac{3x-30}{2}\right)^2 = 100$.

$x^2 - \dfrac{9x^2 - 180x + 900}{4} = 100$; $4x^2 - 9x^2 + 180x - 900 = 400$;

$-5x^2 + 180x - 1300 = 0$; $x^2 - 36x + 260 = 0$; $D = 36^2 - 4 \cdot 260 = 1296 - 1040 = 256$,

$\sqrt{D} = 16$. $x_1 = \dfrac{36+16}{2} = 26$; $x_2 = \dfrac{36-16}{2} = 10$; $y_1 = \dfrac{3 \cdot 26 - 30}{2} = 24$;

$y_2 = \dfrac{3 \cdot 10 - 30}{2} = 0$;

Таким образом, условиям задачи удовлетворяют две пары чисел: (26; 24) и (10; 0).

Ответ: (26; 24), (10; 0).

5. $\begin{cases} y - x^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = k \end{cases}$;

$\begin{cases} y = 4 + x^2 & \text{– парабола с вершиной } (0;4)\text{, ее ветви направлены вверх;} \\ x^2 + y^2 = k & \text{– окружность с центром } (0,0) \text{ и радиусом } \sqrt{k}. \end{cases}$

а) $k = 16$; б) нет таких k.

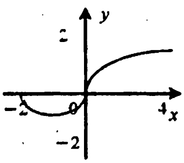
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1

1.

$y = \dfrac{\sqrt{10 + 3x - x^2}}{x - 3}$; ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 3x - 10 \le 0 \\ x \ne 3 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+2)(x-5) \le 0 \\ x \ne 3 \end{cases}$;

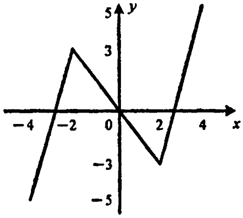
$x \in [-2;3) \cup (3;5]$.



2.

$y = \begin{cases} x^2 + 2x, & -2 \le x < 0, \\ \sqrt{x}, & 0 \le x \le 4. \end{cases}$ Убывает при $x \in [-2;-1]$, возрастает при $x \in [-1;4]$; $y_{\min} = y(-1) = -1$;

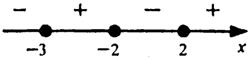
$y_{\max} = y(4) = 2$.



4. а) $y = 2 + \dfrac{x}{x-4}$; $\quad y(-x) = 2 + \dfrac{-x}{-x-4}$ - ни четная, ни нечетная;

б) $y = x(x^2 - 9)$; $\quad y(-x) = -x(x^2 - 9) = -y(x)$ - нечетная;

в) $y = 3\sqrt{x^2} - 2x^4$; $\quad y(-x) = 3\sqrt{x^2} - 2x^4 = y(x)$ - четная.



5.

$f(x) = x - 4$; $\quad f(x^2) = x^2 - 4$; $\quad f(x+7) = x + 3$;

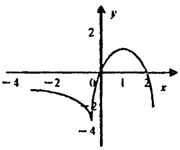
$(x^2 - 4)(x+3) \le 0$; $\quad (x-2)(x+2)(x+3) \le 0$; $\quad x \in (-\infty; -3] \cup [-2; 2]$.

Вариант 2

1. $y = \dfrac{\sqrt{12 - 4x - x^2}}{1 - x}$; ОДЗ: $\begin{cases} x^2 + 4x - 12 \le 0 \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+6) \le 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$

Ответ: $x \in [-6; 1) \cup (1; 2]$.

2. $y = \begin{cases} 3/x, & -3 \le x \le -1, \\ 2x - x^2, & -1 < x \le 3. \end{cases}$

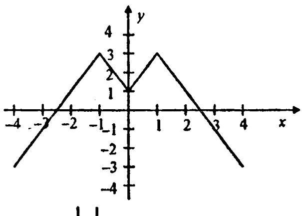


Убывает при $x \in [-3; -1] \cup [1; 3]$;

возрастает при $x \in [-1; 1]$; $\quad y_{\min} = y(-1) = y(3) = -3$;

$y_{\max} = y(1) = 1$.

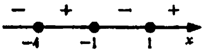
3.



4. а) $y = \dfrac{|x|}{x^2 - 4}$; $\quad y(-x) = \dfrac{|x|}{x^2 - 4} = y(x)$ - четная;

б) $y = 2x - \sqrt{x-5}$; $\quad y(-x) = -2x - \sqrt{-x-5}$ - ни четная, ни нечетная;

в) $y = 3x - x^5$; $\quad y(-x) = -3x + x^5 = -y(x)$ - нечетная.



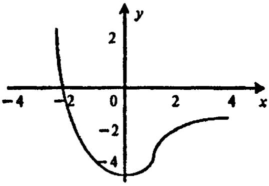
5. $f(x) = x - 1$; $f(x+5) = x + 4$; $f(x^2) = x^2 - 1$.

$(x^2 - 1)(x+4) \geq 0$; $(x-1)(x+1)(x+4) \geq 0$; $x \in [-4; -1] \cup [1, +\infty)$

Вариант 3

1. $y = \dfrac{\sqrt{12 - 4x - x^2}}{1 - x}$; ОДЗ $\begin{cases} x^2 + 4x - 12 \leq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$; $\begin{cases} (x-2)(x+6) \leq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$,

$x \in [-6; 1) \cup (1; 2]$.

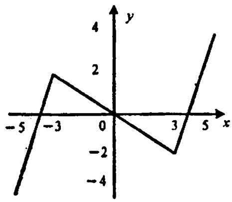


2. $y = \begin{cases} x^2 - 5, & -3 \leq x < 1, \\ -4/x, & 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$

Убывает при $x \in [-3; 0]$; возрастает при $x \in [0, 4]$.

$y_{\min} = y(0) = -5$, $y_{\max} = y(-3) = 4$

3.



4. а) $y = x(x^4 + 1)$; $y(-x) = -x(x^4 + 1) = -y(x)$ - нечетная;

б) $y = 2\sqrt{x^2} - x^6$; $y(-x) = 2\sqrt{x^2} - x^6 = y(x)$ - четная;

в) $y = 1 - \dfrac{x}{2 - x}$; $y(-x) = 1 - \dfrac{x}{2 + x}$ - ни четная, ни нечетная.

5. $f(x) = x - 4$; $f(x^2) = x^2 - 4$, $f(x+5) = x + 1$

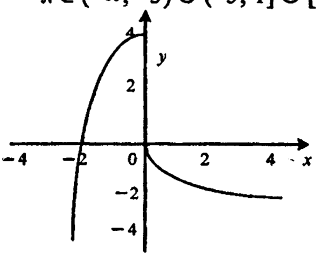
$(x2 - 4)(x + 1) \geq 0$; $(x-2)(x+2)(x+1) \geq 0$

Ответ: $x \in [-2; -1] \cup [2, +\infty)$

Вариант 4

1. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 8x + 7}}{x + 3}$; ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 8x + 7 \geq 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$; $\begin{cases} (x-1)(x-7) \geq 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$;

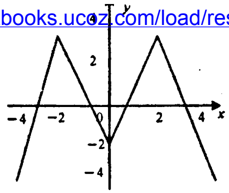
$x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 1] \cup [7; +\infty)$.



2. $y = \begin{cases} 4 - x^2, & -3 \leq x \leq 0, \\ -\sqrt{x}, & 0 < x \leq 4 \end{cases}$

Убывает при $x \in (0; 4]$; возрастает при $x \in [-3; 0]$; $y_{\min} = y(-3) = -5$,

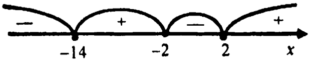
$y_{\max} = y(0) = 4$.



4. а) $y=|x|(1-x^2)$; $\quad y(-x)=|x|(1-x^2)=y(x)$ - четная;

б) $y=\sqrt{1-x}-x^3$; $\quad y(-x)=\sqrt{1+x}+x^3$ - ни четная, ни нечетная;

в) $y=x^5+x$; $\quad y(-x)=-x^5-x=-y(x)$ - нечетная.



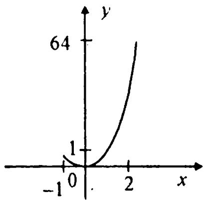
5. $f(x)=x-4$; $f(x^2)=x^2-4$; $f(x+18)=x+14$,

$(x^2-4)(x+14)\le 0$, $(x-2)(x+2)(x+14)\le 0$

Ответ: $x\in(-\infty;-14]\cup[-2;2]$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1



1.

$y=x^6$, $x\in[-1;2]$

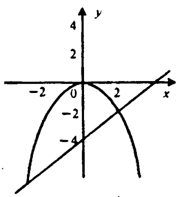
$y=x^6$ — парабола, ветви которой направлены вверх, вершина в точке (0; 0).

$y(-1)=1<y(2)=64$;

$y_{min}=y(0)=0^6=0$;

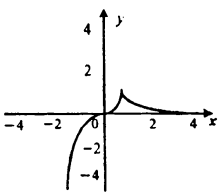
$y_{max}=y(2)=2^6=64$;

Ответ: $y_{min}=0$, $y_{max}=64$.



2.

$-0{,}5x^4=x-4$ - имеет два корня.

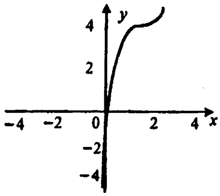


3.

$$y=\begin{cases} x^3, & x\le 1, \\ 1/x^2, & x>1. \end{cases}$$

Убывает при $x\in[1;+\infty]$; возрастает при $x\in[-\infty;\ 1]$;

y_{min} - не существует; $y_{max}=y(1)=1$.



4.

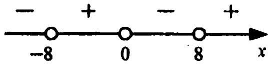
$y=(x-2)^3+4$; $y(0)=-4$; $y(3)=5$;

значит на отрезке [0; 3]: $y_{max}=y(3)=5$,

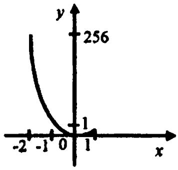
$y_{min}=y(0)=-4$

5. $f(x)=x^{-3}$; $f\left(\frac{1}{x}\right)=x^3$; $x^2:x^{-3}>64x^3$; $x^3\left(x^2-64\right)>0$,

$x^3(x-8)(x+8)>0$; $x\in(-8;0)\cup(8;+\infty)$.



Вариант 2



1.

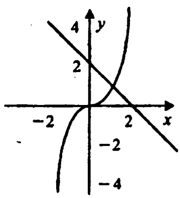
$y=x^8$ — парабола, ветви которой направлены вверх, вершина в точке (0; 0).

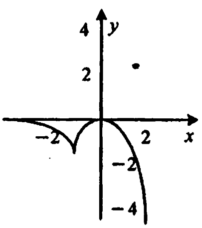
$x\in[-2;1]$, $y(-2)=2^8=256>y(1)=1$, $y_{max}=y(-2)=256$, $y_{min}=y(0)=0$.

Ответ: $y_{min}=0$, $y_{max}=256$.

2.

$0{,}5x^3=2-x$ - имеет один корень.

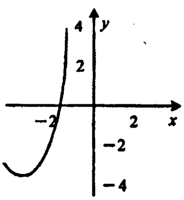




3.

$$y=\begin{cases}1/x^3, & x<-1,\\ -x^4, & x\geq-1.\end{cases}$$

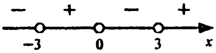
Убывает при $x\in(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$; возрастает при $x\in[-1;0]$; y_{min} - не существует; $y_{max}=y(0)=0$.



4. $y=(x+3)^4-4$,

на отрезке $[-4;-1]$ $y_{min}=y(-3)=-4$,

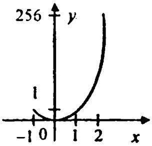
$y_{max}=y(-1)=12$, т.к. $y(-4)<y(-1)$, $y(-4)=-3$.



5. $f(x)=x^{-5}$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=x^5$, $x^5<9x^8\cdot x^{-5}$; $x^3(x^2-9)<0$;

$x^3(x-3)(x+3)<0$; $x\in(-\infty;-3)\cup(0;\ 3)$.

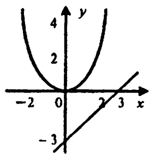
Вариант 3

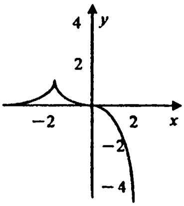


1. $y=x^8$ — парабола, ветви которой направлены вверх, вершина в точке (0; 0).
$x\in[-1;\,2]$, $y(-1)=1<y(2)=256$; $y_{\max}=y(2)=256$,
$y_{\min}=y(0)=0$.

Ответ: $y_{\min}=0$, $y_{\max}=256$.

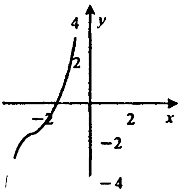
2. $2x^4=x-3$ - нет корней.





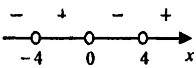
3. $y=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & x<-1,\\ -x^3, & x\geq -1.\end{cases}$

Убывает при $x\geq -1$; возрастает при $x\leq -1$; $y_{\min}$ - не существует; $y_{\max}=y(-1)=1$.



4. $y=(x+3)^3-1$,

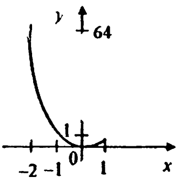
на отрезке $[-4;-1]$ $y_{\max}=y(-1)=7$, $y_{\min}=y(-4)=-2$.



5. $f(x)=x^{-4}$; $f\left(\frac{1}{x}\right)=x^4$; $\frac{16\cdot x}{x^{-4}}<x^3\cdot x^4$; $x^5\left(x^2-16\right)>0$;

$x^5(x-4)(x+4)>0$; $x\in(-4;0)\cup(4;+\infty)$.

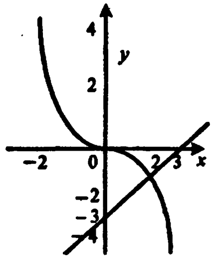
Вариант 4



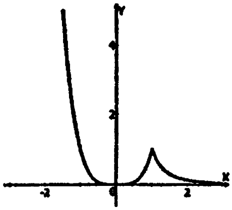
1.
$y=x^6$ — парабола, ветви которой направлены вверх, вершина в точке (0; 0).
$x\in[-2;\,1]$, $y(-2)=64>y(1)=1$, $y_{\max}=y(-2)=64$,
$y_{\min}=y(0)=0$.

Ответ: $y_{\min}=0$, $y_{\max}=64$.

2.

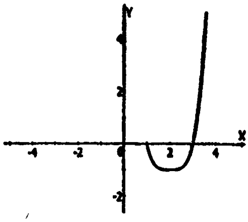


$-0,5x^3 = x - 3$ - имеет один корень.

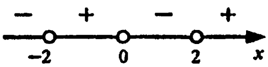


3. $y = \begin{cases} x^4, & x \le 1, \\ 1/x^3, & x > 1. \end{cases}$

Убывает при $x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$; возрастает при $x \in [0;\ 1]$; $y_{\max}$ - не существует; $y_{\min} = y(0) = 0$.



4. $y = (x-2)^4 - 1$, на отрезке $[1;\ 4]$ $y_{\min} = y(2) = -1$; $y(1) = 0 < y(4) = 15$,
$y_{\max} = y(4) = 15$.



5. $f(x) = x^{-6}$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^6$, $4x^9 \cdot x^{-6} > \frac{x^6}{x}$;

$x^3\left(x^2 - 4\right) < 0$; $x^3(x-2)(x+2) < 0$; $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Вариант 1

1. $-8;\quad -6,5;\quad -5\ldots$

$a_1 = -8;\quad d = 1,5;\quad a_{10} = -8 + 9 \cdot 1,5 = 5,5;\ S_{10} = \frac{-8 + 5,5}{2} 10 = -12,5$.

2. $\frac{16}{27};\ \frac{16}{9};\ \frac{16}{3}\ldots\ b_1 = \frac{16}{27};\quad q = 3;\quad b_8 = \frac{16}{27} \cdot 3^7 = 1296$.

3. $\begin{cases} a_3 + a_6 = 3 \\ a_2 = a_7 + 15 \end{cases};\quad \begin{cases} 2a_1 + 7d = 3 \\ 5d = -15 \end{cases};\quad \begin{cases} d = -3 \\ a_1 = 12 \end{cases};\quad \begin{matrix} a_1 = 12, \\ a_2 = 9. \end{matrix}$

4. $\sqrt{2x+8}=q\sqrt{3x-8}=q^2\cdot 1$, где q — знаменатель геометрической прогрессии. Из первого равенства:

$$q=\frac{\sqrt{2x+8}}{\sqrt{3x-8}};\ \text{ОДЗ: } \begin{cases}2x+8>0\\3x-8>0\end{cases} \Leftrightarrow x>2\frac{2}{3}$$

(неравенства строгие, т.к. члены геометрической прогрессии отличны от 0).

Используя второе равенство, избавимся от q:

$$\sqrt{2x+8}=q^2=\frac{2x+8}{3x-8};\ 1=\frac{\sqrt{2x+8}}{3x-8};\ \sqrt{2x+8}=3x-8,$$

$2x+8=9x^2-48x+64,\ 9x^2-50x+56=0.$

$$D=50^2-4\cdot 9\cdot 56=484;\ \sqrt{D}=22.\ x_1=\frac{50+22}{18}=4;$$

$$x_2=\frac{50-22}{18}=1\frac{5}{9}\ \text{(неуд. ОДЗ!)}$$

Ответ: 4.

5. $a_1=103,\ d=7,\ a_n=544,\ n=\frac{a_n-a_1+d}{d}=\frac{544-103+7}{7}=64,$

$$S_{64}=\frac{103+544}{2}\cdot 64=20\,704.$$

Ответ: 20 704.

Вариант 2

1. 26; 23; 20...

$$a_1=26;\quad d=-3;\quad a_{12}=26+11\cdot(-3)=-7;\quad S_{12}=\frac{26-7}{2}\cdot 12=114.$$

2. $\frac{15}{256};\ \frac{15}{64};\ \frac{15}{16}\ldots\ b_1=\frac{15}{256};\ q=4;\ b_8=\frac{15}{256}\cdot 4^7=960.$

3. $\begin{cases}a_3+12=a_6\\a_2+a_8=4\end{cases};\quad \begin{cases}b=4\\2a_1+32=4\end{cases};\quad \begin{matrix}a_1=-14;\\a_2=-10;\\a_3=-6.\end{matrix}$

4. $\sqrt{x-1}=q\sqrt{x+1}=q^2\sqrt{2x+5};\quad q>0;\quad x\ge 1.$

$$x-1=q^2(x+1);\quad x=\frac{q^2+1}{1-q^2};\quad \sqrt{\frac{q^2+1}{1-q^2}+1}=q\sqrt{\frac{2q^2+2}{1-q^2}+5};$$

$$\frac{2}{1-q^2}=q^2\cdot\frac{-3q^2+7}{1-q^2};\quad 3q^4-7q^2+2=0;\quad q^2=\frac{1}{3}\ \text{или}\ q^2=2.$$

$$x=\frac{3}{-1}\ \text{- не подходит, значит,}\ x=\frac{4/3}{2/3}=2.$$

5. $a_1 = 11$, $d = 4$, $a_n = 99$, $n = \dfrac{a_n - a_1 + d}{d} = \dfrac{99 - 11 + 4}{4} = 23$,

$S_{23} = \dfrac{11 + 99}{2} \cdot 23 = 1265$. *Ответ:* 1265.

Вариант 3

1. $-4,2;\quad -2;\quad 0,2\ldots\quad a_1 = -4,2;\quad d = 2,2;\quad a_{11} = -4,2 + 10 \cdot 2,2 = 17,8;$

$S_{11} = \dfrac{-4,2 + 17,8}{2} \cdot 11 = 74,8.$

2. $\dfrac{7}{54};\quad \dfrac{7}{18};\quad \dfrac{7}{6}\ldots\quad b_1 = \dfrac{7}{54};\quad q = 3;\quad b_{10} = \dfrac{7}{54} \cdot 3^9 = 2551,5.$

3. $\begin{cases} a_7 + a_4 = 6 \\ a_5 - 12 = a_2 \end{cases};\quad \begin{cases} d = 4 \\ 2a_1 + 36 = 6 \end{cases};\quad \begin{matrix} a_1 = -15, \\ a_3 = -7. \end{matrix}$

4. $\sqrt{4-x} = q\sqrt{2x-2} = 4q^2;\quad 4 - x = 16q^4;\quad x = 4 - 16q^4.$

$\sqrt{8 - 32q^4 - 2} = 4q;\quad q^2 = -\dfrac{12}{16}$ - не подходит, значит,

$q^2 = \dfrac{1}{4};\ x = 4 - 16q^4 = 4 - 16 \cdot \dfrac{1}{16} = 3.$

5. $a_1 = 101;\quad d = 8;\quad a_n = 445;\ S_n = \dfrac{101 + 445}{2} \cdot \dfrac{445 - 101 + 8}{8} = 12012.$

Вариант 4

1. $5,2;\quad 3,7;\quad 2,2\ldots\quad a_1 = 5,2;\quad d = -1,5;\quad a_{13} = 5,2 + 12 \cdot (-1,5) = -12,8;$

$S_{13} = \dfrac{5,2 - 12,8}{2} \cdot 13 = -49,4.$

2. $\dfrac{13}{96}; \dfrac{13}{48}; \dfrac{13}{24}; \ldots.\qquad b_1 = \dfrac{13}{96},\ q = 2,\ b_8 = \dfrac{13}{96} \cdot 2^7 = 17\dfrac{1}{3}.$

Ответ: $17\dfrac{1}{3}$.

3. $\begin{cases} a_5 + 15 = a_2 \\ a_3 + a_7 = -6 \end{cases};\quad \begin{cases} d = -5 \\ 2a_1 - 40 = -6 \end{cases};\quad \begin{matrix} a_1 = 17, \\ a_3 = 7, \\ a_4 = 2. \end{matrix}$

4. $\sqrt{x-1} = q\sqrt{6-x} = q^2\sqrt{10+3x};\quad x - 1 = 6q^2 - xq^2;\quad x = \dfrac{6q^2 + 1}{q^2 + 1};$

$$\frac{5}{q^2+1}=q^2\cdot 10+q^2\frac{18q^2+3}{q^2+1};\ 5=10q^4+10q^2+18q^4+3q^2;$$

$28q^4+13q^2-5=0$; $q^2=-\dfrac{40}{28\cdot 2}$ - не подходит, значит,

$$q^2=\frac{1}{4};\ x=\frac{6\cdot\frac{1}{4}+1}{\frac{1}{4}+1}=2.$$

5. $a_1=14$, $d=5$, $a_n=99$,

$$n=\frac{a_n-a_1+d}{d}=\frac{99-14+5}{5}=18,\ S_{18}=\frac{99+14}{2}\cdot 18=1017$$

Ответ: 1017.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Вариант 1

1. а) $4\cos\frac{\pi}{3}+\text{ctg}\frac{p}{4}=2+1=3$; б) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\text{tg}^2\left(-\frac{p}{3}\right)=-1+3=2$,

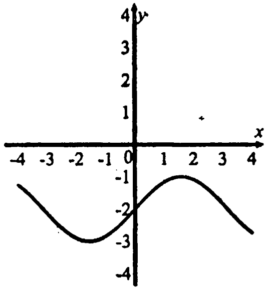
в) $\text{ctg}\frac{5p}{2}+\sin\frac{13\pi}{6}+\cos\frac{10\pi}{3}=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$

2. $\sin\frac{23\pi}{7}\text{tg}\frac{15\pi}{11}=\sin\left(3\pi+\frac{2\pi}{7}\right)\text{tg}\left(\pi+\frac{4\pi}{11}\right)=\sin\left(\pi+\frac{2\pi}{7}\right)\text{tg}\left(\pi+\frac{4\pi}{11}\right)=$

$=-\sin\frac{2\pi}{7}\text{tg}\frac{4\pi}{11}<0$, $\frac{4\pi}{11}\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$

3. $\cos t=\frac{1}{2}$; $\quad t=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n.$

4.



5.

$\sin t=\frac{5\sqrt{3}}{14}$ $\quad\frac{\pi}{2}<t<\pi$; $1-\cos^2 t=\frac{75}{196}$; $\quad\cos t=-\frac{11}{14}$;

$\text{tg}t=-\frac{5\sqrt{3}\cdot 14}{14\cdot 11}=-\frac{5\sqrt{3}}{11}.$

6. $\cos 4 \approx \cos 228°$; $\cos\frac{11\pi}{2} = 0$; $\cos 7 \approx \cos 400°$; $\cos 7{,}3 \approx \cos 56°$;

$\cos 4$; $\cos\frac{11\pi}{2}$; $\cos(7;3)$; $\cos 7$.

Вариант 2

1. а) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{p}{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$; б) $4\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{ctg}\left(-\frac{p}{4}\right) = 3 - 1 = 2$;

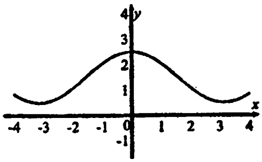
в) $\sin\frac{9p}{2} + \cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{tg}\frac{19\pi}{4} = 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

2. $\cos\frac{35\pi}{8}\mathrm{ctg}\frac{18\pi}{5} = \cos\left(4\pi + \frac{3}{8}\pi\right)\mathrm{ctg}\left(3\pi + \frac{3}{5}\pi\right) = \cos\frac{3}{8}\pi \cdot \mathrm{ctg}\frac{3}{5}\pi < 0$, т.к.

$\cos\frac{3}{8}\pi > 0$, $\mathrm{ctg}\frac{3}{5}\pi < 0$, $\frac{3}{5}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

3. $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $t = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k$.

4.



5.

$\cos t = -\frac{3\sqrt{13}}{11}$; $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$; $1 - \sin^2 t = \frac{117}{121}$; $\sin t = -\frac{2}{11}$;

$\mathrm{ctg} t = \frac{3\sqrt{13}}{11} \cdot \frac{11}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{13}$.

6.

$\sin 5 \approx \sin(285°)$; $\sin 9\pi = 0$; $\sin 9 \approx \sin 513°$; $\sin 9{,}2 \approx \cos 527°$;

$\sin 9$; $\sin 9{,}2$; $\sin 9\pi$; $\sin 5$.

Вариант 3

1.

а) $2\cos\frac{\pi}{6} - 3\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$, $2\cos\frac{\pi}{6} - 3\mathrm{tg}\frac{p}{4} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$;

б) $\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{p}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$;

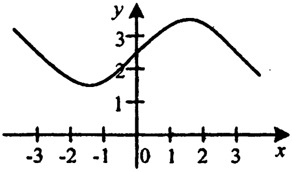
в) $\cos\frac{7p}{2} + \sin\frac{5\pi}{6} + \mathrm{tg}\frac{11\pi}{4} = 0 + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

2. $\cos\frac{8\pi}{5}\cdot \mathrm{tg}\frac{13\pi}{9} = \cos\left(\pi+\frac{3\pi}{5}\right)\cdot \mathrm{tg}\left(\pi+\frac{4\pi}{9}\right) = -\cos\frac{3\pi}{5}\cdot \mathrm{tg}\frac{4\pi}{9} > 0$, т.к

$\cos\frac{3\pi}{5} < 0$, $\frac{3\pi}{5} \in \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, $\mathrm{tg}\frac{4}{9}\pi > 0$, $\frac{4}{9}\pi \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

3. $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2};\ t = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$

4.



5. $\mathrm{tg}t = -\frac{3}{4};\quad \frac{3\pi}{2} < t < 2\pi;\quad \sin t = -\frac{3}{4}\sqrt{1-\sin^2 t},\quad \sin t < 0.$

$\sin^2 t = \frac{9}{16} - \frac{9}{16}\sin^2 t;\quad \sin t = -\frac{3}{5};\quad \frac{3}{5\cos t} = \frac{3}{4};\quad \cos t = \frac{4}{5}.$

6. $\cos\frac{13\pi}{2} = 0;\quad \cos 7{,}2 \approx \cos 410°;\quad \cos 3 \approx \cos 171°;\quad \cos 6{,}4 \approx \cos 365°$,

тогда искомый порядок: $\cos 3;\quad \cos\frac{13\pi}{2};\quad \cos 7{,}2;\quad \cos 6{,}4.$

Вариант 4

1. а) $2\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{tg}\frac{p}{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$; б) $\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{p}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$,

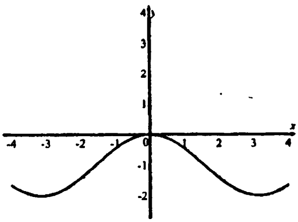
в) $\mathrm{tg}\frac{7p}{4} + \cos\frac{7\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{2} = -1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$

2. $\sin\frac{13\pi}{8}\,\mathrm{ctg}\frac{12\pi}{5} = \sin\left(\pi+\frac{5}{8}\pi\right)\cdot \mathrm{ctg}\left(2\pi+\frac{2}{5}\pi\right) = -\sin\frac{5}{8}\pi\cdot \mathrm{ctg}\frac{2}{5}\pi < 0$,

т.к. $\sin\frac{5}{8}\pi > 0$, $\frac{5}{8}\pi \in \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$, $\frac{2\pi}{5} \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$

3. $\sin t = \frac{1}{2};\ t = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k.$

4.



5. $\mathrm{ctg}\,t = \frac{8}{15}$; $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$; $\cos^2 t = \frac{64}{225} - \frac{64}{225}\cos^2 t$; $\cos t = -\frac{8}{17}$;

$-\frac{8}{17\sin x} = \frac{8}{15}$; $\sin x = -\frac{15}{17}$.

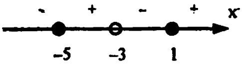
6. $\sin 11\pi = 0$; $\sin 6{,}9 \approx \sin 393°$; $\sin 4 \approx \sin 228°$; $\sin 7 \approx \sin 40°$, тогда искомый порядок: $\sin 7$; $\sin 6{,}9$; $\sin 11\pi$; $\sin 4$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Вариант 1

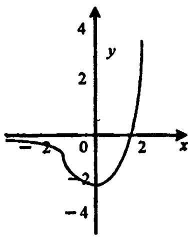
1. $\begin{cases} 14 - 2x \le x - 2 \\ 7x - 2 > 5x + 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge 5\frac{1}{3} \\ x > 2{,}5 \end{cases}$; $x \ge 5\frac{1}{3}$.

Ответ: $x \in \left[5\frac{1}{3}; +\infty\right)$.



2. $y = \sqrt{x + \frac{x-5}{x+3}}$; ОДЗ : $\frac{x^2 + 4x - 5}{x+3} \ge 0$;

$\frac{(x+5)(x-1)}{x+3} \ge 0$; $x \in [-5; -3) \cup [1; +\infty)$.



3.

$y = \begin{cases} 1/x^3, & x \le -1, \\ x^2 - 2, & -1 < x \le 3. \end{cases}$

Убывает при $x \in (-\infty; 0]$; возрастает при $x \in [0; 3]$.

$y_{\max} = y(3) = 7$; $y_{\min} = y(0) = -2$.

4. $\cos^2 t + (\sin^2 t - 1)(\mathrm{tg}^2 t + 1) = \cos^2 t - \cos^2 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} = -\sin^2 t$; $-\sin^2 \frac{7\pi}{3} = -\frac{3}{4}$

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = x^3 \end{cases}$ $x^2 + y^2 = 16$ – окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом 4; $y = x^3$ – кубическая гипербола.

Итого: 2 решения.

6. $\begin{cases} b_1 + b_3 = 10 \\ b_4 + b_6 = -80 \end{cases}$; $\begin{cases} b_1(1+q^2) = 10 \\ q^3 b_1(1+q^2) = -80 \end{cases}$; $\begin{cases} b_1 = \frac{10}{1+q^2}; \\ q^3 = -8 \end{cases}$ $\begin{cases} q = -2 \\ b_1 = 2 \end{cases}$.

Ответ: 2.

7. Пусть x – деталей в час изготавливает токарь, y – ученик, тогда:

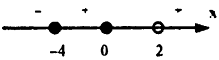
$$\begin{cases} x+y=10 \\ \dfrac{28}{x}+\dfrac{15}{y}=9 \end{cases};\ \begin{cases} x=10-y \\ 28y+150-15y=9y(10-y) \end{cases};\ 9y^2-77y+150=0;$$

$y=\dfrac{50}{9}$ - не подходит, значит, $y=3;\ x=7$.

Ответ: ученик изготовил 3 детали за 1 час, а токарь – 7 деталей.

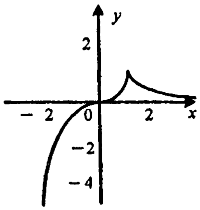
Вариант 2

1. $\begin{cases} 5x+1\le 3x-3 \\ x-1\le 2x+2 \end{cases};\ \begin{cases} x\le -2 \\ x\ge -3 \end{cases};\ x\in[-3;-2].$



2. $y=\sqrt{\dfrac{6x}{2-x}-x}$; ОДЗ : $\dfrac{x^2+4x}{x-2}\le 0;\ \dfrac{x(x+4)}{x-2}\le 0:$

$x\in(-\infty;-4]\cup[0;2)$.



3. $y=\begin{cases} x^3, & -2\le x<1, \\ 1/x, & x\ge 1. \end{cases}$

Возрастает при $x\in[-2;1]$, убывает при $x\ge 1$.

$y_{max}=y(1)=1,\ y_{min}=y(-2)=-8$.

4. $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}+\sin\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha=1-\sin\alpha+\sin\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha};\ \dfrac{1}{\cos^2\frac{7\pi}{4}}=2$

5. $\begin{cases} y=1/x^2 & \text{– квадратичная гипербола;} \\ x^2+y^2=9 & \text{– окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом 3} \end{cases}$

Отсюда следует, что у системы 4 решения.

6. $\begin{cases} a_3+a_4+a_5=9 \\ a_2a_6=-40 \end{cases};\ \begin{cases} a_1+3d=3 \\ a_1{}^2+6a_1d+5d^5=-40 \end{cases};$

$\begin{cases} a_1=3-3d \\ 14d^2-18d+49+18d-18d^2=0 \end{cases};\ d=-7/2$ - не подходит,

$d=7/2,\ \ a_1=-15/2,\ a_3=-1/2$. *Ответ:* $a_3=-1/2$.

7. Пусть x – скорость туриста, вышедшего из пункта А, y – второго туриста, тогда:

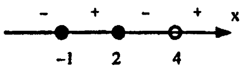
$$\begin{cases} \dfrac{18}{x}+0{,}9=\dfrac{18}{y} \\ 2x+2y=18 \end{cases};\ \begin{cases} x=9-y \\ 18y+0{,}9y(9-y)=18(9-y) \end{cases};$$

$y^2-49y+180=0$; $y=\frac{90}{2}$; $x=-3$ - не подходит, значит, $y=4$; $x=5$

Ответ. 4 км/ч и 5 км/ч.

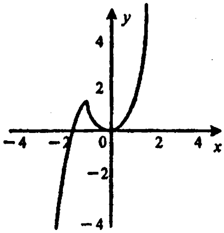
Вариант 3.

1. $\begin{cases}6x-5>3-2x\\4-3x\ge x-6\end{cases}$; $\begin{cases}x>1\\x\le 2,5\end{cases}$; $x\in(1;2,5]$.



2. $y=\sqrt{x-\frac{2-3x}{x-4}}$; ОДЗ : $\frac{x^2-x-2}{x-4}\ge 0$;

$\frac{(x+1)(x-2)}{x-4}\ge 0$; $x\in[-1;2]\cup(4;+\infty)$.



3. $y=\begin{cases}2-x^2, & -3\le x<-1,\\x^4, & x\ge -1.\end{cases}$

Возрастает при $x\in[-3;-1]\cup[0;+\infty)$, убывает при $x\in[-1;0]$, y_{max} - не существует, $y_{min}=y(-3)=-7$.

4. $\mathrm{ctg}^2\alpha+\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}=\mathrm{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, $\frac{1}{\sin^2\frac{13\pi}{6}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=4$.

5. $\begin{cases}x^2+y^2=25\\y=\frac{1}{x^3}\end{cases}$ – окружность с цнтром в точке (0; 0) и радиусом 5; – кубическая гипербола.

Отсюда следует, что система имеет 2 решения.

6. $\begin{cases}b_1-b_3=6\\b_1+b_2=2\end{cases}$; $\begin{cases}1+q=2/b_1\\b_1(1-q)(1+q)=6\end{cases}$; $\begin{cases}b_1=-2\\q=-2\end{cases}$; $b_3=-2\cdot(-2)^2=-8$.

Ответ. $b_3=-8$.

7. Пусть x – грузоподъемность 1-ого грузовика, y – 2-ого грузовика, тогда:

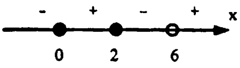
$\begin{cases}x+y=8\\\frac{60}{x}+\frac{60}{y}=32\end{cases}$; $\begin{cases}x=8-y\\15y+120-15y=8y(8-y)\end{cases}$; $9y^2-8y+15=0$;

$\begin{cases}y=3\\x=5\end{cases}$ или $\begin{cases}y=5\\x=3\end{cases}$.

Ответ. 3 т и 5 т.

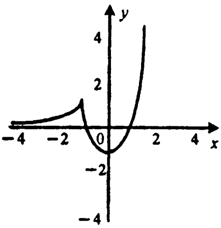
Вариант 4.

1. $\begin{cases} x-4 \le 3x+1 \\ 2+7x > 4x-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge -2{,}5 \\ x > -1 \end{cases}$; $x > -1$.



2. $y = \sqrt{\dfrac{4x}{6-x} - x}$; ОДЗ : $\dfrac{x^2-2x}{x-6} \le 0$; $\dfrac{x(x-2)}{x-6} \le 0$;

$x \in (-\infty; 0] \cup [2; 6)$.



3. $y = \begin{cases} 1/x^2, & x \le -1, \\ 2x^2-1, & x > -1. \end{cases}$ Возрастает при $x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$, убывает при $x \in [-1; 0]$, y_{max} - не существует, $y_{min} = y(0) = -1$.

4. $\left(\dfrac{\cos t}{1-\sin t} - \dfrac{1}{\operatorname{ctg} t}\right)\cos^2 t = \dfrac{\cos^2 t - \sin t + \sin^2 t}{\cos t(1-\sin t)}\cos^2 t = \cos t$; $\cos\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

5. $\begin{cases} y = x^3 & \text{– кубическая парабола возрастает на } R; \\ x^2 + y^2 = 4 & \text{– окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом 2.} \end{cases}$

Отсюда следует, что система имеет 2 решения.

6. $\begin{cases} a_2 + a_6 = -2 \\ a_3 a_5 = -15 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1 = -1-3d \\ (a_1+2d)(a_1+4d) = -15 \end{cases}$; $d^2 - 1 = 15$, $d^2 = 16$.

$d = 4$ - не подходит, значит, $a_1 = 11$. *Ответ.* $a_1 = 11$

7. Пусть x км пути ремонтировала первая бригада, y – вторая, тогда:

$\begin{cases} \dfrac{10}{x} = \dfrac{10}{y} + 1 \\ x + y = 4{,}5 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 4{,}5 - y \\ 10y = 45 - 10y + 4{,}5y - y^2 \end{cases}$;

$y^2 + 31y - 90 = 0$.

$y = -18$ - не подходит, значит, $y = 2{,}5$; $x = 2$. *Ответ:* 2 км и 2,5 км.

ПРИЛОЖЕНИЕ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1

1. $\sqrt{12+4x-x^2}$; ОДЗ : $x^2 - 4x - 12 \le 0$; $(x+2)(x-6) \le 0$; $x \in [-2; 6]$

2. $\begin{cases} 4(x-2)-2x<3 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{x-1}{2}<1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x<11 \\ 2x-3x+3<6 \end{cases}$; $\begin{cases} x<5{,}5 \\ x>-3 \end{cases}$; $x\in(-3;5{,}5)$.

3. $\dfrac{3}{x}>1$; $\dfrac{x-3}{x}<0$; $x\in(0;3)$, значит целыми решениями будут $x=1$ и $x=2$

Вариант 2

1. $\sqrt{x^2+9x+14}$; ОДЗ: $x^2+9x+14\ge 0$; $(x+7)(x+2)\ge 0$;
$x\in(-\infty;-7]\cup[-2;+\infty)$.

2. $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{x+3}{3}>1 \\ 2x-5(1+x)<0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x+4x+12>12 \\ -3x<5 \end{cases}$; $\begin{cases} x>0 \\ x>-1\dfrac{2}{3} \end{cases}$; $x\in(0;\infty)$.

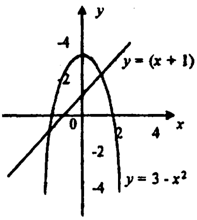
3. $\dfrac{4}{x-1}>2$; $\dfrac{2x-6}{x-1}<0$; $x\in(1;3)$; значит целым решением является $x=2$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1

1. $\begin{cases} y=3-x^2 \\ x-y+1=0 \end{cases}$; $\begin{cases} y=3-x^2 \\ y=x+1 \end{cases}$.

***Ответ*:** $(-2;-1)$ $(1;2)$

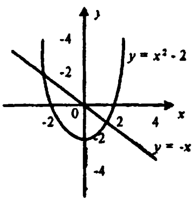


2. $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x-y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=3+y \\ 2y^2+6y+4=0 \end{cases}$;

$y^2+3y+2=0$; $\begin{cases} y=-2 \\ x=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$.

Ответ: $(1;-2)$ $(2;-1)$

Вариант 2



1. $\begin{cases} x+y=0 \\ y=x^2-2 \end{cases}$; $\begin{cases} y=-x^2 \\ y=x^2-2 \end{cases}$.

Ответ: $(-2;2)$; $(1;-1)$.

2. $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x-y=5 \end{cases}$; $\begin{cases} x=5+y \\ 2y^2+10y+8=0 \end{cases}$; $y^2+5y+4=0$; $\begin{cases} y=-4 \\ x=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} y=-1 \\ x=4 \end{cases}$

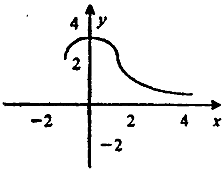
Ответ: $(1;-4)$; $(4;-1)$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1

1. $y=\dfrac{\sqrt{4-3x-x^2}}{x+2}$; ОДЗ : $\begin{cases} x^2+3x-4\le 0 \\ x+2\ne 0 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+4)(x-1)\le 0 \\ x\ne -2 \end{cases}$,

$x\in[-4;-2)\cup(-2;1]$.



2. $y=\begin{cases} 3-x^2, & -1\le x\le 1, \\ 2/x, & 1<x\le 4. \end{cases}$

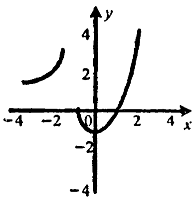
Убывает при $x\in[0;4]$, возрастает: $x\in[-1;0]$.

$y_{max}=y(0)=3$, $y_{min}=y(4)=1/2$.

Вариант 2

1. $y=\dfrac{\sqrt{x^2+6x-7}}{x+4}$; ОДЗ : $\begin{cases} x^2+6x-7\ge 0 \\ x\ne -4 \end{cases}$; $\begin{cases} (x-1)(x+7)\ge 0, \\ x\ne -4. \end{cases}$

$x\in(-\infty;-7]\cup[1;+\infty)$.

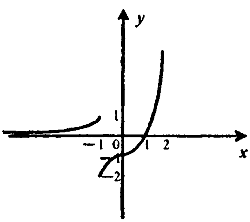


2. $y=\begin{cases} -3/x, & -3\le x\le -1, \\ x^2-1, & -1<x\le 3. \end{cases}$

Возрастает при $x\in[-3;-1]\cup[0;3]$, убывает при $(-1;0]$, $y_{max}=y(3)=8$, $y_{min}=y(0)=-1$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1



1. $y=f(x)$

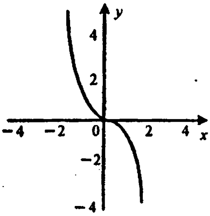
$f(x)=\begin{cases} 1/x^2, & \text{если } x\le -1, \\ x^3-1, & \text{если } x>-1. \end{cases}$

Возрастает на R, в точке $x=-1$ — разрыв,

y_{max} не существует, $y_{min}=y(-1)=-2$.

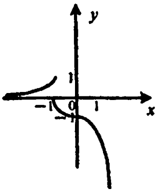
2. $f(x)=x^{11}$

а) $f(13,4)<f(13,6)$; б) $f(-7,2)<f(-4,1)$; в) $f(-2,7)<f(2,7)$.



3. а) $y=-2x^3$; б) $-2x^3=x-3$ имеет один корень.

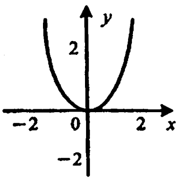
Вариант 2



1. $f(x)=\begin{cases}1/x^4, & \text{если } x\le -1,\\ -x^3-1, & \text{если } x>-1.\end{cases}$ (В книге опечатка, вместо $x\ge 11$, $x>-1$) Возрастает при $x\in(-\infty;-1]$, убывает при $x\in(-1;+\infty]$, $y_{\max}=y(-1)=1$, $y_{\min}$ — не существует.

2. $f(x)=x^8$;

а) $f(16,8)>f(16,2)$; б) $f(-3,2)>f(-2,9)$; в) $f(-8,3)=f(8,3)$.



3. а) $y=x^4$; б) $x^4=x+5$ - имеет 2 корня.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Вариант 1

1. 1,3; 1,6; 1,9...

$a_1=1,3$; $d=0,3$; $a_9=1,3+8\cdot 0,3=3,7$.

2. $\frac{2}{9}$; $\frac{2}{3}$; 2... $b_1=\frac{2}{9}$; $q=3$; $b_7=\frac{2}{9}\cdot 3^6=162$.

3. $\begin{cases}a_2+a_5=11\\ a_3=a_1+6\end{cases}$; $\begin{cases}d=3\\ 2a_1+15=11\end{cases}$, $a_1=-2$, $a_2=1$, $a_4=7$

Ответ: $a_2=1$, $a_4=7$.

Вариант 2

1. 8,4; 8; 7,6... $a_1=8,4$; $d=-0,4$; $a_{11}=8,4-10\cdot 0,4=4,4$.

2. $\frac{3}{32}$; $\frac{3}{16}$; $\frac{3}{8}$... $b_1=\frac{3}{32}$; $q=2$; $b_9=\frac{3}{32}\cdot 2^8=24.$

3. $\begin{cases} a_3+a_6=2 \\ a_4=a_1+6 \end{cases}$; $\begin{cases} d=2 \\ 2a_1+14=2 \end{cases}$; $\begin{matrix} a_1=-6, \\ a_5=2. \end{matrix}$ ***Ответ:*** $a_1=-6$, $a_5=2.$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Вариант 1

1. а) $\cos\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$; б) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}+3=2{,}5$;

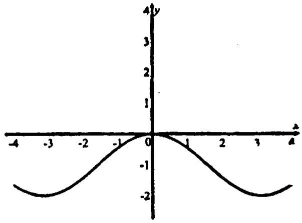
в) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{2}+\cos\frac{5\pi}{3}=-1+1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

2. $\sin\frac{25\pi}{8}\cos\frac{9\pi}{5}=\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\pi+\frac{4\pi}{5}\right)=-\sin\frac{\pi}{8}\cdot\left(-\cos\frac{4\pi}{5}\right)=$

$=\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{4\pi}{5}<0$, т.к. $\sin\frac{\pi}{8}>0$, $\frac{\pi}{8}\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\frac{4\pi}{5}<0$, $\frac{4\pi}{5}\in\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$

3. $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $t=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k.$

4.



Вариант 2

1. а) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}-2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}-\sqrt{3}=0$; б) $4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2-1=1$;

в) $\sin\frac{13\pi}{6}+\cos\frac{9\pi}{2}+\operatorname{tg}\frac{17\pi}{4}=\frac{1}{2}+0+1=\frac{3}{2}.$

2. $\operatorname{tg}\frac{29\pi}{4}\sin\frac{16\pi}{7}=\operatorname{tg}\left(7\pi+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{7}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}>0$, т.к. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}>0$, $\frac{\pi}{4}\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\frac{2\pi}{7}>0$, $\frac{2\pi}{7}\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right].$

3. $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n.$

4.