

# **Решение контрольных и самостоятельных работ по геометрии за 9 класс**

к пособию «Дидактические материалы по геометрии  
для 9 класса общеобразовательных учреждений

Гусев В.А., А.И. Медяник А.И.

7-е изд.

М.: Просвещение, 2001»

*Учебно-методическое пособие*

## Самостоятельные работы

### Вариант 1.

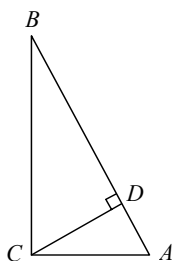
#### С-1.

1. Постройте луч  $OA$ . Отложите от точки  $A$  отрезок  $AA' = AO$ .
2. Т.к.  $\frac{b}{b'} = 2$ , то  $a' = \frac{1}{2}a = 2,5$  см и  $c' = \frac{1}{2}c = 1,75$  см.

#### С-2.

1. Треугольники подобны по трем сторонам, т.к.  $\frac{7,5}{2,5} = \frac{6}{20} = \frac{7,2}{24}$ .
2. Т.к. углы при основании равнобедренных треугольников равны, то они подобны по 2-м углам.

#### С-3.



1.  $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$  см;  
 $\angle BCD = 90^\circ - \angle CBD = \angle BAC$ , значит,  $\triangle CBD$  и  $\triangle ADC$  подобны по двум углам, следовательно,  
 $\frac{AD}{AC} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AC \cdot CD}{AD} = \frac{10 \cdot 2\sqrt{21}}{4} = 5\sqrt{21}$  см.  
По теореме Пифагора в  $\triangle ABC$  находим,  
 $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{525 + 100} = 25$  см.
2. Т.к.  $CD^2 = AD \cdot BD$ , то  $CD = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$  см.

#### С-4.

1.  $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \cdot 88^\circ = 44^\circ$ , по свойствам окружности.
2. Т.к.  $M$  — центр окружности, то  $BC$  — диаметр  $\Rightarrow \angle A = 90^\circ \Rightarrow \Rightarrow \angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$ .

#### С-5.

1. Строим точку  $A'$  симметричную точке  $A$  относительно точки  $C$  с коэффициентом 2 и точку  $B'$  симметричную точке  $B$  относительно точки  $O$  с коэффициентом 2. Проводим луч  $A'B'$ .
2. Т.к.  $MK \parallel AC$ , то  $\angle BMK = \angle BAC$  (как соответственные)  $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MBC$  по 2-м углам ( $\angle ABC$  — общий)  $\Rightarrow \frac{4}{7} = \frac{8}{AB} \Rightarrow AB = \frac{8 \cdot 7}{4} = 14$  см.
3.  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  по 2-му признаку  $\Rightarrow \frac{AC}{A_1C_1} = 2,5 \Rightarrow A_1C_1 = 4$  см.

**С-6.**

1. По теореме косинусов имеем:

$$14^2 = 9^2 + 12^2 - 2 \cdot 9 \cdot 12 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{9^2 + 12^2 - 14^2}{2 \cdot 9 \cdot 12} = \frac{29}{216} > 0 \Rightarrow \alpha \text{ — острый.}$$

2. Т.к. острый угол равен  $52^\circ$ , то тупой —  $128^\circ \Rightarrow$  диагональ равна

$$\sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos 128^\circ} = \sqrt{41 - 40 \cos 128^\circ} \approx 8 \text{ см.}$$

**С-7.**

1. По теореме синусов:  $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle B} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin \angle B}{\sin \angle C} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2} \text{ см.}$

2. Т.к.  $PQ$  — меньшая сторона, то  $\angle PRQ$  — наименьший, а сторона  $PR$  — наибольшая, то  $\angle PQR$  — наибольший.

**С-8.**

1.  $\angle C = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ < \angle B \Rightarrow AB < AC$ . (т.к. в треугольнике против меньшей стороны лежит меньший угол).

2. По теореме косинусов:  $\cos \alpha = \frac{15^2 + 8^2 - 17^2}{2 \cdot 8 \cdot 15} = 0 \Rightarrow \alpha = \arccos 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$ .

**С-9.**

1. Пусть половина меньшего угла равна  $x$ , тогда  $2x + 2x + 3x + 5x = 360^\circ \Rightarrow x = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ \Rightarrow 60^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 150^\circ$  — углы четырехугольника.

2. Пусть  $n$  число сторон многоугольника, тогда сумма внутренних углов равна  $180^\circ n - 360^\circ$ , а сумма внешних —

$$180^\circ n - (180^\circ n - 360^\circ) = 360^\circ \Rightarrow 2 \cdot (180^\circ \cdot n - 360^\circ) = 360^\circ \Rightarrow n = \frac{3 \cdot 360^\circ}{360^\circ} = 3.$$

**С-10.**

1. Т.к. радиус вписанной окружности равен 1, то сторона равна 2  $\Rightarrow$  диаметр описанной окружности по теореме Пифагора равен  $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$  см, следовательно, радиус равен  $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$  см.

2. Проведите прямую через центр окружности, затем перпендикулярную к ней, затем соедините точки пересечения прямых с окружностью.

**С-11.**

1.  $l = 2\pi r = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$  см.

2. Т.к. радиус вписанной окружности пропорционален стороне квадрата, то они также и относятся  $\Rightarrow 3:1$ .

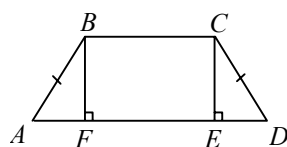
**С-12.**

1. По теореме косинусов меньшая диагональ равна  $\sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 120^\circ} = a\sqrt{3}$ , тогда по теореме Пифагора большая диагональ равна  $\sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$ .
2.  $l = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = \pi$  см.

**С-13.**

1. Т.к. меньшая высота опирается на большую сторону, то  $S = 6 \cdot 3 = 18$  см  $\Rightarrow$  другая высота равна  $\frac{S}{4} = \frac{9}{2} = 4,5$  см.
2. Постройте треугольник. Измерьте его стороны и воспользуйтесь формулой Герона:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , где  $p$  — полупериметр,  $a$ ,  $b$  и  $c$  — стороны треугольника.

**С-14.**



1.  $AF=ED=BF$  (т.к.  $\angle A = \angle D = 45^\circ$ )  $\Rightarrow BC=FE = AD - AF - ED = AD - 2BF = 70 - 2 \cdot 10 = 50$  см.

$$S = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 10 = 600 \text{ см}^2.$$

2. Постройте трапецию и ее высоту. Измерьте их и воспользуйтесь формулой  $S = \frac{1}{2} (a + b) \cdot h$ , где  $a$  и  $b$  — длины оснований, а  $h$  — длина высоты.

**С-15.**

1. Т.к. коэффициент подобия  $k = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ , то остальные стороны равны  $8 \cdot k = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$  см;  $16 \cdot k = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$  см и  $12 \cdot k = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$  см, а площадь второго четырехугольника меньше площади первого в  $\frac{1}{k^2} = 4$  раза.

2.  $k = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = k^2 \Rightarrow S_1 = S_2 \cdot k^2 = 50 \cdot \frac{9}{4} = 25 \cdot 9 = 225 \text{ см}^2.$

**С-16.**

1. Т.к.  $l = 2\pi r$ , то  $r = \frac{l}{2\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \pi r^2 \approx \frac{1}{4} \cdot 3,14 = \frac{314}{400} = \frac{157}{200} = 0,785 \text{ см}^2.$
2.  $S = a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AL \cdot AK - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi AL^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{\pi a^2}{8} = a^2 \left( \frac{3}{4} - \frac{\pi}{8} \right).$

**С-17.**

1. Пусть стороны прямоугольника равны  $8x$  и  $15x$ , тогда по теореме Пифагора  $34^2 = 64x^2 + 225x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{34^2}{64 + 225} = \frac{1156}{289} = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$  стороны равны  $16$  см и  $30$  см  $\Rightarrow S = 16 \cdot 30 = 480$  см<sup>2</sup>.
2.  $S = \pi(r_1^2 - r_2^2) = \pi(4r_2^2 - r_2^2) = 3\pi r_2^2 = 6 \Rightarrow r_2^2 = \frac{2}{\pi} \Rightarrow r_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$  м  $\Rightarrow r_1 = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$  м.

**Вариант 2.**

**С-1.**

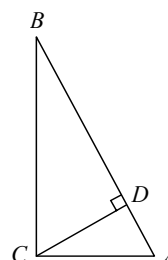
1. Постройте середины отрезков  $AO$  и  $BO$ . Эти точки — искомые.
2. Коэффициент подобия  $k = \frac{1,5}{4} \Rightarrow$  стороны равны  $7 \cdot \frac{1,5}{4} = 2,625$  см;
- $5 \cdot \frac{1,5}{4} = 1,875$  см и  $4 \cdot \frac{1,5}{4} = 1,5$  см.

**С-2.**

1.  $P_1 = 3 + 4 + 6 = 13 \Rightarrow k = \frac{P_2}{P_1} = \frac{58,5}{13} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  стороны равны  $4 \cdot \frac{58,5}{13} = 18$  см,  $3 \cdot \frac{58,5}{13} = 13,5$  см и  $6 \cdot \frac{58,5}{13} = 27$  см.
2. Т.к. тупой угол равен  $180^\circ - 54^\circ - 18^\circ = 108^\circ \Rightarrow$  один из углов в отсеченном треугольнике равен  $54^\circ \Rightarrow$  треугольники подобны по двум углам, т.к. еще один угол — общий.

**С-3.**

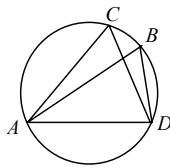
1. Т.к.  $\angle C = 90^\circ$ , то  $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{36 \cdot 64} = 48$  см  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow AC = \sqrt{48^2 + 36^2} = 60$  см, а  $BC = \sqrt{48^2 + 54^2} = 80$  см.
2. Т.к.  $CD^2 = BD \cdot AD$ , то  
 $BD = \frac{CD^2}{AD} = \left(\frac{60}{13}\right)^2 \cdot \frac{13}{11 \cdot 13 + 1} = 1\frac{12}{13}$  см  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow AB = 11\frac{1}{13} + 1\frac{12}{13} = 13$  см. По теореме Пифагора  
 $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{50^2 + (11 \cdot 13 + 1)^2} = 12$  см  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 5$  см.



**С-4.**

1. Т.к.  $\angle ABC$  — вписанный, то  $\angle ABC = \frac{1}{2} (360^\circ - \angle AOC) = \frac{1}{2} (360^\circ - 84^\circ) = 138^\circ$ .

2.



$$\begin{aligned} \angle ABD = \angle ACD = 40^\circ &\Rightarrow \angle BAD = \\ &= 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ. \end{aligned}$$

**С-5.**

1. Разделите отрезки  $AO$ ,  $BO$  и  $CO$  пополам. Затем эти «половинки» отложите от точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  на лучах  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$ . Концы получившихся отрезков соедините.

2. Т.к.  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , то  $\angle A = \angle A_1$ , пусть  $D_1$  — точка пересечения биссектрис треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  со сторонами  $AC$  и  $A_1C_1$  — соответственно. Т.к.  $\angle B = \angle B_1$ , то  $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1 \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$  по 2-м углам  $\Rightarrow \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = k$ .

$$\text{углам} \Rightarrow \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = k.$$

3. Т.к.  $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{5}{3}$  и  $\angle A$  — общий, то  $\triangle ABC \sim \triangle HPQ \Rightarrow PQ = \frac{3}{5} \cdot BC = 6$  см.

**С-6.**

1. Т.к.  $0,3^2 + 0,4^2 = 0,5^2$ , то по теореме, обратной к теореме Пифагора, этот треугольник прямоугольный.

$$\begin{aligned} 2. \text{ По теореме косинусов: } AC &= \sqrt{BC^2 + AB^2 - 2BC \cdot AB \cdot \cos \angle B} = \\ &= \sqrt{0,5^2 + 0,6^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot 0,6 \cdot \cos 23^\circ 28'} \approx 0,24 \text{ см.} \end{aligned}$$

**С-7.**

1. По теореме синусов имеем:

$$\frac{CD}{\sin \angle M} = \frac{CM}{\sin \angle D} \Rightarrow CM = \frac{CD \cdot \sin \angle D}{\sin \angle M} = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10\sqrt{6}}{3} \text{ см.}$$

2. Нет, т.к. тогда угол, лежащий против стороны, равной 9 см, еще больше, но сумма углов треугольника равна  $180^\circ \Rightarrow$  противоречие.

**С-8.**

$$1. \text{ По теореме синусов } \Rightarrow \frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \angle A = \frac{BC \cdot \sin \angle C}{AB} = \frac{12 \cdot 0,7}{8} = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 10} = \frac{21}{20} > 1 \Rightarrow \sin C \neq 0,7.$$

2. По теореме косинусов  $RQ = \sqrt{PQ^2 + PR^2 - 2PQ \cdot PR \cdot \cos \angle P} =$   
 $= \sqrt{45^2 + 7,3^2 - 2 \cdot 45 \cdot 7,3 \cdot \cos(42^\circ 16')} \approx 39,9 \text{ см.}$

**С-9.**

1. Сумма углов выпуклого пятиугольника равна  $(5 - 2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$ , пусть его углы равны  $x$ ,  $3x$ ,  $5x$ ,  $7x$  и  $11x$ , тогда  $x + 3x + 5x + 7x + 11x = 540^\circ$ ;  $27x = 540^\circ$ ;  $x = 20^\circ$ , следовательно, искомые углы равны  $20^\circ$ ,  $3 \cdot 20^\circ = 60^\circ$ ,  $5 \cdot 20^\circ = 100^\circ$ ,  $7 \cdot 20^\circ = 140^\circ$  и  $11 \cdot 20^\circ = 220^\circ$ .

2. Сумма углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $180^\circ(n - 2)$ , сумма внешних углов равна  $180^\circ \cdot n - 180^\circ(n - 2) = 360^\circ$ , следовательно,

$$180^\circ \cdot (n - 2) = 360^\circ; 180^\circ \cdot n = 720^\circ; n = \frac{720^\circ}{180^\circ} = 4.$$

**С-10.**

1. Т.к. по теореме синусов  $R = \frac{a}{2\sin 60^\circ}$ , где  $a$  — сторона, а  $60^\circ$  — угол

правильного треугольника,  $a = 2R\sin 60^\circ = 2 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ см} \Rightarrow$  площадь

треугольника  $S = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ , а периметр  $P = 3a$ .

$$r = \frac{2 \cdot S}{P} = \frac{\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{3}{4} a} = \frac{\sqrt{3}}{6} a = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 6\sqrt{3} = 3 \text{ см.}$$

2. Постройте центральный угол в  $60^\circ$ , затем отложите от него равный ему. Повторите эту операцию еще 3 раза. В точках пересечения сторон углов с окружностью проведите касательные.

**С-11.**

1. По теореме Пифагора гипотенуза равна  $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ см}$ , поскольку центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит

на середине гипотенузы, находим  $R = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ см}$ , следовательно, длина

окружности  $l = 2\pi R = 2\pi \cdot 2,5 = 5\pi \text{ см}$ .

2. Т.к. стороны 2-го треугольника в 2 раза меньше сторон 1-го, то радиус окружности, вписанной во 2-й треугольник, в 2 раза меньше.

**С-12.**

1. Каждый из углов правильного восьмиугольника равен:

$$\frac{180^\circ \cdot (8 - 2)}{8} = 135^\circ.$$

По теореме косинусов:  $AC^2 = 2b^2(1 - \cos 135^\circ) = 2b^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

Т.к.  $\angle ABC = \angle BCD = \frac{180^\circ(8-2)}{8} = 135^\circ$ , то  $\angle BCA = \frac{180^\circ - 135^\circ}{2} = 22,5^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACD = 135^\circ - 22,5^\circ = 112,5^\circ \Rightarrow$  по теореме косинусов

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos 112,5^\circ} =$$

$$= \sqrt{2b^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b^2 - 2b^2 \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \cos 112,5^\circ} =$$

$$= b \sqrt{3 + \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = b \sqrt{1 + \sqrt{2}}.$$

2.  $\frac{1}{5} \cdot 2\pi r = 3 \Rightarrow r = \frac{15}{2\pi}$  дм.

### С-13.

1. В параллелограмме на большую сторону падает меньшая высота, значит, площадь параллелограмма  $S = 2 \cdot 5 = 10 \text{ см}^2$ , следовательно, искомая сторона равна  $\frac{S}{2,5} = 4 \text{ см}$ .

2. Необходимо измерить стороны треугольника, вычислить его полупериметр и воспользоваться формулой Герона:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , где  $a, b$ , и  $c$  — стороны треугольника,  $p$  — полупериметр.

### С-14.

1. Высота трапеции равна  $40 \cdot \sin 45^\circ = 40 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2} \text{ см} \Rightarrow$  ее площадь

равна  $\frac{1}{2}(24 + 60) \cdot 20\sqrt{2} = 840\sqrt{2} \text{ см}^2$ .

2. Построить серединный перпендикуляр к любому из оснований трапеции, измерить высоту трапеции (отрезок серединного перпендикуляра, заключенного между основаниями), измерить основания трапеции; вычислить площадь по формуле  $S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$ , где  $a$  и  $b$  — основания,  $h$  — высота.

### С-15.

1. Вычислите площадь четырехугольника по теореме Герона:

$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ , а затем умножить ее на 1000, где  $p$  — полупериметр,  $a, b, c$  и  $d$  — стороны четырехугольника.



2.  $P_1 = 11 + 3 + 6 + 7 = 27 \text{ см.} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = k = \frac{216}{27} = 8 \Rightarrow$  стороны второго четырехугольника:  $11 \cdot 8 = 88 \text{ см; } 3 \cdot 8 = 24 \text{ см; } 6 \cdot 8 = 48 \text{ см; } 7 \cdot 8 = 56 \text{ см,}$  площадь второго четырехугольника больше площади первого в  $k^2 = 8^2 = 64$  раза.

**С-16.**

1. Площадь квадрата  $S = a^2$ , где  $a$  — сторона квадрата, площадь вписанного в него круга  $S_2 = \pi r^2 = \pi \left(\frac{a^2}{2}\right)$ , значит,  $\frac{S}{S_2} = \frac{a^2}{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{\pi \cdot \frac{1}{4}} = \frac{4}{\pi}$ .
2.  $S' = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 - 3 \frac{1}{6} \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 = b^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8}\right)$

**С-17.**

1. Пусть  $DH \perp AB$  и  $CK \perp AB$ . Т.к.  $DC \parallel AB$ , то  $DH = CK \Rightarrow$   
 $\Rightarrow S(ABD) = S(CAB) = \frac{1}{2} DH \cdot AB$ , т.к.  $AB$  — их общее основание.
2. Пусть  $a$  — сторона квадрата  $\Rightarrow$  по теореме Пифагора диаметр круга равен  $a\sqrt{2}$ , тогда  $R = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow \pi R^2 = a^2 + 456 \Rightarrow \frac{\pi a^2}{2} = a^2 + 456 \Rightarrow a^2 = \frac{912}{\pi - 2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow S_{\text{круга}} = \frac{\pi a^2}{2} = \frac{456\pi}{\pi - 2} = 1256 \text{ см}^2$ .

**Вариант 3.**

**С-1.**

1. Находим середины отрезков  $CO$  и  $OD$ , пусть это будут точки  $A$  и  $B$  — соответственно, теперь ищем середины отрезков  $AO$  и  $OB$ , пусть это будут точки  $P$  и  $K$  — соответственно; при данной гомотетии точка  $C$  перейдет в точку  $P$ , а точка  $D$  перейдет в точку  $K$ .
2. Коэффициент подобия  $k = \frac{3,5}{6}$ , значит, искомые стороны равны 3,5 см,  
 $4 \cdot k = 4 \cdot \frac{3,5}{6} = \frac{7}{3} \text{ см}$  и  $3 \cdot k = 3 \cdot \frac{3,5}{6} = \frac{7}{4} \text{ см.}$

**С-2.**

1. Пусть стороны треугольника равны  $5x$ ,  $6x$  и  $8x$ , тогда стороны подобного —  $5kx$ ,  $6kx$  и  $8kx \Rightarrow 8kx - 5kx = 3kx = 15 \Rightarrow kx = 5 \Rightarrow$  искомые стороны равны  $5kx = 5 \cdot 5 = 25 \text{ см, } 6kx = 6 \cdot 5 = 30 \text{ см, } 8kx = 8 \cdot 5 = 40 \text{ см.}$
2. Пусть меньший угол равен  $x$ , тогда  $x + 3x + 6x = 180^\circ \Rightarrow x = 18^\circ \Rightarrow$  углы треугольника равны  $18^\circ$ ,  $3x = 3 \cdot 18^\circ = 54^\circ$  и  $6x = 6 \cdot 18^\circ = 108^\circ$ . Далее см. Вар. 2. С-2.2.

**С-3.**

1. Высота данного треугольника (опущенная на гипотенузу) равна (по теореме Пифагора)  $\sqrt{10^2 - 8^2} = 6$  дм, пусть проекция неизвестного катета  $x$ , тогда  $6^2 = 8 \cdot x$ ;  $x = \frac{36}{8} = 4,5$  дм; гипотенуза равна  $8 + 4,5 = 12,5$  дм, по теореме Пифагора неизвестный катет равен  $\sqrt{12,5^2 - 10^2} = 7,5$  дм.

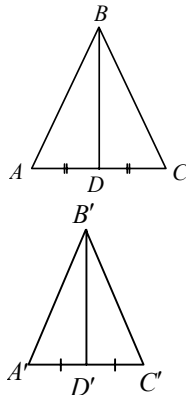
2. Пусть проекция другого катета равна  $x$ , тогда  $\left(7\frac{1}{17}\right)^2 = 13\frac{4}{17} \cdot x \Rightarrow x = \frac{120^2}{17^2} \cdot \frac{17}{225} = \frac{64}{17}$  дм, значит, гипотенуза  $13\frac{4}{17} + \frac{64}{17} = 17$  дм, по теореме Пифагора один из катетов равен  $\sqrt{\left(7\frac{1}{17}\right)^2 + \left(13\frac{4}{17}\right)^2} = 15$  дм, а оставшийся катет равен  $\sqrt{17^2 - 15^2} = 8$  дм.

**С-4.**

1. Из того, что  $\angle ABC$  — вписанный, а  $\angle AOC$  — центральный и они опираются на одну и ту же хорду, следует, что  $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = 146^\circ : 2 = 73^\circ$ .
2.  $\angle BCD = \angle ACD + \angle ADB = 70^\circ + 50^\circ = 120^\circ$  (как углы, опирающиеся на одну хорду), следовательно,  $\angle BAD = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

**С-5.**

1. Пусть точки  $M'$ ,  $C'$  и  $K'$  — середины отрезков  $MO$ ,  $CO$  и  $KO$ , соответственно, тогда при данной гомотетии  $\triangle MKC$  перейдет в  $\triangle M'K'C'$ .
- 2.



Из того, что  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ , следует, что

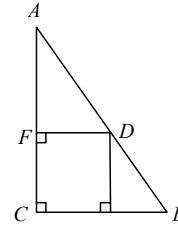
$$\angle BAD = \angle B'A'D' \text{ и } \frac{AD}{A'D'} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}A'C'} = k = \frac{AB}{A'B'},$$

следовательно,  $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$  по двум сторонам и углу, значит,  $\frac{BD}{B'D'} = \frac{AB}{A'B'} = k$ .

3.

Пусть сторона квадрата равна  $a$ . тогда из подобия треугольников  $FAD$  и  $CAB$  следует, что  $\frac{6}{a} = \frac{3}{3-a}$  или

$$\frac{a}{6} = \frac{3-a}{3} \Rightarrow a = 6 - 2a \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2 \text{ см.}$$



**С-6.**

1. По теореме косинусов  $\cos \alpha = \frac{7^2 + 8^2 - 12^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = -\frac{31}{112} < 0$ , где  $\alpha$  — угол, лежащий против стороны в 12 см, значит, данный треугольник тупоугольный.

2. По теореме косинусов  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle C} =$   
 $= \sqrt{15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos 123^\circ 17'} \approx 22 \text{ см.}$

**С-7.**

1. По теореме синусов  $\frac{KD}{\sin \angle P} = \frac{PD}{\sin \angle K} \Rightarrow KD = \frac{PD \cdot \sin \angle P}{\sin \angle K} = \frac{6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{6} \text{ см.}$

2. Не может, так как в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше каждого из катетов, а  $6 \text{ см} < 8 \text{ см}$ .

**С-8.**

1. Не может, так как тогда бы по теореме синусов  $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$ ;

$$\frac{4}{0,4} = \frac{11}{\sin B} \Rightarrow \sin B = 1,1 > 1, \text{ а синус любого угла не больше единицы.}$$

2. По теореме косинусов  $KE = \sqrt{MK^2 + ME^2 - 2MK \cdot ME \cdot \cos \angle M} =$   
 $= \sqrt{5,6^2 + 4,2^2 - 2 \cdot 5,6 \cdot 4,2 \cdot \cos(67^\circ 13')} \approx 5,55 \text{ см.}$

**С-9.**

1. Сумма углов выпуклого шестиугольника равна  $720^\circ$ , пусть углы равны  $2x, 4x, 4x, 6x, 8x$  и  $12x$ , тогда  $2x + 4x + 4x + 6x + 8x + 12x = 720^\circ$ ,  $36x = 720^\circ$ ,  $x = 20^\circ$ , значит, искомые углы равны  $2x = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$ ,  $4x = 4 \cdot 20^\circ = 80^\circ$ ,  $4x = 80^\circ$ ,  $6x = 6 \cdot 20^\circ = 120^\circ$ ,  $8x = 8 \cdot 20^\circ = 160^\circ$ ,  $12 \cdot x = 12 \cdot 20^\circ = 240^\circ$ .

2. Сумма внутренних углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $180^\circ n - 360^\circ$ , сумма внешних углов равна  $180^\circ n - 180^\circ(n - 2) = 360^\circ$ , следовательно,

$$180^\circ n - 360^\circ = 360^\circ + 180^\circ \Rightarrow n = \frac{900^\circ}{180^\circ} = 5.$$

**С-10.**

1. Пусть  $a$  — сторона 6-угольника  $\Rightarrow rtg30^\circ = \frac{a}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2rtg30^\circ = 2 \cdot 1,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow R = a = \sqrt{3}.$$

2. Проведите диаметр окружности, затем перпендикулярный ему, затем поверните эти диаметры на  $45^\circ$  и соедините точки пересечения с окружностью.

**С-11.**

1. По теореме Пифагора диаметр окружности будет равен  $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$  см. Длина искомой окружности равна  $2\pi r = \pi d = 13\pi$  см, где  $d$  — диаметр окружности.

2. Окружность, описанная около треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного равностороннего треугольника, является вписанной в данный равносторонний треугольник. Радиус окружности,

описанной около равностороннего треугольника, равен  $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ , а радиус

вписанной окружности  $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ , где  $a$  — сторона треугольника, значит,

$$\frac{R}{r} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{a}{2\sqrt{3}}} = 2 : 1$$

**С-12.**

1. Рассмотрим восьмиугольник  $ABCDMNKP$  со стороной  $b$ , так же как и в В2, С-12 по теореме косинусов  $AC^2 = 2b^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ . Треугольник  $KAC$  является

прямоугольным, так как он вписан в окружность, описанную около данного восьмиугольника, а сторона  $CK$  является диаметром этой окружности.  $AC = AK$ , т.к.  $\triangle KPA = \triangle CBA$  по первому признаку ( $KP = PA = AB = BC = b$ ,  $\angle KPA = \angle ABC = 135^\circ$ ). По теореме Пифагора  $CK = \sqrt{AK^2 + AC^2} =$

$$= \sqrt{4b^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 2b\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}, \text{ а } CK \text{ и есть искомая диагональ.}$$

$$2. 2\pi r = 4 \cdot \frac{360^\circ}{250^\circ} \Rightarrow r = \frac{72}{25\pi} \text{ дм.}$$

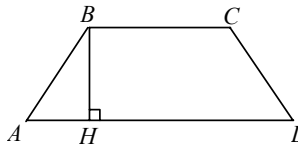
**С-13.**

$$1. S = a \cdot h \Rightarrow h = \frac{S}{a} = \frac{24}{6} = 4 \text{ см.}$$

2. см. Вар. 1.

**С-14.****1.**

Рассмотрим трапецию  $ABCD$  и высоту  $BH$ ,  
 пусть  $AB = 20$  см,  
 $BC = 12$  см и  $AD = 30$  см, тогда  
 $\angle ABH = \angle ABC - \angle HBC =$   
 $= 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$ ; из прямоугольного



$\triangle ABH$  находим  $BH = AB \cdot \cos \angle ABH = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$  см. Итак,

$$S = \frac{1}{2} BH \cdot (AD + BC) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (30 + 12) = 210 \text{ см}^2.$$

**2.** См. В2, С-14.2.**С-15.****1.** Вычислить площадь четырехугольника по формуле Герона:

$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ , а затем умножить ее на 5000, где  $p$  — полупериметр четырехугольника,  $a, b, c$  и  $d$  — стороны четырехугольника.

**2.** Пусть коэффициент подобия равен  $k$ , тогда  $2k + 5k = 28$ ,  $7k = 28$ ,  $k = 4$ ; стороны второго четырехугольника равны  $2k = 2 \cdot 4 = 8$  см,  $3k = 3 \cdot 4 = 12$  см,  $4k = 4 \cdot 4 = 16$  см,  $5k = 5 \cdot 4 = 20$  см, а площадь второго четырехугольника больше площади первого четырехугольника в  $k^2 = 4 \cdot 4 = 16$  раз.

**С-16.**

**1.** Пусть сторона квадрата  $a$ , тогда диагональ квадрата, которая является диаметром описанной окружности, равна  $a\sqrt{2}$ , а радиус равен  $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Площадь квадрата  $S = a^2$ , а площадь круга  $S_1 = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{2}$ , тогда  $\frac{S}{S_1} = \frac{a^2}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{2}{\pi}$ .

$$2. S' = 2a \cdot a - 2 \cdot \frac{1}{2} \pi \left( \frac{a}{2} \right)^2 = 2a^2 - \frac{\pi a^2}{4}.$$

**С-17.**

**1.** Пусть  $BH$  — высота, опущенная из точки  $B$  на прямую  $AC$ , диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, значит,  $AO = OC$ .

Площади треугольников  $ABO$  и  $CBO$  соответственно равны  $S_1 = \frac{1}{2} BH \cdot AO$

и  $S_2 = \frac{1}{2} BH \cdot OC$ , получим  $S_1 = S_2$ , так как  $AO = OC$ .

2. Пусть сторона квадрата  $a$ , тогда радиус круга  $r = \frac{a}{2}$ , площадь круга  $S_1 = \pi r^2 = \frac{\pi a^2}{4}$ , площадь квадрата  $S_2 = a^2$ , следовательно,  $\frac{\pi a^2}{4} + 86 = a^2$ , откуда  $a^2 = \frac{344}{4 - \pi}$ , теперь  $S_1 = \frac{\pi \cdot 344}{4(4 - \pi)} = \frac{86\pi}{4 - \pi} \approx 314 \text{ см}^2$ .

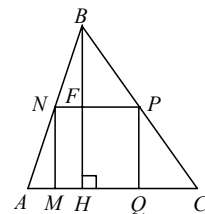
#### Вариант 4.

##### С-1.

1. Пусть точки  $E, G$  и  $K$  — середины отрезков  $AB, AC$  и  $AD$ , соответственно, точки  $F, N$  и  $M$  — середины отрезков  $AE, AG$  и  $AK$ , а точки  $X, Y$  и  $Z$  — середины отрезков  $FE, NG$  и  $MK$ , соответственно. Четырехугольник  $AXYZ$  — искомый.

2. Отношение другой стороны к диагонали — это синус угла между другой стороной и диагональю. С помощью тригонометрического круга постройте этот угол и отложите от данной стороны. В другом конце данной стороны проведите перпендикуляр. Через точку их пересечения проведите прямую, параллельную данной стороне. Затем еще один перпендикуляр через другой конец данной стороны.

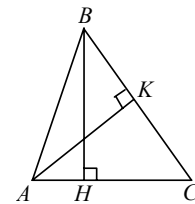
##### С-2.



1.  $\triangle ABC \sim \triangle NBP$  по двум углам ( $\angle ABC$  — общий,  $\angle BPN = \angle BCA$ , как соответственные при пересечении параллельных прямых  $AC$  и  $NP$  секущей  $BC$ )  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AC}{NP} = \frac{BH}{BF} = \frac{BH}{BH - FH} = \frac{BH}{BH - NP} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC \cdot BH - AC \cdot NP = BH \cdot NP \Rightarrow NP = \frac{AC \cdot BH}{BH + AC} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8} \text{ см.}$$



2.  $\triangle AKC$  и  $\triangle BHC$  — прямоугольные  $\Rightarrow$  они подобны, т.к. имеют общий угол  $C$ .

##### С-3.

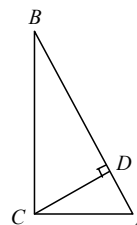
1. По теореме Пифагора гипотенуза равна  $\sqrt{9^2 + 40^2} = 41$  дм. Площадь прямоугольного треугольника с одной стороны равна половине произве-

дения катетов, т.е.  $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 40 = 180 \text{ дм}^2$ , а с другой стороны половине про-

изведения высоты на гипотенузу, откуда высота равна  $\frac{2 \cdot 180}{41} = 8 \frac{32}{41} \text{ дм}^2$ .

2. Повторяя рассуждения, проведенные в предыдущей задаче, получаем:

$$CD = \frac{2S}{AB} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ где } S = \frac{1}{2}ab, \text{ а } AB = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

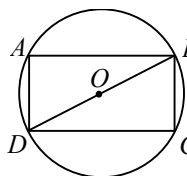


#### С-4.

1.  $\angle AOC = 360^\circ - 2 \cdot \angle ABC = 360^\circ - 2 \cdot 99^\circ = 162^\circ$ .

2. Т.к.  $BO = OD = OP$ , то  $\angle OBA = \angle OAB = \alpha$  и  $\angle OAD = \angle ODA = \beta$ , т.к.  $\angle A = 90^\circ$ , то  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Т.к.  $\angle OBD + \angle A + \angle ODA = 180^\circ$ , то точки  $B$ ,  $O$  и  $D$  лежат на одной прямой  $\Rightarrow BD$  — диаметр.

Т.к.  $\angle C = 90^\circ$  и опирается на диаметр, то точка  $C$  лежит на окружности.



#### С-5.

1. Пусть точки  $A$  и  $B$  при гипотезе с центром точки  $O$  и коэффициентом, равным  $k$ , переходят в точки  $C$  и  $D$ , соответственно, тогда  $\triangle AOB \sim \triangle COD$  с коэффициентом подобия, равным  $k$ , по 2-му признаку  $\Rightarrow CD \parallel AB$ .

2. Пусть  $h_a$  — высота, проведенная к стороне  $a$ ,  $h_b$  — высота, проведенная к стороне  $b$ , тогда площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}h_a \cdot a = \frac{1}{2}h_b \cdot b, \text{ откуда } \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}.$$

3. Т.к.  $\frac{AB}{AE} = \frac{15}{6} = \frac{20}{8} = \frac{AC}{AD}$  и  $\angle A$  — общий, то  $\triangle ABC \sim \triangle AED \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{BC}{ED} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \Rightarrow ED = \frac{2}{5}BC = \frac{2}{5} \cdot 30 = 12 \text{ м.}$$

#### С-6.

1. Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол; из теоремы косинусов, косинус наибольшего угла будет равен

$$\frac{8^2 + 10^2 - 12^2}{2 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{1}{8} > 0, \text{ следовательно, треугольник остроугольный.}$$

2. Пусть конец вектора силы  $P$ , приложенной к точке  $O$ , есть точка  $B$ , приложим силу  $Q$  к точке  $B$ , пусть конец вектора этой силы будет точка  $C$ , то-

гда  $\angle OBC = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$ . По теореме косинусов равнодействующая

$$OC = \sqrt{OB^2 + BC^2 - 2 \cdot OB \cdot BC \cdot \cos \angle OBC} = \\ = \sqrt{100^2 + 200^2 - 2 \cdot 100 \cdot 200 \cdot \cos 130^\circ} = 275,16 \text{ H}.$$

Из треугольника  $OBC$  по теореме синусов

$$\frac{BC}{\sin \angle BOC} = \frac{OC}{\sin \angle OBC} \Rightarrow \sin \angle BOC = \frac{BC}{OC} \cdot \sin \angle OBC \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle BOC = \arcsin \left( \frac{200}{275,16} \cdot \sin 130^\circ \right) \approx 35^\circ 50'.$$

### С-7.

1. Сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , пусть  $\angle K = 4x$ ,  $\angle L = 2x$ ,  $\angle M = 3x$ , тогда  $4x + 2x + 3x = 180^\circ$ ,  $9x = 180^\circ$ ,  $x = 20^\circ$ , следовательно,  $\angle K = 4 \cdot 20^\circ = 80^\circ$ ,  $\angle L = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$ ,  $\angle M = 3 \cdot 20^\circ = 60^\circ$ .

По теореме синусов  $\frac{KL}{\sin \angle M} = \frac{LM}{\sin \angle K} = \frac{KM}{\sin \angle L}$ , следовательно,

$$KL = \frac{LM \cdot \sin \angle M}{\sin \angle K} = \frac{8 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 7 \text{ см}, \text{ а } KM = \frac{LM \cdot \sin \angle L}{\sin \angle K} = \frac{8 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 5,2 \text{ см}.$$

2. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, следовательно, если угол, противолежащий стороне 4 см, больше  $60^\circ$ , то сумма углов треугольника больше  $180^\circ$ , противоречие, ведь сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , следовательно, угол, противолежащий стороне 4 см, не может быть больше  $60^\circ$ .

### С-8.

1. Пусть стороны параллелограмма равны  $a$  и  $b$ , а острый угол равен  $\alpha$ , тогда по теореме косинусов диагонали равны  $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$  и  $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\pi - \alpha)} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$ , т.к. диагональ против тупого угла больше.

2. По теореме синусов  $\frac{PQ}{\sin A} = \frac{AP}{\sin Q} = \frac{AQ}{\sin P} \Rightarrow \angle Q = \arcsin \left( \frac{AP}{PQ} \sin A \right)$ , то-

гда  $\angle P = 180^\circ - \angle A - \angle Q \approx 62^\circ 6'$ , а сторона  $AQ = \frac{PQ \cdot \sin P}{\sin A} \approx 8 \text{ см}.$

### С-9.

1. Пусть у выпуклого пятиугольника четыре прямых угла, сумма всех углов выпуклого пятиугольника  $180^\circ(5 - 2) = 540^\circ$ , сумма четырех прямых углов  $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$ , следовательно, пятый угол равен  $540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$ , что противоречит тому, что пятиугольник выпуклый.

2. Сумма углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $180^\circ n - 360^\circ$ , сумма его внешних углов  $180^\circ n - (180^\circ n - 360^\circ) = 360^\circ$ , следовательно,  $180^\circ n - 360^\circ = 360^\circ + 720^\circ$ ;  $180^\circ n = 1440^\circ$ ;  $n = 8$ .



**С-10.**

1. Радиус вписанной окружности является высотой треугольника, составленного из стороны восьмиугольника и двух радиусов описанной окружности, проведенным к концам этой стороны, угол при вершине этого равнобедренного треугольника равен  $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ ,

$$h = r = R \cdot \cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = 2 \cdot \cos 22^\circ 30' = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \text{ см.}$$

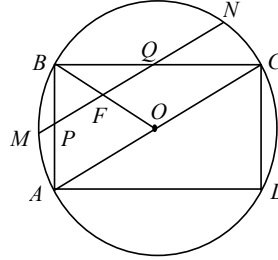
2.

$\triangle PBQ \sim \triangle ABC$  по 2-му признаку  $\Rightarrow MN \parallel AC$

$$\text{и } BF = FO = \frac{R}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MN = 2FN =$$

$$= 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R = \sqrt{3} R = 3\sqrt{3} \text{ см.}$$



**С-11.**

$$1. R = \frac{a}{2 \sin 60^\circ} = \frac{4}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ см. } r = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ см, тогда длина описанной}$$

$$\text{окружности } L = 2\pi R = 2\pi \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3} \text{ см, а длина вписанной окруж-}$$

$$\text{ности } l = 2\pi r = 2\pi \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3} \text{ см.}$$

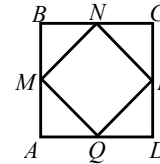
2.  $\triangle MBN = \triangle NCP = \triangle PDQ = \triangle QAM$  по 2-м катетам  $\Rightarrow$

$\Rightarrow MN = NP = PQ = QM \Rightarrow MNPQ$  — ромб

$\angle BNM = \angle CNP = 45^\circ \Rightarrow \angle MNP = 90^\circ \Rightarrow MNPQ$  — квадрат.

$$\text{Пусть } BC = a, \text{ тогда } MN = \frac{\sqrt{2}a}{2} \Rightarrow r_1 = \frac{a}{2}, \text{ а } r_2 = \frac{\sqrt{2}a}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{2}, \text{ а } R_1 = \sqrt{2}a \text{ и } R_2 = \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}a}{2} = a \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{2}.$$



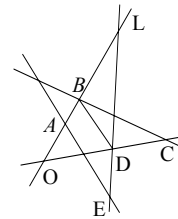
**С-12.**

1.

$$\angle A = \frac{180^\circ(5-2)}{5} = \frac{180^\circ \cdot 3}{5} = 108^\circ = \angle D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle OAE = \angle OEA = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle O = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ.$$



По теореме косинусов из  $\triangle BOD$  получаем, что  $d^2 = 2a^2 (1 - \cos 36^\circ)$ , где  $LD = OB = OD = a$ , следовательно,  $a^2 = \frac{d^2}{2(1 - \cos 36^\circ)}$ , теперь из  $\triangle OLD$  по теореме косинусов получаем, что

$$OL = \sqrt{OD^2 + LD^2 - 2OD \cdot LD \cdot \cos \angle D} = \sqrt{2a^2(1 - \cos 108^\circ)} = d \sqrt{\frac{1 - \cos 108^\circ}{1 - \cos 36^\circ}}.$$

2. Пусть  $r$  — радиус окружности, тогда  $2\pi r \cdot \frac{240^\circ}{360^\circ} = 4 \Rightarrow r = \frac{3}{\pi}$  м.

По теореме косинусов из треугольника, образованного хордой и радиусами, проведенными к ее концам, находим длину хорды

$$l = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos(360^\circ - 240^\circ)} = r \sqrt{2\left(1 + \frac{1}{2}\right)} = r\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \text{ м.}$$

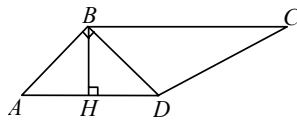
### С-13.

1. Пусть высота равна  $x$ , тогда сторона равна  $3x \Rightarrow S = 3x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{S}{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = 4 \Rightarrow \text{высота равна } 4 \text{ см, а сторона } 3x = 3 \cdot 4 = 12 \text{ см.}$$

2. 1 способ: см. Вар. 2. 2 способ: постройте одну из высот, измерьте ее и воспользуйтесь формулой  $S = \frac{1}{2} a \cdot h$ , где  $a$  — сторона, на которую опущена высота, а  $h$  — высота.

### С-14.



$$1. AB = BD = AD \cdot \cos 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow$$

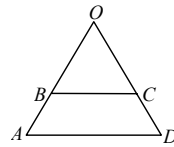
$$BH = BD \cdot \cos 45^\circ = 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \text{ см} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} BH(AD + BC) = \frac{1}{2} \cdot 5(10 + 20) = 75 \text{ см}^2.$$

2. 1 способ: см. Вар. 2.

2 способ: постройте середины боковых сторон, проведите среднюю линию трапеции и высоту к одному из оснований, измерьте их и воспользуйтесь формулой  $S = \frac{1}{2} s \cdot h$ , где  $s$  — средняя линия, а  $h$  — высота.

### С-15.



1. Т.к.  $S(BOC) = S(ABCD)$ , то  $S(AOD) = 2S(BOC)$ , т.к.  $\triangle BOC \sim \triangle AOD$  по двум углам ( $\angle AOD$  — общий,  $\angle OCB = \angle ODA$  как соответственные при пересечении параллельных прямых  $BC$  и  $AD$  секущей  $OD$ ),

$$k^2 = \frac{S(BOC)}{S(AOD)} = \frac{1}{2}; k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{BC}{AD}, \text{ где } k \text{ — коэффициент подобия.}$$

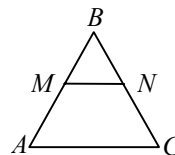
2.  $\triangle ABC \sim \triangle MBN$  (см. предыдущую задачу), а  $k = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S(\triangle ABC) = \frac{25}{9} S(\triangle MBN).$$

$$S(\triangle MNC) = S(\triangle ABC) - S(\triangle MBN) = \frac{16}{9} S(\triangle MBN) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(\triangle MNC) - S(\triangle MBN) = \frac{16}{9} S(\triangle MBN) - S(\triangle MBN) = \frac{7}{9} S(\triangle MBN) = 69 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(\triangle MBN) = \frac{69 \cdot 9}{7} \text{ см}^2 \Rightarrow S(\triangle ABC) = \frac{25}{9} \cdot \frac{69 \cdot 9}{7} \approx 246,4 \cdot \text{см}^2$$



### C-16.

$$1. r = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{S_6}{S_K} = \frac{6 \cdot a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}}{\pi r^2} = \frac{6\sqrt{3}a^2}{\frac{3\pi a^2}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}.$$

$$2. S' = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi a^2 = a^2 \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3} \pi \right).$$

### C-17.

1.  $S(\triangle AOD) = S(\triangle ADB) - S(\triangle AOB) = S(\triangle ACB) - S(\triangle AOB) = S(\triangle COB)$ , данное равенство выполняется, т.к.  $S(\triangle ADB) = S(\triangle ACB)$ .

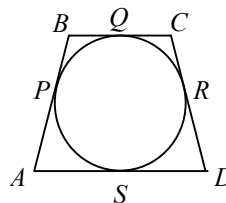
В задаче использовался результат, полученный в Вар. 2. C-17.1.

2. Пусть  $BP = BQ = CQ = CR = x$ ,

тогда  $PA = AS = SD = DR = 3 - x \Rightarrow CB = 2x$ ,

$$AD = 6 - 2x \Rightarrow S = (2x + 6 - 2x) \cdot \frac{1}{2} h = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 2 \text{ см} \Rightarrow r = \frac{h}{2} = 1 \text{ см} \Rightarrow S_0 = \pi r^2 = \pi \text{ см}^2.$$



## Дифференцированные задания

### Д-1.

1. Т.к. при подобии равные отрезки переходят в равные, а углы сохраняются, то ромб переходит в ромб.
2. Гомотетия является преобразованием подобия  $\Rightarrow$  см. п. 1.
3. Проведите биссектрису одного из углов, затем к ней серединный перпендикуляр. Точка его пересечения со сторонами треугольника, а также концы биссектрисы — вершины искомого ромба.
4. Пусть дан  $\triangle ABC$ . Из вершины  $B$  проведите луч, составляющий со стороной  $BC$  угол, меньший  $60^\circ$ . Пусть этот луч пересекает сторону  $AC$  в точке  $D$ . На отрезке  $BD$  постройте равносторонний треугольник  $BDF$ . Проведите серединный перпендикуляр  $FH$ . Пусть он пересекает сторону  $BC$  в точке  $M$ . Через точку  $M$  проведите прямые, параллельные  $FB$  и  $FD$ . Точки их пересечения со сторонами треугольника  $ABC$  соедините.

### Д-2.

1. 1) Т.к.  $AB \parallel NP$ , то  $\angle A = \angle NPC$ , т.к.  $AC \parallel MN$ , то  $\angle NPC = \angle MNP \Rightarrow \angle A = \angle MNP$ . Аналогично,  $\angle C = \angle NMP \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle NPM$  по 1-му признаку.

- 2) По п. 1.  $\angle A = \angle MNP$  и  $\frac{MN}{AC} = \frac{NP}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle NPM$  по 2-му признаку.

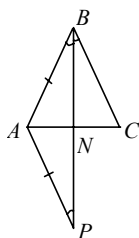
- 3)  $\frac{MN}{AC} = \frac{NP}{AB} = \frac{MP}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle NPM$  по 3-му признаку.

2. Пусть сторона ромба равна  $x$ . Т.к.  $NP \parallel AB$ , то  $\angle A = \angle NPC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle PNC$  по 1-му признаку  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{NP}{AB} = \frac{NC}{BC} \Rightarrow \frac{x}{c} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ax = ca - cx \Rightarrow x = \frac{ac}{a+c}.$$

Аналогично можно по-

лучить  $x = \frac{bc}{b+c}$  и  $x = \frac{ab}{a+b}$  (если одна из вершин ромба совпадает с другой стороной треугольника).



Дополнительный вопрос:

через точку  $A$  проведем прямую  $AP$  так, чтобы  $AP = AB$ ; пусть  $AP$  пересекает биссектрису  $BN$  в точке  $P$ , тогда  $\angle ANP = \angle BNC$  как вертикальные,  $\angle ABP = \angle BPA = \angle PBC$ , поскольку  $\triangle PAB$  — равнобедренный, а  $BP$  — биссектриса угла  $ABC$ , следовательно,  $\triangle ANP \sim \triangle CNB$  по 1-му признаку, и

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AP}{BC} = \frac{AB}{BC}.$$

**Д-3.**

1. По теореме Пифагора  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$  см.

$$CD = \frac{BC \cdot CA}{AB} = 4,8 \text{ см.}$$

2. Т.к.  $BC^2 = BD \cdot BA$ , то  $BD = \frac{BC^2}{BA} = 6,4$  см  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow DE = \frac{BD \cdot DC}{BC} = \frac{6,4 \cdot 4,8}{8} = 6,4 \cdot 0,6 = 3,84 \text{ см.}$$

3. Т.к.  $BD^2 = BE \cdot BC$ , то  $BE = \frac{BD^2}{BC} = \frac{6,4^2}{8} = 0,8 \cdot 6,4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow EF = \frac{BE \cdot ED}{BD} = \frac{0,8 \cdot 6,4 \cdot 0,6 \cdot 6,4}{6,4} = 3,072 \text{ см.}$$

$$4. BD = \frac{BC^2}{BA} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, CD = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow$$

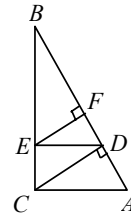
$$\Rightarrow ED = \frac{a^3 b}{(a^2 + b^2)a} = \frac{a^2 b}{(a^2 + b^2)} \Rightarrow BE = \frac{BD^2}{BC} = \frac{a^4}{(a^2 + b^2)a} = \frac{a^3}{(a^2 + b^2)},$$

$$\text{а } EF = \frac{BE \cdot ED}{BD} = \frac{a^3 \cdot a^2 b \sqrt{a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)^2 \cdot a^2} = \frac{a^3 b \sqrt{a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BF = \sqrt{\frac{a^6(a^2 + b^2)^2 - a^6 b^2(a^2 + b^2)^2}{(a^2 + b^2)^5}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^6(a^2 + b^2) - a^6 b^2}{(a^2 + b^2)^3}} = \frac{a^3}{a^2 + b^2} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2}} = \frac{a^4}{(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow FD = BD - BF = \frac{a^4(a^2 + b^2) - a^4}{(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



**Д-4.**

1. Т.к.  $\angle B = \angle D$  и  $\angle BAC > \angle DAC$ , то  $\angle DCA > \angle BCA$ .

2.  $AD$  и  $BC$  пересекаются, т.к. при указанных условиях луч  $AD$  пересекает  $BC$ , а луч  $CB$  пересекает  $AD$ .

3. По п. 2.  $KM$  и  $LN$  пересекаются  $\Rightarrow K$  и  $M$  лежат по разные стороны от  $LN$ .

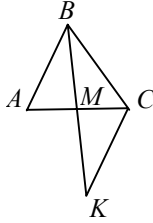
4. Обозначим как в предыдущей задаче, т.к. вписанные углы  $K$  и  $M$  опираются на дуги, сумма градусных мер которых равна  $2\pi$ , то сумма самих углов равна  $\pi$ . Аналогично и для углов  $L$  и  $N$ .

**Д-5.**

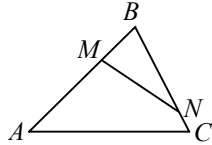
1.  $\angle B = 180^\circ - 45^\circ - 70^\circ = 65^\circ \Rightarrow \angle B < \angle C \Rightarrow AC < AB$  (т.к. в треугольнике против большего угла лежит большая сторона).

2. Т.к.  $\angle BDA = \angle CBD$ , и  $\angle ABD > \angle CBD$ , то  $\angle ABD > \angle BDA \Rightarrow AD > AB \Rightarrow BC > AB$  (т.к.  $BC = AD$ ).

3. Построим  $\triangle CMK = \triangle AMB$ , тогда  $\angle MKC = \angle ABM \Rightarrow \angle MKC > \angle MBC \Rightarrow BC > CK$ , но  $CK = AB \Rightarrow CB > AB$ .

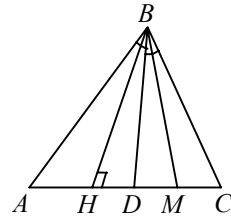


4.



Очевидно, что радиус описанной окружности около  $\triangle MBN$  меньше радиуса описанной окружности около  $\triangle ABC \Rightarrow$  по теореме синусов:

$\frac{AC}{2 \sin \angle B} > \frac{MN}{2 \sin \angle B} \Rightarrow AC > MN$ , но  $AC$  не больше наибольшей стороны  $\Rightarrow$  ч.т.д.



**Д-6.**

1. По теореме косинусов  $BC^2 = BD^2 + DC^2 + 2BD \cdot DC \cdot \cos \angle BDA$ ,  
а  $AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cdot \cos \angle BDA \Rightarrow$   
 $\Rightarrow BC^2 - AB^2 = DC^2 - AD^2 + 4 \cdot BD \cdot AC \cdot \cos \angle BDA \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos \angle BDA &= \frac{(BC^2 - AB^2) - (DC^2 - AD^2)}{4BD \cdot AC} = \\ &= \frac{(BC^2 - DC^2) - (AB^2 - AD^2)}{4BD \cdot AC} = \frac{DC^2}{4BD \cdot AC} \cdot \left( \frac{BC^2}{DC^2} - 1 \right) - \frac{AD^2}{4BD \cdot AC} \cdot \left( \frac{AB^2}{AD^2} - 1 \right) = \\ &= \left( \frac{BC^2}{DC^2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{4BD \cdot AC} \cdot (DC^2 - AD^2) > 0 \Rightarrow \angle BDA \text{ — острый} \Rightarrow \angle BDC \text{ — тупой.} \end{aligned}$$

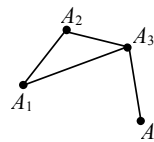
2. Поскольку  $DC > AD$ , то  $\frac{AC}{2} = \frac{DC + AD}{2} < DC$ , следовательно, середина стороны  $AC$  принадлежит лучу  $DC$ .

3. Обозначения как в предыдущей задаче. Пусть  $BM$  — медиана, тогда из  $\triangle BMD$ , из того, что  $\angle BDM$  — тупой, следует, что  $\angle BMD$  — острый и  $\angle BMD < \angle BDM$ , а в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, значит,  $BM > BD$ .

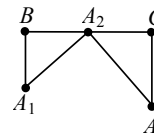
4. Обозначения как в предыдущей задаче. Пусть  $BH$  — высота. Точка  $H$  принадлежит лучу  $DA$ , т.к. если бы она принадлежала лучу  $DC$ , то в  $\triangle BHD$  сумма углов  $\angle BHD + \angle BDH > 180^\circ$ , что противоречит теореме о сумме углов треугольника ( $\angle BHD = 90^\circ$ ,  $\angle BDH$  — тупой, т.е.  $\angle BDH > 90^\circ$ ), следовательно, точка  $D$  лежит между точками  $H$  и  $M$  (точка  $M$  лежит на луче  $DC$  по предыдущей задаче).

**Д-7.**

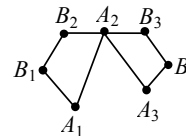
1. Т.к. по свойствам треугольника  $A_1A_2 + A_2A_3 > A_1A_3$ , то  $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 > A_1A_3 + A_3A_4$ . Ч.т.д.



2. см. п. 1.  $A_1B + BA_2 > A_1A_2$  и  $A_2C + CA_3 > A_2A_3 \Rightarrow A_1B + BA_2 + A_2C + CA_3 > A_1A_2 + A_2A_3$ .



3. см. п. 1.  $A_1B_2 < A_1B_1 + B_1B_2$ ,  $A_1A_2 < A_1B_2 + B_2A_2$ ,  
 $A_2B_4 < A_2B_3 + B_3B_4$ ,  $A_2A_3 < A_2B_4 + B_4A_3 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow A_1A_2 + A_2A_3 < A_1B_1 + B_1B_2 + B_2A_2 + A_2B_3 + B_3B_4 + B_4A_3$ .  
 4. Можно, т.к.  $A_1A_2$  строго меньше, чем  $A_1B_1 + B_1B_2$   
 +  $B_2A_2$  и  $A_2A_3$  строго меньше, чем  $A_2B_3 + B_3B_4 + B_4A_3$ .



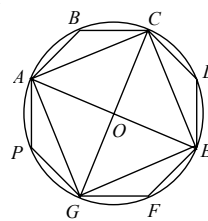
**Д-8.**

1. Т.к.  $\triangle ABC = \triangle CDE = \triangle EFG = \triangle GAP$  по 1-му признаку, то  $AC = CE = EG = GA \Rightarrow AGE C$  — ромб.

$$\angle A = \angle B = \frac{180^\circ \cdot 6}{8} = 135^\circ \Rightarrow \angle HAG = \angle BAC = \frac{180^\circ - 135^\circ}{2} = 22,5^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle GAC = 135^\circ - 2 \cdot 22,5^\circ = 90^\circ \Rightarrow ACEG$  — квадрат.

2. Пусть точка  $O$  — центр описанной окружности  $\Rightarrow AO = OC = OG = OE \Rightarrow \triangle AOC =$   
 $= \triangle COE = \triangle EOG = \triangle GOA \Rightarrow$   
 $\Rightarrow AC = CE = EG = GA$  и  $\angle AOC =$   
 $= \angle AOG \Rightarrow \angle AOC = 90^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow AGE C$  — квадрат.



**Д-9.**

1. Т.к. угол при основании равен  $75^\circ$ , то угол против него —

$$180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ см.}$$

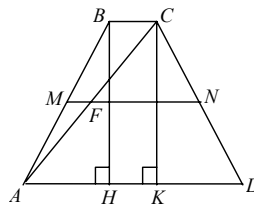
2. Угол при основании равен  $(180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ \Rightarrow$  треугольник равно-  
 сторонний  $\Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ .

3. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, яв-  
 ляется медианой, тогда по теореме Пифагора высота, проведенная к осно-  
 ванию, равна  $\sqrt{13^2 - (24 : 2)^2} = 5 \text{ см} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 24 = 60 \text{ см}^2$ .

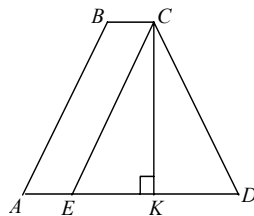
4.  $S = 5 \cdot 6 \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow$  по теореме косинусов диагонали равны  $\sqrt{6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}}$  и  $\sqrt{6^2 + 5^2 + 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}}$ , или 5 см и  $\sqrt{97}$  см.

#### Д-10.

1.  $S = 4 \cdot 6 \cdot \sin 150^\circ = 12 \text{ см}^2$ .



$\Rightarrow S = \frac{1}{2} BH \cdot (AD + BC) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (14 + 6) = 30 \text{ см}^2$ .



2. Из подобия треугольников  $AMF$  и  $ABC$ , а также  $CFN$  и  $CAD$  следует, что  $BC = 6 \text{ см}$ ,  $AD = 14 \text{ см} \Rightarrow$

$\Rightarrow AH = KD = \frac{1}{2} (AD - BC) = 4 \text{ см} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  по теореме Пифагора

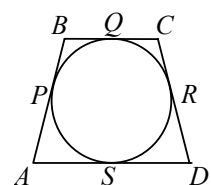
$BH = CK = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ см} \Rightarrow$

3.  $S(ABCE) = BC \cdot CK = 3CK$ ; (1)

$S(ECD) = \frac{1}{2} ED \cdot CK$ .

Из (1)  $\Rightarrow CK = \frac{S(ABCE)}{BC} \Rightarrow$

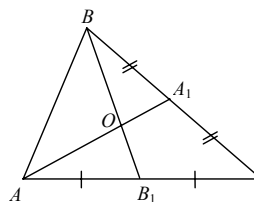
$\Rightarrow S(ECD) = \frac{S(ABCE) \cdot ED}{2BC} \Rightarrow 2BC = ED \Rightarrow ED = 6 \text{ см}$ .



4. Высота трапеции равна  $4 \sin 30^\circ = 2 \text{ см}$ ;  $BC + AD = AB + CD = 8 \text{ см}$ . (по свойствам описанных четырех-

угольников)  $\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 8 \text{ см}^2$ .

#### Д-11.



1)  $\frac{S(AOB_1)}{S(AA_1C)} = \frac{AO \cdot AB_1}{AA_1 \cdot AC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ ,

но  $S(AA_1C) = \frac{1}{2} S(ABC) \Rightarrow S(AOB) = \frac{1}{6} S(ABC)$ .

Аналогично  $S(BOA_1) = \frac{1}{6} S(ABC) \Rightarrow$

$\Rightarrow S(AOB_1) = S(BOA_1)$ . Ч.т.д.

2)  $\frac{S(AOB_1)}{S(BOA_1)} = \frac{AO \cdot OB_1}{BO \cdot OA_1} = \frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{OB_1}{OB} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow S(AOB_1) = S(BOA_1)$ . Ч.т.д.



Дополнительное задание.

$S(BOC_1) = \frac{1}{6} S(ABC) = S(BOA_1) = S(A_1OC) \Rightarrow S(AC_1C) = \frac{1}{2} S(ABC)$  и  $S(CC_1B) = \frac{1}{2} S(ABC) \Rightarrow$  точки  $C_1$ ,  $O$  и  $C$  лежат на одной прямой  $\Rightarrow$  медианы пересекаются в одной точке.

Д-12.

$$1. S'_{\text{кольца}} = \frac{1}{2} \pi \cdot \angle AOB (R^2 - r^2) = \frac{3}{2} \pi \angle AOB r^2,$$

т.к.  $r = \frac{R}{2}$ .  $S''_{\text{сектора}} = \frac{1}{2} \pi \angle AOB r^2 \Rightarrow \frac{S'}{S''} = 3$ . Ч.т.д.

2. По формуле для площади круга и треугольника имеем:

$$S = S_{\text{сектора } AOB} - S_{\Delta AOB} = \frac{\pi}{2} R^2 \cdot \angle AOB - \frac{R^2}{2} \cdot \sin \angle AOB.$$

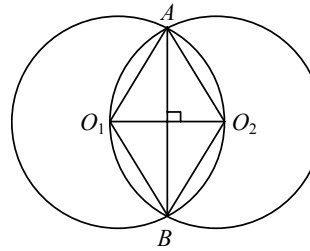
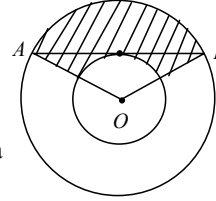
3. Т.к. радиусы окружностей равны, то  $\Delta AO_1O_2$  и  $\Delta BO_1O_2$  — равносторонние  $\Rightarrow \angle AO_1O_2 = \angle BO_1O_2 = \angle AO_2O_1 = \angle BO_2O_1 = 60^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{\text{фигуры}} = 4S_{\text{сектора } AO_1O_2} - S(\Delta AO_1O_2) = 4 \cdot \frac{1}{6} \pi R^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 = R^2 \left( \frac{2}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

4. По теореме Герона

$$S = \sqrt{45 \cdot 20 \cdot 169} = 4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 = 360 \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{25 \cdot 29 \cdot 36}{4 \cdot 360} = \frac{25 \cdot 29}{4 \cdot 10} = 18 \frac{1}{8} \text{ см};$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{360}{45} = 8 \text{ см}. \Rightarrow S = \pi(R^2 - r^2) = \pi \left( \left( 18 \frac{1}{8} \right)^2 - 8^2 \right) \approx 264,5 \text{ см}^2.$$



Дополнительные задачи

Задачи к §11

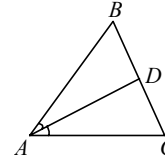
1. Т.к. преобразования обратные к гомотетии также являются гомотетией, а, следовательно, преобразованиям подобия, то преобразование обратное к преобразованию подобия, также является преобразованием подобия.

2. Пусть  $C$  и  $D$  — точки деления и пусть  $\frac{AO}{OC} = \frac{OB}{OD} = k$ , тогда при гомотетии с центром в точке  $O$  с коэффициентом равным  $k$  прямая  $CD$  перейдет в  $AB \Rightarrow CD \parallel AB$ .



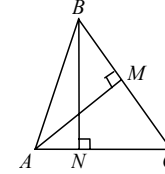
8. Пусть  $\angle A = \angle C = 2\alpha \Rightarrow \angle ADC = \pi - 3\alpha$ , а  $\angle B = \pi - 4\alpha$ .  
Т.к.  $\triangle ABC$  — равнобедренный, то подобный ему тоже  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  либо  $\alpha = \pi - 3\alpha$  либо  $\alpha = \pi - 4\alpha$ .

Если  $\alpha = \pi - 3\alpha$ , то  $\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$  треугольник вы-



рождается в отрезок. Если  $\alpha = \pi - 4\alpha$ , то  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ , а  $2\alpha = \frac{2\pi}{5} = 72^\circ \Rightarrow$  искомые углы  $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$ .

9. Т.к.  $\angle A = \angle C$ , то  $\triangle AMC \sim \triangle BNA$  по признаку подобия прямоугольных треугольников.

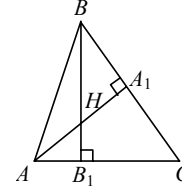


10.  $\angle AHB_1 = \angle BHA_1 \Rightarrow \angle HAB_1 = \angle HBA_1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \triangle AHB_1 \sim \triangle BCB_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{B_1H}{CB_1} = \frac{AB_1}{BB_1} \Rightarrow B_1H \cdot BB_1 = CB_1 \cdot AB_1.$$

Т.к.  $\angle AHB_1 = \angle BHA_1 \Rightarrow \angle HAB_1 = \angle HBA_1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \triangle BA_1H \sim \triangle AA_1C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{A_1H}{A_1C} = \frac{BA_1}{AA_1} \Rightarrow A_1H \cdot AA_1 = BA_1 \cdot A_1C. \text{ Ч.т.д.}$$



11. Отношение другой стороны угла к диагонали является синусом угла между стороной и диагональю. Постройте угол по его синусу, затем через концы одной стороны проведите перпендикуляры и отложите этот угол от данной стороны. Через точку его пересечения с одним из перпендикуляров проведите прямую, параллельную данной стороне.

12. Из подобия треугольников, отсекаемых высотами, следует, что

$$\frac{b}{a} = \frac{h_a}{h_b} \text{ и } \frac{c}{a} = \frac{h_a}{h_c}, \text{ поэтому сначала постройте треугольник } A_1B_1C_1, \text{ подоб-$$

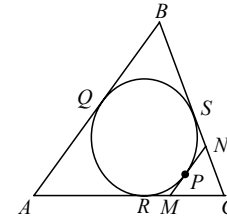
ный искомому, со сторонами  $a_1, b_1, c_1$ , где  $b_1 = \frac{a_1 h_a}{h_b}, c_1 = \frac{a_1 h_a}{h_c}$ , а  $a_1$  —

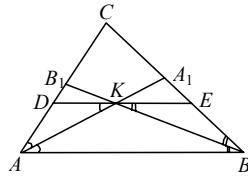
произвольный отрезок, а затем  $\triangle ABC$  с коэффициентом подобия  $\frac{b_1}{a_1}$ .

13. По свойству касательных:

$$\begin{aligned} P(CMN) &= CM + MN + NC = CM + MP + PN + NC = \\ &= CM + MR + SN + CN = CR + CS = (AC - AQ) + \\ &+ (CB - BQ) = AC + CB - AB = b + a - c; \\ \triangle CMN &\sim \triangle CAB \text{ по двум углам } (\angle CAB = \angle CMN, \\ \angle CBA &= \angle CNM, \text{ как соответственные при пересече-} \\ &\text{нии } MN \parallel AB \text{ секущими } AC \text{ и } BC) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow MN = c \cdot \frac{a+b-c}{a+b+c}.$$





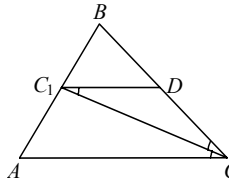
14.

Т.к.  $DE \parallel AB$ , то  $\angle DKA = \angle KAB$ ,  
 $\angle EKB = \angle ABK \Rightarrow DK = DA$  и  $KE = EB \Rightarrow P(DCE) = a+b$ .  $\triangle ACB \sim \triangle DCE \Rightarrow$   
 $k = \frac{a+b}{a+b+c} \Rightarrow DE = c \cdot \frac{a+b}{a+b+c}$ .

15. По свойству биссектрисы  $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{b}{a}$ , т.к.  $AC_1 + C_1B = AB = c$ , то

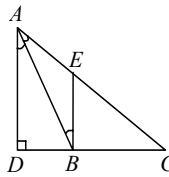
$$AC_1 = \frac{cb}{a+b}. AK — биссектриса \triangle AC_1C \Rightarrow \frac{C_1K}{KC} = \frac{AC_1}{AC} = \frac{\frac{cb}{a+b}}{b} = \frac{c}{a+b}. \text{ Ч.т.д.}$$

16. По задаче 15:  $\frac{AK}{KA_1} = \frac{b+c}{a}$ ,  $\frac{BK}{KB_1} = \frac{a+c}{b} \Rightarrow \frac{a+c}{b} = \frac{b+c}{a} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow a^2 + ac - b^2 - bc = 0 \Rightarrow (a+b)(a-b) + c(a-b) = 0 \Rightarrow (a-b)(a+b+c) = 0 \Rightarrow a=b$ . Ч.т.д.



17. Т.к.  $C_1D \parallel AC$ , то  $\angle DC_1C = \angle C_1CA =$   
 $= \angle C_1CD \Rightarrow C_1D = DC$  и  
 $\triangle ABC \sim \triangle C_1BD \Rightarrow \frac{C_1D}{AC} = \frac{C_1B}{AB}$ , по свойству биссек-

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{AB}{C_1A} &= \frac{BC+AC}{AC} \Rightarrow C_1A = \frac{AB \cdot AC}{BC+AC} \Rightarrow C_1B = \\ &= AB - \frac{AB \cdot AC}{BC+AC} = \frac{AB \cdot BC}{AC+BC} = C_1D = DC = \frac{AC \cdot C_1B}{AB} = \frac{AC \cdot BC}{AC+BC} = \frac{ab}{a+b}. \end{aligned}$$



18. Т.к.  $\angle BAC = \angle ABE$  и  $AD \parallel BE$ , то  $\angle BAC = \angle BAD \Rightarrow$   
 $\Rightarrow AB$  — биссектриса  $\triangle ACD$ . Пусть  $AD = x \Rightarrow$  по задаче

$$17: AE = \frac{bx}{b+x}, EC = b - AE = \frac{b^2}{b+x}.$$

Т.к.  $\triangle CBE \sim \triangle CDA$ , то  $\frac{BD}{BC} = \frac{AE}{CE} = \frac{x}{b} \Rightarrow BD = \frac{ax}{b}$ .

$$\text{По теореме Пифагора: } AD^2 + CD^2 = x^2 + \left(a + \frac{ax}{b}\right)^2 = b^2 \Rightarrow x = b \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{По теореме Пифагора для } \triangle ABD: c^2 &= AD^2 + BD^2 = \\ &= x^2 + \frac{a^2 x^2}{b^2} = \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \left(b \cdot \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}\right) = \frac{(b^2 - a^2)^2}{(b^2 + a^2)} \Rightarrow c^2(b^2 + a^2) = (b^2 - a^2)^2. \text{ Ч.т.д.} \end{aligned}$$

19. Пусть  $BD$  — биссектриса  $\triangle ABC$ , тогда  $\triangle BDC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{a}{CD} = \frac{c}{BD} = \frac{b}{a}$ ,

$$CD = \frac{a^2}{b}, BD = \frac{ac}{b}. \text{ Т.к. } \angle BAD = \angle DBA \Rightarrow BD = AD = b - CD \Rightarrow b^2 - a^2 = ac.$$

20. По свойствам касательных  $AE = AC = m$  и  $FB = BC = n \Rightarrow$

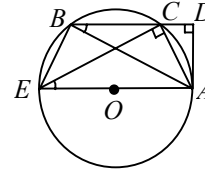
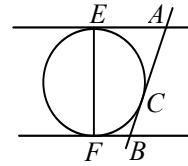
$$\Rightarrow EF = \sqrt{(m+n)^2 - (m-n)^2} = 2\sqrt{mn} \quad (\text{т.к. } EF \perp a \text{ и } b).$$

21. Т.к. треугольники подобны, то  $a = ka_1, b = kb_1, c = kc_1 \Rightarrow$  по теореме Пифагора  $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow aka_1 + bkb_1 = ckc_1 \Rightarrow aa_1 + bb_1 = cc_1.$

22.

$\angle CBA = \angle CEA$ , т.к. они опираются на одну дугу  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle ACE \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC}{2R}.$$

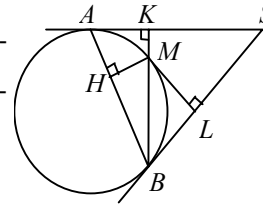


23. По предыдущей задаче

$HM = \frac{AM \cdot MB}{2R}$ . Т.к. расстояние от точки  $M$  окружности радиуса  $R$  до касательной, проведенной в точке  $A$ , равно  $\frac{AM^2}{2R}$ , то

$$AM = \sqrt{2R \cdot KM}, \quad BM = \sqrt{2R \cdot ML} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow HM = \frac{AM \cdot MB}{2R} = \sqrt{ML \cdot KM}. \quad \text{Ч.т.д.}$$

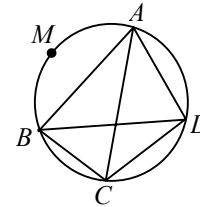


24. По задаче № 22. Пусть  $p(X, YZ)$  — расстояние от точки  $X$  до прямой  $YZ$ , тогда

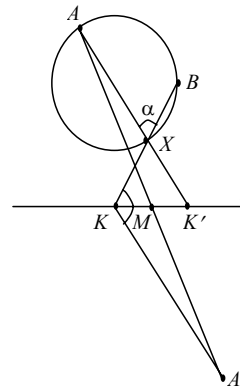
$$\rho(M, AC) \cdot \rho(M, BD) = \frac{AM \cdot AC}{2R} \cdot \frac{MB \cdot MD}{2R}. \quad \text{Аналогично}$$

$$\rho(M, AB) \cdot \rho(M, CD) = \frac{AM \cdot MB \cdot MC \cdot MD}{4R^2} \quad \text{и}$$

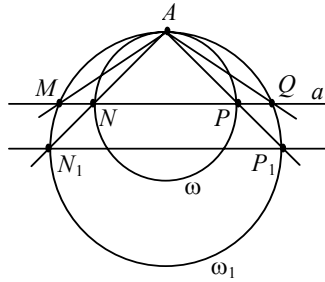
$$\rho(M, BC) \cdot \rho(M, AD) = \frac{AM \cdot MD \cdot MB \cdot MC}{4R^2}. \quad \text{Ч.т.д.}$$



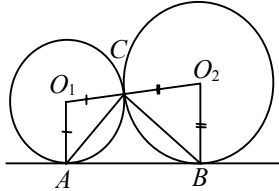
25. Точка  $A'$  симметрична точке  $A$  относительно точки  $M$ , тогда  $A'K \parallel K'A \Rightarrow \angle BKA' = 180^\circ - \angle AXB$ . Постройте точку  $K$ , используя результаты, полученные в задаче № 58.



**26.**



Рассмотрим гомотегию с центром в точке  $A$ , переводящую окружность  $\omega$  в окружность  $\omega_1$ . При этом  $N \rightarrow N_1$ , а  $P \rightarrow P_1 \Rightarrow P_1 N_1 \parallel PN \Rightarrow \angle MAN_1 = \angle QAP_1 \Rightarrow \angle MAN = \angle QAP$ .



**27.** Т.к.  $\angle O_1 + \angle O_2 = 180^\circ$ , то  
 $\angle O_1AC + \angle O_1CA + \angle O_2CB + \angle O_2BC =$   
 $= 180^\circ \Rightarrow \angle O_1CA + \angle O_2CB = 90^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow$  точка  $C$  описывает окружность, диаметром которой является  $AB$ .

**28.** Пусть  $ABC$  — данный треугольник ( $\angle C = 90^\circ$ ). А точка  $O$  — вершина угла, в котором он скользит.

Пусть  $\angle ABO = \alpha$ ,  $\angle CBA = \angle AOC$ ,  $\angle ACO = \alpha$ ,  $\angle COB = \angle CAB$

(т.к.  $\angle C = \angle O = 90^\circ \Rightarrow$  можно описать окружность).

$$\angle COB = 180^\circ - \angle OCB - \angle CBA - \alpha = 180^\circ (90^\circ - \alpha) - \angle CBA - \alpha =$$

$= 90^\circ - \angle CBA$  — не зависит от  $\alpha \Rightarrow$  точка  $C$  движется по отрезку, проходящему через точку  $O$ . Пусть  $C(x; y)$ , тогда

$x = 10\cos\alpha - 8\cos(\alpha + \beta)$ , где  $\beta = \angle CBA$ ,  $y = 8\sin(\alpha + \beta)$ , тогда

$$OC = \sqrt{100 \cos^2 \alpha + 64 - 160 \cos \alpha \cos(\alpha + \beta)} =$$

$$= \sqrt{100 \cos^2 \alpha + 64 - 160 \cos \alpha (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)} =$$

$$= \sqrt{50 \cos 2\alpha + 50 - 160 \cos \alpha \left( \cos \alpha \frac{4}{5} - \sin \alpha \frac{3}{5} \right)} =$$

$$= \sqrt{50 \cos 2\alpha + 50 + 64 - 128 \cos^2 \alpha + 48 \sin 2\alpha} = \sqrt{-14 \cos^2 \alpha - 14 + 48 \sin 2\alpha} =$$

$$= \sqrt{50 - 50 \cos(2\alpha - \varphi)}, \text{ где } \varphi = \arccos \frac{7}{25}, \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  минимум  $OC$  достигается при  $\alpha = 0$  и равен

$$\sqrt{50 - 50 \cdot \frac{7}{25}} = 6, \text{ максимум при } \alpha = \frac{\pi - \varphi}{2} \text{ и равен}$$

$$\sqrt{50+50}=10 \Rightarrow \text{длина отрезка равна } 10-6=4 \text{ см.}$$

# Задачи к §12.

30.

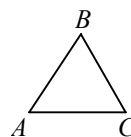
По теореме косинусов:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle C$$

а)  $AB^2 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 9 + 16 - 12 = 13$ ;  $AB = \sqrt{13}$  см.

б)

$$AB^2 = 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + 16 + 8 = 28$$
;  $AB = 2\sqrt{7}$  см.



31.

а)  $\alpha = 45^\circ$ , б)  $\alpha = 60^\circ$ , в)  $\alpha = 90^\circ$

По теореме косинусов:  $BC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$

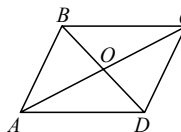
а)  $BC = \sqrt{a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab}$ ; б)  $BC = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$ ;

в)  $BC = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

32. По теореме косинусов

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$$

$$BD^2 = 4 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
;  $BD = \sqrt{13 - 6\sqrt{2}}$  см.

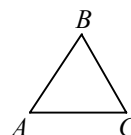


33.

а)  $\cos \angle A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{9 + 36 - 16}{2 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{29}{36}$ ;

$$\angle A = \arccos \frac{29}{36}$$
.

б)  $\cos \angle C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \frac{36 + 16 - 9}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{43}{48}$ ;  $\angle C = \arccos \frac{43}{48}$ .



34.

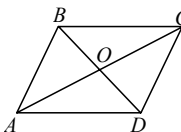
По теореме косинусов:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \angle A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab}$$
;

$$AC^2 = a^2 + b^2 - a \cdot b \cdot 2 \cos 150^\circ$$
, т.к.  $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$  и

$$\angle BAD = 30^\circ \Rightarrow \angle ABD = 150^\circ \Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + b^2 + \sqrt{3}ab}$$
.



35.

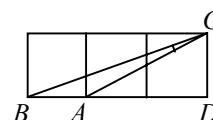
По теореме Пифагора  $AC^2 = AD^2 + CD^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$$
;

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 \Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + 9a^2} = a\sqrt{10}$$
.

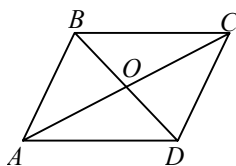
По теореме косинусов:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos \angle BCA \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \cos \angle BCA = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} = \frac{10a^2 + 5a^2 - a^2}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot a^2} = \frac{14}{2\sqrt{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BCA = \arccos \frac{7}{5\sqrt{2}}.$$



**36.**

По теореме косинусов

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \angle A$$

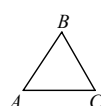
$$BD^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2} a \cdot b.$$

$$\text{Аналогично: } AC^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{2} ab$$

$$AC^2 \cdot BD^2 = (a^2 + b^2 - \sqrt{2} ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{2} ab) = \\ = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2 = a^4 + b^4.$$

**37.**

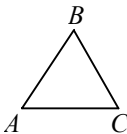
а) По теореме синусов



$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 30^\circ} \Rightarrow a = \frac{AC \cdot \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 10\sqrt{2} \text{ см.}$$

$$\text{б) По теореме синусов } \frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{AB}{\sin 135^\circ} \Rightarrow a = \frac{AB \cdot \sin 30^\circ}{\sin 135^\circ} = 10\sqrt{2} \text{ см.}$$

**38.**



$$\text{а) По теореме синусов } \frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{a}{\sin 45^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{5 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{2} = BC.$$

$$\text{Аналогично: } \frac{b}{\sin 105^\circ} = \frac{AC}{\sin 30^\circ} \Rightarrow b = \frac{5 \cdot \sin 105^\circ}{\frac{1}{2}} = 10 \sin 105^\circ = AB.$$

$$\text{б) } \angle ABC = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 100^\circ - 50^\circ = 30^\circ;$$

$$\text{По теореме синусов } \frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{a}{\sin 100^\circ} = \frac{b}{\sin 50^\circ} \Rightarrow$$

$$a = 2 \sin 100^\circ = BC$$

$$b = 2 \sin 50^\circ = AB$$



39.

По теореме синусов  $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow$

$$a) \frac{20}{\sin C} = 80 \Rightarrow \sin C = \frac{1}{4} \Rightarrow \angle C = \arcsin \frac{1}{4}.$$

По теореме косинусов  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 AB \cdot BC \cdot \cos B$ ;  
 $AC^2 = 400 + 1600 - 1600 \cos B$ .

$$\text{Т.к. } \frac{AC}{\sin B} = 80 \Rightarrow AC = 80 \sin B.$$

Подставляем:  $6400 \sin^2 B = 6400 - 1600 \cos^2 B = 2000 - 1600 \cos B$ ;

$$64 - 64 \cos^2 B = 20 - 16 \cos B; \quad 16 - 16 \cos^2 B = 5 - 4 \cos B;$$

$$16 \cos^2 B - 4 \cos B - 11 = 0; \quad \cos B = \frac{4 \pm 12\sqrt{5}}{32} = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{8}, \text{ т.к. } \angle A \text{ и } \angle C \text{ — ост-}$$

$$\text{рые, то } \angle B \text{ — тупой } \Rightarrow \angle B = \arccos \frac{1 + 3\sqrt{5}}{8}.$$

$$\text{Аналогично в б). } \frac{40}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{30}{\sin C} \Rightarrow \frac{30}{\sin C} = \frac{80}{\sqrt{2}} = 40\sqrt{2} \Rightarrow \sin C = \frac{3}{4\sqrt{2}}.$$

$$\frac{AC}{\sin B} = 40\sqrt{2} \Rightarrow AC = 40\sqrt{2} \sin B \Rightarrow 3200 - 3200 \cos^2 B = 900 + 1600 - 2400 \cos B;$$

$$32 \cos^2 B - 24 \cos B - 7 = 0;$$

$$\cos B = \frac{24 \pm 4\sqrt{117}}{64} = \frac{6 \pm \sqrt{117}}{16} \Rightarrow \angle B = \arccos \frac{6 - \sqrt{117}}{16}, \text{ т.к. } 6 + \sqrt{117} < 16.$$

40. Из  $\triangle ABC$  по теореме синусов

$$\frac{AC}{\sin(\angle ABC)} = \frac{BC}{\sin(\angle BAC)} = \frac{AB}{\sin(\angle BCA)}$$

$BC \parallel AD \Rightarrow \angle BCA = \angle CAD$  (накрест лежащие)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BCA = \beta \Rightarrow \frac{d}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \beta} \Rightarrow$$

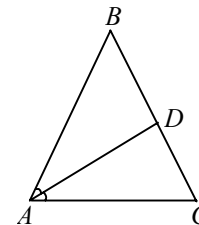
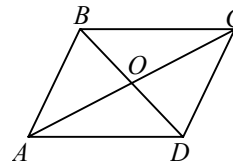
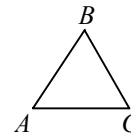
$$\Rightarrow BC = \frac{d \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}; \quad AB = \frac{d \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

41.  $\angle BAD = \angle DAC$ ,  $\angle BAD = \alpha$

По теореме синусов  $\frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \gamma} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \text{ т.к. } AD \text{ — биссектриса } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \Rightarrow BD = \frac{DC \sin \gamma}{\sin \beta}$$



$$BD + DC = a \Rightarrow DC \left( 1 + \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \right) = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DC = \frac{a \sin \beta}{\sin \gamma + \sin \beta} \Rightarrow BD = a - \frac{a \sin \beta}{\sin \gamma + \sin \beta} = \frac{a \sin \gamma}{\sin \gamma + \sin \beta}.$$

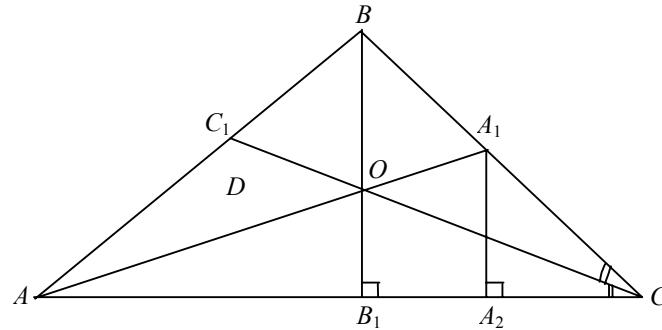
$$\text{Из } \triangle ABD \text{ и } \triangle ADC \text{ по теореме синусов: } \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin \beta}$$

$$\alpha = \frac{180 - \beta - \gamma}{2} \Rightarrow \frac{BD}{\cos \left( \frac{\beta + \gamma}{2} \right)} = \frac{AD}{\sin \beta} \Rightarrow AD = \frac{a \sin \gamma \sin \beta}{(\sin \gamma + \sin \beta) \cos \left( \frac{\beta + \gamma}{2} \right)}.$$

42. Пусть  $CB_1 = x$ ,  $BB_1 = y$ , тогда по теореме Пифагора

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ (b-x)^2 + y^2 = c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = a^2 - x^2 \\ b^2 + x^2 - 2bx + a^2 - x^2 = c^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}, \text{ следовательно, } AB_1 = b - x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}.$$



$$\triangle CBB_1 \sim \triangle CA_1A_2 \Rightarrow A_1A_2 = \frac{1}{2} BB_1 \text{ и } B_1A_2 = CA_2 = \frac{1}{2} B_1C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4b}.$$

$$\triangle AA_1A_2 \sim \triangle AOB_1 \Rightarrow \frac{A_1A_2}{OB_1} = \frac{AA_2}{AB_1} = \frac{AB_1 + B_1A_2}{AB_1} = 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2(b^2 + c^2 - a^2)}.$$

По свойству биссектрисы имеем:

$$\frac{BB_1}{OB_1} = \frac{BC + CB_1}{CB_1} = 1 + \frac{2ab}{a^2 + b^2 - c^2}, \text{ т.к. } \frac{BB_1}{OB_1} = \frac{2A_1A_2}{OB_1}, \text{ то}$$

$$1 + \frac{2ab}{a^2 + b^2 - c^2} = 2 \left( 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2(b^2 + c^2 - a^2)} \right) \Rightarrow \frac{2ab}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{2b^2}{b^2 + c^2 - a^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a(b^2 + c^2 - a^2) &= b(a^2 + b^2 - c^2) \Rightarrow ab^2 + ac^2 - a^3 - a^2b - b^3 + bc^2 = 0, \\ (a+b)(a^2 + b^2 - ab) - c^2(a+b) + ab(a-b) &= 0, \quad (a+b)(a^2 + b^2 - c^2 - ab) + ab(a-b) = 0, \\ (a+b)(a^2 + b^2 - c^2) + ab(a-b) - ab(a+b) &= 0, \quad (a+b)(a^2 + b^2 - c^2) = 2ab^2. \end{aligned}$$

43.  $AK = KB$  по свойству касательных.

По теореме синусов из

$$\triangle AOC: \frac{AC}{\sin AOC} = \frac{AO}{\sin ACO} = \frac{CO}{\sin CAO} \text{ и из}$$

$$\triangle BOD: \frac{BD}{\sin BOD} = \frac{OD}{\sin OBD} = \frac{OB}{\sin BDO};$$

$$\sin AOC = \frac{AC \sin CAO}{CO};$$

$$\sin AOC = \frac{BD \sin OBD}{OD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC \sin CAO}{CO} = \frac{BD \sin OBD}{OD}.$$

$$AC \cdot OD \cdot \sin CAO = CO \cdot BD \cdot \sin OBD;$$

$$AK = KB \Rightarrow \angle KAB = \angle KBA \Rightarrow \sin CAO = \sin OBD. \text{ Ч.т.д.}$$

44. Пусть  $CD = x$ ,  $AC = CB = a$ ,  $\angle A = \angle B = \alpha$ ,

тогда по теореме косинусов:  $x^2 = a^2 + AD^2 - 2a \cdot AD \cdot \cos \alpha$ ;

$$x^2 = a^2 + BD^2 - 2a \cdot BD \cdot \cos \alpha;$$

$$a^2 = a^2 + (AD + BD)^2 - 2a(AD + BD) \cdot \cos \alpha.$$

Сложим первые два и вычтем третье уравнение, получим:

$$2x^2 + a^2 = 3a^2 + AD^2 + BD^2 - (AD + BD)^2 - 2a \cdot \cos \alpha (AD + BD - AD - BD) \Rightarrow$$

$$2x^2 = 2a^2 - 2AD \cdot DB \Rightarrow CD^2 = AC^2 - AD \cdot DB. \text{ Ч.т.д.}$$

45. Пусть точка  $O$  — центр вписанной, а точка  $K$  — центр описанной окружности около  $\triangle ABC$ .  $CM$  — биссектриса. Для  $\triangle MOC$   $r^2 = R^2 - CK \cdot KM$  (по задаче 44). В  $\triangle MKB$

$$\angle MKB = \angle MBK = \frac{\angle B + \angle C}{2} \Rightarrow MK = MB, \text{ но } MB = 2R \sin \frac{\angle C}{2}.$$

$$\text{Т.к. } CK = \frac{r}{\sin \frac{\angle C}{2}}, \text{ то } d^2 = R^2 - 2Rr.$$

46. Дано:  $\triangle ABC$ ,  $CC_1$  — биссектриса.

Доказать:  $CC_1^2 = CA \cdot CB - AC_1 \cdot BC_1$ .

Доказательство:

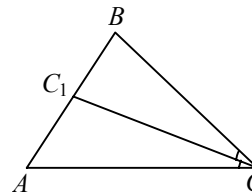
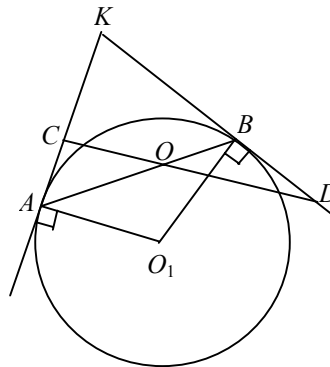
По теореме косинусов:

$$\text{из } \triangle ACC_1: \cos \angle ACC_1 = \frac{AC^2 + CC_1^2 - C_1A^2}{2AC \cdot CC_1};$$

$$\text{из } \triangle BCC_1: \cos \angle BCC_1 = \frac{BC^2 + CC_1^2 - C_1B^2}{2BC \cdot CC_1}.$$

Т.к.  $CC_1$  — биссектриса  $\Rightarrow \angle ACC_1 = \angle BCC_1 \Rightarrow \cos \angle ACC_1 = \cos \angle BCC_1$ ;

$$\frac{AC^2 + CC_1^2 - C_1A^2}{2AC \cdot CC_1} = \frac{BC^2 + CC_1^2 - C_1B^2}{2BC \cdot CC_1};$$



$$\frac{AC^2 \cdot BC + CC_1^2 \cdot BC - C_1A^2 \cdot BC - BC^2 \cdot AC - CC_1^2 \cdot AC + C_1B^2 \cdot AC}{AC \cdot BC} = 0;$$

$CC_1^2(BC - AC) = C_1A^2 \cdot BC + BC^2 \cdot AC - C_1B^2 \cdot AC - AC^2 \cdot BC$  в этом равенстве получим новые группировки, теперь

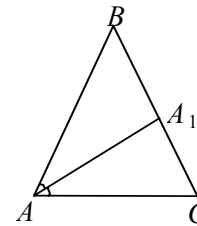
$$CC_1^2(BC - AC) = BC \cdot AC(BC - AC) + (C_1A^2 \cdot BC - C_1B^2 \cdot AC)$$

подставим в предыдущее уравнение  $AC = \frac{BC \cdot AC_1}{BC_1}$  и  $BC = \frac{BC_1 \cdot AC}{AC_1}$  (по

свойству биссектрисы);

$$CC_1^2(BC - AC) = BC \cdot AC(BC - AC) + C_1B \cdot AC_1(AC - BC).$$

Разделим на  $(BC - AC)$ . Получим:  $CC_1^2 = BC \cdot AC - C_1B \cdot AC_1$ .



**47.** Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AA_1 = l_a$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,

$$\frac{AC + BC + AB}{2} = p.$$

$$\text{Доказать: } l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}.$$

Доказательство:

$$\text{По формуле Герона } S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Также  $S_{ABC} = S_{ABA_1} + S_{ACA_1}$ . Пусть  $\angle BAA_1 = \varphi$ .

Т.к.  $AA_1$  — биссектриса, то  $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = \varphi$ ;  $S_{ABA_1} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot l_a \cdot \sin \varphi$ ;

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot l_a \cdot \sin \varphi (b+c) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (1)$$

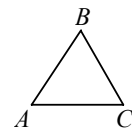
Найдем  $\sin \varphi$ .

По формуле из курса алгебры:  $\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$ ;

$\cos 2\varphi = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ , по теореме косинусов.

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2} = \frac{2bc - b^2 + a^2 - c^2}{4bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \\ &= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} = \frac{(p-b)(p-c)}{4bc}. \end{aligned}$$

$$\text{Из (1) выразим } l_a: l_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{(b+c)\sin \varphi} = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}.$$



$$\text{48. } \frac{p(p-a)}{bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{abc} =$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc} + \frac{2bc}{abc} = \frac{1}{2} (\cos A + 1) =$$

$$= \cos^2 \frac{A}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \cos \frac{A}{2}.$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{A}{2} &= 1 - \cos^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{p(p-a)}{bc} = \frac{4bc - b^2 - c^2 + a^2 - 2bc}{4bc} = \\ &= \frac{a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)}{4bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}. \text{ Ч.т.д.} \end{aligned}$$

49. Решение:

1) Опустим высоту из вершины  $C$  —  $CH$ .

$$\text{Из } \triangle CBH: \cos B = \frac{CB}{a}; \text{ Из } \triangle CAH: \cos A = \frac{CA}{b}$$

$$CB + CA = \cos B \cdot a + b \cdot \cos A; (CB + CA = c).$$

Аналогично, остальные два соотношения

2) Выведем из этих соотношений теорему косинусов

$$c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A; \quad c^2 = a^2 \cos^2 B + 2ab \cos A \cdot \cos B + b^2 \cos^2 A;$$

$$\cos^2 B = 1 - \sin^2 B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - (a \sin B - b \sin A)^2 + 2ab \cos A \cdot \cos B - 2ab \sin A \cdot \sin B,$$

$$\text{но } a \sin B - b \sin A = 0, \text{ т.к. по теореме синусов } \left( \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Далее } 2ab(\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B) &= 2ab \cos(A+B) = 2ab \cos(A+B) = \\ &= -2ab(\cos(180 - (A+B))) = -2ab \cos C \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \text{ Ч.т.д.} \end{aligned}$$

50. Пусть  $\angle C$  — тупой. Тогда по теореме косинусов

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle C.$$

Т.к.  $\cos \angle C < 0$ , то все слагаемые в правой части — положительны  $\Rightarrow$  левая часть больше любого из них  $\Rightarrow AB > AC$  и  $AB > BC$ .

51.  $AB > AC = BC$ . см. предыдущую задачу.

52.  $AB = 15$ . см. задачу 50.

53.  $AC$  — большая сторона. Радиус окружности, описанной около  $\triangle AMN = r$ , около  $\triangle ABC = R$ .  $R > r$

$$\frac{MN}{2 \sin B} < \frac{AC}{2 \sin B} \Rightarrow MN < AC. \text{ Ч.т.д.}$$

Т.к.  $AC$  — большая сторона  $\angle B > \angle A \Rightarrow \sin \angle B > \sin \angle A$  ( $MN < AC$ ).

54.

$$DH = CK \Rightarrow DA \cdot \sin \angle A = CB \cdot \sin \angle B \Rightarrow$$

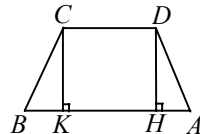
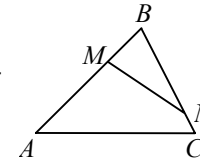
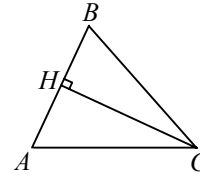
$$\Rightarrow \frac{DA}{CB} = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle A} < 1, \text{ т.к. } \angle B = \angle A \text{ и синус возрастает}$$

от  $0^\circ$  до  $90^\circ \Rightarrow DA < CB$ . Ч.т.д.

55. Т.к.  $AC > BD$  и  $\triangle AOB \sim \triangle COB$ , то  $OC + OC \cdot k > OD + OD \cdot k \Rightarrow$

$\Rightarrow OC > OD$ , аналогично  $AO > OB$ . Ч.т.д.

56. Рассмотрим трапецию  $ABCD$ .  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ , т.к.  $AD \parallel BC$ , либо  $\angle A = \angle B = 90^\circ$ , либо один из углов тупой.



$\triangle ABD$  — прямоугольный, где  $AB$  — катет,  $BD$  — гипотенуза.  $AB < BD$ .

2) Пусть  $\angle B$  — тупой.

Рассмотрим  $\triangle ABC$ .  $\angle B$  — тупой  $\Rightarrow AC$  — большая сторона  $\triangle ABC$ .

$AB < AC$

**57.** Неверно. Рассмотрим трапецию  $ABCP$ ,  $AD \parallel BC$ , и  $BD \perp AD$  и  $BC$ . В данном случае  $BD < AB$ ,  $DC$ , т.к.  $BD$  — перпендикуляр, а  $AB$ ,  $DC$  — наклонные.

**58.**  $CB > AC$

Решение:

Т.к. точка  $M$  — центр описанной около  $\triangle ABC$  окружности  $\Rightarrow MC = AM = BM$ ;

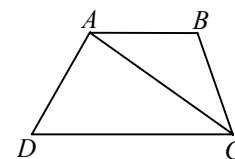
$\triangle AMC$ ,  $\triangle BMC$  — равнобедренные треугольники.

$\angle MCA > 45^\circ$ ;  $\angle MAC = \angle MCA$ , значит  $CB > AC$ .

**59.** Из того, что  $\angle A > \angle B + \angle C$  не следует, что  $\sin \angle A > \sin \angle B + \sin \angle C$

Пример:  $\angle A = 150^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ = \angle C$ .

### Задачи к §13.



**60.** Доказать:  $AD \leq (AB + BC + CD)$ .

По неравенству треугольника  $AC \leq AB + BC$ ;

$AD \leq AC + CD \leq AB + BC + CD$ . Ч.т.д.

**61.** По неравенству треугольника:

$AC < AB + BC$ ;

$AD < AC + CD < AB + BC + CD$ . Ч.т.д.

**62.** Т.к. сумма длин первых четырех сторон меньше длины пятой стороны, то не может.

**63.** Нет, т.к. длина большей стороны равна сумме длин остальных сторон. Четырехугольник вырождается в отрезок.

**64.**  $AB = 3$  см,  $AC = 14$  см,  $DB = 5$  см,  $DC = 6$  см.

Т.к.  $AC = AB + BD + DC$ , то точки  $A, B, C, D$  лежат на одной прямой.

**65.** По неравенству треугольника.

$PQ < PB + BQ$ ;  $RQ < RC + QC$ ;  $PR < AP + AR$ .

Сложив эти неравенства, получим:

$PQ + RQ + PR < PB + BQ + QC + RC + AR + AP$ ;  $P_{PQR} < P_{ABC}$ . Ч.т.д.

**66.** Длина отрезка, соединяющего концы ломаной — кратчайшее расстояние между этими концами, значит любое другое расстояние между концами ломаной больше длины этого отрезка. Значит длина ломаной больше длины отрезка, соединяющего ее концы.

**67.** Допустим, что прямая  $a$  не пересекает ни одну из остальных сторон четырехугольника. Значит, прямая  $a \parallel BC$ ,  $a \parallel CD$ ,  $a \parallel AD$ .

Значит,  $BC \parallel CD \parallel AD$  — противоречие.

Значит, прямая  $a$  пересекает хотя бы одну из остальных сторон четырехугольника.

**68.** Не может, т.к. любые две соседние вершины лежат по разные стороны от этой прямой.

**69.** См. задачу № 68. **70.а)** только одну, т.к. только одна вершина не является соседней.

б) две, т.к. две вершины не являются соседними.

в) три, т.к. три вершины не являются соседними.

г)  $n - 3$ , т.к.  $n - 3$  вершины не являются соседними.

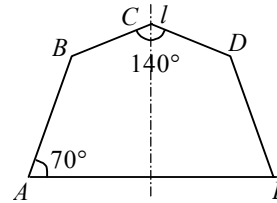
71. Т.к. диагоналей две (см. задачу № 70), то треугольников три.

72. Т.к. диагоналей  $n - 3$  (см. задачу № 70), то треугольников  $n - 2$ .

73. Сумма углов в пятиугольнике  $540^\circ$ . Т.к. пятиугольник симметричен относительно прямой  $l$ , то  $\angle A = \angle E = 70^\circ$ ;  $\angle B = \angle D$

Значит,

$$\angle B = \frac{540^\circ - 2\angle A - \angle C}{2} = \frac{540^\circ - 140^\circ - 140^\circ}{2} = 130^\circ.$$



74. Сумма внутренних углов в выпуклом  $n$ -угольнике  $(n - 2)180^\circ$ .

Значит  $(n - 2)180^\circ + x = 2250^\circ$ ;  $(n - 2) \cdot 180^\circ = 2250^\circ - x$ ;

$2250^\circ - x$  — кратно 180.

Значит,  $x = 90^\circ$ .  $(n - 2)180^\circ = 12 \cdot 180^\circ$ ;  $n - 2 = 12$ ,  $n = 14$ .

Ответ: 14.

75. Сумма внутренних углов:  $(n - 2)180^\circ$ .

Сумма внешних углов:  $180^\circ \cdot n - (n - 2)180^\circ = 180^\circ n - 180^\circ \cdot n + 360^\circ = 360^\circ$ .

Значит, один из внутренних углов равен:  $468^\circ - 360^\circ = 108^\circ$ .

Т.к. внутренние углы равны, то  $108^\circ \cdot n = (n - 2) \cdot 180^\circ$ ;

$108^\circ \cdot n = 180^\circ \cdot n - 360^\circ$ ;  $360^\circ = 72n$ ;  $n = 5$ .

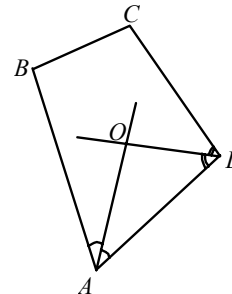
Ответ: 5.

76. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника:  $360^\circ$ .

Если внутренний угол многоугольника острый, то соответствующий ему внешний угол — тупой. Значит, многоугольник не может иметь больше трех острых углов.

77.

$$\begin{aligned} \angle AOD &= 180^\circ - \angle OAD - \angle ODA = \\ &= 180^\circ - \frac{\angle BAD}{2} - \frac{\angle CDA}{2} = \\ &= 180^\circ - \frac{(360^\circ - (\angle ABC + \angle BCD))}{2} = \\ &= 180^\circ - 180^\circ + \frac{\angle ABC + \angle BCD}{2} = \frac{\angle ABC + \angle BCD}{2}. \end{aligned}$$



78. Не обязательно. Пример — ромб.

79. Будет.

Из центра окружности проведем радиусы в точки касания. Соединим центр с вершинами многоугольника. Мы получим  $2n$  треугольников. Эти треугольники — прямоугольные и равны по гипотенузе и острому углу. Значит, стороны многоугольника равны. Значит, многоугольник правильный.

**80.** Все диагонали в правильном многоугольнике равны. Сумма внутренних углов:  $540^\circ$ . Значит, внутренний угол  $108^\circ$ .

Найдем длину диагонали по теореме косинусов:

$$\sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos 108^\circ} = \sqrt{2a^2(1 - \cos 108^\circ)} = a\sqrt{2(1 - \cos 108^\circ)}.$$

**81.**  $\triangle ABC = \triangle BCD = \triangle CDE = \triangle DEA = \triangle EAB$  (по двум сторонам и углу между ними). Значит,  $\angle CAB = \angle DBC = \angle ECD = \angle AEB = \angle ABE = \angle BCA = \angle BDC = \angle CED = \angle EAD$ .

Значит,  $\triangle ABK = \triangle BCL = \triangle CDM = \triangle DEN = \triangle EAP$  (по стороне и двум прилежащим к ней углам)

Значит,  $AK = BK = BL = LC = CM = MD = DN = EN = EP = AP$ .

Т.к. диагонали равны, то  $PK = KL = LM = NM = PN$ .

Т.к.  $\triangle ABK = \triangle BCL = \triangle CDM = \triangle DEN = \triangle EAP$ , то

$$\angle AKP = \angle BLC = \angle CMD = \angle DNE = \angle EPA.$$

Значит,  $\angle KPN = \angle PNM = \angle NML = \angle MLK = \angle LKP$ .

Значит, пятиугольник  $KLMNP$  — правильный.

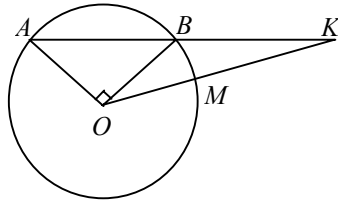
**82.** Пусть  $MC$  — сторона 8-угольника и пусть радиус окружности равен  $R$ .

$$\angle MOC = \frac{360^\circ}{7}; \quad MC = \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cdot \cos \frac{360^\circ}{7}}; \quad OA = R; \quad OK = R; \quad OB = \frac{R}{2};$$

$$BK = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}; \quad MC - BK = R\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos \frac{360^\circ}{7}} - R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{360^\circ}{7}\right)} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{360^\circ}{7}\right)}}{\sqrt{3}} - 1 = 1,002 - 1 = 0,002.$$

**83.** Пусть  $NP$  — сторона многоугольника и пусть радиус окружности равен  $R$ , тогда  $\angle NOP = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$  и  $NP = R \cdot \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos 36^\circ} = \sqrt{2 - 2\cos 36^\circ} \cdot R$ .



$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ; \quad AB = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}; \quad AK = 2\sqrt{2}R; \quad \angle BAO = 45^\circ;$$

$$OK = \sqrt{8R^2 + R^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2}R \cdot R \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{9R^2 - 4\sqrt{2}R^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \sqrt{9R^2 - 4R^2} = \sqrt{5}R \Rightarrow MK = KO - OM = R(\sqrt{5} - 1).$$



По теореме косинусов сторона правильного вписанного 10-угольника рав-

$$\begin{aligned} \text{на } \sqrt{2R^2 \left(1 - \cos \frac{360^\circ}{10}\right)} &= R\sqrt{2(1 - \cos 36^\circ)} = \\ &= R\sqrt{2 \left(1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)} = R\sqrt{2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = R\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = R\sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}} = \\ &= R\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4}} = R\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R. \text{ Ч.т.д.} \end{aligned}$$

**84.** Длина дуги  $\frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha$ .

а)  $l = \frac{\pi R}{3}$ ;  $AB = R$ ;  $\frac{l}{AB} = \frac{\pi}{3}$ ;

б)  $l = \frac{\pi R}{2}$ ;  $AB = R\sqrt{2}$ ;  $\frac{l}{AB} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ ;

в)  $l = \frac{2\pi R}{3}$ ;  $AB = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot \cos 120^\circ} = R\sqrt{2 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = R\sqrt{3}$ ;

$$\frac{l}{AB} = \frac{2\pi R}{3 \cdot R \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9};$$

г)  $l = \frac{4}{3}\pi R$ ;  $AB = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot \cos 120^\circ} = R\sqrt{3} \Rightarrow \frac{l}{AB} = \frac{4\pi R}{3\sqrt{3}R} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ ;

д)  $l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot 300^\circ = \frac{\pi R \cdot 30}{18} = \frac{\pi R \cdot 10}{6} = \frac{5\pi R}{3}$ ;

$AB=R$ , т.к.  $\angle AOB = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$ ;  $\triangle AOB$  — равносторонний.  $\frac{l}{AB} = \frac{5\pi}{3}$ .

**85.** а) пусть меньший угол  $x$ , больший  $3x$ .

$$x + 3x = 360^\circ; x = 90^\circ,$$

тогда  $3x = 3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$ .

Ответ:  $90^\circ$  и  $270^\circ$ .

б) меньший угол  $5x$ , больший  $13x$ .

$$5x + 13x = 360^\circ; x = 20^\circ.$$

тогда  $13x = 13 \cdot 20^\circ = 260^\circ$ .

Ответ:  $100^\circ$  и  $260^\circ$ .

в) меньший —  $x$ , больший  $300^\circ + x$ .

$$300^\circ + 2x = 360^\circ; x = 30^\circ.$$

тогда  $300^\circ + x = 300^\circ + 30^\circ = 330^\circ$ .

Ответ:  $30^\circ$  и  $330^\circ$ .

г) меньший  $x$ , больший  $y$ .

$$\begin{cases} y - x = 90^\circ \\ y + x = 360^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 225^\circ \\ x = 135^\circ \end{cases}$$

Ответ:  $135^\circ$  и  $225^\circ$ .

**86.** Длина дуги  $l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha$ ;  $l_1 = \frac{\pi \cdot 5}{180^\circ} \cdot 60^\circ \text{ см} = \frac{5\pi}{3} \text{ см}$ .

$$l_2 = \frac{9\pi}{180^\circ} \cdot 60^\circ \text{ см} = 3\pi \text{ см}.$$

87. Длина дуги  $l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha$ ;

$$l = \frac{3,14 \cdot 10}{180^\circ} \cdot 57^\circ = \frac{3,14 \cdot 10 \cdot 19}{60} = \frac{3,14 \cdot 19}{6} \approx 9,94 \text{ см.}$$

88.  $l$  — длина дуги;  $d$  — длина хорды;  $R$  — радиус окружности.

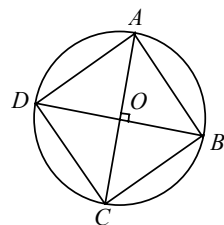
$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha.$$

a)  $l = \frac{\pi R \cdot 135^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R \cdot 15}{20} = \frac{3\pi R}{4}$ . Значит,  $R = \frac{4l}{3\pi}$ ,

$$d = \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cdot \cos 135^\circ} = R \cdot \sqrt{2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = R \sqrt{2 + \sqrt{2}} = \frac{4l}{3\pi} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

б)  $l = \frac{\pi R \cdot 240^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R \cdot 8}{6} = \frac{4\pi R}{3}$ . Значит,  $R = \frac{3l}{4\pi}$ ;

$$d = \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cdot \cos(360^\circ - 240^\circ)} = R \cdot \sqrt{2 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = R\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3} \cdot l}{4\pi}.$$



89.  $BC = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$ ;

длина окружности:  $l = 2\pi R$ ;

$$2\pi R - 4R - \frac{\sqrt{2}}{5} R =$$

$$= R \left( 2\pi - 4 - \frac{\sqrt{2}}{5} \right) = R \left( \frac{10\pi - 20 - \sqrt{2}}{5} \right) =$$

$$= R \left( \frac{31,415 - 20 - 1,41}{5} \right) \approx 0,00034R \text{ — абсолютная погрешность.}$$

$$\frac{0,00034R}{2\pi R} \approx 0,005\% \text{ — относительная.}$$

90.  $r = 5$  см,  $r$  — радиус окружности.  $P_{OAB}$  — ?

$$OA = OB = r; P_{OAB} = OA + OB + l_{AB} = 10 + l_{AB}$$

Т.к.  $\angle AKB = 90^\circ$ ;  $l_{AB} = \frac{1}{4} l_{\text{окр}} = \frac{1}{4} 2\pi r = \frac{\pi r}{2} = \frac{5\pi}{2}$ ;

$$P_{OAB} = 10 + \frac{5\pi}{2} = \frac{5}{2}(\pi + 4).$$

#### §14.

91. Измеряем стороны квадратов  $a$ .  $S_{\text{кв}} = a^2$

92. а)  $S = AB^2 = 2,5^2 = 6,25$  см<sup>2</sup>; б)  $S = (A'B')^2 = (0,21)^2 = 0,441$  м.

93.  $S_{ABCD} =$  а) 256 см<sup>2</sup>; б) 76,8 м<sup>2</sup>; в) 14,6 мм<sup>2</sup>;  $AB = ?$

$$S_{\text{кв}} = AB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{S_{\text{кв}}}.$$

а) 16; б)  $\approx 8,763$ ; в)  $\approx 3,8209$ .

94.  $S_{ABCD} = 2,5 \text{ м}^2$ ;  $P_{KB} — ?$

$S_{KB} = AB^2 \Rightarrow AB \approx 1,58$ ;  $P_{KB} = 4AB \Rightarrow P_{KB} \approx 6,324 \text{ м.}$

95. а)  $S_{ABCD} = 24 \text{ см}^2$ ;

$BC = 6$ ;  $BD_1 — ?$

$S_{\text{нар}} = BD_1 \cdot AD \Rightarrow BD_1 = \frac{S}{AD} = \frac{24}{6} = 4 \text{ см.}$

б)  $S = 41 \text{ см}^2$ ,  $BK$ ,  $AM — ?$

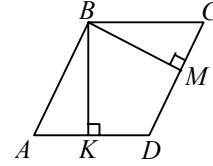
$S_{\text{нар}} = BK \cdot AD = AM \cdot CD \Rightarrow AM = \frac{S}{CD} = \frac{41}{5}$ ;  $BK = \frac{S}{AD} = \frac{41}{10} = 4,1 \text{ см.}$

96.

$BK = 4$ ;  $BM = 1$ ;  $S_{ABCD} = 6$ ;  $AB$ ,  $AD — ?$

$S_{\text{нар}} = AB \cdot BM = AD \cdot BK \Rightarrow AB = \frac{S}{BM} = \frac{6}{1} = 6 \text{ см.}$

$AD = \frac{S}{BK} = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ см.}$



97. а)  $AB = 4 \text{ см}$ ,  $BC = 7 \text{ см}$ ;

б)  $AB = 1,2 \text{ м}$ ,  $BC = 3,5 \text{ м}$ ;

$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \Rightarrow$  а)  $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 = 14 \text{ см}^2$ . б)  $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 3,5 = 2,1 \text{ м}^2$ .

98.  $AH — ?$   $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH \Rightarrow AH = \frac{2 \cdot 48}{BC} = \frac{2 \cdot 48}{32} = 3 \text{ см.}$

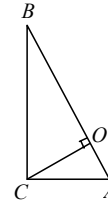
99.  $AB = 3AC$ ,  $\frac{BK}{CH} = ?$   $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot AB \Rightarrow$

$\Rightarrow BK \cdot AC = CH \cdot AB \Rightarrow \frac{BK}{CH} = \frac{AB}{AC} = \frac{3AC}{AC} = 3 \Rightarrow BK : CH = 3 : 1$ .

100.

$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ см}^2$ ;

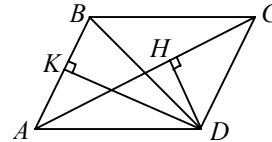
$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC \Rightarrow BH \cdot AC = 48 \Rightarrow BH = \frac{48}{AC} = 4,8 \text{ см.}$



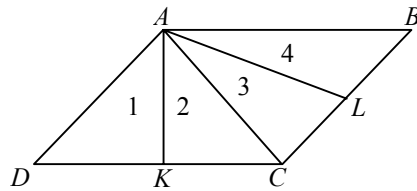
101.  $DM — ?$

$\Delta ACD = \Delta CAB$  по 3-м сторонам (т.к.  $ABCD —$  параллелограмм,  $AB=CD$ ,  $BC=AD$ ,  $AC —$  общая).

$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot DH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 16 = 32 \Rightarrow$



$\Rightarrow S_{ABCD} = 2 \cdot 32 = 64$ ;  $S_{ABCD} = DK \cdot AB \Rightarrow DK = \frac{S}{AB} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3} \approx 5,3 \text{ см.}$



**102.**

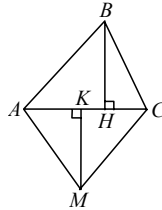
$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BL;$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot LC;$$

$$BL = LC \Rightarrow S_1 = S_2.$$

Аналогично:  $S_3 = S_4$ .

$$\triangle ABC = \triangle CDA \Rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CDA} \Rightarrow S_{1+2} = S_{3+4} \Rightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4.$$

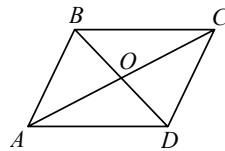


**103.**

$ABC$  — данный треугольник. Находим длину  $BH$ , центр  $AC$  — точка  $K$ . Из точки  $K$  строим перпендикуляр, равный  $BH$ , соединяем вершину перпендикуляра  $KM$  с точками  $A$  и  $C$ .  $\triangle AMC$  — искомый.

$$104. \text{ а) } S_{\Delta} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ см}$$

$$\text{б) } S_{\Delta} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ см.}$$



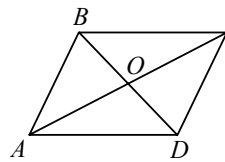
**105.**

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 6 \text{ см}$$

$$S_{ABD} = S_{BDC} \Rightarrow S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} = 6 \cdot 2 = 12 \text{ см.}$$

$$106. S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin(150^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 25 \text{ см};$$

$$S_{ABC} = S_{ACO} \Rightarrow S_{ABCO} = 2 \cdot 25 = 50 \text{ см.}$$

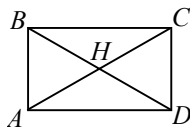


**107.**

$AC = 8 \text{ см}$ ,  $BD = 6 \text{ см}$ ,  $BO = OD$ ,  $AO = OC$  (т.к.  $O$  — точка пересечения диагоналей параллелограмма)  $\Rightarrow AO = 4$ ;  $BO = 3$ .

$$S_{ABO} = S_{COD} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot AO \cdot \sin(\angle BOA) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

$$S_{AOD} = S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \sin(\angle BOC) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow S_{ABCD} = 12\sqrt{2}.$$



**108.**  $BD = 4$ ,  $BH = HD = AH = HC = 2$  (т.к.  $ABCD$  — прямоугольник);

$$S_{ABH} = S_{AHD} = S_{BHC} = S_{CHD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ см} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 4 \cdot 1 = 4 \text{ см.}$$

$$109. \alpha + \beta = 180^\circ; \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \alpha$$

$$S_{EST} = \frac{1}{2} SE \cdot ST \cdot \sin(180 - \alpha) = \frac{1}{2} SE \cdot ST \cdot \sin \alpha \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{EST}} = \frac{AB \cdot BC}{SE \cdot ST} \quad \text{Ч.т.д.}$$

$$110. CC_1 = ?$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

$$S_{C_1CB} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ \cdot CC_1 = 2CC_1. \quad S_{ACC_1} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ \cdot CC_1 = \frac{5}{4} CC_1 \text{ см}^2;$$

$$S_{ACC_1} + S_{C_1CB} = \left(\frac{5}{4} + 2\right) CC_1 = 10\sqrt{3} = S_{ABC}$$

$$\frac{13}{4} CC_1 = 10\sqrt{3} \Rightarrow CC_1 = \frac{40\sqrt{3}}{13} \text{ см}$$

$$111. S_{ABKH} = \frac{(BK + AH)}{2} \cdot BT;$$

$$BK = KC; AH = HD;$$

$$S_{HKCD} = \frac{(KC + HD)}{2} \cdot BT = \frac{(BK + AH)}{2} \cdot BT \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABKH} = S_{HKCD}. \quad \text{Ч.т.д.}$$

$$112. CFH \text{ — прямоугольный треугольник, } \angle F = 45^\circ \Rightarrow FH = CH \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2FH^2 = 25 \Rightarrow CH = \frac{5}{\sqrt{2}}. \quad S_{CDEF} = \frac{(CD + FE)}{2} \cdot CH = \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{35}{2\sqrt{2}} \text{ см}^2.$$

$$113.$$

$$\angle BAH = 30^\circ \Rightarrow BH = \frac{1}{2} BA = \frac{3}{2} = CK;$$

$$\angle CDK = 45^\circ \Rightarrow CK = KD = \frac{3}{2};$$

$$\sin(\angle ABH) = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad BC = KH = 1;$$

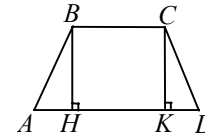
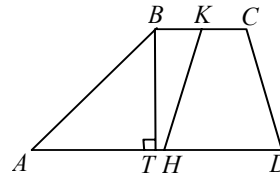
$$AD = 1 + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BH = \frac{1}{2} \left( \frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \left( \frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{8} (7 + 3\sqrt{3}).$$

$$114.$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5a.$$

$$\text{Пусть } CM \perp AB, \quad OH \perp AB, \text{ тогда } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 3a = 6a^2;$$



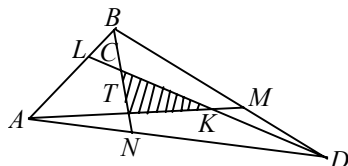
$$S_{ABC} = \frac{5a}{2} \cdot CM = 6a^2 \Rightarrow CM = \frac{12a^2}{5a} = \frac{12a}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MB = \sqrt{CB^2 - CM^2} = \sqrt{9a^2 - \frac{144a^2}{25}} = \frac{9a}{5};$$

$$\triangle ADH = \triangle BCM \text{ (по гипотенузе и катету)} \Rightarrow AH = MB \Rightarrow HM =$$

$$= 5a - \frac{18a}{5} = \frac{7a}{5} = DC \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{12a}{5} \left( \frac{7a}{5} + 5a \right) = \frac{6a}{5} \left( \frac{32a}{5} \right) = \frac{192a^2}{25} = 7,68a^2.$$

115.



$$\begin{aligned} S - S(ABM) - S(ALC) - \\ - S(CKB) = S(PQR) - S(BKQ) - S(KLC) - \\ - S(APM) \Rightarrow S(PQR) = S(BKQ) + S(KLC) + \\ + S(APM). \end{aligned}$$

$$MF \parallel CK \Rightarrow \triangle AFM \sim \triangle AKC \Rightarrow AF = \frac{1}{3} AK =$$

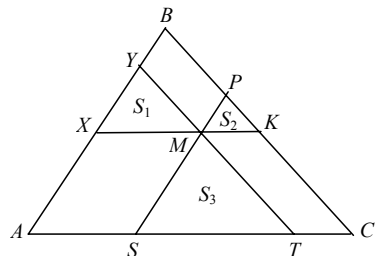
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} AB = \frac{2}{9} AB \Rightarrow FB = \frac{7}{9} AB;$$

$$\triangle FBM \sim \triangle KBQ \Rightarrow \frac{KB}{FB} = \frac{BQ}{BM} \Rightarrow \frac{BQ}{BM} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{9}} = \frac{3}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(BKQ) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} S(ABM) = \frac{1}{7} S(ABM) = \frac{1}{21} S.$$

$$\text{Аналогично, } S(RLC) = \frac{1}{21} S \text{ и } S(APM) = \frac{1}{21} S \Rightarrow S(PQR) = \frac{1}{7} S.$$

116.



$$S_{ABC} = S; \sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3};$$

$$BC \parallel YT; BC \parallel SP \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle XYM \sim \triangle MPK;$$

$$XK \parallel AC \Rightarrow \angle YXM = \angle XMS = \angle MST \text{ и } \angle YMX = \angle MTS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1 \sim S_3 \Rightarrow S_1 \sim S_2 \sim S_3 \sim S \Rightarrow \frac{S}{S_1} = \frac{AB^2 \cdot BC^2}{XY^2 \cdot YM^2}; \quad \frac{S}{S_2} = \frac{AB^2 \cdot BC^2}{MP^2 \cdot PK^2};$$

$$\frac{S}{S_3} = \frac{AB^2 \cdot BC^2}{SM^2 \cdot MT^2} \Rightarrow \sqrt{S} = \sqrt{S} \left( \frac{XY \cdot YM + MP \cdot PK + SM \cdot MT}{AB \cdot BC} \right);$$

$$\frac{XY \cdot YM}{AB \cdot BC} + \frac{MP \cdot PK}{AB \cdot BC} + \frac{SM \cdot MT}{AB \cdot BC} = \frac{XY \cdot BP}{AB \cdot BC} + \frac{BY \cdot PK}{AB \cdot BC} + \frac{AX \cdot KC}{AB \cdot BC} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{S} = \sqrt{S}.$$

Ч.т.д.

**117.** Пусть  $K$  — середина  $BC$ ;

а)  $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3}$  см;

$$AO = \frac{2}{3} AK = \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R = \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S = \pi R^2 = \frac{300}{9} \pi = \frac{100}{3} \pi \text{ см}^2.$$

б) Пусть  $ABCDEF$  — данный 6-угольник.

$$\angle AFE = \frac{(6-2)180}{4} = 120^\circ \Rightarrow \angle AFO = 60^\circ = \angle FAO \Rightarrow \triangle AFO \text{ — равносто-}$$

ронный  $\Rightarrow AE = FO = AO = 10 = R \Rightarrow S = \pi R^2 = 100\pi$ .

$$R = \frac{AB}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{45^\circ}{2} = 5 \operatorname{ctg} 22,5^\circ \Rightarrow S = \pi R^2 = 25\pi \operatorname{ctg}^2 22,5^\circ.$$

в) Пусть  $ABCDEFGH$  — данный 8-угольник и точка  $O$  — его центр, тогда

по теореме косинусов имеем:  $AB^2 = 2R^2 \left( 1 - \cos \frac{360^\circ}{8} \right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 100 = 2R^2 \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow R = \sqrt{\frac{100}{2 - \sqrt{2}}} \Rightarrow S = \pi \cdot \frac{100}{2 - \sqrt{2}} \text{ см}^2.$$

**118.** а)  $OCD$  — равносторонний треугольник,  $OM$  — медиана  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3} = r \Rightarrow S = \pi r^2 = 75\pi \text{ см}^2.$$

б) Пусть  $ABCDEFGH$  — данный 8-угольник и точка  $O$  — его центр, и  $OM$

$$\perp AB \Rightarrow OM = \frac{1}{2} AB \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \frac{360^\circ}{8} = 5 \operatorname{ctg} \frac{45^\circ}{2} =$$

$$= 5 \frac{\cos \frac{45^\circ}{2}}{\sin \frac{45^\circ}{2}} = 5 \frac{2 \cos^2 \frac{45^\circ}{2}}{\sin 45^\circ} = 5 \frac{\cos 45^\circ + 1}{\sin 45^\circ} = 5 \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = r \Rightarrow S = \pi r^2 = 25\pi \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}.$$

**119.** Пусть  $MK$  — данная хорда, пересекает меньшую окружность в точке  $O_1$ , а точка  $O$  — центр окружностей, тогда

$$S_{\text{кольца}} = \pi OK^2 - \pi OO_1^2 = \pi (OK^2 - OO_1^2).$$

$$\triangle KO_1O \text{ — прямоугольный} \Rightarrow O_1K^2 = OK^2 - OO_1^2 \Rightarrow$$

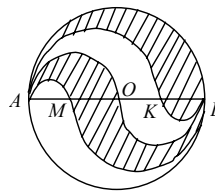
$$\Rightarrow S_{\text{кольца}} = \pi O_1K^2, \text{ т.к. } MK \text{ — диаметр данного круга и } MO' = O'K \text{ (из}$$

$$\triangle MOK: MO = OK; O'O \text{ — перпендикуляр)} \Rightarrow S_{\text{круга}} = \pi O'K^2. \text{ Ч.т.д.}$$

**120.**  $BDOE$  — квадрат  $\Rightarrow S_{\text{кв}} = 5^2 = 25 \text{ см}^2$ ;

$$DOE \text{ — сектор; } S_{DOE} = \frac{25\pi}{4} \Rightarrow S_{\text{фиг}} = 25 - \frac{25\pi}{4} = 25 \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) \text{ см}^2.$$

121.



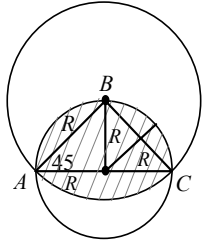
$$AM = MO = OK = KB = \frac{d}{4}; \quad S_{\cup AB} = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi d^2}{8};$$

$$S_{\cup AK} = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{9d^2}{64} = \frac{9d^2\pi}{128}; \quad S_{\cup AO} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d^2}{16} = \frac{\pi d^2}{32};$$

$$S_{\cup AM} = \frac{\pi d^2}{128} \Rightarrow S_1 = \frac{\pi d^2}{8} - \frac{9\pi d^2}{8} + \frac{\pi d^2}{128} = \frac{1}{16}\pi d^2;$$

$$S_2 = \frac{\pi d^2}{32} - \frac{\pi d^2}{128} + \frac{9\pi d^2}{128} - \frac{\pi d^2}{32} = \frac{1}{16}\pi d^2.$$

122.



$$R_{\text{бол. окр}} = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2};$$

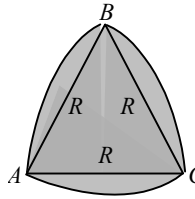
$$\cup AB = \cup BC = \cup AC; \quad \angle ABC = 90^\circ \text{ (AC — диаметр)}$$

$$S_{\text{сектора } ABC} = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi R^2}{2};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB^2 = \frac{1}{2} R^2 \cdot 2 = R^2 \Rightarrow S_{\cup AC} = R^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right);$$

$$S_{\frac{1}{2}\text{окр}} = \frac{\pi R^2}{2} \Rightarrow S = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{2} - R^2 = R^2(\pi - 1) \text{ см}^2.$$

123.



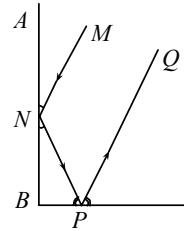
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} R^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}R^2}{4};$$

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2}{6} \Rightarrow S_{\cup AB} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{\sqrt{3}R^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\text{фиг}} = \frac{\sqrt{3}R^2}{4} + \frac{\pi R^2}{2} - \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{R^2}{2}(\pi - \sqrt{3}).$$

### Различные задачи по курсу геометрии VII—IX классов

#### Треугольник



$$1. \quad \angle MNP + \angle NPQ = (180^\circ - 2\angle BNP) + (180^\circ - 1\angle NPB) = 360^\circ - 2(\angle BNP + \angle NPB) = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ.$$

Т.к.  $\angle MNP$  и  $\angle NPQ$  — внутренние односторонние при пересечении прямых  $MN$  и  $PQ$  секущей  $ND$ , то прямые  $MN$  и  $PQ$  параллельны, а, значит, луч изменит свое направление на противоположное.

$$2. \quad \angle AOB = \angle DOE = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}.$$



$$\angle DOA = \angle EOB = 180^\circ - \angle AOB = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

3. Допустим, что могут.

$\angle AOB = 90^\circ = \angle DOA$ , следовательно,  
по предыдущей задаче  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ , что невозможно,  
если  $\angle C = 0^\circ \Rightarrow$  получаем противоречие  $\Rightarrow$  не могут.

4.  $\angle BAC = 30^\circ$ ,  $AB = 32$  см.

$AD$  — ?  $BD$  — ?

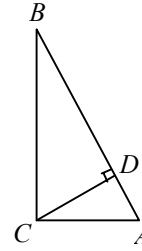
$$\sin BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}; \quad BC = \frac{1}{2} AB = 16 \text{ см};$$

$$AC = \cos BAC \cdot AB = \frac{\sqrt{3} \cdot 32}{2} = 16\sqrt{3} \text{ см.}$$

$$\text{из } \triangle ADC: \cos DAC = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$AD = AC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16 \cdot 3}{2} = 24 \text{ см};$$

$$\text{из } \triangle DBC: \frac{DB}{BC} = \sin DCB = \frac{1}{2}; \quad DB = \frac{BC}{2} = 8 \text{ см.}$$



5.  $AB = 2BC$ ;

$$\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2} = \sin BAC = \cos ABC, \text{ значит, } \angle BAC = 30^\circ, \angle ABC = 60^\circ.$$

6.  $AB = 4CD$ ;  $O$  — середина  $AB$ .

$$CO = AO = OB; \quad CO = \frac{1}{2} AB; \quad CD = \frac{1}{4} AB; \quad \frac{CO}{CD} = 2; \quad CO = 2CD.$$

$$\text{Значит, } \cos OCD = \frac{CD}{CO} = \frac{1}{2}, \text{ значит, } \angle OCD = 60^\circ;$$

$$\angle DOC = 90^\circ - \angle OCD = 30^\circ; \quad \angle AOC = 180^\circ - \angle DOC = 150^\circ;$$

$$\angle OAC = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle AOC) = 15^\circ; \quad \angle ABC = 90^\circ - \angle BAC = 75^\circ.$$

7. Соединим эти три точки. Через вершины этого треугольника проведем прямые, параллельные противоположным сторонам. Точки пересечения этих прямых являются вершинами искомого треугольника.

8. а)  $\angle A = 10^\circ$ ,  $\angle C = 78^\circ$ ,  $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 10^\circ - 78^\circ = 92^\circ$ .

Т.к. напротив меньшего угла лежит меньшая сторона, то  $AC > AB > BC$ .

Ответ:  $b, c, a$ .

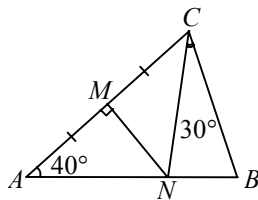
б)  $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 178^\circ - 1^\circ = 1^\circ$ ,

т.к. напротив меньшего угла лежит меньшая сторона, то  $AC = BC > AB$ .

Ответ:  $c, a = b$ .

9.  $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C = 180^\circ - 67^\circ - 78^\circ = 35^\circ$ ,

т.к. напротив меньшего угла лежит меньшая сторона по следствию из теоремы синусов, то  $BC < AC < AB$ . Ответ:  $a, b, c$ .



10. а) т.к.  $NM$  — медиана и высота в  $\triangle ACN$ , то  $\triangle ACN$  — равнобедренный и  $AN = CN$ ; т.к.  $AN + NB = a$ , то  $CN + NB = a$ .

Значит,  $P(\triangle CBN) = CN + NB + BC = a + c$

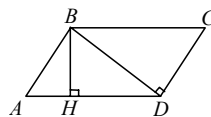
б)  $\angle MAN = \angle MCN = 40^\circ$  (т.к.  $\triangle ACN$  — равнобедренный);

$\angle ABC = 180^\circ - 40^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 70^\circ$ .

Значит,  $\angle ACB = \angle ABC = 70^\circ$ .

Значит,  $\triangle ABC$  — равнобедренный с основанием  $BC$ .

#### Четырехугольник



11.  $AB = BD = CD$ , т.к. треугольники  $ABD$  и  $BDC$  — равнобедренные

$\angle ABD = \angle BDC = 90^\circ$  по условию

$AD = a$ ,  $AD$  — большая сторона, т.к. это гипотенуза.

Пусть  $AB = BD = x$ , тогда  $x^2 + x^2 = a^2$ ;  $2x^2 = a^2$ ;  $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

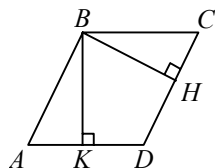
Т.к.  $\triangle ABD$  — равнобедренный, значит,  $\angle BAD = \angle BDA = 45^\circ$ .

А значит,  $\angle BAH = \angle ABH = 45^\circ$ .

Пусть  $AH = BH = y$ ;  $2y^2 = x^2$ ;  $2y^2 = \frac{a^2}{2}$ ;  $y^2 = \frac{a^2}{4}$ ;  $y = \frac{a}{2}$ . Ответ:  $\frac{a}{2}$ .

12.

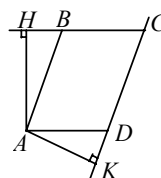
а)



$\angle HBK = 25^\circ$ . Значит,  $\angle HDK = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 25^\circ = 155^\circ$ .

Значит,  $\angle BAD = 180^\circ - 155^\circ = 25^\circ$ .

б)

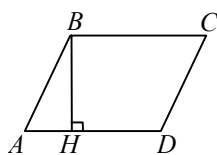


$\angle HAK = 125^\circ$ .

$\angle BCD = 360^\circ - 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$ .

$\angle ADC = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$ .

13.



Строим две параллельные прямые, удаленные друг от друга на расстояние, равное 2 см. От произвольной точки  $A$  одной из них отложим отрезок  $AB$ , равный 3 см. Затем проводим окружности с центрами в точках  $A$  и  $B$  радиусом, равным 5 см. Точки пересечения этих окружностей со второй прямой дадут остальные искомые вершины параллелограмма. Этих точек пересечения будет 4. Выберите их низ в качестве вершин либо чет-

ные, либо нечетные. Задача имеет и второе решение. Оно получается, если сначала отложить  $AB = 5$  см, а затем из точек  $A$  и  $B$  провести окружности с радиусом, равным 3 см, только в качестве 2-х других вершин выберите из 4-х точек пересечения какие-нибудь две крайние.

14. см. решение задачи 13. Только здесь будет одно решение, т.к.  $3 < 4$ , т.е. одна из сторон параллелограмма меньше высоты.

15.  $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$ . Доказать, что  $BC \parallel AD$ .

Через точку  $D$  проведем прямую  $a$ , параллельную прямой  $BC$ .

$K$  — точка пересечения  $a$  и  $BN$ ;

$\triangle BCN = \triangle KDN$  по второму признаку ( $CN = ND$ ,  $\angle CNB = \angle DNK$  (как вертикальные),  $\angle BCN = \angle KDN$

(как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых  $BC$  и  $DK$  секущей  $CD$ )).

Значит,  $BN = NK$ ,  $BC = DK$ , к.  $BN = NK$  и  $AM = MB$ , то  $MN$  — средняя линия, значит,  $MN = \frac{1}{2}AK$ .

По условию  $MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(AD + DK)$ .

Значит  $AK = AD + DK$ .

Значит, точки  $A$ ,  $D$ ,  $K$  лежат на одной прямой.

Значит,  $AD \parallel BC$ .

16. Т.к.  $K$  — середина  $BC$  и  $L$  — середина  $CD$ , то  $KL$  — средняя линия в  $\triangle BCD$ .

Аналогично,  $NK$  — средняя линия в  $\triangle ABC$ ,

$LM$  — средняя линия в  $\triangle ADC$ ,

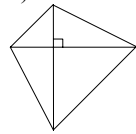
$MN$  — средняя линия в  $\triangle ABD$ .

Значит,  $KL \parallel BD \parallel MN$ ,  $NK \parallel AC \parallel LM$ .

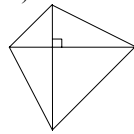
Значит,  $NKLM$  — параллелограмм; диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Ч.т.д.

17.

а)



б)

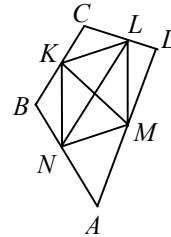
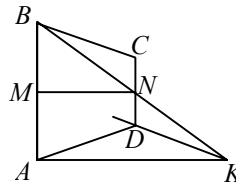


18. Диагонали точкой пересечения делятся пополам.

19. Диагонали точкой пересечения делятся пополам.

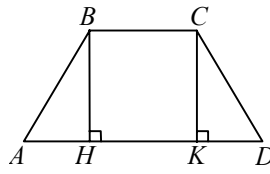
20. а)  $\angle A = 3x$ ,  $\angle B = 4x$ ,  $\angle C = 2x$ ,  $\angle D = 4x$ ,  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 13x$ ,  
 $\angle A + \angle B = 7x$ ,  $\angle C + \angle D = 6x$ ,  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 2(\angle A + \angle B) = 2(\angle C + \angle D)$ ;  
 $13x = 14x = 12x$  — противоречие. Ответ: не могут.

б)  $\angle A = 8x$ ,  $\angle B = 7x$ ,  $\angle C = 13x$ ,  $\angle D = 12x$ ,  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 40x$ ;



$$\angle A + \angle D = 20x, \angle B + \angle C = 20x, \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 2(\angle A + \angle D) = 40x.$$

Ответ: могут.



21.  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $AB = 24$  см,  $BC + AD = 44$  см.

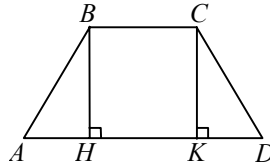
$BH$  — высота.

$$\frac{AH}{AB} = \cos BAH = \frac{1}{2};$$

$$AH = \frac{1}{2} AB = 12 \text{ см. } AD = BC + 2AH;$$

$$BC + 2AH + BC = 44 \text{ см; } BC + AH = 22 \text{ см; } BC = 10 \text{ см;}$$

$$AD = 44 \text{ см} - 10 \text{ см} = 34 \text{ см.}$$



22.  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $BC = 15$  см,  $AD = 49$  см.

$BH$  и  $CK$  — высоты,  $AH = KD$ ;  $BC = HK$ ;

$$AD = BC + 2AH = 49 \text{ см;}$$

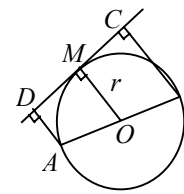
$$2AH = 49 \text{ см} - 15 \text{ см} = 34 \text{ см. } AH = 17 \text{ см;}$$

$$\frac{AH}{AB} \cos BAH = \frac{1}{2};$$

$$AB = 2AH = 34 \text{ см; } AB = CD.$$

$$\text{Значит, } P(ABCD) = AB + BC + CD + AD =$$

$$= 34 \text{ см} + 15 \text{ см} + 34 \text{ см} + 49 \text{ см} = 132 \text{ см.}$$

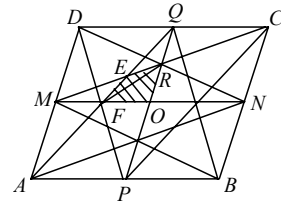


23. Т к. прямая  $a$  — касательная, то  $OM \perp a$ .

Т к.  $BC \perp a$  и  $AD \perp a$ , то  $OM \parallel AD \parallel BC$ .

Т к.  $O$  — середина  $AB$  ( $AB$  — диаметр), то  $OM$  — средняя линия  $ABCD$ .

24.



$$S(MOQD) = \frac{S}{4}.$$

Т к.  $FR$  — средняя линия, то

$$S(FOR) = \frac{1}{4} S(MOQ) \text{ и } S(FER) =$$

$$= \frac{1}{4} S(MEQ) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} S(MOQ) = \frac{1}{12} S(MOQ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(FERO) = \frac{1}{4} S(MOQ) + \frac{1}{12} S(MOQ) = \frac{1}{3} S(MOQ) = \frac{1}{6} S(MDQO) = \frac{1}{24} S.$$

$$\Rightarrow S_8 = 4 \cdot \frac{1}{24} S = \frac{1}{6} S. \text{ Ч.т.д.}$$

$$25. S_{ABC}^2 = S_{A_1B_1C_1} \cdot S_{A_2B_2C_2}. AC \parallel A_1C_1 \parallel A_2C_2;$$

$$\Delta A_1BC_1 = \Delta A_1B_1C_1 \text{ (} A_1BC_1B_1 \text{ — параллелограмм)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1 \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A_1 B_1 C_1}} = \frac{AB^2}{A_1 B_1^2}, \text{ а т к.}$$

$$\triangle A A_1 B = \triangle A_1 B_1 C_1 \Rightarrow A A_1 = A_1 B_1 \Rightarrow \frac{AB}{A_1 B} = \frac{2}{1}.$$

Аналогично выясняем, что

$$\triangle A_2 B_2 C_2 \sim \triangle ABC \text{ и } \frac{A_2 B_2}{AB} = \frac{2}{1} \Rightarrow S_{ABC}^2 = 16 = S_{A_1 B_1 C_1} \cdot S_{A_2 B_2 C_2} = 4 \cdot 4. \text{ Ч.т.д.}$$

**26.**

$$BD = AC.$$

Доказать, что  $S(ABCD) = KM \cdot NL$ .

$NK$  — средняя линия  $\triangle ABC$ .

Значит,  $NK \parallel AC$ .

Аналогично,  $KL \parallel NM$ .

Значит,  $NKLM$  — параллелограмм.

Т к  $KL$  — средняя линия  $\triangle ABC$ , то  $NK = \frac{1}{2} AC$ .

Т к  $AC = BD$ , то  $NK = KL$ . Значит,  $NKLM$  — ромб с диагоналями  $NL$  и  $KM$ .

$$S(NKLM) = \frac{1}{2} NL \cdot KM; \quad S_{NBC} = \frac{1}{4} S_{ABC}; \quad S_{LDM} = \frac{1}{4} S_{ACD};$$

$$S_{NBK} + S_{LDM} = \frac{1}{4} (S_{ABC} + S_{ACD}) = \frac{1}{4} S_{ABCD};$$

$$S_{NKLM} = S_{ANCD} - (S_{NBK} + S_{LDM}) - (S_{CKL} + S_{ANM}) = S_{ABCD} - \frac{1}{4} S_{ABCD} - \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$\frac{1}{2} NL \cdot KM = \frac{1}{2} S_{ABCD}. \text{ Значит, } S_{ABCD} = NL \cdot KM.$$

**27.**

$$AC = BD = a; \quad KM + NL = b.$$

$KLMN$  — ромб (см. предыдущую задачу).

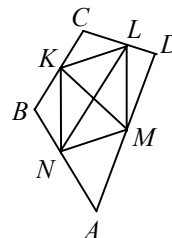
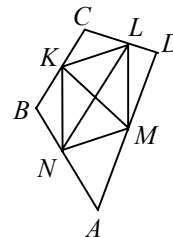
$$S(KLMN) = \frac{1}{2} KL \cdot MN;$$

$$LM \text{ — средняя линия в } \triangle ACD, \text{ значит, } LM = \frac{1}{2} AC = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Аналогично, } KL = \frac{a}{2}.$$

Пусть  $KO = x$ ,  $OL = y$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \\ x + y = \frac{b}{2} \text{ (по усл.)} \end{cases} \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \\ x^2 + 2xy + y^2 = \frac{b^2}{4} \end{cases} \begin{cases} x + y = b \\ 2xy = \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4} \end{cases} \begin{cases} x + y = b \\ xy = \frac{b^2}{8} - \frac{a^2}{8} \end{cases}$$



$$\text{Значит, } KO \cdot OL = \frac{b^2 - a^2}{8}; \quad NL \cdot KM = 4KO \cdot OL = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

$$\text{Значит, } S_{ABCD} = NL \cdot KM = \frac{b^2 - a^2}{2} \quad (\text{см. предыдущую задачу}).$$

**28.** Пусть  $ABCD$  — данный квадрат,  $MNPQ$  — данный параллелограмм, причем  $M \in AB$ ,  $N \in BC$ ,  $P \in CD$ ,  $Q \in AD$ . Пусть  $MN=b$ ,  $NP=c$ ,  $\angle BNM = \alpha$ , тогда  $AB = a = b \sin \alpha + c \cos \alpha$ ,  $BC = a =$

$$= b \cos \alpha + c \sin \alpha \Rightarrow \text{т.к. } AB = BC = a, \text{ то } b \cos \alpha + c \sin \alpha = b \sin \alpha + c \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)(b - c) = 0 \Rightarrow \sin \alpha - \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4};$$

$$a^2 = 2S(MBN) + 2S(NCP) + S = b \sin \alpha \cdot b \cdot \cos \alpha \cdot c + c \sin \alpha \cdot c \cdot \cos \alpha + S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2\alpha (b^2 + c^2) + S = a^2;$$

$$MP = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{\frac{2(a^2 - S)}{\sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2(a^2 - S)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{2\sqrt{2}(a^2 - S)}.$$

### Декартовы координаты на плоскости

**29.**  $y = kx + b$ ,  $k = 2$ , т.к. искомая прямая параллельна прямой

$$y_1 = 2x - 5; \text{ то } y = 2x + b.$$

Т.к. прямая проходит через точку  $A(3; -1)$ , то  $-1 = 6 + b$ ,  $b = -7$ .

Значит,  $y = 2x - 7$ .

**30.**  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ ,  $C(x_3; y_3)$ .

Чтобы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежали на одной прямой, не параллельной оси ординат, нужно, чтобы угловые коэффициенты прямых  $AB$  и  $AC$  были равны.

$$AB: y = kx + b;$$

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + b \\ y_2 = kx_2 + b \end{cases};$$

$$y_1 - y_2 = k(x_2 - x_1); \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad AC: k = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}.$$

$$\text{Значит, нужно, чтобы } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}.$$

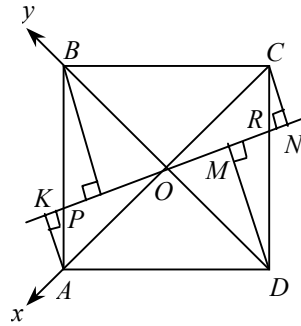
Если точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежат на прямой, параллельной оси ординат, то  $x_1 = x_2 = x_3$ .

**31.** см. решение предыдущей задачи.

$$\frac{-2 - 1}{3 - 2} = \frac{k - 1}{0 - 2};$$

$$-3 = \frac{k - 1}{-2}, \quad 6 = k - 1, \quad k = 7.$$

32. Выберем систему координат так, как показано на рисунке.  $AO = a$ .  
 Значит,  $A(a; 0)$ ,  $B(0; a)$ ,  $C(-a; 0)$ ,  $D(0; -a)$ .  
 Уравнение прямой  $KN$ :  $y = kx$ .  
 Общее уравнение прямой, перпендикулярной к прямой  $y = kx$ :  $y = -\frac{x}{k} + b$ .



Уравнение прямой  $AK$ :  $0 = -\frac{a}{k} + b$ .  $\frac{a}{k} = b$ .

$$y = -\frac{x}{k} + \frac{a}{k}$$

Найдем координаты точки  $K$ : 
$$\begin{cases} y = -\frac{x}{k} + \frac{a}{k} \\ y = kx \end{cases} \quad \begin{cases} y = kx \\ -\frac{x}{k} + \frac{a}{k} = kx \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = kx \\ \frac{a}{k} = x\left(k + \frac{1}{x}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} y = kx \\ a = x(k^2 + 1) \end{cases} \quad \begin{cases} y = kx \\ x = \frac{a}{k^2 + 1} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{ak}{k^2 + 1} \\ x = \frac{a}{k^2 + 1} \end{cases}$$

Найдем  $AK$ :

$$\begin{aligned} AK &= \sqrt{\left(\frac{a}{k^2 + 1} - a\right)^2 + \left(\frac{ak}{k^2 + 1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a - ak^2 - a}{k^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{ak}{k^2 + 1}\right)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{(ak^2)^2 + (ak)^2}}{k^2 + 1} = \frac{a}{k^2 + 1} \sqrt{k^4 + k^2}. \end{aligned}$$

Уравнение прямой  $BL$ :  $a = b$ ;  $y = -\frac{x}{k} + a$

Найдем координаты точки  $L$ :

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{k} + a \\ y = kx \end{cases} \quad \begin{cases} y = kx \\ a = \frac{x}{k} + kx \end{cases} \quad \begin{cases} y = kx \\ a = x\left(\frac{k^2 + 1}{k}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{ak^2}{k^2 + 1} \\ x = \frac{ak}{k^2 + 1} \end{cases}$$

Найдем  $BL$ :

$$\begin{aligned} BL &= \sqrt{\left(\frac{ak}{k^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{ak^2}{k^2 + 1} - a\right)^2} = \frac{\sqrt{(ak)^2 + (ak^2 - ak^2 - a)^2}}{k^2 + 1} = \\ &= \frac{\sqrt{a^2 k^2 + a^2}}{k^2 + 1} = \frac{a}{k^2 + 1} \sqrt{k^2 + 1}. \end{aligned}$$

$\angle BOL = \angle DOM$  (как вертикальные).

$BO = OD$  (т.к.  $O$  — центр квадрата).

Значит,  $\triangle BOL = \triangle DOM$  (по гипотенузе и острому углу).

Значит,  $BL = DM$ .

$\angle BPL = \angle DRM$  (как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых  $AB$  и  $CD$  секущей  $PR$ ).

Значит  $\triangle BPL = \triangle DRM$  (по катету и острому углу).

Значит  $BP = DR$ ;  $AP = AB - BP = CD - DR = CR$

$\angle APK = \angle BPL = \angle DRM = \angle CRN$ .

Значит  $\triangle APK = \triangle CRN$  (по гипотенузе и острому углу).

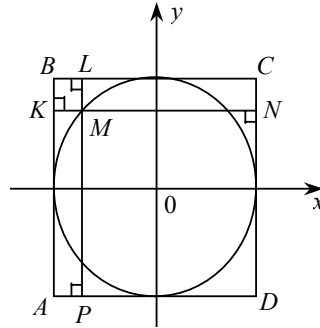
Значит  $AK = CN$ .

Значит  $AK^2 + BL^2 + DM^2 + CN^2 = 2AK^2 + 2BL^2 =$

$$= 2 \left( \frac{a^2 k^2 (k^2 + 1)}{(k^2 + 1)^2} + \frac{a^2 (k^2 + 1)}{(k^2 + 1)^2} \right) = \frac{2a^2}{(k^2 + 1)} (k^2 + 1) = 2a^2$$

не зависит от  $k$ .

Значит, сумма квадратов расстояний от всех вершин квадрата до прямой, проходящей через его центр, не зависит от выбора прямой.



**33.** Т.к. радиус окружности равен  $R$ , то сторона квадрата  $2R$ .

Выберем систему координат так, как показано на рисунке. Значит,

$A(R; -R), B(R; R), C(-R; R), D(-R; -R)$ .

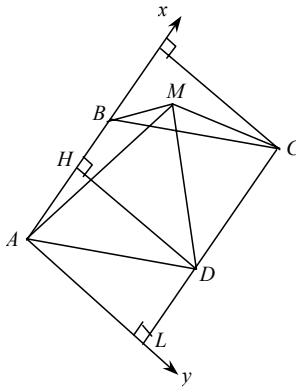
Уравнение окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ .

Пусть координаты точки  $M(x; y)$ ,

$MK = R - x, ML = R - y, MN = R + x,$

$$\begin{aligned} MP &= R + y, \quad MK^2 + ML^2 + MN^2 + MP^2 = \\ &= R^2 - 2Rx + x^2 + R^2 - 2Ry + y^2 + R^2 + 2Rx + \\ &+ x^2 + R^2 + 2Ry + y^2 = 4R^2 + 2x^2 + 2y^2 = \\ &= 4R^2 + 2(x^2 + y^2) = 4R^2 + 2R^2 = 6R^2. \quad \text{Ч.т.д.} \end{aligned}$$

**34.**



Пусть  $AB = a, AH = b, AL = c$ .

Выберем систему координат так, как показано на рисунке:

$A(0; 0), B(a; 0), D(b; c), C(a + b; c)$ .

Пусть  $M(x; y)$ .

$$AM^2 = x^2 + y^2, \quad BM^2 = (x - a)^2 + y^2,$$

$$CM^2 = (x - a - b)^2 + (y - c)^2,$$

$$DM^2 = (x - b)^2 + (y - c)^2,$$

$$\begin{aligned} AM^2 - BM^2 + CM^2 - DM^2 &= x^2 + y^2 - (x - a)^2 - \\ &- y^2 + (x - (a + b))^2 + (y - c)^2 - (x - b)^2 - (y - c)^2 = \\ &= x^2 - (x - a)^2 + (x - (a + b))^2 - (x - b)^2 = \\ &= (x - x + a)(x + x - a) + (x - a - b - x + b)(x - a - b + x - b) = \\ &= a(2x - a) - a(2x - 2b - a) = \\ &= 2ax - a^2 - 2ax + 2ab - a^2 = -2a^2 + 2ab, \end{aligned}$$

не зависит от  $x$  и  $y$ , значит не зависит от выбора точки  $M$ .



35.

Выберем систему координат так, как показано на рисунке.

$A(0; 0), D(a; 0), B(0; b), C(a; b)$ .

Пусть  $M(x; y)$ .

$$AM^2 + MC^2 = x^2 + y^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2$$

$$BM^2 + MD^2 = x^2 + (y - b)^2 + (x - a)^2 + y^2$$

Значит  $AM^2 + MC^2 = BM^2 + MD^2$  всегда.

Значит ГМТ — вся плоскость.

36. а)  $\angle AOB = 60^\circ$ .

Проведем  $CM \parallel OB$  и  $CN \parallel OA$ .

$\angle AMC = \angle AOB = 60^\circ$  (т.к.  $MC \parallel OB$ );

$\angle ACM = 90^\circ - \angle AMC = 30^\circ$ ;

$\angle OCA = 90^\circ - \angle AOC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ;

$\angle MCO = \angle ACO - \angle ACM = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$ ;

$\angle MCO = \angle MOC$ .

Значит,  $\triangle OMC$  — равнобедренный.

Значит  $OM = MC$

Значит, четырехугольник  $ONCM$  — ромб, т.к.

$\angle ACM = 30^\circ$ , то в прямоугольном

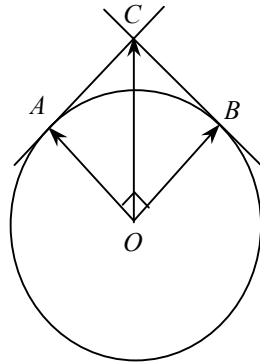
$$\triangle MAC \quad AM = \frac{1}{2} MC.$$

Значит,  $AM = \frac{1}{2} MO$ ;  $AO = MO + AM = \frac{3}{2} OM$ .

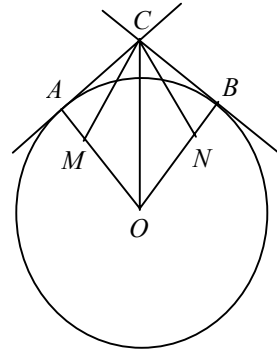
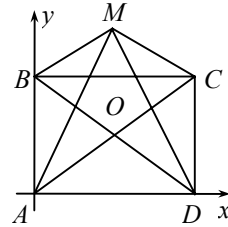
Значит,  $\vec{OM} = \frac{2}{3} \vec{OA}$ . Аналогично  $\vec{ON} = \frac{2}{3} \vec{OB}$ .

$$\vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} = \frac{2}{3} (\vec{OA} + \vec{OB}).$$

б)



$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB};$$





38.  $M$  — середина  $BC$ :  $M\left(0; \frac{7}{2}\right)$ .  $N$  — середина  $CA$ :  $N\left(\frac{3}{2}; 3\right)$ .

$P$  — середина  $AD$ :  $P\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ .  $\overrightarrow{MN}\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ ,  $\overrightarrow{NP}\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ ,  $\overrightarrow{PM}\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ .

39.  $A(2; 3)$ ,  $B(-1; 4)$ ,  $C(1; 1)$

а) пусть  $D(x; y)$ .  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .  $\overline{CB} = \overline{DA}$

$$\begin{cases} -3 = -x + 1 \\ 1 = -y + 1 \end{cases} \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} D(0; 4).$$

б)  $\overline{CB} = \overline{AD}$

$$\begin{cases} -2 = x - 2 \\ 3 = y - 3 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} D(0; 6).$$

в)  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .

$$\begin{cases} -3 = x - 1 \\ 1 = y - 1 \end{cases} \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} D(-2; 2)$$

40.  $A(0; -1)$ ,  $B(3; 1)$ ,  $C(1; -2)$ .

$A_1$  — середина  $BC$ ;  $A_1\left(2; \frac{1}{2}\right)$ ;

$B_1$  — середина  $AC$ ;  $B_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ ;

$C_1$  — середина  $AB$ ;  $C_1\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ ;

$$\overline{AA_1}\left(2; -\frac{1}{2}\right); \overline{BB_1}\left(-\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right); \overline{CC_1}\left(\frac{1}{2}; 2\right).$$

41.  $A(1; -2)$ ,  $B(5; 4)$ ,  $C(2; -1)$ ,  $D(0; -4)$ ;

$$\overline{AB}(4; 6), \overline{CD}(-2; -3), \overline{AB} = -2\overline{CD},$$

т.к.  $-2 < 0$ , то  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  противоположно направлены.

42.  $2x + my - 1 = 0$ ,  $mx + 8y + 2 = 0$ ,  $my = -2x + 1$ ,  $8y = -mx - 2$ ,

$$y = -\frac{2}{m}x + \frac{1}{m}, y = -\frac{m}{8}x - \frac{1}{4}, \frac{2}{m} = \frac{m}{8}, m^2 = 16, m = \pm 4.$$

Ответ:  $\pm 4$ .

43.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ;

$$\vec{a}(x_0; y_0), \vec{b}(x; y);$$

$x$  — ?  $y$  — ?

$$\text{Т.к. } \vec{a} \perp \vec{b} \text{ и } |\vec{a}| = |\vec{b}|, \text{ то } \begin{cases} x \cdot x_0 + y y_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{yy_0}{x_0} \\ x_0^2 + y_0^2 = \frac{y^2 y_0^2}{x_0^2} + y^2 \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{yy_0}{x_0} \\ x_0^2 + y_0^2 = y^2 \left( \frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0^2} \right) \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{yy_0}{x_0} \\ y^2 = x_0^2 \end{cases} \begin{cases} y = x_0 \\ x = -y_0 \\ y = -x_0 \\ x = y_0 \end{cases}$$

Ответ:  $\bar{b}(-y_0; x_0)$  или  $\bar{b}(y_0; -x_0)$ .

44.  $A(1; 1)$ ,  $B(2; -1)$ ,  $C(-1; 4)$ .

$AA_1$ ;  $BB_1$ ;  $CC_1$  — медианы;

$A_1$  — середина  $BC \Rightarrow A_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ ;

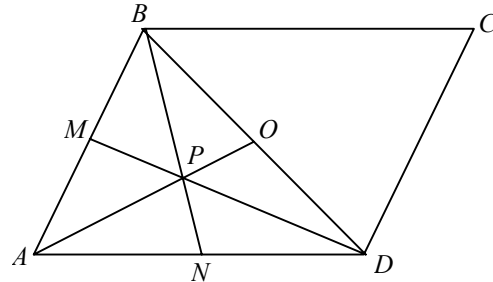
$B_1$  — середина  $AC \Rightarrow B_1\left(0; \frac{5}{2}\right)$ ;

$C_1$  — середина  $AB \Rightarrow C_1\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ , тогда

$\overline{AA_1}\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ,  $\overline{BB_1}\left(-2; \frac{7}{2}\right)$ ,  $\overline{CC_1}\left(\frac{5}{2}; -4\right)$ , значит,

$$AA_1 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad BB_1 = \sqrt{4 + \frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}, \quad CC_1 = \sqrt{\frac{25}{4} + 16} = \frac{\sqrt{89}}{2}.$$

45.



По свойству медиан треугольников.

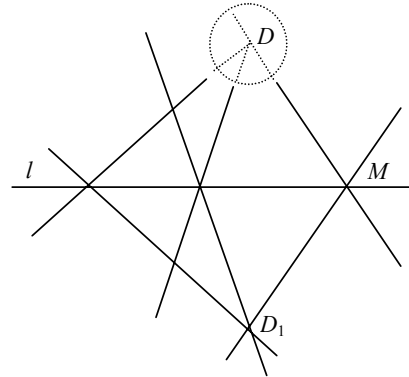
$\frac{BP}{PN} = \frac{2}{1}$ ,  $PN = \frac{1}{3}BN$ ,  $MP = \frac{1}{3}MD$ ,  $S_{AMD} = \frac{1}{2}S_{ABD}$ , т.к. высоты у этих треугольников одинаковые, а основание  $\triangle AMD$  в 2 раза меньше основания  $\triangle ABD$ .

$S_{AMP} = \frac{1}{3}S_{AMD}$ , т.к. высоты у этих треугольников, опущенные из точки  $A$ , равны, а основание  $\triangle AMP$  в 3 раза меньше  $\triangle AMD$ .

Значит,  $S_{AMP} = \frac{1}{3}S_{AMD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S_{ABD} = \frac{1}{6}S_{ABD} = \frac{1}{12}S_{ABCD}$ .

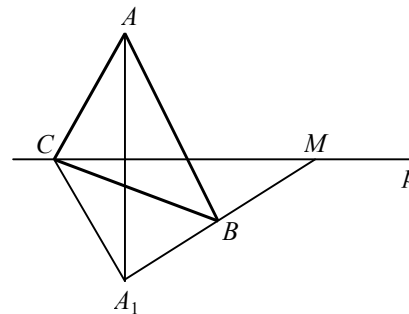
## Преобразования фигур.

46. Искомой является общая хорда данной окружности и окружности, ей симметричной относительно данной точки.
47. Строим произвольную ломаную  $ABCD$  так, что  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник, и отображаем все ее точки относительно  $AD$ .
48. Центр симметрии  $ABCD$  —  $O$ . Через точку  $C$  проходят прямые, параллельные сторонам и делящие высоты параллелограмма пополам  $\Rightarrow$  строим точку  $O$ .
49. Осей симметрии — не больше 4, т.к. ось либо содержит диагональ, либо является общим серединным перпендикуляром для противоположных сторон. 4 оси содержит квадрат, 2 — ромб и прямоугольник, 1 — равнобедренная трапеция. 3 оси не имеет ни одна из фигур с 4 углами.
- 50.



Через точку  $M$  проведем прямую  $l$ .  $D_1$  симметрична  $D$  относительно  $l \Rightarrow MD_1$  — образ искомой прямой.

51.



Пусть  $A_1$  — симметрична точке  $A$  относительно  $p$ . Проведем  $A_1B$ , пересекающую  $p$  в точке  $M$ . Точка  $M$  — искомая.

52. Да — точка пересечения прямых.

**53.** Строим треугольник  $ABC$  по 2-м сторонам и углу между ними. Затем отображаем его относительно серединного перпендикуляра, получаем  $\triangle ADC$ , причем  $\angle ADC = \angle ABC = \alpha - \beta$ . Пусть  $\angle DOA = \gamma$ , тогда  $\angle AOC = \pi - \gamma \Rightarrow \angle OAC = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \angle DAC = \pi - \alpha + \beta + \frac{\gamma}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADB = \alpha + \beta + \frac{\gamma}{2}$ . Постройте  $\alpha + \beta$ , затем  $\pi - \alpha - \beta$ . Затем треугольник по 2-м сторонам и углу между ними.

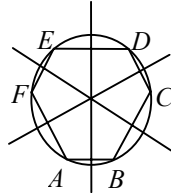
**54.** Не может, т.к. в этом случае количество вершин, лежащих с одной стороны, должно быть равно количеству с другой, что в 5-угольнике невозможно.

**55.** см. 54.

**56.** Проведите прямую. Отложите на ней данные углы, а на их сторонах отрезки  $a$  и  $c$ . Затем проведите окружность с центром в конце отрезка  $a$  и радиусом, равным  $b$ . Затем прямую, параллельную первой, через конец отрезка  $c$ . Через точку пересечения прямой с окружностью провести прямую, параллельную  $c$ . Получим искомым четырехугольник.

**57.** Ось симметрии пятиугольника проходит через вершину и середину противоположной стороны, тогда  $l_3$  симметрична  $l_2$  относительно  $l_1 \Rightarrow l_5$  — ось симметрии. Аналогичное доказательство и для  $l_4$  и  $l_5$ .

**58.**



Нет.

**59.** Проведите прямые  $a_1, a_2, a_3$  через центр окружности перпендикулярно данным прямым. Но  $OM$  — произвольный радиус, а  $OM_1$  — симметричный ему относительно  $a_1$ ,  $OM_2$  симметричен  $OM_1$  относительно  $a_2$ ,  $OM_3$  — симметричен  $OM_2$  относительно  $a_3$ , тогда биссектриса  $\angle MOM_3$  проходит через вершину искомого треугольника. Далее проведите через нее 2 прямых, параллельных данным, а затем соедините точки их пересечения с окружностью.

**60.** Пусть  $AB$  — хорда данной длины. Построим окружность с центром в точке  $O$  и радиусом  $OM$ . Пусть она пересекает  $AB$  в точках  $C$  и  $D$ . Поверните  $AB$  на угол  $COM$ . Задача не имеет решения если  $AB$  больше диаметра окружности.

**61.** Такой четырехугольник является равнобокой трапецией  $\Rightarrow$  есть ось симметрии — прямая, соединяющая середины оснований.

**62.** см. задачу 59.

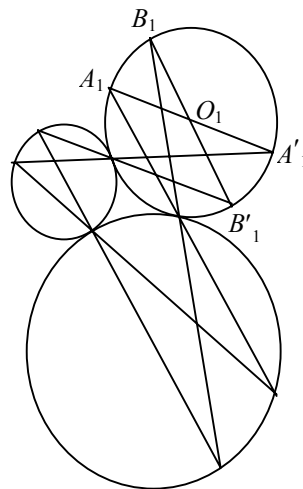
**63.** Параллельно любой из диагоналей прямоугольника.

64. По формуле Герона:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ , где  $a, b, c$  и  $d$  — стороны,  $p$  — полупериметр.
65. Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры данных окружностей, а точка  $O$  — данная точка. Поверните одну из окружностей на  $60^\circ$  вокруг точки  $O$ . Пусть она пересечет вторую в точках  $A$  и  $B$  и пусть их образами являются точки  $C$  и  $D$  соответственно, тогда  $\triangle COA$  и  $\triangle DOB$  — искомые.

### Преобразования подобия.

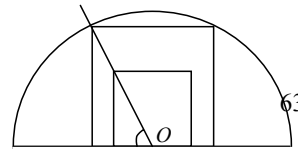
66. Т.к. центры гомотетий различны и произведение коэффициентов равно 1, то это параллельный перенос.
67. Если произведение коэффициентов не равно 1, то результирующее преобразование гомотетия  $\Rightarrow$  прямые, проходящие через центр этой гомотетии. Если результирующее преобразование — параллельный перенос, то прямые, параллельные вектору этого переноса.
68. Т.к.  $\triangle ABM \sim \triangle CDM$ , то они гомотетичны  $\Rightarrow$  гомотетичны и окружности, описанные около них.
69. см. задачу 68.
70. Треугольник, образованный средними линиями, подобен данному с коэффициентом  $\frac{1}{2} \Rightarrow R_1 = \frac{R}{2}$ .

71. Т.к. точки касания заданы, то проведя построения, показанные на рисунке, получим точку  $O_1$  — центр одной из окружностей. Аналогично можно получить и другие центры.



72. Пусть  $MN$  — данная хорда, точка  $O$  — ее центр. Постройте произвольный квадрат  $ABCD$  так, чтобы точка  $O$  была центром стороны  $AD$ . Пусть  $OB$  и  $OC$  пересекают дугу в точках  $P$  и  $Q$ . Опустите из них перпендикуляры на  $MN$  и проведите отрезок  $PQ$ .

73. Пусть  $AOB$  — данный сектор. Постройте произвольный квадрат  $MNPQ$  так, чтобы

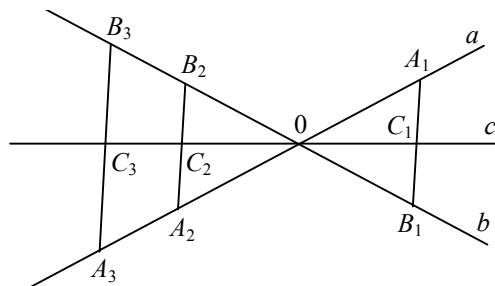


$AB \parallel MN \parallel PQ$ . Пусть  $ON$  и  $OP$  пересекает дугу в точках  $KL$ . Проведите отрезок  $KL$ . Затем через точки  $K$  и  $L$  прямые, параллельные  $NP$  и  $MQ$ , пусть они пересекаются с радиусами в точках  $S$  и  $R$  соответственно, тогда  $SKLR$  — искомый квадрат.

74. Пусть  $AOB$  данный сектор. Постройте произвольный квадрат  $MNPQ$  так, чтобы  $M \in AO$ , а  $P, Q \in OB$ . Пусть  $ON$  пересекает дугу в точке  $C$ . Опустите из точки  $C$  перпендикуляр на  $OB$  — получим точку  $D$ . Пусть  $CE \parallel MN$  пересекает  $AO$  в точке  $E$ . Пусть  $EQ \perp OB$ , тогда  $GECD$  — искомый квадрат.

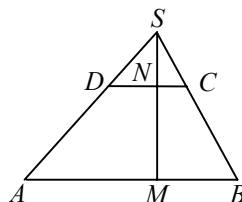
### Пропорциональные отрезки

75.



Точка  $C_2$  перейдет в точку  $C_1$  и точка  $C_3$  в точку  $C_1$  (при гомотетии с центром в точке  $O$  и  $k_1 = \frac{-OA_2}{OA_1}$  и  $k_2 = \frac{-OA_3}{OA_1}$ )  $\Rightarrow$  точки  $O, C_1$  и  $C_2$  — лежат на одной прямой и точки  $P, C_1$  и  $C_3$  — аналогично  $\Rightarrow C_1, C_1, C_3$  лежат на одной прямой, проходящей через точку  $O$ .

76.

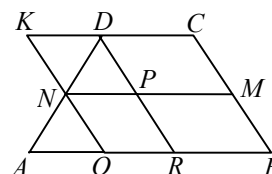


Пусть  $AD \parallel CD$

Гомотетия с центром  $S$  и  $k = \frac{SD}{SA}$  переводит точку  $B$  в точку  $B_1$ , а точку  $M$  в точку  $M_1$ . Средняя линия  $\triangle CDB_1$  не параллельна основанию, что невозможно  $\Rightarrow AB \parallel CD$ .

77.

$KO \parallel CB$ ;  $\triangle ANO \sim \triangle DNK$  (по двум углам)  $\Rightarrow$





$$\Rightarrow \frac{AO}{KD} = \frac{AN}{ND} = k, DR \parallel BC$$

$$OR = AO = KD \Rightarrow \frac{AN}{ND} = \frac{AO}{OR} = \frac{AO}{NP} = \frac{a-d}{d-b} = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{a-d}{d-b} \text{ и } d = \frac{a+kb}{1+k}.$$

78.  $PR \parallel AB \Rightarrow$

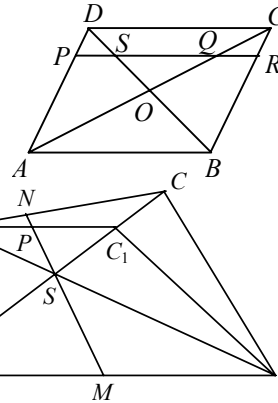
$\Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle PDS$  и  $\triangle ACB \sim \triangle QCR$ ;

$\frac{AB}{PS} = \frac{AD}{PD}$  и  $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{CR}$ , т.к.  $AD \parallel CB \parallel PR$ , то

$AD = BC$  и  $PD = RC$ , учитывая эти пропорции,  
 $PS = QR \Rightarrow PQ = SR$ . Ч.т.д.

79.

Пусть  $DC \parallel AB$  и  $M, N, S$  — лежат на одной прямой. Проводим  $DC_1 \parallel AB$  и  $C_1 \in AC$ .  $MN \cap DC_1 = P$ , причем  $P$  — середина  $DC_1 \Rightarrow NP$  — средняя линия  $\triangle DCC_1$  и  $NP \parallel CC_1$ , что противоречит условию  $S \in NP \Rightarrow DC \parallel AB$ .



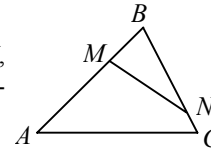
### Подобие фигур

80.

$MN \nparallel AC$  и  $\triangle ABC \sim \triangle MBN$

такое возможно, например,  $\angle B = \angle B$ ,  $\angle A = \angle N$ ,  $\angle C = \angle M$ . И невозможно, если  $\triangle ABC$  — равносторонний, т.к. в этом случае

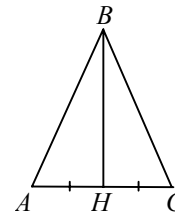
$\angle M = \angle N = \angle C = \angle A \Rightarrow MN \parallel AC$ .



81.

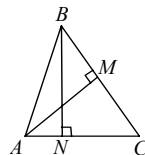
Предположим, что  $\triangle ABH \sim \triangle CBH$ , из этого автоматически следует равенство всех углов  $\Rightarrow BH$  — медиана и высота  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle CBH \Rightarrow$  условие невыполнимо.

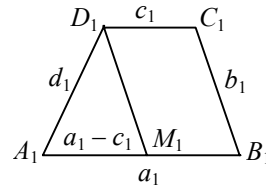
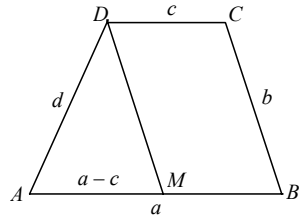


82.

$AB = BC \Rightarrow \angle BCA = \angle BAC$  и  $\angle AMC = \angle ANB = 90^\circ$ ;  
 $\triangle AMC \sim \triangle ABN$  по двум углам.



83.



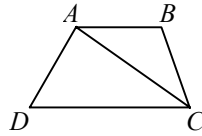
Построим прямые  $DM$  и  $D_1M_1$ ,  $\parallel CB$  и  $C_1B_1$  в  $\triangle ADM$  и  $A_1D_1M_1$

$$\frac{d}{d_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{a-c}{a_1-c_1}$$

$$\left( \text{т.к. } \frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1}, \frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1} \text{ и } \frac{a-c}{c} = \frac{a_1-c_1}{c_1}; \frac{a-c}{a_1-c_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{d}{d_1} \right) \Rightarrow \text{они}$$

подобны по 3-ему признаку  $\Rightarrow \angle A = \angle A_1$ .

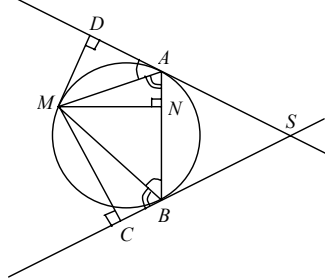
**84.**



$$\triangle BAC \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot DC \Rightarrow d^2 = ab \Rightarrow d = \sqrt{ab}.$$

**85.** Строим прямоугольный треугольник по отношению гипотенузы к катету, потом строим ему гомотетичный, используя известную сторону прямоугольника.

**86.**



$AS = SB$  по свойству касательных;

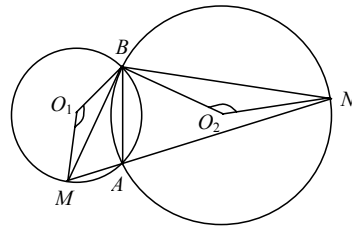
$\angle MAD = \angle MBN$  и  $\angle MBC = \angle MBN$  по свойствам углов, образованных хордами и касательными  $\Rightarrow \triangle MAD \sim \triangle MBN$  и  $\triangle MBC \sim \triangle MAN$  по 2-м углам  $\Rightarrow$

$$\frac{MD}{MN} = \frac{MA}{MB} = \frac{AD}{BN} \text{ и } \frac{MA}{MB} = \frac{MN}{MC} = \frac{NA}{CB} \Rightarrow$$

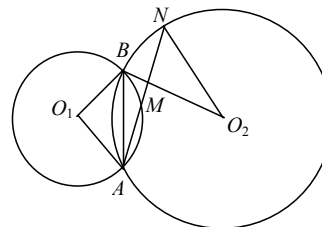
$$\Rightarrow \frac{MD}{MN} = \frac{MN}{MC} \Rightarrow MN = \sqrt{MD \cdot MC}. \text{ Ч.т.д.}$$

87.

а)



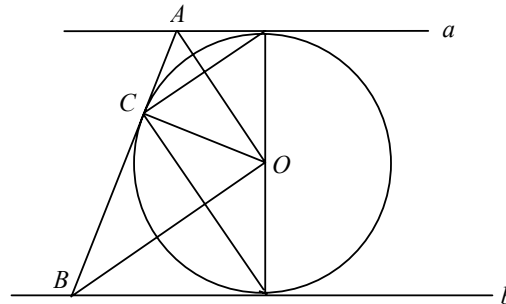
б)



$\angle BAM$  и  $\angle BAN$  либо совпадают, либо являются смежными  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BO_1M = \angle BO_2N \text{ (центральные)} \Rightarrow \frac{BM}{BN} = \frac{R_1}{R_2}.$$

88.



$\triangle AOB$  — прямоугольный,  $CO = R \Rightarrow$

$$\Rightarrow AO = \sqrt{m^2 + R^2}; BO = \sqrt{n^2 + R^2} \Rightarrow AB = \sqrt{m^2 + n^2 + 2R^2} = (m + n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 + 2R^2 = m^2 + n^2 + 2mn \Rightarrow R = \sqrt{mn} \Rightarrow$$

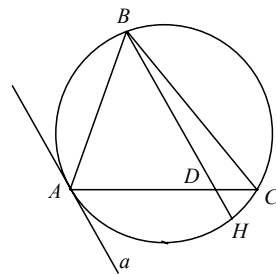
$\Rightarrow$  расстояние между  $a$  и  $b$ , равное  $2R$ , равно  $2\sqrt{mn}$ .

89.

Треугольники подобны  $\Rightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_1 = ka, b_1 = kb, c_1 = kc \Rightarrow \text{по теореме Пифагора } a_1^2 + b_1^2 = c_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow kaa_1 + kbb_1 = kcc_1 \Rightarrow aa_1 + bb_1 = cc_1. \text{ Ч.т.д.}$$



90.

В  $\triangle ABD$  и  $\triangle ABC$ :

$\angle BAC$  — общий,  $\angle KAB = \angle ACB$ , т.к. они опираются на одну дугу, т.к.  $a \parallel BD$ , то  $\angle KAB = \angle ABD$  (как внутренние накрест лежащие)  $\Rightarrow \angle ABD = \angle ACB \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AC \cdot AD. \text{ Ч.т.д.}$$

### Вписанные и описанные многоугольники

91.  $(2 + 3 + 4)\alpha = 360^\circ \Rightarrow \alpha = 40^\circ \Rightarrow \angle KB = 80^\circ, \angle BC = 120^\circ, \angle AC = 160^\circ$ , т.к.  $\angle BAC, \angle BCA, \angle ABC$  — вписанные  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BC = 60^\circ; \angle BCA = \frac{1}{2} \angle AB = 40^\circ; \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AC = 80^\circ$ .

92.  $\angle AB = 24^\circ 51' \Rightarrow \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AB = 12^\circ 25' 30'' = \angle BAC$ .

Т.к. треугольник равнобедренный  $\Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - 24^\circ 51' = 155^\circ 9'$ .

93. Проведите перпендикуляр к прямой, равный высоте. Затем постройте медиану. Через точку ее пересечения с прямой проведите перпендикулярную прямую. Найдите точку пересечения этой прямой и биссектрисы. Затем проведите серединный перпендикуляр к отрезку с концами в этой точке и вершине треугольника. Проведите окружность с центром в точке пересечения серединного перпендикуляра с серединным перпендикуляром к стороне треугольника и радиусом, равным расстоянию до вершины треугольника. Точки пересечения окружности с прямой будут другими вершинами треугольника.

94.

а)  $AB = 20$  см,  $BC = 21$  см.

По теореме Пифагора:  $AC = 29$  см  $\Rightarrow 2R = 29 \Rightarrow R = 14,5$  см.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 210 \text{ см}^2.$$

$$S_{\Delta} = r^2 + \frac{1}{2} (20 - r) \cdot r + \frac{1}{2} r \cdot 29 + \frac{1}{2} r(21 - r) = 210$$

$$2r^2 + 20r - r^2 + 29r + 21r - r^2 = 420; \quad r = 6 \text{ см.}$$

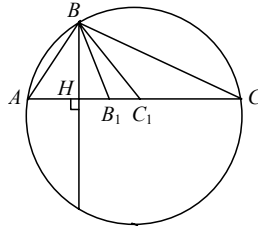
б) 40 и 30 см, решаем аналогично а)

$R = 25$  см,  $r = 10$  см.

95.  $AC$  — диаметр окружности, т.к.  $\angle ABC = 90^\circ$ ;

по теореме Пифагора:  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 25 \Rightarrow R = \frac{AC}{2} = 12,5$  см.

96.

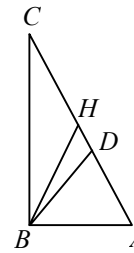


$\triangle ABC$  — прямоугольный ( $AC$  — диаметр)  $\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ABH = 22^\circ 30' \Rightarrow \angle BAC = 67^\circ 30' \Rightarrow \angle BCA = 22^\circ 30'.$$

97.

$BD$  — биссектриса;  $AH = HC = BH = R$  (описываем окружности)  $\Rightarrow \angle ABH = 55^\circ \Rightarrow \angle HAB = 55^\circ \Rightarrow \angle ACB = 35^\circ$ .



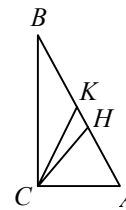
98.

$$AK = AB = CK = R$$

$CH$  — биссектриса  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ACH = 45^\circ \Rightarrow \angle ACK = \angle CAB = 52^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ABC = 38^\circ.$$



99.

$$1) \text{ Пусть } \angle ABC = 2\alpha, \angle ADC = 4\alpha, \angle BAD = 3\alpha.$$

Т.к.  $ABCD$  — вписанный  $\Rightarrow \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow 6\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ; \angle BAD = 90^\circ;$$

$$\angle ADC = 120^\circ; \angle BCD = 90^\circ.$$

$$2) \text{ Пусть } \angle ABC = 2\alpha, \angle ADC = 3\alpha, \angle BAD = 4\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ = 5\alpha \Rightarrow \alpha = 36^\circ \Rightarrow$$

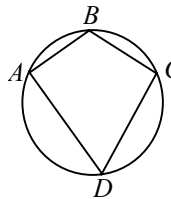
$$\Rightarrow \angle ABC = 72^\circ, \angle ADC = 108^\circ, \angle BAD = 144^\circ \text{ и}$$

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = 36^\circ.$$

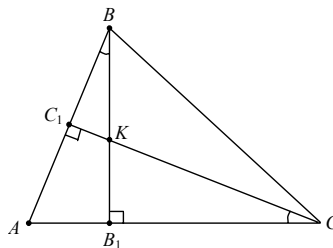
$$3) \text{ Пусть } \angle ABC = 3\alpha, \angle ADC = 4\alpha, \angle BAD = 2\alpha \Rightarrow \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ =$$

$$= 7\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{180^\circ}{7} \Rightarrow \angle ABC = \frac{540^\circ}{7}, \angle ADC = \frac{720^\circ}{7}, \angle BAD = \frac{360^\circ}{7}, \text{ и}$$

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = \frac{900^\circ}{7}.$$



100.



Доказать:  $A, B_1, K, C_1$  — лежат на одной окружности  $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB_1KC_1$  — описанный четырехугольник  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  сумма противоположных углов — по  $180^\circ$   
 $\angle AC_1C = \angle AB_1B = 90^\circ$  — по условию  $\Rightarrow \angle AC_1C + \angle AB_1B = 180^\circ$   
 $\Delta ABB_1 \sim \Delta ACC_1$  ( $\angle B_1 = \angle C_1 = 90^\circ$ ,  $\angle A$  — общий)  $\Rightarrow \angle ABB_1 = \angle ACC_1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle B_1KC = 90^\circ - \angle ACC_1$  и  $\angle BAC = 90^\circ - \angle ACC_1 \Rightarrow \angle BAB_1 = \angle B_1KC$ ;  
 $\angle C_1KB_1 = 180^\circ - \angle B_1CH \Rightarrow \angle BAB_1 + \angle C_1KB_1 = \angle BAB_1 + 180^\circ - \angle BAB_1 = 180^\circ \Rightarrow$   
 суммы противоположных углов равны  $\Rightarrow$  можно описать окружность.

### Геометрические неравенства

**101.** Пусть в  $\Delta ABC$   $AB = AC$ ,  $BC = a$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $AA_1$  и  $BB_1$  — медианы.

$$B_1D \perp BC \Rightarrow CD = \frac{a}{4}, BD = \frac{3a}{4} \Rightarrow B_1D = \frac{AA_1}{2} = \frac{a}{4 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}};$$

$\angle B_1BD = \beta$  при возрастании  $\alpha$  уменьшается  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow AA_1 = 2B_1D = 2BB_1 \cdot \sin \beta$ ,  $\alpha = 60^\circ \Rightarrow \beta = 30^\circ$ ,  $AA_1 = BB_1$ ;  
 если  $\alpha < 60^\circ$ , то  $AA_1 > BB_1$ .

**102.**  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ ,  $\sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}$

$$\text{По формуле } \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) \leq \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) \leq 1, \text{ что истинно.}$$

**103.**  $m_a, m_b$  — медианы  $\Rightarrow m_b^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}$ ;

$$m_a^2 = \frac{a^2}{4} + b^2 \Rightarrow \frac{m_b^2}{m_a^2} = \frac{a^2 + \frac{b^2}{4}}{\frac{a^2}{4} + b^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{4a^2 + b^2}{4a^2 + 16b^2} \right) > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{m_b}{m_a} > \frac{1}{2},$$

аналогично,  $\frac{m_a}{m_b} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{m_a}{m_b} < 2$ . Ч.т.д.

**104.**

$$\cos \angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + \left( \frac{ca}{a+b} \right)^2 - l_c^2}{2a \left( \frac{ca}{a+b} \right)} \Rightarrow$$

$$l_c^2 = \frac{ab}{(a+b)^2} ((a+b)^2 - c^2) = \frac{2abp}{a+b} \left( 1 - \frac{c}{a+b} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 = p \left( \left( 1 - \frac{c}{a+b} \right) \frac{2ab}{a+b} + \left( 1 - \frac{b}{a+c} \right) \frac{2ac}{a+c} + \left( 1 - \frac{a}{b+c} \right) \frac{2bc}{b+c} \right)$$

Т.к.  $\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}$  (аналогично для других сторон)

$$l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq p((a+b-c) + (a+c-b) + (b+c-a)) = p^2.$$

$$105. S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \quad S = pr \Rightarrow r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}.$$

$$\text{Известно, что } (p-a)(p-b)(p-c) \leq \left( \frac{p-a+p-b+p-c}{3} \right)^3 = \frac{p^3}{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \leq \frac{p}{3\sqrt{3}} \Rightarrow S = r \cdot p \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

$$106. \text{ По формуле Герона } S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{h^2 a^2}{4};$$

$$a^2 \geq a^2 - (b-c)^2 = 4(p-b)(p-c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_a = \sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}} \leq \sqrt{p(p-a)}.$$

107. см. задачу 104.

$$l_a^2 = \frac{2bcp}{(p+c)^2} (b+c-a) = \frac{4bc}{(p+c)^2} p(p-a).$$

$$\text{Т.к. } 4bc \leq (b+c)^2 \Rightarrow l_a^2 \leq p(p-a).$$

$$108. S_{\Delta} = \frac{bc \sin \alpha}{2} \leq \frac{bc}{2}$$

$$\text{Т.к. } bc \leq \frac{b^2 + c^2}{2} \text{ (неравенство Коши)} \Rightarrow S \leq \frac{b^2 + c^2}{4}.$$

$$109. S_{ABC} = \frac{ab}{2} = \left( \frac{a+b+c}{2} \right) r \Rightarrow r = \frac{ab}{a+b+c};$$

$$R = \frac{c}{2} \Rightarrow R + r = \frac{(a+b)^2 + c(a+b)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = \sqrt{2S}.$$

### Разные задачи

110.

$$A_1B = A_1C; B_1A_1 = A_1C_1 \Rightarrow B_1B = CC_1, CB_1 = CB + BB_1,$$

$$\overline{C_1B} = \overline{BC} + \overline{CC_1} \Rightarrow \overline{CB_1} = \overline{C_1B}$$

$$111. \overline{MA} + \overline{AG} = \overline{MG}; \quad \overline{MB} + \overline{BG} = \overline{MG};$$

$$\overline{MC} + \overline{CG} = \overline{MG} \Rightarrow \overline{MG} = \frac{1}{3}(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) + (\overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG}) =$$

$$= \frac{1}{3}(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}), \text{ т.к. } \overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG} = 0.$$

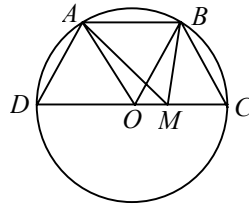
112.

Пусть  $O$  — произвольная точка плоскости  $\Rightarrow$  из задачи 111:

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}); \quad \overline{OM}_1 = \frac{1}{3}(\overline{OA}_1 + \overline{OB}_1 + \overline{OC}_1)$$

$$\overline{OM}_1 - \overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA}_1 + \overline{OB}_1 + \overline{OC}_1 - \overline{OA} - \overline{OB} - \overline{OC})$$

$$\overline{MM}_1 = \frac{1}{3}(\overline{AA}_1 + \overline{BB}_1 + \overline{CC}_1).$$



**113.**  $AB \parallel CD$ ,  $AM^2 + BM^2$

из  $\triangle AOB$  и  $\triangle BOM$  по теореме косинусов:

$$BM^2 = OM^2 + R^2 - 2OM \cdot R \cdot \cos BOM$$

$$AM^2 = OM^2 + R^2 - 2OM \cdot R \cdot \cos AOM$$

$$AB \parallel CD \Rightarrow \angle BAO = \angle AOC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos BOM = -\cos AOM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BM^2 + AM^2 = 2(OM^2 + R^2). \text{ Ч.т.д.}$$

**114.**  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}; \quad \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC};$$

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC};$$

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{(AB^2 + AC^2 - BC^2)(AB^2 + BC^2 - AC^2)(AC^2 + BC^2 - AB^2)}{8AB^2 \cdot AC^2 \cdot BC^2} =$$

$$= (AB^4 - AC^4 - BC^4)(AC^2 + BC^2 - AB^2).$$

Подставим полученные выражения в равенство (\*):

$$\frac{(AB^2 + AC^2 - BC^2)^2}{4AB^2 \cdot AC^2} + \frac{(AB^2 + BC^2 - AC^2)^2}{4AB^2 \cdot BC^2} + \frac{(AC^2 + BC^2 - AB^2)^2}{4AB^2 \cdot BC^2} +$$

$$+ \frac{(AB^4 - AC^4 - BC^4)(AC^2 + BC^2 - AB^2)}{4AB^2 AC^2 BC^2} =$$

считаем числитель:

$$(AB^4 + AC^4 + BC^4 + 2AB^2 AC^2 - 2AB^2 BC^2 - 2AC^2 BC^2)BC^2 +$$

$$+ (AB^4 + BC^4 + AC^4 + 2AB^2 BC^2 - 2AB^2 AC^2 - 2BC^2 AC^2)AC^2 +$$

$$+ (AB^4 + BC^4 + AC^4 + 2AC^2 BC^2 - 2BC^2 AB^2 - 2AC^2 AB^2)AB^2 +$$

$$+ (AB^4 AC^2 + AB^4 BC^2 - AB^6 - AC^6 - BC^2 AC^4 + AB^2 AC^4 - BC^4 AC^2 -$$

$$- BC^2 + AB^2 BC^4) = 4AC^2 BC^2 AB^2 \Rightarrow \frac{4AC^2 BC^2 AB^2}{4AC^2 BC^2 AB^2} = 1. \text{ Ч.т.д.}$$

**115.** Если  $\angle A > \angle A_1$ , то  $BC > B_1 C_1$

По теореме косинусов из  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1 B_1 C_1$ :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$B_1 C_1^2 = A_1 B_1^2 + A_1 C_1^2 - 2A_1 B_1 \cdot A_1 C_1 \cdot \cos A_1$$

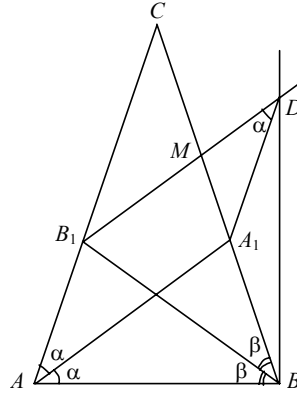
$$BC^2 - B_1 C_1^2 = 2A_1 B_1 \cdot A_1 C_1 \cdot \cos A_1 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 2A_1 B_1 \cdot A_1 C_1 (\cos A_1 - \cos A),$$



т.к.  $\angle A > \angle A_1 \Rightarrow \cos A_1 > \cos A \Rightarrow BC^2 - B_1C_1^2 > 0 \Rightarrow BC > B_1C_1$ .

**116.** Аналогична задаче 115.

**117.**



см. формулы задачи 104.

$$\text{длина биссектрисы равна: } AA_1^2 = \frac{2bcp}{b+c} \left(1 - \frac{a}{b+c}\right); \quad BB_1^2 = \frac{2acp}{c+a} \left(1 - \frac{b}{a+c}\right)$$

где  $a, b, c$  — стороны треугольника и  $p = \frac{a+b+c}{2}$ ,

$$\text{если } AA_1 = BB_1, \text{ то } \frac{b}{b+c} \left(1 - \frac{a}{b+c}\right) = \frac{a}{a+c} \left(1 - \frac{b}{a+c}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{b+c} - \frac{a}{a+c} = ab \left[ \frac{1}{(b+c)^2} - \frac{1}{(a+c)^2} \right] \Rightarrow \frac{c(b-a)}{(b+c)(a+c)} = \frac{ab(a-b)(a+b+2c)}{(b+c)^2(a+c)^2},$$

и учитывая, что  $a, b$ , и  $c$  — стороны треугольника и  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  положительны  $\Rightarrow a = b$  (чтобы достичь равенства). Ч.т.д.

**118.**  $\triangle ABC = \triangle EDC \Rightarrow AC = CE$  и по теореме синусов из  $\triangle ABC$

$$FC = CE = 2a \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$\angle BCA = \angle DCA = \frac{180 - \alpha}{2} \Rightarrow \angle ACE = 2\alpha - 180^\circ.$$

По теореме косинусов из  $\triangle ACE$ :

$$\begin{aligned} AE^2 &= AC^2 + CE^2 - 2AC \cdot CE \cdot \cos(2\alpha - 180^\circ) = \\ &= 4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} (1 - \cos(2\alpha - 180^\circ)) \Rightarrow AE = 2a \sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \cdot \sqrt{2} = 0; \end{aligned}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Решая уравнение, находим, что  $\alpha = \frac{3\pi}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{5} = 108^\circ \Rightarrow$  пятиугольник — правильный.

**119.**  $BCFC_1$  — прямоугольник,  $C_1C$  — диаметр, т.к.  $\angle C_1BC = 90^\circ$ ,  $\angle BOC = 45^\circ \Rightarrow$  по теореме косинусов:

$$a^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 45^\circ = 2R^2 - \sqrt{2}R^2 \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \Rightarrow C_1C = \frac{2a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}};$$

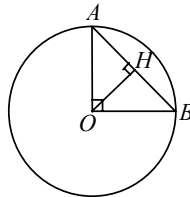
по теореме Пифагора

$$BC_1^2 = \frac{4a^2}{2-\sqrt{2}} - a^2 = \frac{2a^2 + a^2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \Rightarrow BC_1 = a\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{BCFC_1} = a^2 \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = a^2(\sqrt{2}+1).$$

**120.** Середина искомой хорды совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки на другую сторону угла. Задача не имеет решения, если расстояние от основания перпендикуляра до вершины угла меньше половины длины хорды.

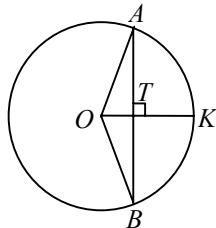
**121.**



По теореме Пифагора  $R^2 = 32 \Rightarrow R = 4\sqrt{2}$ ;

$AO = OB \Rightarrow AH = HB = 4 \Rightarrow$  из  $\triangle AOH$ :  $OH = \sqrt{32-16} = 4$  см.

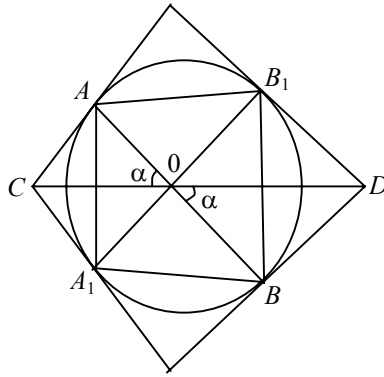
**122.**



Из  $\triangle ATO$ :  $\sin \angle OAT = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle OAT = 30^\circ = \angle OBA \Rightarrow \angle AOB = 120^\circ$ .

**123.**  $OM = R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ;  $l_{\text{окр}} = 2\pi R = 10\pi$ .

124.



$AB \cap CD = O$  — допустим.

По теореме синусов из  $\triangle OAC$ :  $\frac{OC}{\sin \angle OAC} = \frac{AC}{\sin \alpha}$ .

Аналогично:  $\frac{OD}{\sin \angle OBD} = \frac{BD}{\sin \alpha}$ .

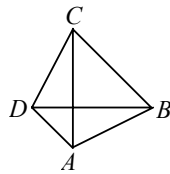
Т.к.  $\sin \angle OBD = \sin(\pi - \angle OAC) = \sin \angle OAC \Rightarrow \frac{CO}{OD} = \frac{AC}{BD}$ ;

$AC, A_1C, BD, B_1D$  — касательные  $\Rightarrow$

$AC = A_1C_1; BD = B_1D \Rightarrow \frac{A_1C}{B_1D} = \frac{AC}{BD}$ ;

$CD \cap A_1B_1 = K$  и т.к. делит  $CD$  в отношении  $\frac{AC}{BD} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  точка  $K$  совпадает с точкой  $O \Rightarrow CD$  проходит через точку пересечения диагоналей вписанного четырехугольника. Аналогично, доказываем с другой диагональю.



**125.**  $\angle BAC$  — меньший угол, сторона  $AC$  проходит между сторонами угла  $BAD$  (иначе — противоречие выпуклости четырехугольника)  $\Rightarrow AC$  пересекает  $BD$  с концами на его сторонах.

Аналогично доказываем, что  $BD \cap AC \Rightarrow AC \cap BD$ . Ч.т.д.

**126.** Концы любой стороны четырехугольника лежат в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей противоположную ей сторону. В той, где находится точка пересечения диагоналей.

**127.**  $S_{\text{п-ка}} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 24 \text{ см}^2$ .

**128.** Пусть дан  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 15^\circ$ ,  $\angle B = 75^\circ$ .  
 $CO$  — медиана.  $S(ABC) = S(CBO) + S(CAO) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{4} \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{4} \cdot \sin 150^\circ = \frac{c^2}{8} \quad (\text{т.к. } \angle BOC = 30^\circ, \angle AOC = 150^\circ,$$

$$\text{а } CO = \frac{c}{2}).$$

$$129. OM = \sqrt{144 + 25} = 13 \text{ см};$$

$$\text{а) } AB \text{ — медиана} \Rightarrow AB = \frac{3}{2}R = \frac{39}{2} \text{ см};$$

$$\text{из } \triangle ABC: \sin 60^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \frac{39}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 13\sqrt{3} \text{ см};$$

$$S_{\Delta} = 13\sqrt{3} \cdot 13\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{507\sqrt{3}}{4} \text{ см}^2;$$

$$\text{б) } BD \text{ — диаметр} \Rightarrow BD = 26 \text{ см};$$

$$S_{\text{кв}} = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 26 = 338 \text{ см}^2;$$

$$\text{в) } S_{\Delta MOB} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin 72^\circ = \frac{169}{2} \sin 72^\circ \Rightarrow S_{5\text{-ка}} = 5 \cdot \frac{169}{2} \sin 72^\circ \approx 402 \text{ см}^2.$$

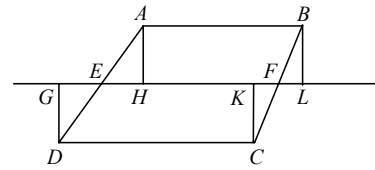
$$130. OM = R = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ см}. \quad S_{\text{пр}} = \pi R^2 = 25\pi \text{ см}^2.$$

131.  $EF$  — средняя линия  $ABCD$ ;

$$DC_1 = AH = a, CK = BL = b.$$

И пусть  $EC_1 = EH = x, EF = l, FK = FL = y$ ;

а)



$$S_{ABFE} = (l + y - x) \frac{a+b}{2} - \frac{by}{2} + \frac{ax}{2};$$

$$S_{CDEF} = (l - y + x) \frac{a+b}{2} + \frac{by}{2} - \frac{ax}{2} \Rightarrow$$

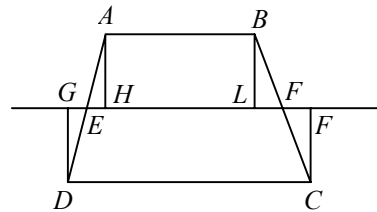
$$\Rightarrow S_{ABFE} - S_{CDEF} = (a+b)(y-x) - by + ax = ay - bx;$$

$$\text{если } S_1 = S_2, \text{ то } \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \Rightarrow AD \parallel BC;$$

$$\text{б) } S_{ABFE} = (l - y - x) \frac{a+b}{2} + \frac{by}{2} + \frac{ax}{2};$$

$$S_{CDEF} = (l + y + x) \frac{a+b}{2} - \frac{by}{2} - \frac{ax}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1 - S_2 = (a+b)(y+x) - by - ax =$$



$$= ay + bx > 0 \Rightarrow$$

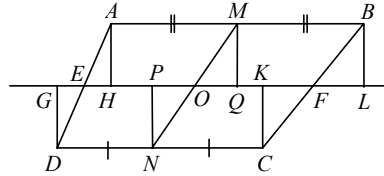
$\Rightarrow$  площади не одинаковые.

**132.** Введем обозначения аналогично задаче 131.

$$MQ = NP = \frac{a+b}{2}; \quad C_1 = PK, \quad HQ = QL.$$

$EMFN$  — параллелограмм.

а)



$$PO = OQ = \frac{x+y}{2}; \quad OE = OF = \frac{1}{2};$$

$$S_{AMOF} = HQ \left( \frac{AH+M}{2} \right) + \frac{EH \cdot AH}{2} - \frac{OQ \cdot MQ}{2} =$$

$$= \frac{a}{2} \left( \frac{l+x+y}{6} \right)^2 + \frac{a+b}{4} \left( \frac{l}{2} - x \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a+b}{4} - \frac{bx}{4} + \frac{ay}{4} = \frac{AH}{2} EQ + \frac{MQ}{2} HO,$$

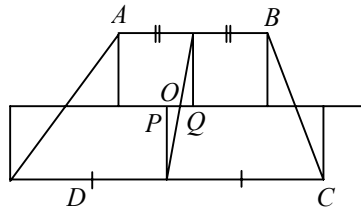
$$S(CFON) = PK \frac{KC+NP}{2} - \frac{OP \cdot PN}{2} + \frac{KF \cdot CK}{2} =$$

$$= \frac{KC}{2} PF + \frac{NP}{2} OK = \frac{b}{2} \cdot \frac{l+x+y}{2} + \frac{a+b}{4} \left( \frac{l}{4} - 4 \right) = \frac{l}{2} \cdot \frac{a+3b}{4} + \frac{bx}{4} - \frac{ax}{4},$$

$$\text{откуда } S(AMOF) + S(CFON) - \frac{l(a+b)}{2} = \frac{1}{2}(ABCD), \text{ т.к. по задаче 131}$$

$$S(ABCD) = l(a+b). \text{ Ч.т.д.}$$

б)



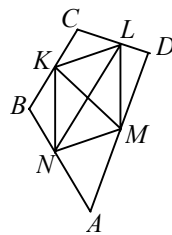
$$S_{CFON} = PK \left( \frac{KC+NP}{2} \right) - \frac{OP \cdot PN}{2} + \frac{KF \cdot CK}{2} =$$

$$= \frac{b}{2} \cdot \frac{l+x+y}{2} + \frac{a+b}{4} \left( \frac{l}{2} - y \right) = \frac{l}{2} \cdot \frac{a+3b}{4} + \frac{bx}{4} - \frac{ay}{4}.$$

Складывая, получаем  $S_1 + S_2 = \frac{l(a+b)}{2} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ , т.к.  $S_{ABCD} = l(a+b)$

(см. задачу 131). Ч.т.д.

**133.**



$\triangle NBK \sim \triangle ABC$  ( $\angle B$  — общий,  $\frac{AB}{NB} = \frac{BC}{BK} = \frac{1}{2}$ )  $\Rightarrow$

$\Rightarrow NK \parallel AC$ .

Аналогично:  $MS \parallel AC$ ;  $MN \parallel BD \parallel KS$ .

Также очевидно:  $NK = MS$ ;  $NM = KS \Rightarrow NMKS$  — параллелограмм.

Т.к.  $NK \parallel AC \Rightarrow \angle AOB = \angle MNK$ ,

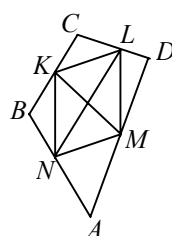
$S_{\text{пар2}} = MN \cdot NK \cdot \sin MNK$ ;

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin AOB;$$

т.к.  $AC = 2NK$  и  $BD = 2NM \Rightarrow S_{A-D_1} = 2NK \cdot MN \cdot \sin AOB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{1} \Rightarrow S_2 = \frac{1}{2} S_1. \text{ Ч.т.д.}$$

**134.**



$MN = 5\text{ см}$ ,  $KS = 9\text{ см}$ ,  $BD = 5\text{ см}$ ;

$\triangle BKM \sim \triangle ABC$  ( $\angle B$  — общий,  $\frac{AB}{KB} = \frac{BC}{BM}$ )  $\Rightarrow$

$\Rightarrow KM \parallel BD \parallel MS$  и  $KM = NS$  и  $KN = MS \Rightarrow$

$\Rightarrow KNSM$  — параллелограмм.

$MS = KN = \frac{1}{2} BD = 2,5\text{ см} \Rightarrow$  в  $\triangle KON$  по теореме косину-

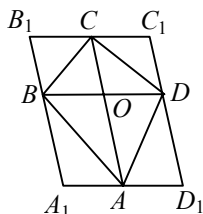
сов:

$$KN^2 = KO^2 + ON^2 - 2KO \cdot ON \cdot \cos KON;$$

$$\cos KON = \frac{1,5^2 + 2,5^2 - 2,5^2}{2 \cdot 1,5 \cdot 2,5} = \frac{1,5}{5} = 0,3 \Rightarrow \sin KON \approx 0,95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{KMSN} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 0,95 \approx 7 \Rightarrow \text{из задачи 133: } S_{ABCD} = 2 \cdot 7 = 14 \text{ см}^2.$$

**135.**



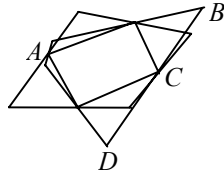
$A_1B_1C_1D_1$  — параллелограмм,  $B_1C_1 \parallel BD \Rightarrow \angle CC_1D = \angle COD$ ;

$$S_{\text{пар}} = B_1 C_1 \cdot C_1 D_1 \cdot \sin \angle C C_1 D; \quad S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD \cdot AC \cdot \sin \angle C C_1 D;$$

$$BB_1 C_1 D \text{ — параллелограмм} \Rightarrow BD = B_1 C_1, AC = C_1 D_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{пар}}}{S_{ABOD}} = \frac{2}{1} \Rightarrow S_{\text{пар}} = 2S_{ABCD}.$$

**136.**



из задачи 133 следует, что площади этих четырехугольников равны  $2S_{ABCD}$   
 $\Rightarrow$  равны между собой.

**137.** а)  $KM = 6$ ,  $KL = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ ,  $LM = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$ ;

$KL$ :  $y = x \Rightarrow \angle LKM = 45^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{KLM} = \frac{1}{2} KL \cdot KM \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12.$$

б)  $ABCD$  — квадрат  $\Rightarrow S = AB^2$

$AB = \sqrt{9+16} = 5 \Rightarrow S = 25.$

в)  $PQRT$  — квадрат.  $S = QR^2$

$QR = \sqrt{16+9} = 5 \Rightarrow S = 25.$

г)  $ABCD$  — трапеция;

$AB = AD = 4$ ,  $DC = 6 \Rightarrow S = \frac{1}{2} (AB + DC) \cdot AD = \frac{1}{2} (4 + 6) \cdot 4 = 20.$

д)  $BE = 5$ ,  $BCDE$  — трапеция  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} (BE + CD) \cdot CH = \frac{1}{2} (3 + 6) \cdot 2 = 9;$$

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BE = 3 \cdot 6 = 9 \Rightarrow S_{ABCDE} = 9 + 9 = 18.$$

**138.** Угол 10-угольника равен  $\frac{(n-2)180}{10} = \frac{8}{10} \cdot 180 = \frac{8}{5}k$  ( $k = 90^\circ$ );

5-угольника  $= \frac{6}{5}k \Rightarrow \frac{8k}{5}x + \frac{6k}{5}y = 4k \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x + 2y = 10$  ( $x$  — число 10-угольников;  $y$  — 5-угольников, сходятся в одной точке). Подбором найдем целые значения  $x$  и  $y$ :  $x = 1$ ,  $y = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  В одной точке сходятся 1 десятиугольник и 2 пятиугольника  $\Rightarrow$  при обходе пятиугольника около одной стороны лежит десятиугольник, около 2-й — пятиугольник, 3-ей — десятиугольник, 4 — пятиугольник, 5 — десяти-

тиугольник  $\Rightarrow$  к 1 и 5 сторонам прилегают пятиугольники, что противоречит условию  $\Rightarrow$  невозможно.

**139.**  $R$  — радиус 3. шара;  $r$  — радиус ф. мяча;  $l_{\text{ш}} = 2\pi R$ ;  $l_{\text{мяча}} = 2\pi r$

$$\text{стало: } 2\pi R + 1; 2\pi r + 1 \Rightarrow R' = \frac{2\pi R + 1}{2\pi}; r' = \frac{2\pi r + 1}{2\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R' - R = \frac{2\pi R + 1}{2\pi} - R; r' - r = \frac{2\pi r + 1}{2\pi} - r$$

$$R' - R = \frac{1}{2\pi}; r' - r = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow \text{зазоры одинаковы.}$$

**140.** Возьмем 3 произвольные точки на окне.

$\Delta A_1 B_1 C_1$  определяет единственную описанную около него окружность; измерив стороны  $\Delta A_1 B_1 C_1$  найдем радиус этой окружности и вырежем стекло.

**141.** Если попеременно укладывать в длину трапеции с разными основаниями, то в ряд уместится 10 трапеций, т.к.  $BH = 10$ , то в ширину получим 8 рядов.

И остается фанера размером  $10 \times 80$  см, где поместится еще 3 трапеции  $\Rightarrow$  всего трапеций  $10 \cdot 8 + 3 = 83$  штуки.

**142.**  $S_{\text{поля}} = 24 \text{ м}^2$ .

$$S_{\text{плитки}} = 6 \cdot R^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 60^\circ = \frac{6 \cdot 400}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3}$$

$$\frac{S_{\text{поля}}}{S_{\text{пл}}} = \frac{240000}{600\sqrt{3}} = \frac{400\sqrt{3}}{3}$$

$$5\% = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{плитки нужно: } \frac{420\sqrt{3}}{3} \approx 243 \text{ штуки.}$$

$$\mathbf{143.} S_6 = 6 \cdot R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2};$$

$$MK — \text{ медиана } \Rightarrow MK = \frac{3}{2}R;$$

$$\sin A = \frac{MK}{AM} \Rightarrow AM = \frac{MK \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{3R}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3R^2 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{ш}}}{S_{\Delta}} = \frac{2}{1} \Rightarrow \text{треугольных плиток потребуется в 2 раза больше.}$$

$$\mathbf{144.} S_1 = \pi R^2 = 100\pi \text{ см}^2;$$

$$S_2 = \pi r^2 = 56,25\pi \text{ см}^2;$$



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{100}{56,25} \approx 1,8 \text{ раза.}$$

$$145. S = \pi R^2 = 5041\pi \text{ мм}^2;$$

$$S_2 = \frac{2}{3}S = \frac{10082\pi}{3} \text{ мм}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_1 = \sqrt{\frac{10082}{3}} \approx 58 \text{ мм} \Rightarrow D_1 = 116 \text{ мм} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 142 - 116 = 26 \text{ мм}$  — уменьшился диаметр.

**146.**

$$S_{\text{сег}} = \pi R^2 = \pi 1,5625 \text{ мм}^2 \approx 4,9 \text{ мм}^2 \Rightarrow \text{нагрузка: } 4,9 \cdot 65 = 319 \text{ кг.}$$

$$147. S_{\text{двора}} = 110 \cdot 150 = 16500 \text{ м}^2;$$

$$S_{\text{цехов}} = 4 \cdot 40 \cdot 10 = 1600 \text{ м}^2;$$

$$S_{\text{складов}} = 20 \cdot 20 \cdot 10 = 4000 \text{ м}^2.$$

Должно остаться расстояние ( $R$ ) не менее 5 м по периметру помещений и забора, т.е.

$$S_{\text{цехов}} + R = 4 \cdot 50 \cdot 20 = 4000 \text{ м}^2. \quad S_{\text{скл}} + R = 10 \cdot 30 \cdot 30 = 9000 \text{ м}^2.$$

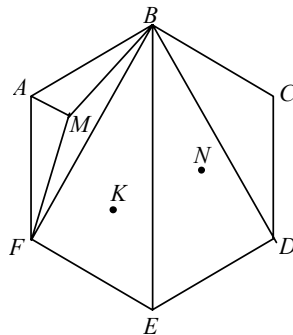
$$S_{\text{бенз}} + R = \pi \cdot 15^2 \approx 707 \text{ м}^2.$$

$S_{\text{забора}} = 16500 - (100 \cdot 140) = 2500 \Rightarrow \text{свободного места} = 16500 - 16207 = 293 \text{ м}^2$ , в любой точке которого можно расположить центр клумбы.

**148.** Если бы такая прямая существовала, то число вершин по обе стороны от нее было бы одинаково, а т.к. многоугольник имеет 1001 угол  $\Rightarrow$  это невозможно.

**149.** Возьмем произвольно 5 точек  $A, B, C, D, E$ . Докажем, что  $BCDA$  — выпуклый. По определению выпуклости, прямая, проведенная через две соседние вершины, оставляет многоугольник в одной полуплоскости. Проведя прямые  $AB, BC, CD$  и  $AD$ , убедимся в истинности утверждения.

**150.**



а) Если эти точки составляют выпуклый шестиугольник, то ответ очевиден, т.к. сумма всех сторон углов  $720^\circ \Rightarrow$  хотя бы один из них  $\geq 120^\circ$ .

б) если какие-нибудь 3, 4 или 5 точек лежат внутри этого шестиугольника. Проведем диагонали  $BF$ ,  $BE$ ,  $BD$ . Точка  $M \in (ABF)$ . Проведем прямые  $AM$ ,  $MB$ ,  $MF$ . Сумма этих углов  $360^\circ \Rightarrow \angle BMF$  (например)  $\geq 120^\circ$ . Ч.т.д.

**151.** Найдем сумму внутренних углов треугольника. Если треугольник имеет вершину в данной точке, то углы в сумме составляют  $360^\circ$ . Т.к. точек 30, то сумма соответствующих углов равна  $360^\circ \cdot 30 = 10800^\circ$ .

Сумма углов 100-угольника:  $180(100 - 2) = 17640^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$  Сумма внутренних углов треугольника:

$$10800 + 17640 = 28440^\circ \Rightarrow \text{число треугольников: } \frac{28440}{180} = 158 \text{ штук.}$$

**152.** Данные точки лежат внутри и в вершинах некоего  $n$ -угольника, где  $n \leq 1000$ . Проведенные отрезки разбивают этот  $n$ -угольник на ряд треугольников, либо совпадают с его сторонами. Число внутренних вершин треугольника:  $1000 - n$ . Общая сумма всех углов треугольника:

$$180(n - 2) + 360(1000 - n).$$

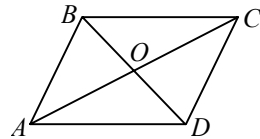
$$\text{Число треугольников: } (n - 2) + 2(1000 - n) = 1998 - n.$$

$$\text{Число сторон: } 5994 - 3n.$$

Общее число  $k$  отрезков равно:

$$n + \frac{1}{2}(5994 - 4n) = 2997 - n, \text{ т.к. } 1000 \geq n \geq 3, \text{ то } 1997 \leq K \leq 2994.$$

**153.**



$$S_{ABD_1} = S_{DBC_2};$$

$$S_{ACD_3} = S_{ABC_4};$$

$$S_1 + S_4 = S_1 + S_3$$

$$2S_{ABO} + S_{BOC} + S_{AOD} = S_{BOC} + 2S_{COD} + S_{AOD}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{ABO} = S_{COD} & \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow AO \cdot BO = OC \cdot OD \\ \Rightarrow BO \cdot OC = AO \cdot OD \end{array} \right. \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{OD}{BO} \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{AOD} = S_{BOC} & \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{DO} \end{array} \right. \Rightarrow \end{aligned}$$

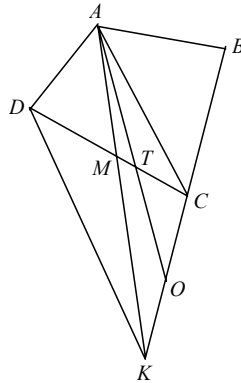
$$\Rightarrow BO = OD \text{ и } AO = OC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle BOC = \triangle DOA \Rightarrow (BC = AD) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CBD = \angle BDA; \angle BCD = \angle CAD \Rightarrow BC \parallel AD \text{ и } BC = AD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ABCD \text{ — параллелограмм.}$$

**154.**



Проведем прямую  $DK \parallel AC \Rightarrow DACK$  — трапеция  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow S(AMD) = S(KMC) \Rightarrow S(DABC) = S(KAB) \Rightarrow$  точка  $O$  должна совпадать с точкой  $K$ .

**155.** Выберем треугольник с наибольшей площадью в данных вершинах  $S \leq 1$ . Через каждую вершину проведем прямую, параллельную противолежащей стороне.

$S_{\Delta}$ , образованного этими прямыми,  $4S \leq 4$ .

Все треугольники с заданным основанием  $b$  имеют площадь не большую чем  $S$  и заключены в пространстве между двумя прямыми, параллельными

основанию и отстоящими от него на  $h = \frac{2S}{a}$ .

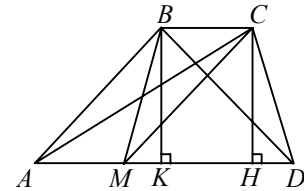
Искомый треугольник покрывает все  $n$  точек.

**156.**  $S = \pi r^2$ ;  $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  геолог выйдет из леса, если будет идти по окружности радиуса

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

**157.**



$$AC^2 - BD^2 = AB^2 + CD^2;$$

$$\begin{array}{l}
 AC^2 = H^2 + (2a+x)^2 \\
 BD^2 = H^2 + (a+x)^2 \\
 AB^2 = H^2 + (a+x)^2 \\
 CD^2 = H^2 + x^2
 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 H^2 + (2a+x)^2 - H^2 - (a+x)^2 &= H^2 + (a+x)^2 + H^2 + x^2; \\
 4a^2 + 4ax + x^2 - 2a^2 - 4ax - 2x^2 - 2H^2 - x^2 &= 0; \\
 2a^2 - 2H^2 - 2x^2 &= 0; \\
 x^2 = a^2 - H^2 &\Rightarrow x = \pm \sqrt{a^2 - H^2}; \\
 \Rightarrow MD = a \pm 2\sqrt{a^2 - H^2}; \\
 \Rightarrow AD = 2a + 2\sqrt{a^2 - H^2}; \\
 \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BK = \frac{1}{2} (3a \pm 2\sqrt{a^2 - H^2}) \cdot H
 \end{aligned}$$

$$1) a = 5 \text{ см}, H = 4 \text{ см} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} (15 + 6) \cdot 4 = 42 \text{ см}^2.$$

$$2) a = 13 \text{ см}, H = 12 \text{ см} \Rightarrow$$

$$S_1 = \frac{1}{2} (39 + 10) \cdot 12 = 294 \text{ см}^2,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} (39 - 10) \cdot 12 = 174 \text{ м}^2.$$

Задача имеет два решения, если  $\frac{a\sqrt{2}}{2} < H < a$ , при этом  $a$  должно быть меньше  $R\sqrt{3}$ , где  $R$  — радиус описанной окружности около  $MBCD$ .

## Контрольные работы

**К-1.**

**В-1.**

**1.**

$KM \parallel BC \Rightarrow \angle AKM = \angle ABC; \angle AMK = \angle ACB \Rightarrow$

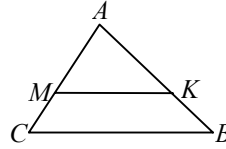
$\Rightarrow$  треугольники подобны по двум углам.

$P_{AKM} = 15 \text{ см};$

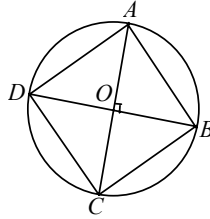
$$\frac{AK}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{KM}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow AB = 3AK, AC = 3AM, BC = 3KM \Rightarrow$

$\Rightarrow AB + AC + BC = 3(AK + AM + KM) = 3 \cdot 15 = 45 \text{ см.}$



**2.**



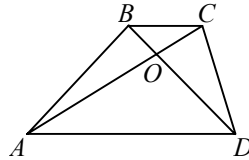
$ABCD$  — квадрат, т.к. угол между  $AC$  и  $BD$  равен  $90^\circ$  и все углы равны  $90^\circ$  и стороны равны.

$AB = BC = CD = AD = 8 \text{ см}; AO = OB \Rightarrow$  по теореме Пифагора

$$2AO^2 = 64 \Rightarrow AO^2 = 32 \Rightarrow AO = 4\sqrt{2} \text{ см} \Rightarrow AC = BD = 8\sqrt{2} \text{ см.}$$

**В-2.**

**1.**



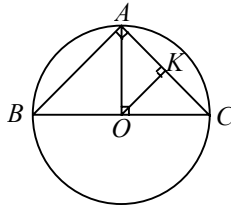
$AD \parallel BC \Rightarrow \angle BCO = \angle OAD, \angle CBO = \angle ODA \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BOC \sim \triangle DOA$  по 2-м углам  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{BO}{DO} = \frac{OC}{AO} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \frac{AD}{2} = 6 \text{ см.}$$

**2.**



$\angle BAC = 90^\circ \Rightarrow BC$  — диаметр  $\Rightarrow$

$\Rightarrow BAC$  — прямоугольный равнобедренный треугольник

Аналогично с  $\triangle ACB$ .

$AK = KO = KC = 4 \text{ см} \Rightarrow AC = 8 = AB; AO = OC$ ; по теореме Пифагора  $2AO^2 = 64 \Rightarrow AO = 4\sqrt{2} \text{ см} \Rightarrow BC = 2AO = 8\sqrt{2}$

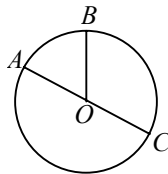
### В-3.

1.  $AB \parallel MN \Rightarrow \angle ABC = \angle MNC, \angle BAC = \angle NMC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNC$  по 2-м углам,

т.к.  $AM : MC = 1 : 1 \Rightarrow AM = 7 \text{ см} \Rightarrow AC = 14 \text{ см}, BC = 12 \text{ см}, AB = 8 \text{ см}.$

2.



$\cup AB : \cup BC : \cup AC = 1:2:3$ ;

$\angle AOB = x \Rightarrow \angle BOC = 2x, \angle AOC = 3x \Rightarrow 6x = 360^\circ, x = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AC$  — диаметр  $\Rightarrow ABC$  — прямоугольный треугольник

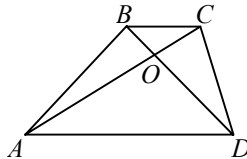
( $\angle B = 90^\circ$ ).

$AO = OC = OB = 10 \text{ см} \Rightarrow$  т.к.  $\triangle AOB$  — равносторонний  $\Rightarrow AB = 10 \text{ см}, AC =$

$20 \text{ см},$  по теореме Пифагора  $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 10\sqrt{3} \text{ см}.$

### В-4.

1.



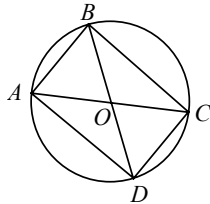
а)  $BC \parallel AD \Rightarrow \angle CBO = \angle BDA$  и  $\angle BCO = \angle CAD \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BOC \sim \triangle DOA$  по 2-м углам.

б) т.к.  $\triangle COB \sim \triangle AOD \Rightarrow \frac{CO}{AO} = \frac{OB}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow OD = \frac{3OB}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ см} \Rightarrow BD = BO + OD = 4 + 6 = 10 \text{ см.}$$

2.



$AOB$  — равнобедренный треугольник;

$ABCD$  — прямоугольник.

Т.к.  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$  и все углы равны  $90^\circ$ ;

$BO = 4 \text{ см} \Rightarrow \angle BOC = 60^\circ$ ,  $BO = OC \Rightarrow BO = OC = BC = AD = 4 \text{ см}$ ,

$BD = 8 \text{ см} \Rightarrow$  по теореме Пифагора

$$CD = \sqrt{BD^2 - BC^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ см} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABCD} = 4 + 4 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 8 + 8\sqrt{3} \text{ см.}$$

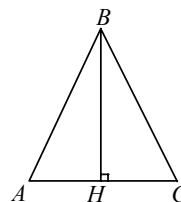
### К-2.

#### В-1.

1.

$\angle ABC$  — тупой  $\Rightarrow AC = 14 \text{ см}$ , т.к. против большей стороны лежит больший угол. По теореме косинусов:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{7}{8} \Rightarrow \angle A = \arccos \frac{7}{8}.$$



2.

$AB$  — меньшая сторона, т.к. лежит против наименьшего из углов. Из  $\triangle ABC$  по теореме синусов:

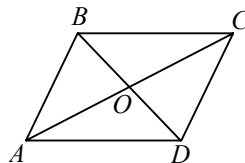
$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 100^\circ} = \frac{BC}{\sin 50^\circ} \Rightarrow AC = 8 \sin 100^\circ,$$

$$BC = 8 \sin 50^\circ.$$

Из  $\triangle ABD$  по теореме косинусов:

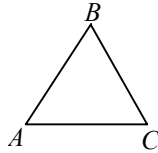
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 80^\circ = 16 + 64 \sin^2 50^\circ \cos 80^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD \approx 7,9 \text{ см.}$$



#### В-2.

1.

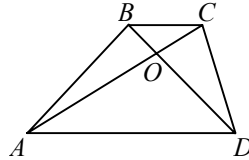


$BC$  — меньшая сторона, т. к. лежит против меньшего угла

$$\text{по теореме синусов } \frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{BC}{\sin 40^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \frac{BC \cdot \sin 60^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{\sin 40^\circ} \approx 8,1.$$

2.



Из  $\triangle ACD$  по теореме синусов

$$\frac{CD}{\sin 25^\circ} = \frac{AD}{\sin \angle ACD} = \frac{AC}{\sin \angle CDA} \Rightarrow$$

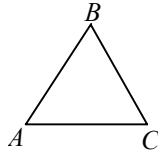
$$\Rightarrow \sin \angle ACD = \frac{7 \sin 25^\circ}{4} \Rightarrow \angle ADC = 155^\circ - \arcsin\left(\frac{7 \sin 25^\circ}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \frac{CD \sin \angle CDA}{\sin 25^\circ} = \frac{4 \sin\left(155^\circ - \arcsin\left(\frac{7}{4} \sin 25^\circ\right)\right)}{\sin 25^\circ} \approx 9 \text{ см.}$$

Аналогично решаем, если  $BC$  — большая диагональ.

### В-3.

1.

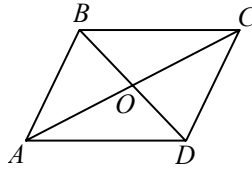


$\angle ABC$  — наибольший,  $\angle ACB$  — наименьший, т. к.  $AB = 5$  см,  $AC = 8$  см;

$$\cos(\angle ABC) = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{25 + 49 - 64}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{7} \Rightarrow \angle ABC = \arccos \frac{1}{7}.$$

2.





По теореме косинусов из  $\triangle AOD$ :

$$AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2AO \cdot OD \cdot \cos 70^\circ = 49 + 25 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 70^\circ = 50 \Rightarrow AD \approx 7,07 \text{ см.}$$

Аналогично из  $\triangle ABO$  ( $\angle AOB = 110^\circ$ ),

найдем  $AB \approx 9,8 \text{ см} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P = 7,07 + 7,07 + 9,8 + 9,8 = 33,74 \text{ см.}$$

Из  $\triangle ABD$  по теореме синусов:  $\frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin A} = \frac{AB}{\sin D}$ ;

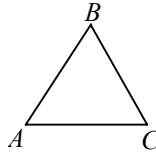
$$\text{из } \triangle AOD: \frac{AD}{\sin 70^\circ} = \frac{AO}{\sin D} \Rightarrow \sin D = \frac{7 \sin 70^\circ}{7,07} \approx 0,93 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{BD \sin D}{AB} \approx 0,94 \Rightarrow \angle A \approx 71^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - \angle A = 109^\circ.$$

#### В-4.

1.

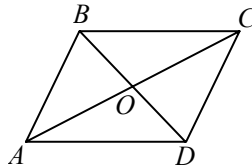


$BC = 5 \text{ см}$  (большая сторона), т.к. лежит напротив большего угла.

$AB$  аналогично — наименьшая сторона.

$$\text{По теореме синусов } \Rightarrow \frac{BC}{\sin 80^\circ} = \frac{AB}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = \frac{5}{2 \sin 80^\circ} \approx 2,54 \text{ см.}$$

2. см. задачу К-2.В-3 № 2.



### К-3.

#### В-1.

1. По теореме Пифагора  $BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} \approx 4,3$  см;

$BM$  — медиана  $\Rightarrow BO = \frac{2}{3} BM \approx 2,9$  см  $= \frac{5}{\sqrt{3}}$  см.

Т.к. шестиугольник вписан в данную окружность  $\Rightarrow$  его сторона равна радиусу окружности  $\Rightarrow$  равна  $\frac{5}{\sqrt{3}}$  см.

2.  $\cup AB = 2\pi$ ,  $\angle AOB = 120^\circ$

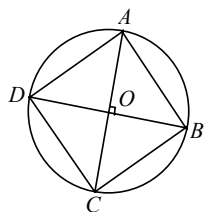
$\cup AB = R \cdot \angle AOB \Rightarrow R = \frac{360}{120} = 3$  см;

$BO = 3$ ,  $BM$  — медиана  $\Rightarrow BM = 4,5$  см.

#### В-2.

1.  $R_{\text{окр}} = \frac{1}{2} AB = 2$  см.

Т.к.  $\frac{S}{p} = r$ , то  $\frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{3}{2} a} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3} a}{6} = 2 \Rightarrow a = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$  см.



2.

$\cup BC = R \cdot \angle BOC \Rightarrow R = 8$  см;

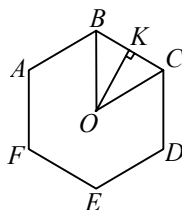
$ABCD$  — квадрат.

По теореме Пифагора

$AB^2 = 2R^2 = 128 \Rightarrow AB = BC = CD = AD = 8\sqrt{2}$  см.

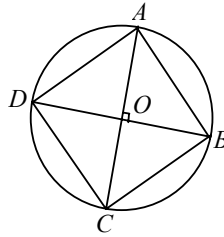
#### В-3.

1.



Шестиугольник правильный  $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC = CO = BO$ , где  $BO$  и  $OC$  — радиусы описанной окружности.

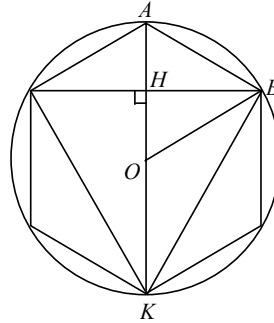


Из  $\triangle BKO$  по теореме Пифагора  $OK = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3}$  см;

$OC = 5\sqrt{3}$  см  $\Rightarrow AC = 10\sqrt{3}$  см  $\Rightarrow$  по теореме Пифагора

$$2AD^2 = 300 \Rightarrow AD = \sqrt{150} = 10\sqrt{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{6} \text{ см.}$$

2.



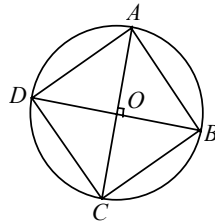
$\cup AB = 3\pi$ ,  $\angle AOB = 60^\circ$ , т.к.  $AB = OB = AO$  (см. предыдущую задачу)

$$\cup AB = R \cdot \angle AOB \Rightarrow R = \frac{540}{60} = 9 \text{ см.}$$

$KH$  — медиана и высота,  $OK = 9$  см  $\Rightarrow KH = \frac{3}{2} \cdot 9 = 13,5$  см.

#### В-4.

1.



$BD$  — диаметр; из  $\triangle BAD$  по теореме Пифагора

$$BD^2 = 72 \Rightarrow BD = 6\sqrt{2} \text{ см} \Rightarrow R = 3\sqrt{2} \text{ см.}$$

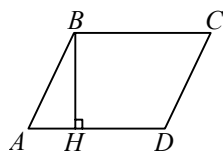
$\triangle KMN$  — правильный  $\Rightarrow OP = 3\sqrt{2}$  см  $\Rightarrow KP = 9\sqrt{2}$  см (т.к.  $KP$  — медиана)

$$\sin 60^\circ = \frac{KP}{KM} \Rightarrow KM = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot 2 = 18\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ см.}$$

2. см. К-3.В-2 задача 2.

#### К-4.

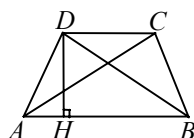
##### В-1.



1.  $AD \parallel BC \Rightarrow \angle BAD = 30^\circ$ ;

$$\text{а) } S_{\text{пар}} = AB \cdot AD \cdot \sin A = 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 20 \text{ см}^2.$$

$$\text{б) } S_{\text{пар}} = BH \cdot AD = 20 \Rightarrow BH = \frac{20}{8} = 2,5 \text{ см.}$$

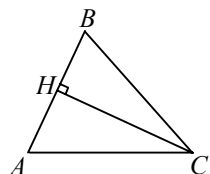


2. По теореме Пифагора  $2AH^2 = 50 \Rightarrow AH = HD = 5 \text{ см} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{\Delta} = \left( \frac{20+12}{2} \right) \cdot 5 = 80 \text{ см}^2. \quad S_{\Delta_1 ADB} = \frac{1}{2} DH \cdot AB;$$

$$S_{\Delta_2 BAC} = \frac{1}{2} DH \cdot AB \Rightarrow S_{ABD} = S_{BAC}.$$

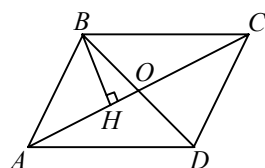
##### В-2.



1.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 7 \text{ см}^2;$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} CH \cdot AB = 7 \Rightarrow CH = \frac{14}{4} = 3,5 \text{ см.}$$



2.

$\triangle ABC = \triangle CDA$  ( $AB = CD$ ,  $BC = AD$ ,  $AC$  — общая).

$$S_{\Delta CAD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 14 \Rightarrow S_{\text{пар}} = 2 \cdot 14 = 28 \text{ см}^2.$$

$$S_{ABO} = \frac{1}{2} AO \cdot BH;$$

$$S_{BCO} = \frac{1}{2} BH \cdot OC;$$

$AO = OC$  по свойству параллелограмма  $\Rightarrow S_{ABO} = S_{BCO}$ .

##### В-3.

$$1. \text{ а) } S_{\text{кв}} = AB^2 = 0,64 \Rightarrow AB = 0,8 \text{ дм} \Rightarrow P_{\text{кв}} = 4AB = 3,2 \text{ дм};$$

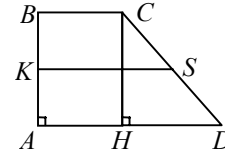
$$б) R_{кр} = \frac{1}{2} AB = 0,4 \text{ дм}; S_{кр} = \pi r^2 = 0,16\pi \text{ дм}^2.$$

2.

$$а) KS = \frac{BC + AD}{2} \Rightarrow 9x = 36 \Rightarrow x = 4 \text{ см};$$

$$BC = 4 \text{ см}, AD = 32 \text{ см};$$

$$б) AB = CH = 7x = 28 \Rightarrow S_{тр} = \left( \frac{4 + 32}{2} \right) \cdot 28 = 504 \text{ см}^2.$$



#### В-4.

1.

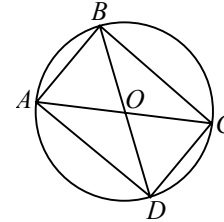
$$а) S_{пр} = x \cdot 2x = 72 \Rightarrow x = 6, AB = 6 \text{ см}, AD = 12 \text{ см}.$$

По теореме Пифагора из  $\triangle ABD$ :

$$BD = \sqrt{x^2 + 4x^2} = 6\sqrt{5} = AC$$

$$AC \text{ — диаметр круга} \Rightarrow R = 3\sqrt{5} \text{ см} \Rightarrow$$

$$б) S = \pi R^2 = 45\pi \text{ см}^2.$$



2.

$$S_{ABC} = S_{ACD}, \text{ т.к. } \triangle ABC = \triangle ACD;$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot HD = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 4 = 32 \text{ см}^2;$$

$$S_{пар} = 2 \cdot 32 = 64 \text{ см}^2$$

$$S_{пр-ма} = DK \cdot AB = 64 \Rightarrow DK = \frac{64}{12} = \frac{16}{3} \text{ см}.$$

