

Решение контрольных и самостоятельных работ по алгебре за 9 класс

**к пособию «Дидактические материалы по алгебре
для 9 класса / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк,
Л.Б. Крайнева. — 15-е изд. — М.: Просвещение, 2010».**

ОГЛАВЛЕНИЕ

Контрольные работы	4
Самостоятельные работы Вариант 1	79
Самостоятельные работы Вариант 2	194
Итоговое повторение по темам (к учебнику под редакцией Теляковского)	268
Итоговое повторение по темам (к учебнику под научным руководством Тихонова)	284
Повторение по курсу алгебры VII–IX классов	296
Задания для школьных олимпиад	317

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа 1

Вариант 1. К-1

1. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ может быть разложен на множители $a(x - x_1)(x - x_2)$, если известны его корни x_1 и x_2 .

а) Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - 14x + 45$, решив для этого квадратное уравнение $x^2 - 14x + 45 = 0$ с четным вторым коэффициентом. Определяем дискриминант уравнения $D_1 = (-14)^2 - 4 \cdot 45 = 49 - 45 = 4 = 2^2$ и его корни $x = 7 \pm \sqrt{2^2} = 7 \pm 2$, т.е. $x_1 = 9$ и $x_2 = 5$. Теперь данный многочлен легко разложить на множители: $1 \cdot (x - 9)(x - 5) = (x - 9)(x - 5)$.

б) Найдем корни квадратного трехчлена $3y^2 + 7y - 6$, решив соответствующее уравнение. Определяем дискриминант уравнения $D = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 49 + 72 = 121 = 11^2$ и его корни $y = \frac{-7 \pm \sqrt{11^2}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm 11}{6}$, т.е. $y_1 = \frac{-7 + 11}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ и $y_2 = \frac{-7 - 11}{6} = \frac{-18}{6} = -3$. Теперь разложим данный многочлен на множители:

$3 \cdot \left(y - \frac{2}{3}\right)(y - (-3)) = 3 \left(y - \frac{2}{3}\right)(y + 3)$. Можно также внести число 3 в первую скобку: $\left(3y - 3 \cdot \frac{2}{3}\right)(y + 3) = (3y - 2)(y + 3)$.

2. Построим график функции $y = x^2 - 2x - 8$.

Для этого выделим полный квадрат:

$$y = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 8 = (x - 1)^2 - 9.$$

Видно, что данный график получается из графика $y = x^2$ смещением параболы на одну единицу вправо и на девять единиц вниз. Теперь легко ответить на вопрос задачи, используя построенный график.

а) при $x = 1,5$ $y \approx -2,7$ (точное значение

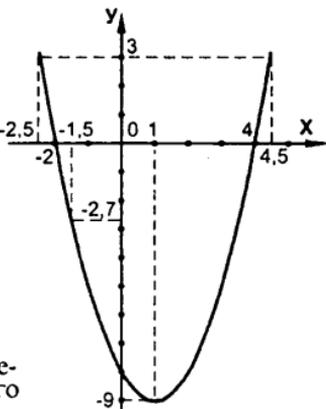
$$y = (-1,5)^2 - 2 \cdot (-1,5) - 8 = 2,25 + 3 - 8 = -2,75);$$

б) значение $y = 3$ при $x_1 \approx -2,5$ и $x_2 \approx 4,5$ (для нахождения точных значений x надо решить уравнение $3 = x^2 - 2x - 8$ или $0 = x^2 - 2x - 11$, корни которого

$$x = 1 \pm \sqrt{12} \approx 1 \pm 3,4, \text{ т.е. } x_1 \approx -2,4 \text{ и } x_2 \approx 4,4;$$

в) функция обращается в нуль при $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$; функция $y > 0$ в промежутках $(-\infty; -2)$ и $(4; +\infty)$; функция $y < 0$ в промежутке $(-2; 4)$;

г) функция возрастает (т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции) в промежутке $(1; +\infty)$.



3. Чтобы сократить дробь $\frac{3p^2 + p - 2}{4 - 9p^2}$, разложим ее числитель и знаменатель на

множители. Для разложения числителя найдем корни квадратного трехчлена

$3p^2 + p - 2$. Дискриминант $D = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 1 + 24 = 25 = 5^2$ и тогда $p = \frac{-1 \pm \sqrt{5^2}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 5}{6}$, т.е. $p_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ и $p_2 = \frac{-6}{6} = -1$. Получаем: $3p^2 + p - 2 = 3\left(p - \frac{2}{3}\right)(p - (-1)) = (3p - 2)(p + 1)$. Разложим знаменатель, используя формулу для разности квадратов чисел. Имеем: $4 - 9p^2 = 2^2 - (3p)^2 = (2 - 3p)(2 + 3p) = -(3p - 2)(3p + 2)$. Тогда получаем: $\frac{3p^2 + p - 2}{4 - 9p^2} = \frac{(3p - 2)(p + 1)}{-(3p - 2)(3p + 2)} = -\frac{p + 1}{3p + 2}$.

4. Чтобы найти наименьшее значение квадратного трехчлена $x^2 - 6x + 11$, выделим полный квадрат разности: $x^2 - 6x + 11 = (x^2 - 6x + 9) + 2 = (x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) + 2 = (x - 3)^2 + 2$. Так как при любых значениях x выражение $(x - 3)^2 \geq 0$, то выражение $(x - 3)^2 + 2 \geq 2$. Следовательно, наименьшее значение квадратного трехчлена равно 2 и достигается при $x = 3$.

Полученный результат имеет наглядное объяснение. Если построить график функции $y = (x - 3)^2 + 2$, то получим параболу с вершиной (3; 2), направленную ветвями вверх. Очевидно, что наименьшее значение функции достигается в вершине параболы. Поэтому наименьшее значение квадратного трехчлена равно 2.

5. Если парабола $y = \frac{1}{3}x^2$ и прямая $y = 6x - 15$ пересекаются, то точки их пересечения принадлежат и параболе и прямой. Следовательно, координаты точек пересечения удовлетворяют и уравнениям и параболы и прямой. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ y = 6x - 15 \end{cases} \text{ . Так как левые части уравнений одинаковы, то}$$

приравняем и правые. Получаем уравнение: $\frac{1}{3}x^2 = 6x - 15$ или $x^2 - 18x + 45 = 0$.

Решим это квадратное уравнение с четным вторым коэффициентом. Находим дискриминант $D_1 = (-9)^2 - 1 \cdot 45 = 81 - 45 = 36 = 6^2$ и корни $x = 9 \pm \sqrt{6^2} = 9 \pm 6$, т.е. $x_1 = 15$ и $x_2 = 3$. Так как уравнение имеет корни, то парабола и прямая пересекаются. Определив абсциссы точек пересечения, найдем их ординаты: $y_1 = \frac{1}{3} \cdot x_1^2 = \frac{1}{3} \cdot 15^2 = \frac{1}{3} \cdot 225 = 75$ и $y_2 = \frac{1}{3} \cdot x_2^2 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$. Итак, парабола и прямая пересекаются в двух точках с координатами (3; 3) и (15; 75).

Ответ: (3; 3) и (15; 15).

Вариант 2. К-1

1. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ может быть разложен на множители $a(x - x_1)(x - x_2)$, если известны его корни x_1 и x_2 .
- а) Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - 10x + 21$, решив для этого квадратное уравнение $x^2 - 10x + 21 = 0$ с четным вторым коэффициентом. Определяем дискриминант уравнения $D_1 = k^2 - ac = (-5)^2 - 1 \cdot 21 = 25 - 21 = 4 = 2^2$ (где $a = 1$,

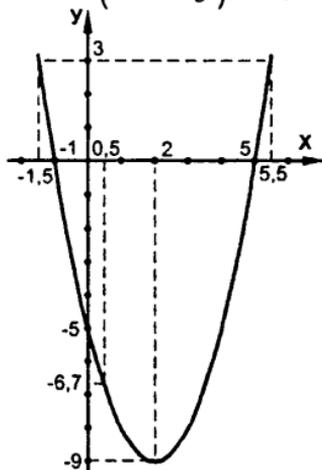
$k = \frac{b}{2} = \frac{-10}{2} = -5$, $c = 21$) и его корни $x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{2^2}}{1} = 5 \pm 2$, т.е. $x_1 = 7$ и $x_2 = 3$. Теперь разложим данный многочлен на множители: $1(x-7)(x-3) = (x-3)(x-7)$.

- б) Найдем корни квадратного трехчлена $5y^2 + 9y - 2$, решив соответствующее уравнение. Определим дискриминант уравнения $D = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 81 + 40 = 121 = 11^2$, (где $a = 5, b = 9, c = -2$) и его корни $y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{11^2}}{2 \cdot 5} = \frac{-9 \pm 11}{10}$ т.е. $y_1 = \frac{-9+11}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ и $y_2 = \frac{-9-11}{10} = \frac{-20}{10} = -2$. Теперь разложим данный многочлен на множители: $5 \cdot \left(y - \frac{1}{5}\right) (y - (-2)) = 5 \left(y - \frac{1}{5}\right) (y + 2)$.

Можно также внести число 5 в первую скобку: $\left(5y - 5 \cdot \frac{1}{5}\right) (y + 2) = (5y - 1)(y + 2)$.

2. Построим график функции $y = x^2 - 4x - 5$. Для этого выделим полный квадрат: $y = (x^2 - 4x + 4) - 4 - 5 = (x - 2)^2 - 9$. Видно, что данный график получается из графика $y = x^2$ смещением параболы на две единицы вправо и на девять единиц вниз. Используя построенный график, ответим на вопросы задачи.

- а) при $x = 0,5$ $y \approx -6,7$ (точное значение $y = 0,5^2 - 4 \cdot 0,5 - 5 = -6,75$);
- б) значение $y = 3$ при $x_1 \approx -1,5$ и $x_2 \approx 5,5$ (для нахождения точных значений надо решить уравнение $x^2 - 4x - 5 = 3$ или $x^2 - 4x - 8 = 0$, корни которого $x = 2 \pm \sqrt{12} \approx 2 \pm 3,4$, т.е. $x_1 \approx -1,4$ и $x_2 \approx 5,4$);
- в) функция обращается в нуль при $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$; функция $y > 0$ в промежутках $(-\infty; -1)$ и $(5; +\infty)$; функция $y < 0$ в промежутке $(-1; 5)$;
- г) функция убывает (т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции) в промежутке $(-\infty; 2)$;



3. Чтобы сократить дробь $\frac{4c^2 + 7c - 2}{1 - 16c^2}$, разложим ее числитель и знаменатель на множители. Для разложения числителя найдем корни квадратного трехчлена $4c^2 + 7c - 2$. Дискриминант $D = 7^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2) = 49 + 32 = 81 = 9^2$, тогда $c = \frac{-7 \pm \sqrt{9^2}}{2 \cdot 4} = \frac{-7 \pm 9}{8}$, т.е. $c_1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ и $c_2 = \frac{-16}{8} = -2$. Получаем: $4c^2 + 7c - 2 = 4\left(c - \frac{1}{4}\right)(c - (-2)) = (4c - 1)(c + 2)$. Разложим знаменатель, используя фор-

мулу для разности квадратов чисел. Имеем: $1 - 16c^2 = 1^2 - (4c)^2 = (1 - 4c)(1 + 4c)$.

Тогда получаем:
$$\frac{4c^2 + 7c - 2}{1 - 4c^2} = \frac{(4c - 1)(c + 2)}{(1 - 4c)(1 + 4c)} = \frac{-1(1 - 4c)(c + 2)}{(1 - 4c)(1 + 4c)} = -\frac{c + 2}{4c + 1}$$

4. Чтобы найти наибольшее значение квадратного трехчлена $-x^2 + 4x + 3$, выделим полный квадрат разности: $-x^2 + 4x + 3 = -(x^2 - 4x - 3) = -((x^2 - 4x + 4) - 4 - 3) = -(x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) + 7 = 7 - (x - 2)^2$. Так как при любых значениях x выражение $(x - 2)^2 \geq 0$, то величина $7 - (x - 2)^2 \leq 7$. Следовательно, наибольшее значение квадратного трехчлена равно 7 и достигается при $x = 2$.

Полученный результат имеет наглядное объяснение. Если построить график функции $y = -x^2 + 4x + 3 = 7 - (x - 2)^2$, то получим параболу с вершиной (2; 7), направленную ветвями вниз. Очевидно, что наибольшее значение функции достигается именно в вершине параболы. Поэтому наибольшее значение квадратного трехчлена равно 7.

5. Если парабола $y = \frac{1}{2}x^2$ и прямая $y = 12 - x$ пересекаются, то точки их пересечения принадлежат и параболе и прямой. Следовательно, координаты точек пересечения удовлетворяют и уравнению параболы и уравнению прямой.

Решим систему уравнений:
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = 12 - x \end{cases}$$
 . Так как левые части уравнение

одинаковы, то приравняем и правые. Получаем уравнение: $\frac{1}{2}x^2 = 12 - x$ или $x^2 + 2x - 24 = 0$.

- Решим это квадратное уравнение с четным вторым коэффициентом ($k = \frac{b}{2} = 1$; $a = 1, c = -24$). Находим дискриминант $D_1 = k^2 - ac = 1^2 - 1 \cdot (-24) = 25 = 5^2$ и корни

$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5^2}}{1} = -1 \pm 5$, т.е. $x_1 = 4$ и $x_2 = -6$. Так как уравнение имеет корни, то парабола и прямая пересекаются. Определив абсциссы точек

пересечения, найдем их ординаты: $y_1 = \frac{1}{2} \cdot x_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$ и

$y_2 = \frac{1}{2} \cdot x_2^2 = \frac{1}{2} \cdot (-6)^2 = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$. Итак, парабола и прямая пересекаются в

двух точках с координатами (-6; 18) и (4; 8).

Ответ: (-6; 18) и (4; 8).

Вариант 3. К-1

1. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ может быть разложен на множители $a(x - x_1)(x - x_2)$, если известны его корни x_1 и x_2 .

- а) Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - 12x + 35$, решив для этого квадратное уравнение $x^2 - 12x + 35 = 0$ с четным вторым коэффициентом

$\left(k = \frac{b}{2} = \frac{-12}{2} = -6, a = 1, c = 35\right)$. Находим дискриминант уравнения

$D_1 = k^2 - ac = (-6)^2 - 1 \cdot 35 = 36 - 35 = 1 = 1^2$ и его корни $x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{1^2}}{1} = 6 \pm 1$,

т.е. $x_1 = 7$ и $x_2 = 5$. Теперь разложим данный многочлен на множители:
 $1 \cdot (x - 7)(x - 5) = (x - 5)(x - 7)$.

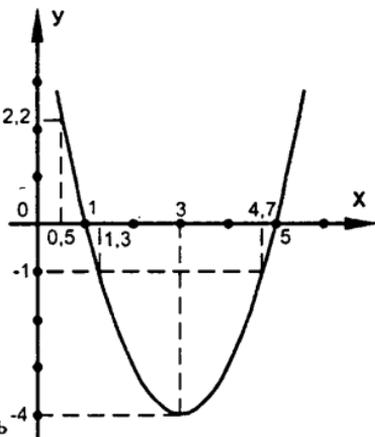
- б) Найдем корни квадратного трехчлена $7y^2 + 19y - 6$, решив соответствующее уравнение. Определим дискриминант уравнения $D = b^2 - 4ac = 19^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-6) = 361 + 168 = 529 = 23^2$ (где $a=7$, $b=19$, $c=-6$) и его корни $y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-19 \pm \sqrt{23}}{2 \cdot 7} = \frac{-19 \pm 23}{14}$, т.е. $y_1 = \frac{-19 + 23}{14} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$ и $y_2 = \frac{-19 - 23}{14} = \frac{-42}{14} = -3$.

Теперь разложим данный многочлен на множители: $7 \cdot \left(y - \frac{2}{7}\right)(y - (-3)) = 7 \left(y - \frac{2}{7}\right)(y + 3)$. Можно также внести число 7 в первую скобку: $\left(7y - \frac{2}{7}\right)(y + 3) = (7y - 2)(y + 3)$.

2. Построим график функции $y = x^2 - 6x + 5$.

Для этого выделим полный квадрат: $y = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$. Видно, что данный график получается из графика $y = x^2$ смещением параболы на три единицы вправо и на четыре единицы вниз. Используя построенный график, ответим на вопросы задачи.

- а) при $x = 0,5$ $y \approx 2,2$ (точное значение $y = 0,5^2 - 6 \cdot 0,5 + 5 = 2,25$);
- б) значение $y = -1$ при $x_1 \approx -1,3$ и $x_2 \approx 4,7$ (для нахождения точных значений надо решить уравнение $x^2 - 6x + 5 = -1$ или $x^2 - 6x + 6 = 0$, корни которого $x = 3 \pm \sqrt{3} \approx 3 \pm 1,7$ т.е. $x_1 \approx -1,3$ и $x_2 \approx 4,7$);
- в) функция обращается в нуль при $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$; функция $y > 0$ в промежутках $(-\infty; 1)$ и $(5; +\infty)$; функция $y < 0$ в промежутке $(1; 5)$;
- г) функция возрастает (т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции) в промежутке $(3; +\infty)$.



3. Чтобы сократить дробь $\frac{5a^2 + 19a - 4}{1 - 25a^2}$, разложим ее числитель и знаменатель на множители. Для разложения числителя найдем корни квадратного трехчлена $5a^2 + 19a - 4$. Дискриминант $D = 19^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4) = 361 + 80 = 441 = 21^2$, тогда $a = \frac{-19 \pm \sqrt{21^2}}{2 \cdot 5} = \frac{-19 \pm 21}{10}$, т.е. $a_1 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ и $a_2 = \frac{-40}{10} = -4$. Получаем: $5a^2 + 19a - 4 = 5 \left(a - \frac{1}{5}\right)(a - (-4)) = (5a - 1)(a + 4)$. Разложим знаменатель, используя формулу для разности квадратов чисел. Имеем: $1 - 25a^2 = 1^2 - (5a)^2 = (1 - 5a)(1 + 5a)$. Тогда получаем:

$$= \frac{5a^2 + 19a - 4}{1 - 25a^2} = \frac{(5a-1)(a+4)}{(1-5a)(1+5a)} = \frac{-(1-5a)(a+4)}{(1-5a)(1+5a)} = -\frac{a+4}{5a+1}$$

4. Чтобы найти наименьшее значение квадратного трехчлена $x^2 - 8x + 7$, выделим полный квадрат разности: $x^2 - 8x + 7 = (x^2 - 8x + 16) - 16 + 7 = (x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2) - 9 = (x-4)^2 - 9$. Так как при любых значениях x выражение $(x-4)^2 \geq 0$, то величина $(x-4)^2 - 9 \geq -9$. Следовательно, наименьшее значение квадратного трехчлена равно -9 и достигается при $x = 4$.

Полученный результат имеет наглядное объяснение. Если построить график функции $y = x^2 - 8x + 7 = (x-4)^2 - 9$, то получим параболу с вершиной $(4; -9)$, направленную ветвями вверх. Очевидно, что наименьшее значение функции достигается именно в вершине параболы. Поэтому наименьшее значение квадратного трехчлена равно -9 .

Ответ: -9 .

5. Если парабола $y = \frac{1}{4}x^2$ и прямая $y = 5x - 16$ пересекаются, то точки их пересечения принадлежат и параболе и прямой. Следовательно, координаты точек пересечения удовлетворяют и уравнению параболы и уравнению прямой.

Решим систему уравнений:
$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 \\ y = 5x - 16 \end{cases}$$
. Так как левые части уравнений

одинаковы, то приравняем и правые. Получаем уравнение: $\frac{1}{4}x^2 = 5x - 16$ или $x^2 - 20x + 64 = 0$.

- Решим это квадратное уравнение с четным вторым коэффициентом ($k = \frac{b}{2} = -10, a=1, c=64$). Находим дискриминант $D_1 = k^2 - ac = (-10)^2 - 1 \cdot 64 = 100 - 64 = 36 = 6^2$ и корни $x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{6^2}}{1} = 10 \pm 6$, т.е. $x_1 = 16$ и $x_2 = 4$. Так как уравнение имеет корни, то парабола и прямая пересекаются. Определив абсциссы точек пересечения, найдем их ординаты: $y_1 = \frac{1}{4} \cdot x_1^2 = \frac{1}{4} \cdot 16^2$ и $y_2 = \frac{1}{4} \cdot x_2^2 = \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 4$. Итак, парабола и прямая пересекаются в двух точках с координатами $(4; 4)$ и $(16; 64)$.

Вариант 4. К-1

1. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ может быть разложен на множители $a(x-x_1)(x-x_2)$, если известны его корни x_1 и x_2 .

- а) Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - 18x + 45$, решив квадратное уравнение $x^2 - 18x + 45 = 0$ с четным вторым коэффициентом ($k = \frac{b}{2} = \frac{-18}{2} = -9, a=1, c=45$).

Находим дискриминант уравнения $D_1 = k^2 - ac = (-9)^2 - 1 \cdot 45 = 81 - 45 = 36 = 6^2$ и его корни $x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{6^2}}{1} = 9 \pm 6$, т.е. $x_1 = 15$ и $x_2 = 3$. Теперь разложим данный многочлен на множители: $1 \cdot (x-15)(x-3) = (x-3)(x-15)$.

- б) Найдем корни квадратного трехчлена $9x^2 + 25x - 6$, решив соответствующее уравнение. Определим дискриминант уравнения $D = b^2 - 4ac = 25^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-6) = 625 + 216 = 841 = 29^2$ и его корни $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-25 \pm \sqrt{29^2}}{2 \cdot 9} = \frac{-25 \pm 29}{18}$, т.е. $x_1 = \frac{25+29}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ и $x_2 = \frac{-25-29}{18} = \frac{-54}{18} = -3$. Теперь разложим

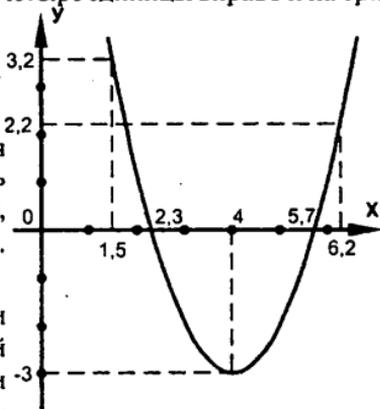
данный многочлен на множители: $9 \cdot \left(x - \frac{2}{9}\right) (x - (-3)) = 9 \left(x - \frac{2}{9}\right) (x + 3)$.

Можно также внести число 9 в первую скобку:

$$\left(9x - 9 \cdot \frac{2}{9}\right) (x + 3) = (9x - 2)(x + 3).$$

2. Построим график функции $y = x^2 - 8x + 13$. Для этого выделим полный квадрат: $y = (x^2 - 8x + 16) - 16 + 13 = (x - 4)^2 - 3$. Видно, что данный график получается из графика $y = x^2$ смещением параболы на четыре единицы вправо и на три единицы вниз. Используя построенный график, ответим на вопросы задачи.

- а) при $x = 1,5$ $y = 3,2$ (точное значение $y = 1,5^2 - 8 \cdot 1,5 + 13 = 3,25$);
- б) значение $y = 2$ при $x_1 \approx 1,8$ и $x_2 = 6,2$ (для нахождения точных значений надо решить уравнение $x^2 - 8x + 13 = 2$ или $x^2 - 8x + 11 = 0$, корни которого $x = 4 \pm \sqrt{5} \approx 4 \pm 2,2$, т.е. $x_1 \approx -1,8$ и $x_2 = 6,2$);
- в) функция обращается в нуль при $x_1 = 2,3$ и $x_2 = 5,7$ (для нахождения точных значений надо решить уравнение $x^2 - 8x + 13 = 0$, корни которого $x = 4 \pm \sqrt{3} \approx 4 \pm 1,7$, т.е. $x_1 \approx 2,3$ и $x_2 \approx 5,7$); функция $y > 0$ в промежутках $(-\infty; 2,3)$ и $(5,7; +\infty)$; функция $y < 0$ в промежутке $(2,3; 5,7)$;
- г) функция возрастает (т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции) в промежутке $(4; +\infty)$.



3. Чтобы сократить дробь $\frac{7b^2 - 11b - 6}{9 - 49b^2}$, разложим ее числитель и знаменатель на множители. Для разложения числителя найдем корни квадратного трехчлена $7b^2 + 11b - 6$. Дискриминант $D = 11^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-6) = 121 + 168 = 289 = 17^2$, тогда $b = \frac{11 \pm \sqrt{17^2}}{2 \cdot 7} = \frac{-11 \pm 17}{14}$, т.е. $b_1 = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$ и $b_2 = \frac{-28}{14} = -2$. Получаем $7b^2 + 11b - 6 = 7 \left(b - \frac{3}{7}\right) (b - (-2)) = (7b - 3)(b + 2)$. Разложим знаменатель, используя формулу для разности квадратов чисел. Имеем: $9 - 49b^2 = 3^2 - (7b)^2 =$

$$= (3 - 7b)(3 + 7b). \text{ Тогда получаем: } \frac{7b^2 + 11b - 6}{9 - 49b^2} = \frac{(7b-3)(b+2)}{(3-7b)(3+7b)} = \\ = \frac{-(3-7b)(b+2)}{(3-7b)(3+7b)} = -\frac{b+2}{7b+3}.$$

4. Чтобы найти наибольшее значение квадратного трехчлена $-x^2 + 6x - 4$, выделим полный квадрат разности: $-x^2 + 6x - 4 = -(x^2 - 6x + 4) = -((x^2 - 6x + 9) - 9 + 4) = -(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) + 5 = -(x - 3)^2 + 5$. Так как при любых значениях x выражение $(x - 3)^2 \geq 0$, то величина $5 - (x - 3)^2 \leq 5$. Следовательно, наибольшее значение квадратного трехчлена равно 5 и достигается при $x = 3$. Полученный результат имеет наглядное объяснение. Если построить график функции $y = -x^2 + 6x - 4 = -(x - 3)^2 + 5$, то получим параболу с вершиной (3; 5), направленную ветвями вниз. Очевидно, что наибольшее значение функции достигается именно в вершине параболы. Поэтому наибольшее значение квадратного трехчлена равно 5.

5. Если парабола $y = \frac{1}{5}x^2$ и прямая $y = 20 - 3x$ пересекаются, то точки их пересечения принадлежат и параболе и прямой. Следовательно, координаты точек пересечения удовлетворяют и уравнению параболы и уравнению прямой.

Решим систему уравнений:
$$\begin{cases} y = \frac{1}{5}x^2 \\ y = 20 - 3x \end{cases}$$
. Так как левые части уравнений одинаковы, то приравняем и правые. Получаем уравнение: $\frac{1}{5}x^2 = 20 - 3x$ или $x^2 + 15x - 100 = 0$.

- Решим это квадратное уравнение (где $a = 1$, $b = 15$, $c = -100$). Находим дискриминант $D = b^2 - ac = 15^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-100) = 225 + 400 = 625 = 25^2$ и корни $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a} = \frac{-15 \pm \sqrt{25^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-15 \pm 25}{2}$, т.е. $x_1 = 5$ и $x_2 = -20$. Так как уравнение имеет корни, то парабола и прямая пересекаются. Определив абсциссы точек пересечения, найдем их ординаты: $y_1 = \frac{1}{5} \cdot x_1^2 = \frac{1}{5} \cdot 5^2 = 5$ и $y_2 = \frac{1}{5} \cdot x_2^2 = \frac{1}{5} \cdot (-20)^2 = 80$. Итак, парабола и прямая пересекаются в двух точках с координатами (-20; 80) и (5; 5).

Контрольная работа 1А

Вариант 1. К-1А

1. а) $2 \cdot 2^{-3} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot 4 = 4^2 \cdot 4 = 4^3 = 64$;

в) $\frac{(3^{-2})^3 \cdot 27^2}{3} = \frac{3^{-6} \cdot (3^3)^2}{3} = \frac{3^{-6} \cdot 3^6}{3} = \frac{1}{3}$.

2. а) $5\sqrt[3]{16} - 0,2\sqrt{-0,027} + \sqrt[3]{1} = 5 \cdot 2 - 0,2 \cdot (-0,3) + 1 = 10 + 0,06 + 1 = 11,06$;

$$6) \sqrt[3]{32 \cdot 0,00001} = 2 \cdot 0,1 = 0,2 ; \text{ в) } \frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{243}{3}} = \sqrt[4]{81} = 3 ;$$

$$г) (\sqrt[5]{5})^{-12} = 5^{-\frac{12}{5}} = 5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625} .$$

3. а) $x^4 = 80$; $x_{1,2} = \pm 2\sqrt[4]{5}$, по всей видимости в задании опечатка и ее следует читать как: $x^4 = 81$; $x_{1,2} = \pm 3$; б) $x^6 = -18$; нет корней, т.к. $E = (x^6) = [0; +\infty)$;

в) $2x^3 - 128 = 0$; $x^3 = 64$; $x = 4$; г) $x^5 + 32 = 0$; $x^5 = -32$; $x = -2$.

4. $2\sqrt[4]{\sqrt{a}} - \sqrt[4]{ab} \cdot \sqrt[4]{b} = 2\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a}$.

5. $\sqrt[4]{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{3-\sqrt{5}} = \sqrt[4]{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \sqrt[4]{9-5} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

Вариант 2. К-1А

1. а) $5 \cdot 5^{-2} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 4 = 2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 32$;

в) $\frac{(2^{-2})^4 \cdot 16^2}{2^3} = \frac{2^{-8} \cdot (2^4)^2}{2^3} = \frac{2^{-8} \cdot 2^8}{2^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

2. а) $3\sqrt{-27} + 0,1\sqrt[4]{81} - \sqrt{1} = 3 \cdot (-3) + 0,1 \cdot 3 - 1 = -9 + 0,3 - 1 = -9,7$;

б) $\sqrt[4]{16 \cdot 0,0001} = 2 \cdot 0,1 = 0,2$; в) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{4}} = \sqrt[4]{\frac{243}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$;

г) $(\sqrt[5]{5})^{-8} = 5^{-\frac{8}{5}} = 5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$.

3. а) $x^4 = 20$; $x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{20}$; б) $x^8 = -36$; нет корней, т.к. $E(x^8) = [0; +\infty)$;

в) $64x^3 = 1$; $x^3 = \frac{1}{64}$; $x = \frac{1}{4}$; г) $x^3 + 8 = 0$; $x^3 = -8$; $x = -2$.

4. $\sqrt[4]{ab} \cdot \sqrt[4]{b} + 2\sqrt[4]{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a} + 2\sqrt[4]{a} = 3\sqrt[4]{a}$.

5. $\sqrt[4]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt{3}} = \sqrt[4]{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \sqrt[4]{2-3} = \sqrt[4]{-1} = -1$.

Вариант 3. К-1А

1. а) $5 \cdot 5^{-5} = 5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$; б) $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3 \cdot 3^2 = 3^3 = 27$;

в) $\frac{4^{-3} \cdot 2^6}{8} = \frac{(2^2)^{-3} \cdot 2^6}{2^3} = \frac{2^{-6} \cdot 2^6}{2^3} = \frac{1}{8}$.

2. а) $0,2\sqrt{-32} + \sqrt[4]{81} - \sqrt{1} = 0,2 \cdot (-2) + 3 - 1 = -0,4 + 2 = 1,6$;

б) $\sqrt[3]{0,001 \cdot 64} = 0,1 \cdot 4 = 0,4$; в) $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{216}{6}} = \sqrt{36} = 6$;

г) $(\sqrt[3]{3})^{-12} = 3^{-\frac{12}{3}} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{27}$.

3. а) $x^6 = 64$; $x_{1,2} = \pm 2$; б) $x^4 = -20$; нет корней, т.к. $E(x^4) = [0; +\infty)$;

в) $8x^3 = 1$; $x^3 = \frac{1}{8}$, $x = 0,5$; г) $27 + x^3 = 0$; $x^3 = -27$; $x = -3$.

4. $3\sqrt[4]{\sqrt{a}} + \sqrt[4]{ab} \cdot \sqrt[4]{b} = 3\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{a} = 4\sqrt[4]{a}$.

5. $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} = \sqrt[3]{4-5} = \sqrt[3]{-1} = -1$.

Вариант 4. К-1А

1. а) $3^{-5} \cdot 3 = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \cdot 5 = 5^2 \cdot 5 = 5^3 = 625$;

в) $\frac{(7^{-3})^2 \cdot 49^3}{7} = \frac{7^{-6} \cdot (7^2)^3}{7} = \frac{7^{-6} \cdot 7^6}{7} = \frac{1}{7}$.

2. а) $\frac{1}{8} \sqrt[3]{64} - 2\sqrt{-125} + \sqrt{1} = \frac{1}{8} \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 1 = \frac{1}{4} + 11 = 11,25$;

б) $\sqrt{121-0,01} = 11 \cdot 0,1 = 1,1$; в) $\frac{\sqrt{343}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{343}{7}} = \sqrt{49} = 7$;

г) $(\sqrt[3]{3})^{-10} = 3^{-\frac{10}{3}} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

3. а) $x^2 = 13$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{13}$; б) $32x^5 = 1$; $x^5 = \frac{1}{32}$, $x = 0,5$;

в) $x^6 = -16$; нет корней, т.к. $E(x^6) = [0; +\infty)$; г) $-8 - x^3 = 0$; $x^3 = -8$, $x = -2$.

4. $\sqrt[3]{bc} \cdot \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{\sqrt{b}} = \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} = 2\sqrt[3]{b}$.

5. $\sqrt[3]{9-\sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9+\sqrt{17}} = \sqrt[3]{(9-\sqrt{17})(9+\sqrt{17})} = \sqrt[3]{81-17} = \sqrt[3]{64} = 4$.

Контрольная работа 2

Вариант 1. К-2

1. Решим неравенство, разложив левую часть на множители.

а) Найдем корни квадратного уравнения $2x^2 - 13x + 6 = 0$. Находим дискриминант уравнения $D_1 = (-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 169 - 48 = 121 = 11^2$ и его корни

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{11^2}}{2 \cdot 2} = \frac{13 \pm 11}{4}, \text{ т.е. } x_1 = \frac{24}{4} = 6 \text{ и } x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \text{ Теперь разложим данный}$$

многочлен на множители, получим неравенство $2(x-6)\left(x-\frac{1}{2}\right) < 0$.

Произведение множителей $(x-6)$ и $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ отрицательно, если они имеют

противоположные знаки. Возможны два случая. Имеем: $\begin{cases} x-6 > 0 \\ x-\frac{1}{2} < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x > 6 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$.

Очевидно, что такая система неравенств решений не имеет.

Также возможен случай $\begin{cases} x-6 < 0 \\ x-\frac{1}{2} > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 6 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$. Поэтому решением системы (и данного квадратного неравенства) будут значения $\frac{1}{2} < x < 6$, т.е. промежуток $(0,5; 6)$.

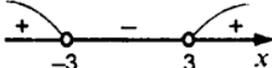


б) Используя формулу для разности квадратов чисел, получаем неравенство $(x+3)(x-3) > 0$. Произведение множителей $(x+3)$ и $(x-3)$ продолжительно, если они одного знака (или отрицательны или положительны). Возможны два случая.

Имеем систему неравенств $\begin{cases} x+3 < 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < -3 \\ x < 3 \end{cases}$. Решением этой системы неравенств являются значения $x < -3$, т.е. промежуток $(-\infty; -3)$.

Также возможен случай $\begin{cases} x+3 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x > -3 \\ x > 3 \end{cases}$. Решением такой системы неравенств являются значения $x > 3$, т.е. промежуток $(3; +\infty)$.

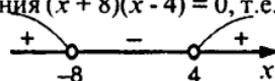
Объединяя полученные решения, находим решение данного квадратного неравенства $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.



в) Найдем дискриминант квадратного уравнения $3x^2 - 6x + 32 = 0$. Имеем: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 32 = 36 - 384 = -348$. Так как $D < 0$, то это квадратное выражение $3x^2 - 6x + 32$ не меняет знака. Найдем знак этого выражения, например, при $x = 0$. Получаем: $3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 32 > 0$. Таким образом, выражение $3x^2 - 6x + 32 > 0$ при любых значениях x . Поэтому решением неравенства $3x^2 - 6x + 32 > 0$ является любое число x , т.е. промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Ответ: а) $(0,5; 6)$; б) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$.

2. а) На координатной прямой отметим корни уравнения $(x+8)(x-4) = 0$, т.е. $x_1 = -8$ и $x_2 = 4$. При $x > 4$ оба множителя $(x+8)$ и $(x-4)$ положительны. Поэтому выражение $(x+8)(x-4)$ положительно. При переходе от одного интервала к другому данное выражение меняет знак на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $(x+8)(x-4)$. Из рисунка видно, что решением неравенства $(x+8)(x-4) > 0$ являются промежутки $(-\infty; -8)$ и $(4; +\infty)$.



б) На координатной прямой отметим значения x , при которых числитель и знаменатель дроби $\frac{x-5}{x+7}$ обращаются в нуль, т.е. $x_1 = 5$ и $x_2 = -7$. Эти точки разбили числовую прямую на три интервала. При $x > 5$ числитель $(x-5)$ и знаменатель $(x+7)$ дроби положительны. Поэтому в этом интервале дробь положительна. При переходе к следующему интервалу знак выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков для выражения $\frac{x-5}{x+7}$. Видно, что при $-7 < x < 5$ неравенство $\frac{x-5}{x+7}$ выполняется, т.е. его решением является промежуток $(-7; 5)$.



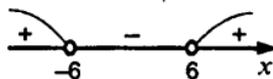
3. а) Разложим левую часть $x^2 - 81x = 0$ на множители, используя формулу разности квадратов чисел: $x(x^2 - 81) = 0$ или $x(x - 9)(x + 9) = 0$. Так как произведение трех множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Имеем три линейных уравнения: $x = 0$ (решение $x = 0$), $x - 9 = 0$ (решение $x = 9$) и $x + 9 = 0$ (решение $x = -9$). Все три числа являются корнями данного уравнения.

б) Умножим все члены уравнения $\frac{x^2 - 1}{2} - \frac{3x - 1}{4} = 2$ на наименьший общий знаменатель дробей - число 4. Получаем: $(x^2 - 1) \cdot 2 - (3x - 1) = 2 \cdot 4$ или $2x^2 - 2 - 3x + 1 = 8$ или $2x^2 - 3x + 9 = 0$. Для решения этого квадратного уравнения найдем дискриминант $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 9 + 72 = 81 = 9^2$ и его корни $x = \frac{3 \pm \sqrt{9^2}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 9}{4}$, т.е. $x_1 = \frac{12}{4} = 3$ и $x_2 = \frac{-6}{4} = -1,5$.

Ответ: а) -9; 0; 9, б) -1,5; 3.

4. Для решения биквадратного уравнения $x^4 - 19x^2 + 48 = 0$ введем новую неизвестную $y = x^2$ (очевидно, что $y \geq 0$). Тогда получаем квадратное уравнение $y^2 - 19y + 48 = 0$. Найдем его дискриминант $D = (-19)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 48 = 361 - 192 = 169 = 13^2$ и корни $y = \frac{19 \pm \sqrt{13^2}}{2 \cdot 1} = \frac{19 \pm 13}{2}$, т.е. $y_1 = \frac{32}{2} = 16$ и $y_2 = \frac{6}{2} = 3$. Оба значения y положительны и удовлетворяют условию $y \geq 0$. Теперь получаем два простейших квадратных уравнения: $x^2 = 16$ (корни $x_{1,2} = \pm 4$) и $x^2 = 3$ (корни $x_{3,4} = \pm \sqrt{3}$). Все четыре корня являются решениями данного биквадратного уравнения.
 Ответ: -4; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 4.

5. Квадратное уравнение $3x^2 + tx + 3 = 0$ имеет два корня, если его дискриминант D положительный. Найдем дискриминант $D = t^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = t^2 - 36$. Получаем квадратное неравенство $t^2 - 36 > 0$. Решим его, например, методом интервалов, раскладывая его левую часть на множители $(t - 6)(t + 6) > 0$. На координатной прямой отметим значения t , при которых левая часть неравенства обращается в нуль, т.е. $t_1 = 6$ и $t_2 = -6$. Эти точки разбивают числовую ось на три интервала. При $t > 6$ оба множителя $(t - 6)$ и $(t + 6)$ положительны. Поэтому выражение $(t - 6)(t + 6)$ положительно. При переходе к следующему интервалу знак выражения меняется на противоположный. Имеем диаграмму знаков. Поэтому неравенство $t^2 - 36 > 0$ выполнено в промежутках $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$. Следовательно, при таких t данное квадратное уравнение имеет два корня.



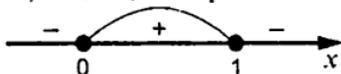
Ответ: $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$.

6. Функция $y = \sqrt{x - x^2}$ определена, если подкоренное выражение неотрицательно, т.е. $x - x^2 \geq 0$. Решим это неравенство методом интервалов. Разложим его левую часть на множители $x(1 - x) \geq 0$. Отметим значения $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, при которых выражение равно нулю. Возникают три интервала. При $x > 1$ величина $x > 0$, а $1 - x < 0$. Поэтому выражение $x(1 - x)$ отрицательно.

При переходе к следующему интервалу знак меняется на противоположный.

Получаем диаграмму знаков выражения $x(1-x)$. Видно, что при $0 \leq x \leq 1$ неравенство $x - x^2 \geq 0$ выполнено. Поэтому данная функция определена на отрезке $[0; 1]$.

Ответ: $[0; 1]$.



Вариант 2. К-2

1. Решим неравенство, разложив левую часть на множители.

а) Найдем корни квадратного уравнения $2x^2 - x - 15 = 0$. Определим дискриминант уравнения $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15) = 121 = 11^2$ и его корни

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{11^2}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 11}{4}, \text{ т.е. } x_1 = \frac{12}{4} = 3 \text{ и } x_2 = \frac{10}{4} = -2,5.$$

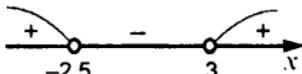
Теперь разложим данный трехчлен на множители, получим неравенство $2(x-3)(x+2,5) > 0$. Произведение множителей $(x-3)$ и $(x+2,5)$ положительно, если они имеют одинаковые знаки. Возможны два случая.

$$1) \begin{cases} x-3 > 0 \\ x+2,5 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > 3 \\ x > -2,5 \end{cases}. \text{ Решением этой системы является промежуток } x > 3.$$

$$2) \begin{cases} x-3 < 0 \\ x+2,5 < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < 0 \\ x < -2,5 \end{cases}. \text{ Промежуток } x < -2,5 \text{ является решением этой системы.}$$

Объединяя полученные решения двух систем, найдем

решение данного неравенства $(-\infty; -2,5) \cup (3; +\infty)$.



б) Используя формулу для разности квадратов чисел, получаем неравенство $(x+4)(x-4) < 0$. Произведение множителей $(x+4)$ и $(x-4)$ отрицательно, если они имеют противоположные знаки. Следовательно, возможны два случая.

$$1) \begin{cases} x-4 > 0 \\ x+4 < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > 4 \\ x < -4 \end{cases}. \text{ Очевидно, что нет значений } x, \text{ удовлетворяющих этой системе неравенств.}$$

$$2) \begin{cases} x-4 < 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < 4 \\ x > -4 \end{cases}. \text{ Такой системе неравенств удовлетворяют значения } -4 < x < 4, \text{ т.е. промежуток } (-4; 4). \text{ Этот же промежуток является и решением данного неравенства.}$$

в) Найдем дискриминант квадратного неравенства $x^2 + 12x + 80 < 0$. Получаем: $D = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 80 = 144 - 320 = -176 < 0$. Так как D отрицательный, то выражение $x^2 + 12x + 80$ не меняет своего знака. Найдем знак этого выражения, например, при $x = 0$. Имеем: $0^2 - 12 \cdot 0 + 80 > 0$. Следовательно, данное выражение положительно для всех значений x . Поэтому неравенство $x^2 + 12x + 80 < 0$ не выполняется для любых значений x , т.е. не имеет решений.

Ответ: а) $(-\infty; -2,5) \cup (3; +\infty)$, б) $(-4; 4)$, в) решений нет.

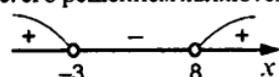
2. а) На координатной прямой отметим корни уравнения $(x+11)(x-9) = 0$, т.е. $x_1 = -11$ и $x_2 = 9$. При $x > 9$ оба множителя $(x+11)$ и $(x-9)$ положительны. Поэтому выражение $(x+11)(x-9)$ положительно. При переходе от одного

интервала к другому данное выражение меняет знак на противоположный. Получаем диаграмму знаков для выражения $(x + 11)(x - 9)$. Из рисунка видно, что решением неравенства $(x + 11)(x - 9) < 0$ является промежуток $(-11; 9)$.



б) На координатной прямой отметим значения x , при которых числитель и знаменатель дроби $\frac{x+3}{x-8}$ обращаются в нуль, т.е. $x_1 = -3$ и $x_2 = 8$. Эти точки разбили числовую прямую на три промежутка. При $x > 8$ числитель $(x + 3)$ и знаменатель $(x - 8)$ дроби положительны. Поэтому в таком интервале дробь положительна.

При переходе к следующему промежутку знак выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков для выражения $\frac{x+3}{x-8}$. Видно, что неравенство $\frac{x+3}{x-8} > 0$ выполняется при $x < -3$ и $x > 8$, т.е. его решением являются промежутки $(-\infty; -3)$ и $(8; +\infty)$.



Ответ: а) $(-11; 9)$, б) $(-\infty; -3) \cup (8; +\infty)$.

3. а) Разложим левую часть уравнения $x^3 - 25x = 0$ на множители, используя формулу для разности квадратов чисел: $x(x^2 - 25) = 0$ или $x(x - 5)(x + 5) = 0$. Так как произведение трех множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Имеем три линейных уравнения: $x = 0$ (решение $x = 0$), $x - 5 = 0$ (решение $x = 5$) и $x + 5 = 0$ (решение $x = -5$). Все три значения x являются корнями данного уравнения.

б) Умножим все члены уравнения $\frac{x^2 + 6}{5} - \frac{8 - x}{10} = 1$ на наименьший общий знаменатель дробей - число 10. Имеем: $(x^2 + 6) \cdot 2 - (8 - x) = 1 \cdot 10$ или $2x^2 + 12 - 8 + x = 10$ или $2x^2 + x - 6 = 0$. Для решения этого квадратного уравнения найдем дискриминант $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 1 + 48 = 49 = 7^2$ и его корни $x = \frac{-1 \pm \sqrt{7^2}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 7}{4}$, т.е. $x_1 = \frac{6}{4} = 1,5$ и $x_2 = \frac{-8}{4} = -2$. Оба эти значения удовлетворяют данному уравнению.

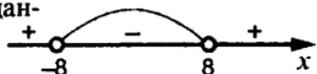
Ответ: а) -5; 0; 5. б) -2; 1,5.

4. Для решения биквадратного уравнения $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$ введем новую неизвестную $y = x^2$ (тогда $y \geq 0$). Получаем квадратное уравнение $y^2 - 4y - 45 = 0$. Найдем его дискриминант $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-45) = 16 + 180 = 196 = 14^2$ и корни $y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{14^2}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 14}{2}$, т.е. $y_1 = 9$ и $y_2 = -5$ (не подходит, т.к. $y \geq 0$). Получаем простейшее квадратное уравнение: $x^2 = 9$ или $(x - 3)(x + 3) = 0$, откуда $x_1 = 3$ и $x_2 = -3$. Ответ: -3; 3.

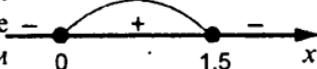
5. Квадратное уравнение $2x^2 + tx + 8 = 0$ не имеет корней, если его дискриминант отрицательный. Найдем дискриминант $D = t^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = t^2 - 64$. Решим квадратное неравенство $t^2 - 64 < 0$ методом интервалов. Разложим его левую часть на множители, используя формулу для разности квадратов чисел: $(t + 8)(t - 8) < 0$. На координатной прямой отметим значения t , при которых

$(t+8)(t-8) = 0$, т.е. $t_1 = -8$ и $t_2 = 8$. Эти точки разбивают числовую ось на три промежутка. При $t > 8$ оба множителя $(t+8)$ и $(t-8)$ положительны. Поэтому выражение $(t+8)(t-8)$ положительно. При переходе к следующему интервалу знак выражения изменяется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $(t+8)(t-8)$. Видно, что неравенство $(t+8)(t-8) < 0$ выполнено в интервале $(-8; 8)$. Следовательно, при таких t данное квадратное уравнение не имеет корней.

Ответ: $(-8; 8)$.



6. Функция $y = \sqrt{3x - 2x^2}$ определена, если подкоренное выражение неотрицательно, т.е. $3x - 2x^2 \geq 0$. Решив это квадратное неравенство, найдем область определения данной функции. Разложим левую часть на множители $x(3 - 2x) \geq 0$ и используем метод интервалов. Отметим значения $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{3}{2} = 1,5$, при которых это выражение равно нулю. Возникают три интервала. При $x > 1,5$ величина $x > 0$, а выражение $3 - 2x < 0$. Поэтому выражение $x(3 - 2x) < 0$. При переходе к следующему интервалу знак меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $3x - 2x^2$. Видно, что при $0 \leq x \leq 1,5$ неравенство $3x - 2x^2 \geq 0$ выполнено. Поэтому область определения данной функции - промежуток $[0; 1,5]$. Ответ: $[0; 1,5]$.



Вариант 3. К-2

1. Решим неравенство, разложив левую часть на множители.

- а) Найдем корни квадратного уравнения $2x^2 + 5x - 7 = 0$. Определим дискриминант уравнения $D = b^2 - 4ac$; $5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 25 + 56 = 81 = 9^2$ (где $a = 2$, $b = 5$, $c = -7$) и его корни $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 9}{4}$, т.е. $x_1 = \frac{4}{4} = 1$ и $x_2 = \frac{-14}{4} = -3,5$.

Теперь по формуле $a(x - x_1)(x - x_2)$ разложим данный квадратный трехчлен и получим неравенство $2(x - 1)(x + 3,5) < 0$. Произведение множителей $(x - 1)$ и $(x + 3,5)$ отрицательно, если они имеют противоположные знаки. Поэтому возможны два случая.

- 1) $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 3,5 < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x > 1 \\ x < -3,5 \end{cases}$. Такая система неравенств решений не имеет.

- 2) $\begin{cases} x - 1 < 0 \\ x + 3,5 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 1 \\ x > -3,5 \end{cases}$. Решением этой системы будут значения

$-3,5 < x < 1$, т.е. промежуток $(-3,5; 1)$. Этот же промежуток является и решением данного неравенства.



- б) Используем формулу для разности квадратов чисел и получим неравенство $(x - 5)(x + 5) > 0$. Произведение множителей $(x - 5)$ и $(x + 5)$ положительно, если они одного знака (или отрицательны или положительны). Возникают два случая.

1) $\begin{cases} x-5 < 0 \\ x+5 < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 5 \\ x < -5 \end{cases}$. Системе неравенств удовлетворяют значения $x < -5$, т.е. промежуток $(-\infty; -5)$.

2) $\begin{cases} x-5 > 0 \\ x+5 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x > 5 \\ x > -5 \end{cases}$. Решением этой системы неравенств являются числа $x > 5$, т.е. промежуток $(5; +\infty)$.

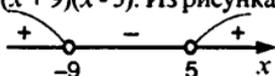
Объединяя решения, полученные в первом и втором случаях, находим решение данного неравенства: $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.



в) Найдем дискриминант квадратного трехчлена $5x^2 - 4x + 21$. Получаем: $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 21 = 16 - 420 = -404 < 0$. Так как дискриминант отрицательный, то квадратный трехчлен $5x^2 - 4x + 21$ не имеет корней, т.е. не изменяет своего знака. Определим знак этого выражения, например, при $x = 0$: $5 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 21 > 0$, т.е. положительный. Поэтому выражение $5x^2 - 4x + 21$ положительно при всех значениях x и любое значение x является решением неравенства $5x^2 - 4x + 21 > 0$, т.е. $(-\infty; +\infty)$.

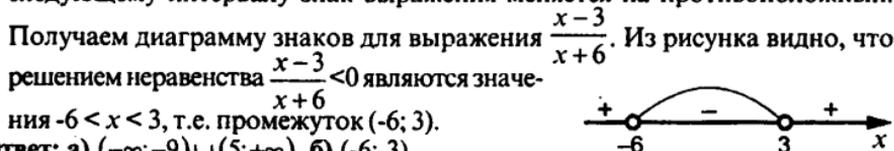
Ответ: а) $(-3, 5; 1)$, б) $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$.

2. а) Для решения неравенства $(x+9)(x-5) > 0$ методом интервалов отметим на координатной прямой корни выражения $(x+9)(x-5)$, т.е. $x_1 = -9$ и $x_2 = 5$. Эти точки разбивают числовую ось на три промежутка. При $x > 5$ оба множителя $(x+9)$ и $(x-5)$ положительны и их произведение $(x+9)(x-5) > 0$. При переходе от одного интервала к другому знак этого произведения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $(x+9)(x-5)$. Из рисунка видно, что решением неравенства $(x+9)(x-5) > 0$ являются промежутки $(-\infty; -9) \cup (5; +\infty)$.



б) На координатной прямой отметим значения x , при которых числитель и знаменатель дроби $\frac{x-3}{x+6}$ обращаются в нуль, т.е. $x_1 = 3$ и $x_2 = -6$. Эти точки разбили числовую ось на три промежутка. При $x > 3$ числитель и знаменатель дроби положительны. Поэтому дробь $\frac{x-3}{x+6}$ положительна. При переходе к каждому следующему интервалу знак выражения меняется на противоположный.

Получаем диаграмму знаков для выражения $\frac{x-3}{x+6}$. Из рисунка видно, что решением неравенства $\frac{x-3}{x+6} < 0$ являются значения $-6 < x < 3$, т.е. промежуток $(-6; 3)$.



Ответ: а) $(-\infty; -9) \cup (5; +\infty)$, б) $(-6; 3)$.

3. а) Разложим левую часть уравнения $x^2 - 36x = 0$ на множители, используя формулу для разности квадратов чисел: $x(x^2 - 36) = 0$ или $x(x-6)(x+6) = 0$. Произведение трех множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем три линейных уравнения: $x = 0$ (решение $x = 0$), $x - 6 = 0$ (корень $x = 6$) и $x + 6 = 0$ (решение $x = -6$). Все три корня являются решениями данного кубического уравнения.

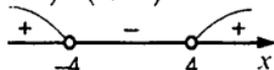
- б) Умножим все члены уравнения $\frac{x^2 - 4}{3} - \frac{5x - 2}{6} = 1$ на наименьший общий знаменатель дробей - число 6. Получаем $(x^2 - 4) \cdot 2 - (5x - 2) = 1 \cdot 6$ или $2x^2 - 8 - 5x + 2 = 6$ или $2x^2 - 5x - 12 = 0$. Для решения этого квадратного уравнения найдем его дискриминант $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 25 + 96 = 121 = 11^2$ и корни $x = \frac{5 \pm \sqrt{11^2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 11}{4}$, т.е. $x_1 = 4$ и $x_2 = \frac{-6}{4} = -1,5$.

Ответ: а) - 6; 0; 6, б) - 1,5; 4.

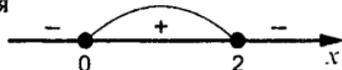
4. Для решения биквадратного уравнения $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ введем новую неизвестную $y = x^2$ (очевидно, $y \geq 0$). Тогда уравнение имеет вид $y^2 - 13y + 36 = 0$. Решим это квадратное уравнение. Найдем его дискриминант $D = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 169 - 144 = 25 = 5^2$ и корни $y = \frac{13 \pm 5}{2}$, т.е. $y_1 = 9$ и $y_2 = 4$. Оба значения y положительны. Получаем два простейших квадратных уравнения: $x^2 = 9$ (корни $x_{1,2} = \pm 3$) и $x^2 = 4$ (корни $x_{3,4} = \pm 2$). Данное биквадратное уравнение имеет четыре корня.

Ответ: -3; -2; 2; 3.

5. Квадратное уравнение $2x^2 + tx + 2 = 0$ имеет два корня, если его дискриминант положительный. Находим $D = t^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = t^2 - 16$. Решим неравенство $t^2 - 16 > 0$ методом интервалов, разложив его левую часть на множители: $(t - 4)(t + 4) > 0$. На координатной прямой отметим значения t , при которых левая часть неравенства равна нулю, $t_1 = 4$ и $t_2 = -4$. Эти точки разбивают числовую ось на три промежутка. При $t > 4$ оба множителя $(t - 4)$ и $(t + 4)$ положительны. Поэтому выражение $(t - 4)(t + 4)$ также положительно. При переходе к следующему интервалу знак выражения изменяется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $t^2 - 16$. Из рисунка видно, что неравенство $t^2 - 16 > 0$ выполняется при $t < -4$ и $t > 4$, т.е. в промежутках $(-\infty; -4)$ и $(4; +\infty)$. Следовательно, при таких t данное квадратное уравнение имеет два корня. **Ответ:** $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.



6. Функция $y = \sqrt{2x - x^2}$ определена, если подкоренное выражение неотрицательно, т.е. $2x - x^2 \geq 0$. Решив это квадратное неравенство, найдем область определения функции. Разложим левую часть на множители $x(2 - x) \geq 0$ и используем метод интервалов. На числовой оси отметим точки, в которых данное выражение равно нулю, т.е. $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Эти точки разбивают координатную прямую на три промежутка. При $x > 2$ выражение x положительно, а величина $(2 - x)$ отрицательна. Поэтому произведение $x(2 - x)$ отрицательно. При переходе к следующему интервалу знак выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $(2x - x^2)$. Из рисунка видно, что решением неравенства $2x - x^2 \geq 0$ являются значения $0 \leq x \leq 2$, т.е. промежуток $[0; 2]$. Это промежуток и есть область определения данной функции.



Ответ: $[0; 2]$.

Вариант 4. К-2

1. Решим неравенство, разложив левую часть на множители.

а) Найдем корни квадратного уравнения $5x^2 + 3x - 8 = 0$. Определим дискриминант уравнения $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-8) = 9 + 160 = 169 = 13^2$ и его корни $x = \frac{-3 \pm 13}{2 \cdot 5}$, т.е. $x_1 = \frac{10}{10} = 1$ и $x_2 = \frac{-16}{10} = -1,6$. Теперь разложим данный квадратный трехчлен по формуле $a(x - x_1)(x - x_2)$. Получаем неравенство $5(x - 1)(x + 1,6) < 0$. Произведение множителей $(x - 1)$ и $(x + 1,6)$ положительно, если они имеют одинаковые знаки. Поэтому возможны два случая.

- 1) $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1,6 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x > 1 \\ x > -1,6 \end{cases}$. Решение этой системы неравенств - значения $x > 1$, т.е. промежуток $(1; +\infty)$.
- 2) $\begin{cases} x-1 < 0 \\ x+1,6 < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 1 \\ x < -1,6 \end{cases}$. Такая система неравенств имеет решение $x < -1,6$, т.е. промежуток $(-\infty; -1,6)$.

Объединяя полученные решения в этих двух случаях, находим решение данного неравенства: $(-\infty; -1,6) \cup (1; +\infty)$.



б) Используя формулу для разности квадратов чисел, получаем неравенство $(x - 7)(x + 7) < 0$. Произведение множителей $(x - 7)$ и $(x + 7)$ отрицательно, если они имеют противоположные знаки. Возникают два случая.

- 1) $\begin{cases} x-7 > 0 \\ x+7 < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x > 7 \\ x < -7 \end{cases}$. Очевидно, что эта система неравенств решений не имеет.
- 2) $\begin{cases} x-7 < 0 \\ x+7 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 7 \\ x > -7 \end{cases}$. Такой системе неравенств удовлетворяют значения $-7 < x < 7$. Эти же значения являются и решением данного неравенства.

в) Найдем дискриминант квадратного трехчлена $4x^2 - 2x + 13$. Получаем: $D = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 13 = 4 - 208 = -204 < 0$. Так как дискриминант отрицательный, то квадратный трехчлен не имеет корней, т.е. не меняет своего знака. Найдем этот знак, например, при $x = 0$: $4 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 13 = 13 > 0$. Следовательно, выражение $4x^2 - 2x + 13$ положительно при всех значениях x и неравенство $4x^2 - 2x + 13 < 0$ решений не имеет.

Ответ: а) $(-\infty; -1,6) \cup (1; +\infty)$, б) $(-7; 7)$, в) решений нет.

2. а) На координатной прямой отметим корни уравнения $(x + 12)(x - 7) = 0$, т.е. $x_1 = -12$ и $x_2 = 7$. Эти точки разбивают числовую ось на три промежутка. При $x > 7$ оба множителя $(x + 12)$ и $(x - 7)$ положительны. Поэтому выражение $(x + 12)(x - 7)$ также положительно. При переходе от одного интервала к другому знак этого выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков величины $(x + 12)(x - 7)$. Из рисунка видно, что неравенство $(x + 12)(x - 7) < 0$ имеет решение $-12 < x < 7$, т.е. промежуток $(-12; 7)$.



- б) На координатной прямой отметим значения x , при которых числитель и знаменатель дроби $\frac{x+5}{x-10}$ обращаются в нуль, т.е. $x_1 = -5$ и $x_2 = 10$. Эти точки разбили числовую ось на три промежутка. При $x > 10$ числитель $(x+5)$ и знаменатель $(x-10)$ положительны. Поэтому дробь $\frac{x+5}{x-10}$ положительна. При переходе от одного интервала к другому знак этой дроби меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $\frac{x+5}{x-10}$. Из рисунка видно, что неравенство $\frac{x+5}{x-10} > 0$ выполняется при $x < -5$ и $x > 10$, т.е. в промежутках $(-\infty; -5) \cup (10; +\infty)$.



Ответ: а) $(-12; 7)$, б) $(-\infty; -5) \cup (10; +\infty)$.

3. а) Используя формулу для разности квадратов чисел, разложим левую часть уравнения $x^3 - 49x = 0$ на множители. Имеем: $x(x^2 - 49) = 0$ или $x(x+7)(x-7) = 0$. Так как произведение трех множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Поэтому получим три линейных уравнения: $x = 0$ (решение $x = 0$), $x - 7 = 0$ (корень $x = 7$) и $x + 7 = 0$ (решение $x = -7$). Все три корня являются решениями данного кубического уравнения.

- б) Умножим все члены уравнения $\frac{x^2+3}{4} - \frac{17-3x}{8} = 2$ на наименьший общий знаменатель дробей - число 8. Получаем: $(x^2+3) \cdot 2 - (17-3x) = 2 \cdot 8$ или $2x^2+6-17+3x=16$ или $2x^2+3x-27=0$. Для решения этого квадратного уравнения найдем его дискриминант $D=3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-27) = 9 + 216 = 225 = 15^2$ и корни $x = \frac{-3 \pm 15}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 15}{4}$, т.е. $x_1 = \frac{12}{4} = 3$ и $x_2 = \frac{-18}{4} = -4,5$. Оба корня удовлетворяют данному уравнению.

Ответ: а) $-7; 0; 7$, б) $-4,5; 3$.

4. Для решения биквадратного уравнения $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$ введем новую неизвестную $y = x^2$ (очевидно что $y \geq 0$). Тогда данное уравнение принимает вид $y^2 - 17y + 16 = 0$. Найдем его дискриминант $D = (-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 289 - 64 = 225 = 15^2$ и корни $y = \frac{17 \pm 15}{2}$, т.е. $y_1 = 16$ и $y_2 = 1$. Оба решения удовлетворяют условию $y \geq 0$. Теперь получаем два простейших квадратных уравнения $x^2 = 16$ (корни $x_{1,2} = \pm 4$) и $x^2 = 1$ (решения $x_{3,4} = \pm 1$). Таким образом, данное биквадратное уравнение имеет четыре корня.

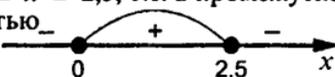
Ответ: $-4; -1; 1; 4$.

5. Квадратное уравнение $25x^2 + tx + 1 = 0$ не имеет корней, если его дискриминант отрицательный. Найдем дискриминант этого уравнения $D = t^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1 = t^2 - 100$. Получаем неравенство $t^2 - 100 < 0$. Разложим его левую часть на множители $(t-10)(t+10) < 0$ и решим методом интервалов. На координатной прямой отметим значения t , при которых левая часть неравенства равна нулю, т.е. $t_1 = 10$ и $t_2 = -10$. Эти точки разбивают числовую ось на три промежутка. Для $t > 10$ оба множителя $(t-10)$ и $(t+10)$ положительны. Поэтому произведение $(t-10)$

и $(t + 10)$ также положительно. При переходе от одного интервала к другому знак этого произведения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $t^2 - 100$. Из рисунка видно, что неравенство $t^2 - 100 < 0$ выполняется при $-10 < t < 10$, т.е. в промежутке $(-10; 10)$. **Ответ:** $(-10; 10)$.



6. Функция $y = \sqrt{5x - 2x^2}$ определена, если подкоренное выражение неотрицательно, т.е. $5x - 2x^2 \geq 0$. Решив это неравенство и найдем область определения функции. Разложим левую часть на множители $x(5 - 2x) \geq 0$ и используем метод интервалов. На координатной прямой отметим точки, $x = 0$ и $x_1 = \frac{5}{2} = 2,5$, при которых произведение $x(5 - 2x)$ равно нулю. Эти точки разбили числовую ось на три промежутка. При $x > 2,5$ выражение x положительно, а величина $(5 - 2x)$ отрицательна. Поэтому произведение $x(5 - 2x)$ отрицательно. При переходе от одного интервала к другому знак выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения $5x - 2x^2$. Видно, что неравенство $5x - 2x^2 \geq 0$ выполняется при $0 \leq x \leq 2,5$, т.е. в промежутке $[0; 2,5]$. Этот промежуток и является областью определения данной функции. **Ответ:** $[0; 2,5]$.



Контрольная работа 2А

Вариант 1. К-2А

1. а) $5 \cdot 8^{1/3} = 5 \cdot 2 = 10$; б) $16^{-1/2} = \frac{1}{16^{1/2}} = \frac{1}{4} = 0,25$.

2. а) $b^{1/3} \cdot b^{-1/6} = b^{1/3-1/6} = b^{1/6}$; б) $\frac{x^{3/4} \cdot x^{1/2}}{x^{1/4}} = x^{3/4+1/2-1/4} = x$;

в) $(y^{-3/4})^4 \cdot y^{5/2} = y^{-3} \cdot y^{5/2} = y^{-3+5/2} = y^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{y}}$.

3. $a^{7/2} \sqrt{a} = a^{7/2} \cdot a^{1/2} = a^4$.

4. а) $\frac{3a^{1/2} - a}{3 - a^{1/2}} = \frac{a^{1/2}(3 - a^{1/2})}{3 - a^{1/2}} = \sqrt{a}$; б) $\frac{b^{1/2} - 5}{b - 25} = \frac{b^{1/2} - 5}{(\sqrt{b} - 5)(\sqrt{b} + 5)} = \frac{1}{\sqrt{b} + 5}$.

5. $\left(\frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}} + \frac{2a^{0,5}b^{0,5}}{a - b} \right) \cdot \frac{a - 2a^{0,5}b^{0,5} + b}{a + b} =$
 $= \left(\frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}} + \frac{2a^{0,5}b^{0,5}}{(a^{0,5} - b^{0,5})(a^{0,5} + b^{0,5})} \right) \cdot \frac{(a^{0,5} - b^{0,5})^2}{a + b} =$
 $= \frac{a - 2a^{0,5}b^{0,5} + b + 2a^{0,5}b^{0,5}}{(a^{0,5} - b^{0,5})(a^{0,5} + b^{0,5})} \cdot \frac{(a^{0,5} - b^{0,5})^2}{a + b} = \frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}}$

Вариант 2. К-2А

1. а) $2 \cdot 36^{1/2} = 2 \cdot 6 = 12$; б) $27^{-1/3} = \frac{1}{27^{1/3}} = \frac{1}{3}$.

$$2. \text{ а) } a^{-1/2} \cdot a^{3/4} = a^{-1/2+3/4} = a^{1/4}; \quad \text{ б) } \frac{c^{2/3} \cdot c^{1/2}}{c^{1/6}} = c^{2/3+1/2-1/6} = c;$$

$$\text{ в) } (x^{1/3})^{-3} \cdot x^{2/3} = x^{-1} \cdot x^{2/3} = x^{-1/3} = \frac{1}{x^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$3. y^{5/3} \sqrt[3]{y} = y^{5/3} \cdot y^{1/3} = y^2.$$

$$4. \text{ а) } \frac{b+7b^{1/2}}{7+b^{1/2}} = \frac{b^{1/2}(b^{1/2}+7)}{b^{1/2}+7} = b^{1/2}; \quad \text{ б) } \frac{3+a^{1/2}}{a-9} = \frac{a^{1/2}+3}{(a^{1/2}-3)(a^{1/2}+3)} = \frac{1}{a^{1/2}-3}.$$

$$5. \left(\frac{a^{1/2}-b^{1/2}}{a-b} - \frac{1}{a^{1/2}-b^{1/2}} \right) \cdot \frac{a+2a^{1/2}b^{1/2}+b}{4b^{1/2}} =$$

$$= \left(\frac{a^{1/2}-b^{1/2}}{(a^{1/2}-b^{1/2})(a^{1/2}+b^{1/2})} - \frac{1}{a^{1/2}-b^{1/2}} \right) \cdot \frac{(a^{1/2}+b^{1/2})^2}{4b^{1/2}} = \frac{a^{1/2}-b^{1/2}-a^{1/2}-b^{1/2}}{(a^{1/2}-b^{1/2})(a^{1/2}+b^{1/2})} \cdot$$

$$\frac{(a^{1/2}+b^{1/2})^2}{4b^{1/2}} = \frac{-2b^{1/2}}{(a^{1/2}-b^{1/2})} \cdot \frac{(a^{1/2}+b^{1/2})}{4b^{1/2}} = -\frac{a^{1/2}+b^{1/2}}{2(a^{1/2}-b^{1/2})} = \frac{b^{1/2}+a^{1/2}}{2(b^{1/2}-a^{1/2})}.$$

Вариант 3. К-2А

$$1. \text{ а) } 2 \cdot 27^{1/3} = 2 \cdot 3 = 6; \quad \text{ б) } 36^{-1/2} = \frac{1}{36^{1/2}} = \frac{1}{6}.$$

$$2. \text{ а) } b^{-1/3} \cdot b^{1/2} = b^{-1/3+1/2} = b^{1/6}; \quad \text{ б) } \frac{a^2 \cdot a^{3/4}}{a^{1/4}} = a^{2+3/4-1/4} = a^{2.5};$$

$$\text{ в) } (y^2)^{-1/2} \cdot y^{3/2} = y^{-1} \cdot y^{3/2} = y^{-1+3/2} = y^{0.5}.$$

$$3. c^{7/4} \sqrt[4]{c} = c^{7/4} \cdot c^{1/4} = c^2.$$

$$4. \text{ а) } \frac{5x^{1/2}+x}{5+x^{1/2}} = \frac{x^{1/2}(5+x^{1/2})}{5+x^{1/2}} = x^{1/2}; \quad \text{ б) } \frac{a-4}{2+a^{1/2}} = \frac{(a^{1/2}-2)(a^{1/2}+2)}{a^{1/2}+2} = a^{1/2}-2.$$

$$5. \frac{a+b}{a+2a^{0.5}b^{0.5}+b} \cdot \left(\frac{a^{0.5}+b^{0.5}}{a^{0.5}-b^{0.5}} - \frac{2a^{0.5}b^{0.5}}{a-b} \right) = \frac{a+b}{(a^{0.5}+b^{0.5})^2} \cdot \left(\frac{a^{0.5}+b^{0.5}}{a^{0.5}-b^{0.5}} - \frac{2a^{0.5}b^{0.5}}{(a^{0.5}-b^{0.5})(a^{0.5}+b^{0.5})} \right) =$$

$$= \frac{a+b}{(a^{0.5}+b^{0.5})^2} \cdot \frac{a+b+2a^{0.5}b^{0.5}-2a^{0.5}b^{0.5}}{(a^{0.5}-b^{0.5})(a^{0.5}+b^{0.5})} = \frac{a+b}{(a^{0.5}+b^{0.5})^2} \cdot \frac{(a^{0.5}-b^{0.5})(a^{0.5}+b^{0.5})}{a+b} = \frac{a^{0.5}-b^{0.5}}{a^{0.5}+b^{0.5}}$$

Вариант 4. К-2А

$$1. \text{ а) } 3 \cdot 8^{1/3} = 3 \cdot 2 = 6; \quad \text{ б) } 64^{-1/2} = \frac{1}{64^{1/2}} = \frac{1}{8}$$

$$2. \text{ а) } a^{2/3} \cdot a^{-1/2} = a^{2/3-1/2} = a^{1/6}; \quad \text{ б) } \frac{b^{1/2} \cdot b^{-1}}{b^{3/2}} = b^{1/2-1-3/2} = b^{-2} = \frac{1}{b^2};$$

$$\text{ в) } (c^{1/2})^2 \cdot c^{-8/3} = c^3 \cdot c^{-8/3} = c^{3-8/3} = c^{1/3}.$$

$$3. x^{5/2} \sqrt{x} = x^{2.5} \cdot x^{0.5} = x^3.$$

$$4. a) \frac{a^{1/2} - 2}{a^{1/2} - 2a^{1/2}} = \frac{a^{1/2} - 2}{a^{1/2}(a^{1/2} - 2)} = \frac{1}{a^{1/2}}; \quad б) \frac{1-a}{1+a^{1/2}} = \frac{(1-a^{1/2})(1+a^{1/2})}{1+a^{1/2}} = 1-a^{1/2}.$$

$$5. \left(\frac{1}{a^{0.5} + b^{0.5}} - \frac{a^{0.5} + b^{0.5}}{a-b} \right) \frac{a-2a^{0.5}b^{0.5}+b}{2b^{0.5}} = \left(\frac{1}{a^{0.5} + b^{0.5}} - \frac{a^{0.5} + b^{0.5}}{(a^{0.5} - b^{0.5})(a^{0.5} + b^{0.5})} \right) \frac{(a^{0.5} - b^{0.5})^2}{2b^{0.5}} =$$

$$= \frac{a^{0.5} - b^{0.5} - a^{0.5} - b^{0.5}}{(a^{0.5} + b^{0.5})(a^{0.5} - b^{0.5})} \cdot \frac{(a^{0.5} - b^{0.5})^2}{2b^{0.5}} = -\frac{a^{0.5} - b^{0.5}}{a^{0.5} + b^{0.5}} = \frac{b^{0.5} - a^{0.5}}{b^{0.5} + a^{0.5}}$$

Контрольная работа 3

Вариант 1. К-3

1. Для решения системы уравнений $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x^2 - y = 1 \end{cases}$ используем метод сложения.

Складывая почленно левые и правые части уравнений получаем: $2x + y + x^2 - y = 7 + 1$ или $x^2 + 2x - 8 = 0$. Решая это квадратное уравнение, находим корни $x_1 = -4$ и $x_2 = 2$. Незвестную y можно найти из любого уравнения, например, из первого. Получаем $y = 7 - 2x$. Тогда для $x_1 = -4$ находим $y_1 = 7 - 2 \cdot (-4) = 15$, для $x_2 = 2$ получаем $y_2 = 7 - 2 \cdot 2 = 3$. Итак, система имеет два решения $(-4; 15)$ и $(2; 3)$.

Ответ: $(-4; 15)$ и $(2; 3)$.

2. Пусть стороны прямоугольника равны x (м) и y (м). Периметр фигуры равен сумме длин всех сторон. Поэтому периметр прямоугольника равен: $x+x+y+y=28$, откуда $x+y=14$. Площадь прямоугольника равна произведению его сторон, т.е. $xy=40$. Для нахождения сторон прямоугольника получили

$$\text{систему уравнений } \begin{cases} x + y = 14 \\ xy = 40 \end{cases}.$$

Так как сумма чисел x и y равна 14, а произведение этих чисел равно 40, то числа x и y по обратной теореме Виета - корни квадратного уравнения $t^2 - 14t + 40 = 0$.

Решая это квадратное уравнение, находим корни $t_1 = 4$ и $t_2 = 10$. Следовательно, стороны прямоугольника 4 м и 10 м.

Ответ: 4 м и 10 м.

3. Точки пересечения параболы $y = x^2 + 4$ и прямой $x + y = 6$ принадлежат каждой из этих линий. Поэтому координаты точек пересечения удовлетворяют

$$\text{уравнения линий, т.е. являются решениями системы } \begin{cases} y = x^2 + 4 \\ x + y = 6 \end{cases}.$$

Для решения системы используем способ подстановки. Подставим первое уравнение во второе: $x + x^2 + 4 = 6$ или $x^2 + x - 2 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$. Теперь из первого уравнения найдем соответствующие значения $y = x^2 + 4$. Для $x_1 = -2$ получаем $y_1 = (-2)^2 + 4 = 8$, для $x_2 = 1$ имеем $y_2 = 1^2 + 4 = 5$.

Следовательно парабола и прямая пересекаются в двух точках с координатами $(-2; 8)$ и $(1; 5)$.

Ответ: $(-2; 8)$ и $(1; 5)$.

4. Для решения системы уравнений $\begin{cases} 2y - x = 7 \\ x^2 - xy - y^2 = 29 \end{cases}$ используем способ под-

становки. Из первого уравнения выразим $x = 2y - 7$ и подставим во второе уравнение: $(2y - 7)^2 - (2y - 7)y - y^2 = 29$. Упростим уравнение, раскрывая скобки и приводя подобные члены: $4y^2 - 28y + 49 - 2y^2 + 7y - y^2 = 29$ или $y^2 - 21y + 20 = 0$. Легко подобрать корни этого квадратного уравнения, используя формулы Виета: $y_1 + y_2 = 21$ и $y_1 y_2 = 20$. Очевидно, что $y_1 = 1$ и $y_2 = 20$. Теперь, используя соотношение $x = 2y - 7$, найдем соответствующие значения x . Для $y_1 = 1$ получаем $x_1 = 2 \cdot 1 - 7 = -5$, для $y_2 = 20$ находим $x_2 = 2 \cdot 20 - 7 = 33$. Следовательно, данная система имеет два решения $(-5; 1)$ и $(33; 20)$.

Ответ: $(-5; 1)$ и $(33; 20)$.

Вариант 2. К-3

1. Для решения системы уравнений $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ xy + y = 6 \end{cases}$ используем способ подстановки.

Из первого уравнения найдем $x = 2 + 3y$ и подставим это выражение во второе уравнение: $(2 + 3y)y + y = 6$. Раскрываем скобки и преобразуем уравнение: $2y + 3y^2 + y = 6$ или $3y^2 + 3y - 6 = 0$ или $y^2 + y - 2 = 0$. Решая это квадратное уравнение, находим два корня: $y_1 = -2$ и $y_2 = 1$. Используя соотношение $x = 2 + 3y$, найдем значения x : $x_1 = 2 + 3 \cdot (-2) = -4$ и $x_2 = 2 + 3 \cdot 1 = 5$. Итак, данная система имеет два решения: $(-4; -2)$ и $(5; 1)$.

Ответ: $(-4; -2)$ и $(5; 1)$.

2. Пусть одна сторона прямоугольника составляет x (см), другая - y (см). По условию одна сторона больше другой на 2 см. Поэтому получаем первое уравнение: $x = y + 2$. Также известно, что площадь прямоугольника (т.е. произведение его сторон) равна 120 см^2 . Тогда имеем второе уравнение: $xy = 120$. Для нахождения сторон прямоугольника получаем систему уравнений $\begin{cases} x = y + 2 \\ xy = 120 \end{cases}$.

Решим эту систему методом подстановки. Подставим первое уравнение во второе: $(y + 2)y = 120$ или $y^2 + 2y - 120 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1 = 10$ и $y_2 = -12$ (не подходит по смыслу задачи, т.к. $y > 0$). Тогда $x = y + 2 = 10 + 2 = 12$. Итак, стороны прямоугольника 10 см и 12 см.

Ответ: 10 см и 12 см.

3. Точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 10$ и прямой $x + 2y = 5$ принадлежат каждой из этих линий. Поэтому координаты точек пересечения удовлетворяют

уравнениям линий, т.е. являются решениями системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$. Для

решения этой системы используем способ подстановки. Из второго уравнения выразим $x = 5 - 2y$ и подставим в первое уравнение: $(5 - 2y)^2 + y^2 = 10$ или $25 - 20y + 4y^2 + y^2 = 10$ или $5y^2 - 20y + 15 = 0$ или $y^2 - 4y + 3 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1 = 1$ и $y_2 = 3$. Найдем соответствующие значения x по

формуле $x = 5 - 2y$. Получаем: $x_1 = 5 - 2 \cdot 1 = 3$ и $x_2 = 5 - 2 \cdot 3 = -1$. Следовательно, окружность и прямая пересекаются в двух точках с координатами $(-1; 3)$ и $(3; 1)$.

Ответ: $(-1; 3)$ и $(3; 1)$.

4. Для решения системы уравнений $\begin{cases} y - 3x = 1 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 9 \end{cases}$ также используем способ подстановки. Из первого уравнения найдем $y = 3x + 1$ и подставим это выражение во второе уравнение: $x^2 - 2x(3x + 1) + (3x + 1)^2 = 9$. Раскроем скобки и приведем подобные члены: $x^2 - 6x^2 - 2x + 9x^2 + 6x + 1 = 9$ или $4x^2 + 4x - 8 = 0$ или $x^2 + x - 2 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$. Используя формулу $y = 3x + 1$, найдем соответствующие значения y : $y_1 = 3 \cdot (-2) + 1 = -5$ и $y_2 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$. Итак, данная система имеет два решения: $(-2; -5)$ и $(1; 4)$.

Ответ: $(-2; -5)$ и $(1; 4)$.

Вариант 3. К-3

1. Решим систему уравнений $\begin{cases} y - 3x = 1 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 9 \end{cases}$ методом подстановки. Из второго уравнения найдем $y = x^2 - 10$ и подставим в первое уравнение $x - 5(x^2 - 10) = 2$ или $x - 5x^2 + 50 = 2$ или $5x^2 - x - 48 = 0$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения $D = (-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-48) = 1 + 960 = 961 = 31^2$ и его корни $x = \frac{1 \pm 31}{2 \cdot 5}$, т.е. $x_1 = \frac{32}{10} = 3,2$ и $x_2 = \frac{-30}{10} = -3$. По формуле $y = x^2 - 10$ находим соответствующие значения y : $y_1 = 3,2^2 - 10 = 10,24 - 10 = 0,24$ и $y_2 = (-3)^2 - 10 = -1$. Итак, данная система имеет два решения $(3,2; 0,24)$ и $(-3; -1)$.

Ответ: $(3,2; 0,24)$ и $(-3; -1)$.

2. Пусть стороны прямоугольника равны x (см) и y (см). Периметр фигуры равен сумме длин всех сторон, т.е. $x + x + y + y = 2x + 2y$. По условию эта величина равна 26 см. Получаем первое уравнение: $2x + 2y = 26$ или $x + y = 13$. Площадь прямоугольника равна произведению его сторон и составляет 42 см². Поэтому имеем второе уравнение: $xy = 42$. Для нахождения сторон прямоугольника получили систему уравнений $\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 42 \end{cases}$.

Так как сумма чисел x и y равна 13, а произведение этих чисел равна 42, то числа x и y по обратной теореме Виета - корни квадратного уравнения $t^2 - 13t + 42 = 0$. Решая это квадратное уравнение, находим корни $t_1 = 6$ и $t_2 = 7$. Следовательно, стороны прямоугольника 6 см и 7 см.

Ответ: 6 см и 7 см.

3. Точки пересечения параболы $y = x^2 - 8$ и прямой $x + y = 4$ принадлежат каждой из этих линий. Поэтому координаты точек пересечения удовлетворяют уравнениям линий, т.е. являются решениями системы $\begin{cases} y = x^2 - 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$. Для решения этой системы используем способ подстановки. Подставим первое выражение во второе уравнение и получим: $x + x^2 - 8 = 4$ или $x^2 + x - 12 = 0$. Корни этого

квадратного уравнения $x_1 = -4$ и $x_2 = 3$. Используя формулу $y = x^2 - 8$, найдем соответствующие значения y : $y_1 = (-4)^2 - 8 = 8$ и $y_2 = 3^2 - 8 = 1$. Таким образом, данная система имеет два решения $(-4; 8)$ и $(3; 1)$, которые являются координатами точек пересечения данной параболы и прямой.

Ответ: $(-4; 8)$ и $(3; 1)$.

4. Для решения системы уравнений $\begin{cases} x - 5y = 9 \\ x^2 + 3xy - y^2 = 3 \end{cases}$ используем способ подстановки. Из первого уравнения выразим $x = 5y + 9$ и подставим во второе уравнение. Получим: $(5y + 9)^2 + 3(5y + 9)y - y^2 = 3$ или $25y^2 + 90y + 81 + 15y^2 + 27y - y^2 = 3$ или $39y^2 + 117y + 78 = 0$ или $y^2 + 3y + 2 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1 = -1$ и $y_2 = -2$. Из соотношения $x = 5y + 9$ найдем значения x : $x_1 = 5 \cdot (-1) + 9 = 4$ и $x_2 = 5 \cdot (-2) + 9 = 1$. Таким образом, система уравнений имеет два решения $(4; -1)$ и $(1; -2)$.

Ответ: $(4; -1)$ и $(1; -2)$.

Вариант 4. К-3

1. Для решения системы уравнений $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ x - xy = 8 \end{cases}$ используем способ подстановки.

Из первого уравнения найдем $y = -1 - 3x$ и подставим это соотношение во второе уравнение $x - x(-1 - 3x) = 8$ или $x + x + 3x^2 = 8$ или $3x^2 + 2x - 8 = 0$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения $D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 100 = 10^2$ и его корни $x = \frac{-2 \pm 10}{6}$, т.е. $x_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ и $x_2 = \frac{-12}{6} = -2$. Теперь по формуле $y = -1 - 3x$ найдем соответствующие значения y : $y_1 = -1 - 3 \cdot \frac{4}{3} = -5$ и $y_2 = -1 - 3 \cdot (-2) = 5$.

Следовательно, система уравнений имеет два решения: $(\frac{4}{3}; -5)$ и $(-2; 5)$.

Ответ: $(\frac{4}{3}; -5)$ и $(-2; 5)$.

2. Пусть одна сторона прямоугольника составляет x (м), другая - y (м). Известно, что одна сторона прямоугольника больше другой на 4 см. Поэтому получаем первое уравнение: $x = y + 4$. Площадь прямоугольника равна произведению его сторон и составляет 45 м^2 . Имеем второе уравнение: $xy = 45$. Для нахождения сторон прямоугольника получили систему уравнений $\begin{cases} x = y + 4 \\ xy = 45 \end{cases}$. Используем способ подстановки. Подставим первое уравнение во второе и получим: $(y + 4)y = 45$ или $y^2 + 4y - 45 = 0$. Корни этого уравнения $y_1 = -9$ (не подходит по смыслу задачи, т.к. $y > 0$) и $y_2 = 5$. Тогда $x = y + 4 = 5 + 4 = 9$. Итак, стороны прямоугольника 5 м и 9 м.

Ответ: 5 м и 9 м.

3. Точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 17$ и прямой $5x - 3y = 17$ принадлежат каждой из этих линий. Поэтому координаты точек пересечения удовлетворяют уравнениям линий, т.е. являются решениями системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ 5x - 3y = 17 \end{cases}$. Для ре-

шения этой системы используем способ подстановки. Из второго уравнения находим $x = \frac{17+3y}{5}$ и подставим в первое уравнение $\left(\frac{17+3y}{5}\right)^2 + y^2 = 17$ или $289 + 102y + 9y^2 + 25y^2 = 425$ или $34y^2 + 102y - 136 = 0$ или $y^2 + 3y - 4 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1 = 1$ и $y_2 = -4$. Из соотношения $x = \frac{17+3y}{5}$ найдем соответствующие значения x : $x_1 = \frac{17+3 \cdot 1}{5} = 4$ и $x_2 = \frac{17+3 \cdot (-4)}{5} = 1$. Таким образом, окружность и прямая пересекаются в двух точках с координатами (4; 1) и (1; -4). **Ответ:** (4; 1) и (1; -4).

4. Для решения системы уравнений $\begin{cases} x+2y=1 \\ x^2-xy-2y^2=1 \end{cases}$ применим способ подстановки. Из первого уравнения найдем $x = 1 - 2y$ и подставим во второе уравнение: $(1 - 2y)^2 - (1 - 2y)y - 2y^2 = 1$ или $1 - 4y + 4y^2 - y + 2y^2 - 2y^2 = 1$ или $4y^2 - 5y = 0$. Для решения этого квадратного уравнения разложим его левую часть на множители $y(4y - 5) = 0$. Произведение двух множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $y = 0$ (решение $y = 0$) и $4y - 5 = 0$ (корень $y = \frac{5}{4}$). Теперь по формуле $x = 1 - 2y$ находим соответствующие значения x . Для $y = 0$ получаем: $x = 1 - 2 \cdot 0 = 1$, для $y = \frac{5}{4}$ имеем: $x = 1 - 2 \cdot \frac{5}{4} = -1,5$. Следовательно, данная система уравнений имеет два решения (1; 0) и (-1,5; 1,25). **Ответ:** (1; 0) и (-1,5; 1,25).

Контрольная работа 3А

Вариант 1. К-3А

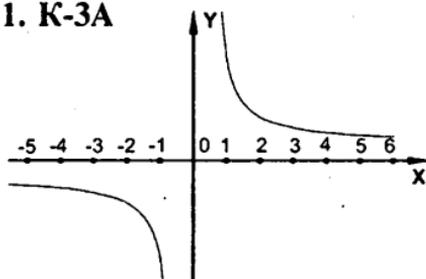
1. $y = \frac{3}{x}$

Ответ: а) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

б) $E(y) = D(y)$; в) нечетная;

г) функция убывает на $D(y)$;

$y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$.

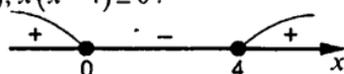


2. а) $y = \frac{3x-1}{2x^2-9x+10}$; $2x^2 - 9x + 10 \neq 0$, т.к. знаменатель;

$D = 81 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = 1$; $x_1 = \frac{9+1}{4} = 2,5$; $x_2 = 2$.

б) $y = \sqrt{x^2 - 4x}$; $x^2 - 4x \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$; $x(x-4) \geq 0$.

Ответ: а) $x \neq 2$; $x \neq 2,5$; б) $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.



3. $y = \frac{8}{x}$, $y = 2x$; $\frac{8}{x} = 2x$; $\frac{4}{x} = x$; $x^2 = 4$; $x_{1,2} = \pm 2$; $y_{1,2} = 2 \cdot (\pm 2) = \pm 4$.

4. а) $\sqrt{5-4x} = 3,2$; $5-4x = 10,24$; $4x = 5,24$; $x = -1,31$;

б) $\sqrt{4x^2-3x-1} = x+1$; $4x^2-3x-1 = x^2+2x+1$; $3x-5x-2=0$; $D = 25+4 \cdot 3 \cdot 2 = 49$;

$x_1 = \frac{5+7}{6} = 2$; $x_2 = -\frac{1}{3}$; Проверка: $x_1 = 2$; $\sqrt{4 \cdot 4 - 6 - 1} = 2 + 1$ - верно;

$x_2 = -\frac{1}{3}$; $\sqrt{4 \cdot \frac{1}{9} + 1 - 1} = -\frac{1}{3} + 1$ - верно.

Вариант 2. К-3А

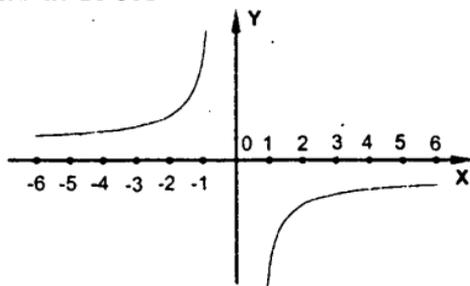
1. $y = -\frac{3}{x}$

Ответ: а) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

б) $E(y) = D(y)$; в) нечетная;

г) функция возрастает на $D(y)$;

$y > 0$ при $x < 0$; $y < 0$ при $x > 0$.

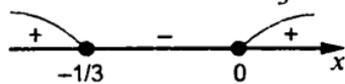


2. а) $y = \frac{6x+2}{3x^2+5x-2}$; $3x^2+5x-2 \neq 0$, т.к. знаменатель;

$D = 25 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49$; $x_1 = \frac{-5+7}{6} = \frac{1}{3}$; $x_2 = -2$.

б) $y = \sqrt{4x+12x^2}$; $4x+12x^2 \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$; $3x^2+x \geq 0$; $x(x+\frac{1}{3}) \geq 0$

Ответ: а) $x \neq -2$; $x \neq \frac{1}{3}$; б) $(-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [0; +\infty)$.



3. $y = \frac{12}{x}$; $y = \frac{x}{3}$; $\frac{12}{x} = \frac{x}{3}$; $x^2 = 36$; $x_{1,2} = \pm 6$; $y_{1,2} = \pm \frac{6}{3} = \pm 2$.

Ответ: $(\pm 6; \pm 2)$.

4. а) $\sqrt{2x-3} = 1,6$; $2x-3 = 2,56$; $2x = 5,56$; $x = 2,78$;

б) $\sqrt{3x^2+5x+8} = 3+x$; $3x^2+5x+8 = 9+6x+x^2$; $2x^2-x-1=0$; $D = 1+4 \cdot 2 = 9$;

$x_1 = \frac{1+3}{4} = 1$; $x_2 = -0,5$; Проверка: $x_1 = 1$; $\sqrt{3+5+8} = 3+1$ - верно;

$x_2 = -0,5$; $\sqrt{3 \cdot 0,25 - 5 \cdot 0,5 + 8} = 3 - 0,5$ - верно.

Ответ: а) $x = 1$; б) $x = 0,5$.

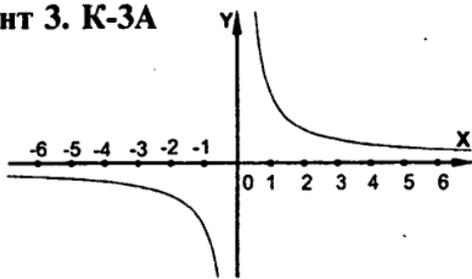
Вариант 3. К-3А

1. $y = \frac{2}{x}$

Ответ: а) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

б) $E(y) = D(y)$; в) нечетная;

г) функция убывает на $D(y)$;
 $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$.



2. а) $y = \frac{4x-1}{5x^2-13x-6}$; $5x^2-13x-6 \neq 0$, т.к. знаменатель;

$$D = 169 + 4 \cdot 5 \cdot 6 = 289; x_1 = \frac{13+17}{10} = 3; x_2 = -0,4.$$

б) $y = \sqrt{18x^2-3x}$; $18x^2-3x \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$; $6x^2-x \geq 0$; $x(x+\frac{1}{3}) \geq 0$.

Ответ: а) $x \neq 0,6$; $x \neq 2$; б) $(-\infty; 0] \cup [\frac{1}{6}; +\infty)$.

3. $y = \frac{8}{x}$, $y = \frac{x}{2}$; $\frac{8}{x} = \frac{x}{2}$; $x^2 = 16$; $x_{1,2} = \pm 4$; $y_{1,2} = \pm \frac{4}{2} = \pm 2$. Ответ: $(\pm 4; \pm 2)$.

4. а) $\sqrt{5-2x} = 8,4$; $5-2x = 70,56$; $2x = -65,56$; $x = -32,78$;

б) $\sqrt{2x^2-7x+7} = x-1$; $2x^2-7x+7 = x^2-2x+1$; $x^2-5x+6 = 0$; $D = 25-24 = 1$;

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3; x_2 = 2; \text{Проверка: } x_1 = 3; \sqrt{18-21+7} = 3-1 - \text{верно};$$

$$x_2 = 2; \sqrt{8-14+7} = 2-1 - \text{верно}.$$

Ответ: а) 3; б) 2.

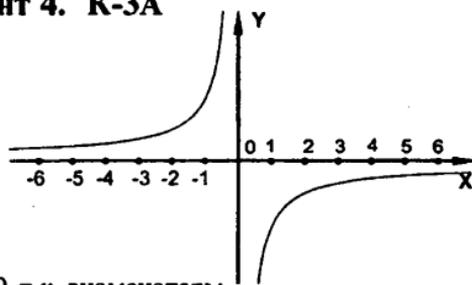
Вариант 4. К-3А

1. $y = -\frac{2}{x}$

Ответ: а) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

б) $E(y) = D(y)$; в) нечетная;

г) функция возрастает на $D(y)$;
 $y > 0$ при $x < 0$; $y < 0$ при $x > 0$.



2. а) $y = \frac{2x+4}{6x^2+11x-2}$; $6x^2+11x-2 \neq 0$, т.к. знаменатель;

$$D = 121 + 4 \cdot 6 \cdot 2 = 169; x_1 = \frac{-11+13}{12} = \frac{1}{6}; x_2 = -2.$$

б) $y = \sqrt{3x-x^2}$; $3x-x^2 \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$; $x^2-3x \leq 0$; $x(x-3) \leq 0$.

Ответ: а) $x \neq -2$; $x \neq \frac{1}{6}$; б) $[0; 3]$.



$$3. y = 6x; y = \frac{54}{x}; 6x = \frac{54}{x}; x^2 = 9; x_{1,2} = \pm 3; y_{1,2} = 6 \cdot (\pm 3) = \pm 18.$$

Ответ: $(\pm 3; \pm 18)$.

$$4. \text{ а) } \sqrt{3x+7} = 2,5; 3x+7=6,25; 3x = -0,75; x = -0,25; ;$$

$$\text{ б) } \sqrt{x^2 - 6x - 8} = 1 + 2x; x^2 - 6x - 8 = 1 + 4x + 4x^2; 3x^2 + 10x + 9 = 0;$$

$$D = 100 - 4 \cdot 3 \cdot 9 < 0; \text{ нет корней.}$$

Ответ: а) - 0,25; б) нет корней.

Контрольная работа 4

Вариант 1. К-4

1. Используем формулу n -го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$. В этом примере $n = 23, a_1 = -15$ и $d = 3$. Тогда получаем: $a_{23} = -15 + 3(23-1) = -15 + 66 = 51$. Ответ: 51.

2. Для арифметической прогрессии 8; 4; 0; ... определим первый член a_1 и разность d . Очевидно, $a_1 = 8$. По определению $d = a_2 - a_1$ и, так как $a_2 = 4$, то $d = 4 - 8 = -4$. Для нахождения суммы первых шестнадцати членов применим формулу для суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. При $n = 16$ получаем: $S_{16} = \frac{2 \cdot 8 + (-4)(16-1)}{2} \cdot 16 = \frac{16-60}{2} \cdot 16 = -22 \cdot 16 = -352$.

Ответ: -352.

3. Сначала покажем, что последовательность $b_n = 3n - 1$ является арифметической прогрессией. Найдем разность двух любых соседних членов данной последовательности b_n и b_{n-1} . Определим $b_{n-1} = 3 \cdot (n-1) - 1 = n - 4$. Тогда $b_n - b_{n-1} = (3n - 1) - (3n - 4) = 3n - 1 - 3n + 4 = 3$. Видно, что эта разность величина постоянная и не зависит от номера n . Поэтому данная последовательность - арифметическая прогрессия и ее разность $d = 3$. Найдем также первый член этой прогрессии. Из формулы $b_n = 3n - 1$ при $n = 1$ находим $b_1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$. Теперь легко найти сумму первых шестидесяти членов арифметической прогрессии по формуле $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. При $n = 60$ имеем $S_n = \frac{2 \cdot 2 + 3(60-1)}{2} \cdot 60 = \frac{4 + 177}{2} \cdot 60 = 181 \cdot 30 = 5430$. Ответ: 5430.

4. Так как арифметическая прогрессия определяется своим первым членом a_1 и разностью d , то прежде всего найдем разность прогрессии, используя формулу n -го члена: $a_n = a_1 + d(n-1)$. По условию известны $a_1 = 25,5$ и $a_9 = 5,5$. Тогда имеем: $5,5 = 25,5 + d(9-1)$ или $5,5 = 25,5 + 8d$. Решим это линейное уравнение: $5,5 - 25,5 = 8d$, откуда $d = -2,5$.

Так как d отрицательна, то прогрессия убывающая, т.е. каждый следующий член меньше предыдущего ($a_n < a_{n-1}$). Поэтому наибольший член данной прогрессии - первый $a_1 = 25,5$. Следовательно, большее число 54,5 не может быть членом данной прогрессии. Ответ: нет.

5. Легко заметить, что натуральные числа, кратные 3 (числа 3, 6, 9, ...) образуют арифметическую прогрессию. Первый член этой прогрессии $a_1 = 3$ и разность $d = a_2 - a_1 = 6 - 3 = 3$. Определим, какие члены этой прогрессии не превосходят числа 100. Для этого используем формулу n -го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n - 1)$. При $a_1 = 3$ и $d = 3$ получаем: $a_n = 3 + 3 \cdot (n - 1) = 3n$. По условию $a_n \leq 100$, т.е. $3n \leq 100$. Решая это линейное неравенство, найдем $n \leq \frac{100}{3}$ или $n \leq 33\frac{1}{3}$. Так как n - число натуральное, то $n \leq 33$.

Следовательно, надо найти сумму тридцати трех первых членов данной арифметической прогрессии. Используя формулу $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, получаем:

$$S_{33} = \frac{2 \cdot 3 + 3(33-1)}{2} \cdot 33 = \frac{6 + 96}{2} \cdot 33 = 51 \cdot 33 = 1683. \text{ Ответ: } 1683.$$

Вариант 2. К-4

1. Используем формулу n -го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n - 1)$. В нашем примере $a_1 = 70$, $d = -3$ и $n = 18$: Тогда получаем: $a_{18} = 70 + (-3) \cdot (18 - 1) = 70 - 51 = 19$. **Ответ: 19.**

2. Для арифметической прогрессии $-21; -18; -15; \dots$ определим первый член a_1 и разность d . Очевидно, $a_1 = -21$. По определению $d = a_2 - a_1$ и, так как $a_2 = -18$, то $d = -18 - (-21) = 3$. Для нахождения суммы первых двадцати членов используем формулу для суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. При $n = 20$ получим: $S_{20} = \frac{2(-21) + 3(20-1)}{2} \cdot 20 = \frac{-42 + 57}{2} \cdot 20 = 150$. **Ответ: 150.**

3. Сначала покажем, что последовательность $b_n = 4n - 2$ является арифметической прогрессией. Найдем разность двух любых соседних членов данной последовательности b_n и b_{n-1} . Определим $b_{n-1} = 4 \cdot (n - 1) - 2 = 4n - 6$. Тогда $b_n - b_{n-1} = (4n - 2) - (4n - 6) = 4n - 2 - 4n + 6 = 4$. Видно, что эта разность величина постоянная и не зависит от номера n . Поэтому данная последовательность по определению является арифметической прогрессией и ее разность $d = 4$. Найдем также первый член этой прогрессии. Из формулы $b_n = 4n - 2$ при $n = 1$ найдем $b_1 = 4 \cdot 1 - 2 = 2$. Теперь легко найти сумму первых сорока членов этой арифметич. прогрессии по формуле $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. При $n = 40$ имеем $S_{40} = \frac{2 \cdot 2 + 4(40-1)}{2} \cdot 40 = \frac{4 + 156}{2} \cdot 40 = 80 \cdot 40 = 3200$. **Ответ: 3200.**

4. Так как арифметическая прогрессия определяется своим первым членом a_1 и разностью d , то прежде всего найдем разность прогрессии, используя формулу n -го члена: $a_n = a_1 + d(n - 1)$. По условию известны $a_1 = 11,6$ и $a_{15} = 17,2$. Тогда получаем: $17,2 = 11,6 + d(15 - 1)$ или $17,2 = 11,6 + 14d$. Решим это линейное уравнение: $17,2 - 11,6 = 14d$, откуда $d = 0,4$.

Теперь надо выяснить, является ли число 30,4 членом этой прогрессии. Если это действительно член прогрессии, то найдем его номер. Вновь используем формулу n -го члена: $30,4 = 11,6 + 0,4 \cdot (n - 1)$. Переносим число 11,6 в левую часть уравнения: $30,4 - 11,6 = 0,4 \cdot (n - 1)$ или $18,8 = 0,4 \cdot (n - 1)$. Разделим обе части уравнения на число 0,4: $\frac{18,8}{0,4} = n - 1$ или $47 = n - 1$, откуда $n = 48$. Следовательно, число 30,4 является членом данной прогрессии (номер этого члена - 48).

Ответ: да.

5. Легко заметить, что натуральные числа, кратные 7 (числа 7, 14, 21, ...) образуют арифметическую прогрессию. Первый член этой прогрессии $a_1 = 7$ и разность $d = a_2 - a_1 = 14 - 7 = 7$. Определим, номера членов, которые не превосходят числа 150. Для этого используем формулу n -го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n - 1)$. При $a_1 = 7$ и $d = 7$ находим: $a_n = 7 + 7 \cdot (n - 1) = 7n$.

По условию $a_n \leq 150$, т.е. $7n \leq 150$. Решая это линейное неравенство, найдем $n \leq \frac{150}{7}$ или $n \leq 21 \frac{3}{7}$. Так как n - число натуральное, то $n \leq 21$.

Следовательно, надо найти сумму двадцати одного первого члена данной

арифметической прогрессии. Используя формулу $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$,

получаем: $S_{21} = \frac{2 \cdot 7 + 7(21-1)}{2} \cdot 21 = \frac{14 + 140}{2} \cdot 21 = 77 \cdot 21 = 1617$. **Ответ:** 1617.

Вариант 3. К-4

1. Используем формулу n -го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n - 1)$. В этом примере $a_1 = 65$, $d = -2$ и $n = 32$. Тогда получаем: $a_{32} = 65 + (-2) \cdot (32 - 1) = 65 - 62 = 3$. **Ответ:** 3.

2. Для арифметической прогрессии 42; 34; 26; ... определим первый член a_1 и разность d . Очевидно, $a_1 = 42$. По определению $d = a_2 - a_1 = 34 - 42 = -8$ (т.к. $a_2 = 34$). Для нахождения суммы первых двадцати четырех членов применим формулу

для суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

При $n = 24$ получаем: $S_{24} = \frac{2 \cdot 42 + (-8)(24-1)}{2} \cdot 24 = \frac{84 - 184}{2} \cdot 24 = -1200$.

Ответ: - 1200.

3. Прежде всего покажем, что последовательность $b_n = 2n - 5$ является арифмет. прогрессией. Найдем разность двух любых соседних членов данной последовательности b_n и b_{n-1} . Определим $b_{n-1} = 2 \cdot (n - 1) - 5 = 2n - 7$. Тогда $b_n - b_{n-1} = (2n - 5) - (2n - 7) = 2n - 5 - 2n + 7 = 2$. Видно, что эта разность величина постоянная и не зависит от номера n . Поэтому по определению данная последовательность - арифмет. прогрессия с разностью $d = 2$. Найдем также первый член этой прогрессии. Из формулы $b_n = 2n - 5$ при $n = 1$ находим $b_1 = 2 \cdot 1 - 5 = -3$. Теперь легко найти сумму первых восьмидесяти первых членов этой

арифметической прогрессии по формуле $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. При $n = 80$

$$\text{получим } S_{80} = \frac{2 \cdot (-3) + d(80-1)}{2} \cdot 80 = \frac{-6 + 158}{2} \cdot 80 = 76 \cdot 80 = 6080.$$

4. Так как арифметическая прогрессия определяется своим первым членом a_1 и разностью d , то сначала найдем разность прогрессии, используя формулу n -го члена: $a_n = a_1 + d(n-1)$. По условию известны $a_1 = -2,25$ и $a_{11} = 10,25$. Тогда получаем: $10,25 = -2,25 + d(11-1)$ или $10,25 = -2,25 + 10d$. Решим это линейное уравнение: $10,25 + 2,25 = 10d$ или $12,5 = 10d$, откуда $d = \frac{12,5}{10} = 1,25$.

Теперь надо выяснить, является ли число 6,5 членом этой прогрессии. Если это действительно член прогрессии, то найдем его номер. Снова воспользуемся формулой n -го члена: $6,5 = -2,25 + 1,25 \cdot (n-1)$. Перенесем число $(-2,25)$ в левую часть уравнения: $6,5 + 2,25 = 1,25 \cdot (n-1)$ или $8,75 = 1,25 \cdot (n-1)$. Разделим обе части уравнения на число $1,25$: $\frac{8,75}{1,25} = n-1$ или $7 = n-1$, откуда $n = 8$.

Следовательно, число 6,5 является членом данной арифметической прогрессии (номер этого члена - 8). **Ответ:** да.

5. Легко заметить, что натуральные числа, кратные 9 (числа 9, 18, 27, ...) образуют арифметическую прогрессию. Первый член этой прогрессии $a_1 = 9$ и разность $d = a_2 - a_1 = 18 - 9 = 9$. Определим, номера членов, которые не превосходят числа 80. Для этого используем формулу n -го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$. При $a_1 = 9$ и $d = 9$ находим: $a_n = 9 + 9 \cdot (n-1) = 9n$. По условию $a_n \leq 80$, т.е. $9n \leq 80$ или $n \leq \frac{80}{9}$. Так как n - число натуральное, то $n \leq 8$.

Следовательно, надо найти сумму восьми первых членов данной арифметической прогрессии. Используя формулу $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, получаем: $S_8 = \frac{2 \cdot 9 + 9(8-1)}{2} \cdot 8 = \frac{18 + 63}{2} \cdot 8 = 81 \cdot 4 = 324$. **Ответ:** 324.

Вариант 4. К-4

1. Используем формулу n -го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$. В нашей задаче $n = 43$, $a_1 = -9$ и $d = 4$. Тогда получаем: $a_{43} = -9 + 4 \cdot (43-1) = -9 + 168 = 159$. **Ответ:** 159.

2. Для арифметической прогрессии $-63; -58; -53; \dots$ найдем первый член a_1 и разность d . Очевидно, $a_1 = -63$. По определению $d = a_2 - a_1 = -58 - (-63) = 5$ (т.к. $a_2 = -58$). Для нахождения суммы первых четырнадцати членов применим формулу для суммы n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \text{ При } n=14 \text{ получаем } S_{14} = \frac{2 \cdot (-63) + 5(14-1)}{2} \cdot 14 = \frac{-126 + 65}{2} \cdot 14 = -61 \cdot 7 = -427. \text{ Ответ: } -427.$$

3. Сначала покажем, что последовательность $b_n = 3n - 2$ является арифметической прогрессией. Найдем разность двух любых соседних членов данной последовательности b_n и b_{n-1} . Определим $b_{n-1} = 3 \cdot (n-1) - 2 = 3n - 5$. Тогда

$b_n - b_{n-1} = (3n - 2) - (3n - 5) = 3n - 2 - 3n + 5 = 3$. Видно, что эта разность величина постоянная и не зависит от номера n . Поэтому данная последовательность по определению является арифмет. прогрессией с разностью $d = 3$. Найдем также первый член прогрессии. Из формулы $b_n = 3n - 2$ при $n = 1$ находим $b_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$. Теперь легко найти сумму первых ста двадцати членов этой арифметической прогрессии по формуле $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. При $n = 120$ получаем

$$S_{120} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot (120 - 1)}{2} \cdot 120 = \frac{2 + 357}{2} \cdot 120 = 359 \cdot 60 = 21540. \text{ Ответ: } 21540.$$

4. Так как арифметическая прогрессия определяется своим первым членом a_1 и разностью d , то прежде всего найдем разность прогрессии, используя формулу n -го члена: $a_n = a_1 + d(n - 1)$. По условию известны $a_1 = -23,6$ и $a_{22} = 11$. Тогда получаем: $11 = -23,6 + d(22 - 1)$ или $11 = -23,65 + 21d$. Решим это линейное уравнение: $11 + 23,6 = 21d$ или $34,6 = 21d$, откуда $d = \frac{36,6}{21} = \frac{346}{210} = \frac{173}{105}$.

Теперь выясним, является ли число 35,8 членом этой прогрессии. Если это действительно член прогрессии, то найдем его номер. Снова воспользуемся формулой n -го члена: $35,8 = -23,6 + \frac{173}{105} \cdot (n - 1)$. Перенесем число $(-23,6)$ в левую часть уравнения: $35,8 + 23,6 = \frac{173}{105} \cdot (n - 1)$ или $59,4 = \frac{173}{105} \cdot (n - 1)$.

Разделим обе части уравнения на число $\frac{173}{105}$ и получим: $59,4 : \frac{173}{105} \cdot (n - 1)$ или $\frac{59,4 \cdot 105}{173} = n - 1$ или $\frac{6237}{173} = n - 1$ или $36 \frac{9}{173} = n - 1$, откуда $n = 37 \frac{9}{173}$.

Так как n не равно натуральному числу, то в данной арифметической прогрессии нет члена, равного числу 35,8. **Ответ:** нет.

5. Легко заметить, что натуральные числа, кратные 6 (числа 6, 12, 18, ...) образуют арифметическую прогрессию. Первый член этой прогрессии $a_1 = 6$ и разность $d = a_2 - a_1 = 12 - 6 = 6$ (т.к. $a_2 = 12$). Определим, номера членов, которые не превосходят числа 150. Для этого используем формулу n -го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n - 1)$. При $a_1 = 6$ и $d = 6$ имеем: $a_n = 6 + 6 \cdot (n - 1) = 6n$. По условию $a_n \leq 150$, т.е. $6n \leq 150$ или $n \leq 25$.

Следовательно, надо найти сумму двадцати пяти первых членов данной арифметической прогрессии. Используя формулу $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, получаем: $S_{25} = \frac{2 \cdot 6 + 6 \cdot (25 - 1)}{2} \cdot 25 = \frac{12 + 144}{2} \cdot 25 = 78 \cdot 25 = 1950$. **Ответ:** 1950.

Контрольная работа 4А

Вариант 1 К-4А

1. $2 \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \sqrt{3} + 1$.

$$2. 1 - \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

$$3. \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{4}{3}$$

$$4. \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + 1} + \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha(1 - \sin \alpha) + \cos \alpha(1 + \sin \alpha)}{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)} =$$

$$= \frac{\cos \alpha(1 - \sin \alpha + 1 + \sin \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}$$

$$5. \left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) \cdot \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha =$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ ч.т.д.}$$

Вариант 2. К-4А

$$1. \sin \frac{\pi}{6} - 2 \cos \pi = 0,5 - 2(-1) = 0,5 + 2 = 2,5$$

$$2. 1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

$$3. \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{576}{625}} = -\frac{7}{25}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{7 \cdot 25}{25 \cdot 24} = -\frac{7}{24}$$

$$4. \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \cos \alpha \left(\frac{1}{1 - \cos \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right) =$$

$$= \cos \alpha \cdot \frac{1 + \cos \alpha - 1 + \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} = \cos \alpha \cdot \frac{2 \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

$$5. (1 - \cos^2 \alpha)(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = \sin^2 \alpha \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1, \text{ ч.т.д.}$$

Вариант 3. К-4А

$$1. 2 \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 = \sqrt{3}$$

$$2. 1 - \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$3. \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3}$$

$$4. \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \sin \alpha \left(\frac{1}{1 + \cos \alpha} + \frac{1}{1 - \cos \alpha} \right) =$$

$$= \sin \alpha \cdot \frac{1 - \cos \alpha + 1 + \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} = \frac{2 \sin \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$$

$$5. \cos^2 \alpha(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

Вариант 4. К-4А

$$1. 2 \sin \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 1 - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$2. 1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha.$$

$$3. \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = -\frac{5}{13}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{12 \cdot 13}{13 \cdot 5} = \frac{12}{5} = 2,4.$$

$$4. \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \cos \alpha \left(\frac{1}{1 - \sin \alpha} - \frac{1}{1 + \sin \alpha} \right) =$$

$$= \cos \alpha \cdot \frac{1 + \sin \alpha - 1 + \sin \alpha}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)} = \cos \alpha \frac{2 \sin \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

$$5. \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha =$$

$$= \cos \alpha + \sin \alpha - \sin \alpha = \cos \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

Контрольная работа 5

Вариант 1. К-5

Используем формулу n -го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$. В этой задаче $n = 7$, $b_1 = -32$, $q = \frac{1}{2}$. Тогда получаем: $b_7 = b_1 q^6 = -32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = -\frac{32}{2^6} = -\frac{32}{64} = -\frac{1}{2}$. **Ответ:** $-\frac{1}{2}$.

2. Для нахождения суммы шести первых членов геометрической прогрессии используем формулу $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. В данном случае $n = 6$, $b_1 = 2$, $q = 3$. Поэтому получаем: $S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{2(3^6 - 1)}{3 - 1} = 3^6 - 1 = 729 - 1 = 278$. **Ответ:** 278.

3. Чтобы найти сумму бесконечной геометр. прогрессии 24; -12; 6; ... надо найти ее первый член b_1 и знаменатель q . Очевидно, что $b_1 = 24$. Знаменатель $q = \frac{b_2}{b_1}$ (по определению). Так как $b_2 = -12$, то находим $q = \frac{-12}{24} = -\frac{1}{2}$. Воспользуемся формулой $S = \frac{b_1}{1 - q} = 24 : \frac{3}{2} = 24 \cdot \frac{2}{3} = 16$. **Ответ:** 16.

4. Чтобы найти сумму n первых членов геометрической прогрессии $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ надо знать ее первый член b_1 и знаменатель q . По условию задачи $b_2 = 0,04$ и $b_4 = 0,16$. Используя формулу n -го члена прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$, запишем эти члены: $b_2 = b_1 q^{2-1} = b_1 q$ и $b_4 = b_1 q^{4-1} = b_1 q^3$. Получаем систему уравнений $\begin{cases} b_1 q = 0,04 \\ b_1 q^3 = 0,16 \end{cases}$ для нахождения b_1 и q . Разделим второе уравнение на первое:

$\frac{b_1 q^3}{b_1 q} = \frac{0,16}{0,04}$ или $q^2 = 4$, откуда $q = \pm 2$. Так как по условию задачи члены прогрессии положительные, то подходит только значение $q = 2$. Из первого уравнения находим $b_1 = \frac{0,04}{q} = \frac{0,04}{2} = 0,02$.

Теперь легко вычислить сумму первых девяти членов этой прогрессии:

$$S_9 = \frac{b_1(q^9 - 1)}{q - 1} = \frac{0,02(2^9 - 1)}{2 - 1} = 0,02 \cdot 511 = 10,22. \text{ Ответ: } 10,22.$$

5. а) Обозначим $x = 0,(27) = 0,2727 \dots$ Так как в периоде этой дроби содержатся два знака, то найдем число $100x = 100 \cdot 0,(27) = 100 \cdot 0,2727 \dots = 27,2727 \dots$ Вычислим разность $100x - x = 27,2727 \dots - 0,2727 \dots = 27$. Получили линейное уравнение $99x = 27$, откуда $x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$.

б) Обозначим $x = 0,5(6) = 0,566 \dots$ Так как в периоде этой дроби содержится один знак, то найдем число $10x = 10 \cdot 0,5(6) = 10 \cdot 0,566 \dots = 5,666 \dots$ Вычислим разность $10x - x = 5,666 \dots - 0,566 \dots = 5,1$. Получили линейное уравнение $9x = 5,1$, откуда $x = \frac{5,1}{9} = \frac{51}{90} = \frac{17}{30}$.

Вариант 2. К-5

1. Используем формулу для n -го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$. В нашем случае $n=6$, $b_1 = 0,81$, $q = -\frac{1}{3}$. Тогда получаем: $b_6 = b_1 q^5 = 0,81 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^5 = -0,81 \cdot \frac{1}{3^4 \cdot 3} = -\frac{0,81}{81 \cdot 3} = -\frac{0,01}{3} = -\frac{1}{300}$.

2. Для нахождения суммы семи первых членов геомтр. прогрессии используем формулу $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. В этой задаче $n = 7$, $b_1 = 6$, $q = 2$. Поэтому получаем:

$$S_7 = \frac{b_1(q^7 - 1)}{q - 1} = \frac{6(2^7 - 1)}{2 - 1} = 6 \cdot 127 = 762.$$

3. Чтобы найти сумму бесконечной геом. прогрессии $-40; 20; -10; \dots$ надо найти ее первый член b_1 и знаменатель q . Очевидно, что $b_1 = -40$. По определению $q = \frac{b_2}{b_1}$. Так как $b_2 = 20$, то находим $q = \frac{20}{-40} = -\frac{1}{2}$. Теперь по формуле $S = \frac{b_1}{1 - q}$ вычислим сумму такой прогрессии $S = \frac{-40}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -40 : \frac{3}{2} = -\frac{80}{3} = -26\frac{2}{3}$.

4. Сначала найдем первый член b_1 и знаменатель q геометрической прогрессии по условиям задачи $b_2 = 1,2$ и $b_4 = 4,8$. Воспользуемся формулой n -го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$; $b_2 = b_1 q^{2-1} = b_1 q$ и $b_4 = b_1 q^{4-1} = b_1 q^3$.

Получаем систему уравнений $\begin{cases} b_1q = 1,2 \\ b_1q^3 = 4,8 \end{cases}$. Разделим второе уравнение на

первое. Имеем: $\frac{b_1q^3}{b_1q} = \frac{4,8}{1,2}$ или $q^2 = 4$, откуда $q = \pm 2$. Так как по условию задачи члены прогрессии положительные, то подходит только значение $q = 2$.

Найдем первый член прогрессии из первого уравнения $b_1 = \frac{1,2}{q} = \frac{1,2}{2} = 0,6$.

Теперь по формуле $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ вычислим сумму первых восьми членов

прогрессии: $S_8 = \frac{b_1(q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{0,6(2^8 - 1)}{2 - 1} = 0,6 \cdot 255 = 153$. **Ответ:** 153.

5. а) Обозначим $x = 0,(153) = 0,153153\dots$ Так как в периоде этой дроби содержатся три знака, то найдем число $1000x = 1000 \cdot 0,(153) = 1000 \cdot 0,153153\dots = 153,153\dots$ Вычислим разность $1000x - x = 153,153\dots - 0,153\dots = 153$. Получили линейное уравнение $999x = 153$, откуда $x = \frac{153}{999} = \frac{17}{111}$.

б) Обозначим $x = 0,3(2) = 0,322\dots$ Так как в периоде этой дроби содержится один знак, то найдем число $10x = 10 \cdot 0,3(2) = 10 \cdot 0,322\dots = 3,22\dots$ Вычислим разность $10x - x = 3,22\dots - 0,32\dots = 2,9$. Имеем линейное уравнение $9x = 2,9$, откуда $x = \frac{2,9}{9} = \frac{29}{90}$.

Вариант 3. К-5

1. Используем формулу для n -го члена геометр. прогрессии $b_n = b_1q^{n-1}$. В этом примере $n = 5$, $b_1 = -125$, $q = \frac{1}{5}$. Тогда получаем:

$$b_5 = b_1q^{5-4} = b_1q^4 = -125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 = -\frac{125}{5^4} = -\frac{1}{5}.$$

2. Воспользуемся формулой для суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. В этой задаче $n = 8$, $b_1 = 4$, $q = 2$. Имеем:

$$S_8 = \frac{b_1(q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{4(2^8 - 1)}{2 - 1} = 4 \cdot 255 = 1020.$$

3. Чтобы найти сумму бесконечной геометрической прогрессии $36; -12; 4; \dots$ надо найти ее первый член b_1 и знаменатель q . Очевидно, что $b_1 = 36$. По определению $q = \frac{b_2}{b_1}$. Так как $b_2 = -12$, то находим $q = \frac{-12}{36} = -\frac{1}{3}$.

Используем формулу $S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{36}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = 36 : \frac{4}{3} = 36 \cdot \frac{3}{4} = 27$.

4. Сначала найдем первый член b_1 и знаменатель q геометрической прогрессии по условиям задачи $b_3 = 0,05$ и $b_5 = 0,45$. Используем формулу n -го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$: $b_3 = b_1 q^{3-1} = b_1 q^2$ и $b_5 = b_1 q^{5-1} = b_1 q^4$.

Получаем систему уравнение $\begin{cases} b_1 q^2 = 0,05 \\ b_1 q^4 = 0,45 \end{cases}$. Разделим второе уравнение на

первое. Получаем: $\frac{b_1 q^4}{b_1 q^2} = \frac{0,45}{0,05}$ или $q^2 = 9$, откуда $q = \pm 3$. Так как по условию задачи члены прогрессии положительные, то подходит только значение $q = 3$. Из первого уравнения найдем первый член прогрессии

$$b_1 = \frac{0,05}{q^2} = \frac{0,05}{3^2} = \frac{5}{100 \cdot 9} = \frac{1}{180}.$$

Теперь по формуле $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ вычислим сумму первых восьми членов

$$\text{прогрессии. Имеем: } S_8 = \frac{b_1(q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{180}(3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{360} \cdot 6560 = 18\frac{2}{9}.$$

5. а) Обозначим $x = 0,(162) = 0,162162\dots$ Так как в периоде этой дроби содержатся три знака, то найдем число $1000x = 1000 \cdot 0,(162) = 1000 \cdot 0,162162\dots = 162,162\dots$ Вычислим разность $1000x - x = 162,162\dots - 0,162\dots = 162$. Получили линейное уравнение $999x = 162$, откуда $x = \frac{162}{999} = \frac{18}{111}$.

- б) Обозначим $x = 0,8(4) = 0,844\dots$ Так как в периоде этой дроби содержится один знак, то найдем число $10x = 10 \cdot 0,8(4) = 10 \cdot 0,844\dots = 8,444\dots$ Вычислим разность $10x - x = 8,444\dots - 0,844\dots = 7,6$. Имеем линейное уравнение $9x = 7,6$, откуда $x = \frac{7,6}{9} = \frac{76}{90} = \frac{38}{45}$.

Вариант 4. К-5

1. Используем формулу для n -го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$.

В этом примере $n = 9$; $b_1 = 100000$ и $q = \frac{1}{5}$. Тогда получаем:

$$b_9 = b_1 q^8 = 100000 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^8 = \frac{3125 \cdot 32}{5^8} = \frac{5^5 \cdot 32}{5^8} = \frac{32}{5^3} = \frac{32}{125} = 0,256.$$

2. Используем формулу для нахождения суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. В нашем случае $b_1 = 4$, $q = 4$ и $n = 5$. Поэтому

$$\text{получаем: } S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{6(4^5 - 1)}{4 - 1} = 2 \cdot (1024 - 1) = 2046.$$

3. Чтобы найти сумму бесконечной геометрической прогрессии $-54; 18; -6; \dots$ надо найти ее первый член b_1 и знаменатель q . Очевидно, что $b_1 = -54$. По определению $q = \frac{b_2}{b_1}$. Так как $b_2 = 18$, то находит $q = \frac{18}{-54} = -\frac{1}{3}$. Вос-

пользуемся формулой $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{-54}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = -54 : \frac{4}{3} = -54 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{162}{4} = -40,5$.

4. Сначала найдем первый член b_1 и знаменатель q геометрической прогрессии по условиям задачи $b_3 = 3,6$ и $b_5 = 32,4$. Используем формулу n -го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$: $b_3 = b_1 q^{3-1} = b_1 q^2$ и $b_5 = b_1 q^{5-1} = b_1 q^4$.

Получаем систему уравнений $\begin{cases} b_1 q^2 = 3,6 \\ b_1 q^4 = 32,4 \end{cases}$. Разделим второе уравнение на

первое. Получаем: $\frac{b_1 q^4}{b_1 q^2} = \frac{32,4}{3,6}$ или $q^2 = 9$, откуда $q = \pm 3$. Так как по условию задачи члены прогрессии положительные, то подходит только значение $q = 3$.

Из первого уравнения найдем первый член прогрессии $b_1 = \frac{3,6}{q^2} = \frac{3,6}{9} = 0,4$.

Теперь по формуле $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ вычислим сумму пяти первых членов

прогрессии. Имеем: $S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{0,4(3^5 - 1)}{3 - 1} = 0,2 \cdot (243 - 1) = 48,4$.

5. а) Обозначим $x = 0,(72) = 0,7272\dots$ Так как в периоде этой дроби содержится два знака, то найдем число $100x = 100 \cdot 0,(72) = 100 \cdot 0,7272\dots = 72,72\dots$ Вычислим разность $100x - x = 72,72\dots - 0,72\dots = 72$. Получили линейное уравнение $99x = 72$, откуда $x = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$.

- б) Обозначим $x = 0,7(4) = 0,744\dots$ Так как в периоде этой дроби содержится один знак, то найдем число $10x = 10 \cdot 0,7(4) = 10 \cdot 0,744\dots = 7,44\dots$ Вычислим разность $10x - x = 7,44\dots - 0,744\dots = 6,7$. Имеем линейное уравнение $9x = 6,7$, откуда $x = \frac{6,7}{9} = \frac{67}{90}$.

Контрольная работа 5А

Вариант 1. К-5А

1. а) $\sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

2. а) $\sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha - \sin\alpha = -2\sin\alpha$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 0$;

в) $\cos 2\alpha + 2\sin^2(\pi - \alpha) = \cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha = 1$.

$$3. \frac{\sin 2\alpha + \cos(\pi - \alpha)\sin \alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{2\sin \alpha - \cos \alpha - \sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\cos \alpha} = \sin \alpha.$$

$$4. \left(\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}\right)^2 - \sin 2\alpha = \left(\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}\right)^2 - \sin 2\alpha =$$

$$= \left(\frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha}\right)^2 - \sin 2\alpha =$$

$$= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1.$$

Вариант 2. К-5А

$$1. \text{ а) } \cos(-210^\circ) = \cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{ б) } \operatorname{tg} \frac{4}{3}\pi = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

$$2. \text{ а) } \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha + \cos \alpha = 0;$$

$$\text{ б) } \operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha = 2\operatorname{tg} \alpha.$$

$$3. \frac{\sin(\pi - 2\alpha)}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + 2\cos^2 \alpha - 1} = \frac{2\sin \alpha - \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$4. (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha)\operatorname{tg} 2\alpha = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \operatorname{tg} \alpha\right) \cdot \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2.$$

Вариант 3. 5А

$$1. \text{ а) } \sin(-240^\circ) = -\sin 240^\circ = -\sin(180^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{ б) } \operatorname{tg} \frac{3}{4}\pi = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1.$$

$$2. \text{ а) } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha) = \cos \alpha + \cos \alpha = 2\cos \alpha;$$

$$\text{ б) } \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 0;$$

$$\text{ в) } \frac{\cos 2\alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = 1.$$

$$3. \frac{\sin 2\alpha}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1 - 1 + 2\sin^2 \alpha} = \frac{2\sin \alpha - \cos \alpha}{2\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$\begin{aligned}
 4. \sin 2\alpha + \left(\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} \right)^2 &= \sin 2\alpha + \left(\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} \right)^2 = \\
 &= \sin 2\alpha + \left(\frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha + \sin \alpha} \right)^2 = \\
 &= 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin^2 \alpha = 1.
 \end{aligned}$$

Вариант 4. 5А

1. а) $\cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = 0,5$;

б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = -\operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1$.

2. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha + \sin \alpha = 0$; б) $\operatorname{tg}(2\pi + \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$
 $= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha$; в) $\frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$.

3. $\frac{\cos 2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha$.

4. $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \sin 2\alpha = \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \sin 2\alpha = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2$.

Контрольная работа 6

Вариант 1. К-6

1. а) Воспользуемся определением арифметического корня:

$$2\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{-125} + \sqrt[3]{1} = 2\sqrt[3]{3^4} + \sqrt[3]{(-5)^3} + \sqrt[3]{1^6} = 2 \cdot 3 + (-5) + 1 = 6 - 5 + 1 = 2.$$

б) Учтем, что корень из произведения чисел равен произведению корней этих чисел. Имеем: $\sqrt[3]{8 \cdot 0,027} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{0,027} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{(0,3)^3} = 2 \cdot 0,3 = 0,6$.

в) Учтем, что отношение корней из чисел равно корню из отношения этих чисел.

$$\text{Получаем: } \frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{48}{3}} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2.$$

2. а) Так как $x^3 = 5$, то по определению арифметич. корня находим $x = \sqrt[3]{5}$ – единственное решение данного уравнения.

б) Так как уравнение $y^4 = 15$ содержит неизвестную в четной (четвертой) степени, то уравнение имеет два корня $y = \pm \sqrt[4]{15}$.

в) Уравнение $z^8 = -1$ решений не имеет, т.к. любое число z в четной (восьмой) степени будет числом неотрицательным, т.е. $z^8 \geq 0$. Поэтому выражение z^8 не может равняться отрицательному числу (-1).

Ответ: а) $\sqrt[3]{5}$; б) $-\sqrt[4]{15}$, $\sqrt[4]{15}$; в) решений нет.

3. Учтем, что произведение корней из чисел равно корню из произведения чисел.

Также используем формулу для разности квадратов чисел. Получаем:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{6+\sqrt{20}} \cdot \sqrt[4]{6-\sqrt{20}} &= \sqrt[4]{(6+\sqrt{20})(6-\sqrt{20})} = \sqrt[4]{6^2 - (\sqrt{20})^2} = \\ &= \sqrt[4]{36-20} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2.\end{aligned}$$

4. Прежде всего отметим, что данные функции определены при всех значениях x .

а) Известно, что $f(x) = 7x^8$. Вместо аргумента x подставим величину $(-x)$ и найдем $f(-x) = 7 \cdot (-x)^8 = 7 \cdot (-1)^8 \cdot x^8 = 7x^8$. Видно, что $f(-x) = f(x)$. Следовательно, по определению функция $f(x)$ является четной.

б) Дана функция $f(x) = x^3 + x$. Вместо аргумента x подставим величину $(-x)$ и найдем $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = (-1)^3 x^3 - x = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$. Получили, что $f(-x) = -f(x)$. Следовательно, по определению данная функция является нечетной.

Ответ: а) четная; б) нечетная.

5. а) Так как $f(x) = x^{17}$, то $f(3,7) = 3,7^{17}$ и $f(4,1) = 4,1^{17}$. Числа 3,7 и 4,1 положительные и $3,7 < 4,1$. Возведем обе части этого неравенства в положительную степень 17. Получаем неравенство того же знака: $3,7^{17} < 4,1^{17}$, т.е. $f(3,7) < f(4,1)$.

б) Найдем сначала $f(-7,2) = (-7,2)1^{17} = (-1)^{17} \cdot 7,2^{17} = -7,2^{17}$ и $f(-6,3) = (-6,3)^{17} = (-1)^{17} \cdot 6,3^{17} = -6,3^{17}$. Прежде всего сравним числа $7,2^{17}$ и $6,3^{17}$. Числа 7,2 и 6,3 положительные и $7,2 > 6,3$. Возведем обе части этого неравенства в положительную степень 17. Получаем неравенство того же знака: $7,2^{17} > 6,3^{17}$. Умножим обе части неравенства на отрицательное число (-1) . Знак неравенства при этом меняется на противоположный: $-7,2^{17} < -6,3^{17}$ или $f(-7,2) < f(-6,3)$.

Ответ: а) $f(3,7) < f(4,1)$; б) $f(-7,2) < f(-6,3)$.

Вариант 2. К-6

1. а) Воспользуемся определением арифметического корня: $5\sqrt[3]{-8} + \sqrt[4]{16} - \sqrt{1} = 5\sqrt[3]{(-2)^3} + \sqrt[4]{2^4} - \sqrt{1^2} = 5 \cdot (-2) + 2 - 1 = -10 + 2 - 1 = -9$.

б) Учтем, что корень из произведения чисел равен произведению корней этих чисел. Имеем: $\sqrt[4]{81 \cdot 0,0016} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{0,0016} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{0,2^4} = 3 \cdot 0,2 = 0,6$.

в) Учтем, что отношение корней из чисел равно корню из отношения этих чисел.

$$\text{Получаем: } \frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[5]{5}} = \sqrt[3]{\frac{40}{5}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2.$$

2. а) Так как $x^3 = 21$, то по определению арифметич. корня находим $x = \sqrt[3]{21}$ — единственное решение данного уравнения.

б) Так как уравнение $y^4 = 17$ содержит неизвестную в четной (четвертой) степени, то уравнение имеет два корня $y = \pm \sqrt[4]{17}$.

в) Уравнение $z^4 = -8$ решений не имеет, т.к. любое число z в четной (четвертой) степени будет числом неотрицательным, т.е. $z^4 \geq 0$. Поэтому выражение z^4 не может равняться отрицательному числу (-8) .

Ответ: а) $\sqrt[3]{21}$; б) $-\sqrt[4]{17}$; $\sqrt[4]{17}$; в) решений нет.

3. Учтем, что произведение корней из чисел равно корню из произведения чисел.

Также используем формулу для разности квадратов чисел. Получаем:

$$\sqrt[3]{12 - \sqrt{19}} \cdot \sqrt[3]{12 + \sqrt{19}} = \sqrt[3]{(12 - \sqrt{19})(12 + \sqrt{19})} = \sqrt[3]{12^2 - (\sqrt{19})^2} = \sqrt[3]{144 - 19} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5.$$

4. Прежде всего отметим, что данные функции определены при всех значениях x .

а) Известно, что $f(x) = 3x^{17}$. Вместо аргумента x подставим величину $(-x)$ и найдем $f(-x) = 3(-x)^{17} = 3(-1)^{17}x^{17} = -3x^{17} = -f(x)$. Так как выполнено соотношение $f(-x) = -f(x)$, то по определению данная функция $f(x)$ является нечетной.

б) Дана функция $f(x) = x^7 + x^4$. Вместо аргумента x подставим величину $(-x)$ и найдем $f(-x) = (-x)^7 + (-x)^4 = (-1)^7x^7 + (-1)^4x^4 = -x^7 + x^4$. Получили $f(x) = -x^7 + x^4$. Сравнивая эту функцию $f(x) = -x^7 + x^4$ с функцией $f(-x) = -x^7 + x^4$, видим, что $f(-x) \neq f(x)$. Поэтому данная функция не является четной.

Найдем теперь величину $-f(x) = -(x^7 + x^4) = -x^7 - x^4$. Сравнивая выражение для $f(-x) = -x^7 + x^4$ и $-f(x) = -x^7 - x^4$, видим, что $f(x) \neq -f(x)$. Поэтому данная функция не является нечетной.

Следовательно, данная функция $f(x)$ определенной четности не имеет.

Ответ: а) нечетная; б) не является ни четной, ни нечетной.

5. а) Так как $f(x) = x^{24}$, то найдем $f(5,3) = 5,3^{24}$ и $f(5,9) = 5,9^{24}$. Числа 5,3 и 5,9 положительные и $5,3 < 5,9$. Возведем обе части этого неравенства в положительную степень 24. Получаем неравенство того же знака: $5,3^{24} < 5,9^{24}$, т.е. $f(5,3) < f(5,9)$.

б) Найдем сначала $f(-3,8) = (-3,8)^{24} = (-1)^{24} \cdot 3,8^{24} = 3,8^{24}$ и $f(-2,9) = (-2,9)^{24} = (-1)^{24} \cdot 2,9^{24} = 2,9^{24}$. Числа 3,8 и 2,9 положительные и $3,8 > 2,9$. Возведем обе части этого неравенства в положительную степень 24. Получаем неравенство того же знака: $3,8^{24} > 2,9^{24}$, т.е. $f(3,8) > f(2,9)$.

Ответ: а) $f(5,3) < f(5,9)$; б) $f(3,8) > f(2,9)$.

Вариант 3. К-6

1. а) Воспользуемся определением арифметического корня: $3\sqrt[3]{16} + \sqrt{-27} + \sqrt[5]{1} = 3\sqrt[3]{2^4} + \sqrt{(-3)^2} + \sqrt[5]{1^8} = 3 \cdot 2 + (-3) + 1 = 6 - 3 + 1 = 4$.

б) Учтем, что корень из произведения чисел равен произведению корней этих чисел. Имеем: $\sqrt[3]{125 \cdot 0,008} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{0,008} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{0,2^3} = 5 \cdot 0,2 = 1$.

в) Учтем, что отношение корней из чисел равно корню из отношения этих чисел.

$$\text{Получаем: } \frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[4]{4}} = \sqrt[3]{\frac{128}{4}} = \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = 2.$$

2. а) Так как $x^3 = 11$, то по определению арифметического корня находим $x = \sqrt[3]{11}$ - единственное решение данного уравнения.

б) Так как уравнение $y^6 = 7$ содержит неизвестную в четной (шестой) степени, то уравнение имеет два корня $y = \pm\sqrt[6]{7}$.

в) Уравнение $z^{12} = -4$ решений не имеет, т.к. любое число z в четной (двенадцатой) степени будет числом неотрицательным, т.е. $z^{12} \geq 0$. Поэтому выражение z^{12} не может равняться отрицательному числу (-4) .

Ответ: а) $\sqrt[3]{11}$; б) $-\sqrt[6]{7}$, $\sqrt[6]{7}$; в) решений нет.

3. Учтем, что произведение корней из чисел равно корню из произведения чисел.

Также используем формулу для разности квадратов чисел. Получаем:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{11-\sqrt{40}} \cdot \sqrt[4]{11+\sqrt{40}} &= \sqrt[4]{(11-\sqrt{40})(11+\sqrt{40})} = \sqrt[4]{11^2 - (\sqrt{40})^2} = \\ &= \sqrt[4]{121-40} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3. \end{aligned}$$

4. Прежде всего отметим, что данные функции определены при всех значениях x .

а) Известно, что $f(x) = 3x^5$. Вместо аргумента x подставим величину $(-x)$ и найдем $f(-x) = 3(-x)^5 = 3(-1)^5x^5 = -3x^5 = -f(x)$. Так как выполнено соотношение $f(-x) = -f(x)$, то по определению данная функция $f(x)$ является нечетной.

б) Дана функция $f(x) = x^6 + x^3$. Вместо аргумента x подставим величину $(-x)$ и найдем $f(-x) = (-x)^6 + (-x)^3 = (-1)^6x^6 + (-1)^3x^3 = x^6 - x^3$. Сравнивая функцию $f(x) = x^6 + x^3$ с функцией $f(-x) = x^6 - x^3$, видим, что эти функции не совпадают, т.е. $f(-x) \neq f(x)$. Поэтому данная функция не является четной.

Найдем теперь величину $-f(x) = -x^6 - x^3$. Сравнивая выражения для $f(-x) = x^6 - x^3$ и $-f(x) = -x^6 - x^3$, видим, что $f(-x) \neq -f(x)$. Поэтому данная функция не является нечетной.

Следовательно, данная функция $f(x)$ определенной четности не имеет.

Ответ: а) нечетная; б) не является ни четной, ни нечетной.

5. а) Так как $f(x) = x^{11}$, то найдем $f(1,7) = 1,7^{11}$ и $f(1,9) = 1,9^{11}$. Числа 1,7 и 1,9 положительные и $1,7 < 1,9$. Возведем обе части этого неравенства в положительную степень 11. Получаем неравенство того же знака: $1,7^{11} < 1,9^{11}$, т.е. $f(1,7) < f(1,9)$.

б) Найдем сначала $f(-6,7) = (-6,7)^{11} = (-1)^{11} \cdot 6,7^{11} = -6,7^{11}$ и $f(-4,7) = (-4,7)^{11} = (-1)^{11} \cdot 4,7^{11} = -4,7^{11}$. Прежде всего сравним числа $6,7^{11}$ и $4,7^{11}$. Числа 6,7 и 4,7 положительные и $6,7 > 4,7$. Возведем обе части этого неравенства в положительную степень 11. Знак неравенства при этом сохраняется. Имеем: $6,7^{11} > 4,7^{11}$. Умножим обе части этого неравенства на отрицательное число (-1) . Знак неравенства меняется на противоположный. Получаем: $-6,7^{11} < -4,7^{11}$, т.е. $f(-6,7) < f(-4,7)$.

Ответ: а) $f(1,7) < f(1,9)$; б) $f(-6,7) < f(-4,7)$.

Вариант 4. К-6

1. а) Воспользуемся определением арифметического корня: $7\sqrt[4]{81} + \sqrt[3]{-125} + \sqrt[6]{1} = 7\sqrt[4]{3^4} + \sqrt[3]{(-5)^3} + \sqrt[6]{1^6} = 7 \cdot 3 + (-5) + 1 = 21 - 5 + 1 = 17$;

б) Учтем, что корень из произведения чисел равен произведению корней этих чисел. Имеем: $\sqrt[3]{0,125 \cdot 27} = \sqrt[3]{0,125} \cdot \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{0,5^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} = 0,5 \cdot 3 = 1,5$;

в) Учтем, что отношение корней из чисел равно корню из отношения этих чисел.

$$\text{Получаем: } \frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2.$$

2. а) Так как уравнение $x^5 = 8$ содержит неизвестную в нечетной (пятой) степени, то оно имеет единственное решение $x = \sqrt[5]{8}$.

б) Так как уравнение $y^7 = 11$ содержит неизвестную в нечетной (седьмой) степени, то оно имеет единственный корень $y = \sqrt[7]{11}$.

в) Уравнение $z^6 = -3$ решений не имеет, т.к. число z в четной (шестой) степени будет числом неотрицательным, т.е. $z^6 \geq 0$. Поэтому выражение z^6 не может равняться отрицательному числу (-3) .

Ответ: а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[3]{11}$; в) решений нет.

3. Учтем, что произведение корней из чисел равно корню из произведения чисел.

Также используем формулу для разности квадратов чисел. Получаем:

$$\sqrt{7-\sqrt{17}} \cdot \sqrt{7+\sqrt{17}} = \sqrt{(7-\sqrt{17})(7+\sqrt{17})} = \sqrt{7^2 - (\sqrt{17})^2} = \sqrt{49-17} = \sqrt{32} = \sqrt{2^5} = 2.$$

4. Прежде всего отметим, что данные функции определены при всех значениях x .

а) Известно, что $f(x) = 15x^6$. Вместо аргумента x подставим величину $(-x)$ и найдем $f(-x) = 15(-x)^6 = 15 \cdot (-1)^6 x^6 = 15x^6 = f(x)$. Так как выполнено соотношение $f(-x) = f(x)$, то по определению данная функция является четной.

б) Дана функция $f(-x) = x^4 + x^3$. Вместо аргумента x подставим величину $(-x)$ и найдем $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^3 = (-1)^4 x^4 + (-1)^3 x^3 = x^4 - x^3$. Сравнивая функцию $f(x) = x^4 + x^3$ с функцией $f(-x) = x^4 - x^3$, видим, что эти они не совпадают, т.е. $f(-x) \neq f(x)$. Поэтому данная функция не является четной.

Найдем теперь величину $-f(x) = -x^4 - x^3$. Сравнивая выражения для $f(-x) = x^4 - x^3$ и $-f(x) = -x^4 - x^3$, видим, что они также не равны, т.е. $f(-x) \neq -f(x)$. Поэтому данная функция не является нечетной.

Следовательно, данная функция $f(x)$ определенной четности не имеет.

Ответ: а) четная; б) не является ни четной, ни нечетной.

5. а) Так как $f(x) = x^9$, то найдем $f(3,6) = 3,6^9$ и $f(3,8) = 3,8^9$. Числа 3,6 и 3,8 положительные и $3,6 < 3,8$. Возведем обе части этого неравенства в положительную степень 9. Знак неравенства при этом сохраняется. Имеем: $3,6^9 < 3,8^9$, т.е. $f(3,6) < f(3,8)$.

б) Найдем сначала $f(-4,1) = (-4,1)^9 = (-1)^9 \cdot 4,1^9 = -4,1^9$ и $f(-3,7) = (-3,7)^9 = (-1)^9 \cdot 3,7^9 = -3,7^9$. Прежде всего сравним числа $4,1^9$ и $3,7^9$. Числа 4,1 и 3,7 положительные $4,1 > 3,7$. Возведем обе части этого неравенства в положительную степень 9. Знак неравенства при этом сохраняется. Имеем: $4,1^9 > 3,7^9$. Умножим обе части этого неравенства на отрицательное число (-1) . Знак неравенства меняется на противоположный. Получаем: $-4,1^9 < -3,7^9$, т.е. $f(-4,1) < f(-3,7)$.

Ответ: а) $f(3,6) < f(3,8)$; б) $f(-4,1) < f(-3,7)$.

Контрольная работа 6А

Вариант 1. К-6А

1. $a_1 = -7, d = 4; a_{18} = a_1 + 17d = 7 + 17 \cdot 4 = 75,$

2. $-8, -4, 0, \dots$ — арифмет. прогр. $a_1 = -8, a_2 = -4, d = a_2 - a_1 = -4 - (-8) = 4,$

$$S_{16} = \frac{2a_1 + 15d}{2} \cdot 16 = (-16 + 15 \cdot 4) \cdot 8 = 352.$$

3. $a_n = 5 - 2n$. Чтобы a_n являлась арифм. прогр-ей, нужно $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2};$

$$a_{n-1} = 4 - 5(n-1) = 9 - 5n; a_{n+1} = 4 - 5(n+1) = -1 - 5n;$$

$$4 - 5n = \frac{9 - 5n - 1 - 5n}{2} \text{ - верно, значит, } (a_n)\text{-арифм. прогр., ч.т.д.}$$

$$4. a_1 = 5, a_9 = 29; a_9 = a_1 + 8d, d = \frac{a_9 - a_1}{8} = \frac{29 - 5}{8} = 3;$$

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 5 + 3(n-1) = 2 + 3n;$$

$$104 = 2 + 3n; n = \frac{102}{3} = 34 \in N, \text{ значит, } 104 = a_{34}. \text{ Ответ: да.}$$

5. 2, 4, 6, ... - арифм. прогрессия;

$$a_1 = 2, d = 2; S_{50} = \frac{2a_1 + 49d}{2} \cdot 50 = \frac{4 + 98}{2} \cdot 50 = 2550.$$

Вариант 2. К-6А

$$1. a_1 = -8, d = 2, a_{20} = a_1 + 19d = -8 + 2 \cdot 19 = 30.$$

$$2. 7; 11; 15; \dots \text{ - арифм. прогр.; } a_1 = 7, a_2 = 11, d = a_2 - a_1 = 11 - 7 = 4,$$

$$S_{18} = \frac{2a_1 + 17d}{2} \cdot 18 = (14 + 17 \cdot 4) \cdot 9 = 738.$$

3. $a_n = 4 - 5n$. Чтобы a_n являлась арифм. прогр-ей, нужно

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}; a_{n-1} = 4 - 5(n-1) = 9 - 5n; a_{n+1} = 4 - 5(n+1) = -1 - 5n;$$

$$4 - 5n = \frac{9 - 5n - 1 - 5n}{2} \text{ - верно, значит, } (a_n)\text{- арифм. прогр., ч.т.д.}$$

$$4. a_1 = -1, a_{10} = -46; a_{10} = a_1 + 9d, d = \frac{a_{10} - a_1}{9} = \frac{-46 + 1}{9} = -5;$$

$$a_n = a_1 + d(n-1) = -1 - 5(n-1) = 4 - 5n; -86 = 4 - 5n,$$

$$n = 18 \in N, \text{ значит, } -86 = a_{18}. \text{ Ответ: да.}$$

$$5. 2; 3; 4; \dots; 92 \text{ - арифм. прогр.; } a_1 = 2, d = 1; a_n = 2 + 1(n-1) = 1 + n;$$

$$92 = 1 + n, n = 91, \text{ значит, } 92 = a_{91};$$

$$S = S_{91} = \frac{a_1 + a_{91}}{2} \cdot 91 = \frac{2 + 92}{2} \cdot 91 = 47 \cdot 91 = 4277.$$

Вариант 3. К-6А

$$1. a_1 = 30, d = -2, a_{19} = a_1 + 18d = 30 - 18 \cdot 2 = -6.$$

$$2. -16; -10; -4; \dots \text{ - арифм. прогр.; } a_1 = -16, a_2 = -10, d = a_2 - a_1 = -10 - (-16) = 6,$$

$$S_{17} = \frac{2a_1 + 16d}{2} \cdot 17 = \frac{-32 + 96}{2} \cdot 17 = 544.$$

3. $a_n = 2 + 5n$. Чтобы a_n являлась арифм. прогр-ей, нужно

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}; a_{n-1} = 2 + 5(n-1) = 5n - 3; a_{n+1} = 2 + 5(n+1) = 5n + 7;$$

$$2 + 5n = \frac{5n - 3 + 5n + 7}{2} \text{ - верно, значит, } (a_n)\text{- арифм. прогр., ч.т.д.}$$

$$4. a_1 = 3, a_7 = -9; a_7 = a_1 + 6d, d = \frac{a_7 - a_1}{6} = \frac{-9 - 3}{6} = -2;$$

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 3 + (-2)(n-1) = 5 - 2n; -35 = 5 - 2n,$$

$$2n = 40, n = 20 \in N, \text{ значит, } -35 = a_{20}. \text{ Ответ: является.}$$

$$5. 1; 3; 5; \dots - \text{арифм. прогр.}; a_1 = 1, d = 2; S_{50} = \frac{2 + 2 \cdot 49}{2} \cdot 50 = 2500.$$

Вариант 4. К-6А

$$1. a_1 = -10, d = -3, a_{21} = a_1 + 20d = -10 - 20 \cdot 3 = -70.$$

$$2. 10; 6; 2; \dots - \text{арифм. прогр.}; a_1 = 10, a_2 = 6, d = a_2 - a_1 = 6 - 10 = -4;$$

$$S_{18} = \frac{2a_1 + 17d}{2} \cdot 18 = (20 - 17 \cdot 4) \cdot 9 = -432.$$

$$3. a_n = -10 + 3n. \text{ Чтобы } a_n \text{ являлась арифм. прогр-ей, нужно}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}; a_{n-1} = -10 + 3(n-1) = 3n - 13; a_{n+1} = -10 + 3(n+1) = 3n - 7;$$

$$-10 + 3n = \frac{3n - 13 + 3n - 7}{2} - \text{верно, значит, } (a_n) - \text{арифм. прогр., ч.т.д.}$$

$$4. a_1 = -2, a_{20} = -192; a_{20} = a_1 + 19d, d = \frac{a_{20} - a_1}{19} = \frac{-192 + 2}{19} = -10;$$

$$a_n = a_1 + d(n-1) = -2 - 10(n-1) = 8 - 10n; -92 = 8 - 10n,$$

$$10n = 100, n = 10 \in N, \text{ значит, } -92 = a_{10}. \text{ Ответ: является.}$$

$$5. 2; 3; 4; \dots; 102 - \text{арифм. прогр.}; a_1 = 2, d = 1; a_n = n + 1; 102 = n + 1;$$

$$n = 101, \text{ значит, } 102 = a_{101}; S = S_{101} = \frac{a_1 + a_{101}}{2} \cdot 101 = \frac{2 + 102}{2} \cdot 101 = 52 \cdot 101 = 5252.$$

Контрольная работа 7

Вариант 1 К-7

1. Воспользуемся понятием степени с рациональным показателем.

$$a) 3 \cdot 16^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot \sqrt{4^2} = 3 \cdot 4 = 12; \quad б) 27^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{1}{3}.$$

2. Воспользуемся свойствами степеней чисел.

а) При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}}.$$

б) При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются, а при делении - показатели степеней вычитаются. Поэтому

$$\text{получаем: } \frac{x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^{\frac{5}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}} = x^1 = x.$$

в) При возведении степени числа в степень показатели степеней умножаются.

При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней

складываются. Тогда имеем: $\left(c^{\frac{2}{3}}\right)^3 \cdot c^{-\frac{3}{2}} = c^{\frac{2}{3} \cdot 3} \cdot c^{-\frac{3}{2}} = c^2 \cdot c^{-\frac{3}{2}} = c^{2-\frac{3}{2}} = c^{\frac{1}{2}}$.

3. Воспользуемся понятием степени с рациональным показателем: $\sqrt[3]{y} = y^{\frac{1}{3}}$. Тогда $y^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[3]{y} = y^{\frac{5}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{5+1}{3}} = y^2$.

4. а) В числителе дроби вынесем $x^{\frac{1}{2}}$ за скобки, после чего сократим дробь.

$$\text{Получаем: } \frac{x - 5x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - 5} = \frac{x^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{1}{2}} - 5\right)}{x^{\frac{1}{2}} - 5} = x^{\frac{1}{2}}.$$

б) Разложим знаменатель дроби на множители, используя формулу для разности квадратов чисел, и сократим дробь. Имеем:

$$\frac{a^{\frac{1}{2}} - 4}{a^{\frac{1}{2}} - 16} = \frac{a^{\frac{1}{2}} - 4}{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 4^2} = \frac{a^{\frac{1}{2}} - 4}{\left(a^{\frac{1}{2}} - 4\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 4\right)} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}} + 4}.$$

5. Сначала выполним вычитание дробей в скобках (разложим знаменатель первой дроби на множители), а затем умножение. Получаем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{a^{0.5}b^{0.5} + b} - \frac{b^{0.5}}{a^{0.5} + b^{0.5}} \right) \cdot \frac{3b^{1.5}}{a^{0.5} - b^{0.5}} = \left(\frac{a}{b^{0.5}(a^{0.5} + b^{0.5})} - \frac{b^{0.5}}{a^{0.5} + b^{0.5}} \right) \cdot \frac{3b^{1.5}}{a^{0.5} - b^{0.5}} = \\ & = \frac{a - b^{0.5}b^{0.5}}{b^{0.5}(a^{0.5} + b^{0.5})} \cdot \frac{3b^{1.5}}{a^{0.5} - b^{0.5}} = \frac{(a - b) \cdot 3b^{1.5}}{b^{0.5}(a - b)} = \frac{3b^{1.5}}{b^{0.5}} = 3b. \end{aligned}$$

Вариант 2. К-7

1. Воспользуемся понятием степени с рациональным показателем.

а) $5 \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot \sqrt{9} = 5\sqrt{3^2} = 5 \cdot 3 = 15$; б) $125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{1}{5}$.

2. Воспользуемся свойствами степеней чисел.

а) При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются: $b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{3} + (-\frac{1}{6})} = b^{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{6}}$.

б) При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются, а при делении - показатели степеней вычитаются. Поэтому

$$\text{получаем: } \frac{y^{\frac{2}{3}} \cdot y^{-1}}{y^{\frac{1}{3}}} = \frac{y^{\frac{2}{3} + (-1)}}{y^{\frac{1}{3}}} = \frac{y^{-\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} = y^{-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} = y^{-\frac{2}{3}}.$$

в) При возведении степени числа в степень показатели степеней умножаются. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней

складываются. Тогда имеем: $(a^{\frac{3}{4}})^4 \cdot a^{-\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{4} \cdot 4} \cdot a^{-\frac{3}{2}} = a^3 \cdot a^{-\frac{3}{2}} = a^{3 - \frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$.

3. Воспользуемся понятием степени с рациональным показателем: $\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$. Тогда

$$x^{\frac{7}{4}} \cdot \sqrt[4]{x} = x^{\frac{7}{4}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{4} + \frac{1}{4}} = x^2.$$

4. а) В знаменателе дроби вынесем $y^{\frac{1}{2}}$ за скобки, после чего сократим дробь.

$$\text{Получаем: } \frac{y^{\frac{1}{2}} + 7}{y + 7y^{\frac{1}{2}}} = \frac{y^{\frac{1}{2}} + 7}{y^{\frac{1}{2}} \left(y^{\frac{1}{2}} + 7 \right)} = \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}.$$

б) Разложим числитель дроби на множители, используя формулу для разности квадратов чисел, и сократим дробь. Имеем:

$$\frac{b-9}{b^{\frac{1}{2}}+3} = \frac{\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 3^2}{b^{\frac{1}{2}}+3} = \frac{\left(b^{\frac{1}{2}}+3\right)\left(b^{\frac{1}{2}}-3\right)}{b^{\frac{1}{2}}+3} = b^{\frac{1}{2}} - 3.$$

5. Сначала выполним вычитание дробей в скобках (расположив знаменатель второй дроби на множители), а затем умножение. Получаем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{c^{0.5}}{c^{0.5} - d^{0.5}} - \frac{d}{c - c^{0.5}d^{0.5}} \right) \cdot \frac{5c^{1.5}}{c^{0.5} + d^{0.5}} = \left(\frac{c^{0.5}}{c^{0.5} - d^{0.5}} - \frac{d}{c^{0.5}(c^{0.5} - d^{0.5})} \right) \cdot \frac{5c^{1.5}}{c^{0.5} + d^{0.5}} = \\ & = \frac{c^{0.5} \cdot c^{0.5} - d}{c^{0.5}(c^{0.5} - d^{0.5})} \cdot \frac{5c^{1.5}}{c^{0.5} + d^{0.5}} = \frac{(c-d) \cdot 5c^{1.5}}{c^{0.5}(c-d)} = \frac{5c^{1.5}}{c^{0.5}} = 5c. \end{aligned}$$

Вариант 3. К-7

1. Воспользуемся понятием степени с рациональным показателем.

$$\text{а) } 14 \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 14 \cdot \sqrt[3]{8} = 14 \sqrt[3]{2^3} = 14 \cdot 2 = 28. \quad \text{б) } 32^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{32^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{32}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{1}{2}.$$

2. Воспользуемся свойствами степеней чисел.

а) При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются:

$$x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = x^{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} = x^{\frac{4}{6} + \frac{1}{6}} = x^{\frac{5}{6}} = x^{\frac{5}{6}}.$$

б) При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются, а при делении - показатели степеней вычитаются. Поэтому

$$\text{получаем: } \frac{a \cdot a^{-\frac{3}{8}}}{a^{\frac{1}{4}}} = \frac{a^{1-\frac{3}{8}}}{a^{\frac{1}{4}}} = \frac{a^{\frac{5}{8}}}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{5}{8} - \frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{8}}.$$

в) При повторном возведении степени числа в степень показатели степеней умножаются. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются. Тогда имеем:

$$\left(b^{\frac{1}{8}}\right)^8 \cdot b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{1}{8} \cdot 8} \cdot b^{\frac{1}{3}} = b^1 \cdot b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{4}{3}}.$$

3. Воспользуемся понятием степени с рациональным показателем: $\sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{5}{3}}$.

Тогда $\sqrt[3]{a^5} \cdot a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{5}{3} - \frac{1}{6}} = a^{\frac{10}{6} - \frac{1}{6}} = a^{\frac{9}{6}} = a^{\frac{3}{2}}$.

4. а) В числителе дроби вынесем $a^{\frac{1}{2}}$ за скобки, после чего сократим дробь.

Получаем: $\frac{a + 3a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + 3} = \frac{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} + 3)}{a^{\frac{1}{2}} + 3} = a^{\frac{1}{2}}$.

б) Разложим числитель дроби на множители, используя формулу для разности квадратов чисел, и сократим дробь. Имеем:

$$\frac{x - 36}{x^{\frac{1}{2}} - 6} = \frac{(x^{\frac{1}{2}})^2 - 6^2}{x^{\frac{1}{2}} - 6} = \frac{(x^{\frac{1}{2}} - 6)(x^{\frac{1}{2}} + 6)}{x^{\frac{1}{2}} - 6} = x^{\frac{1}{2}} + 6.$$

5. Сначала выполним вычитание дробей в скобках (разложим знаменатели дробей на множители), а затем умножение. Получаем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a+b}{a^{1.5} - a^{0.5}b} - \frac{a-b}{a^{1.5} + a^{0.5}b} \right) \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^{0.5}} = \left(\frac{a+b}{a^{0.5}(a-b)} - \frac{a-b}{a^{0.5}(a+b)} \right) \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^{0.5}} = \\ & = \frac{(a+b)(a+b) - (a-b)(a-b)}{a^{0.5}(a-b)(a+b)} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^{0.5}} = \frac{((a+b)^2 - (a-b)^2)(a^2 - b^2)}{a^{0.5}(a^2 - b^2) \cdot a^{0.5}} = \\ & = \frac{(a+b+a-b)(a+b-a+b)}{a} = \frac{2a \cdot 2b}{a} = 4b. \end{aligned}$$

Вариант 4. К-7

а) $0,3 \cdot 32^{\frac{1}{5}} = 0,3 \cdot \sqrt[5]{32} = 0,3 \cdot \sqrt[5]{2^5} = 0,3 \cdot 2 = 0,6$; б) $16^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{1}{2}$.

2. Воспользуемся свойствами степеней чисел.

а) При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются:

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{3} + (-\frac{1}{6})} = a^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = a^{\frac{4}{6} - \frac{1}{6}} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}.$$

б) При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются, а при делении - показатели степеней вычитаются. Поэтому

получаем: $\frac{x \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^{1 - \frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}}$.

в) При повторном возведении степени числа в степень показатели степеней умножаются. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются. Тогда имеем:

$$\left(c^{\frac{1}{6}} \right)^6 \cdot c^{-\frac{3}{7}} = c^{\frac{1}{6} \cdot 6} \cdot c^{-\frac{3}{7}} = c^1 \cdot c^{-\frac{3}{7}} = c^{1 - \frac{3}{7}} = c^{\frac{4}{7}}.$$

3. Воспользуемся понятием степени с рациональным показателем: $\sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{5}{3}}$.

$$\text{Тогда } \sqrt[3]{a^5} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} = a^1 = a.$$

4. а) В числителе дроби вынесем $x^{\frac{1}{2}}$ за скобки, после чего сократим дробь.

$$\text{Получаем: } \frac{15x^{\frac{1}{2}} + x}{15 + x^2} = \frac{x^{\frac{1}{2}} \left(15 + x^{\frac{1}{2}} \right)}{15 + x^2} = x^{\frac{1}{2}}.$$

б) Разложим числитель дроби на множители, используя формулу для разности квадратов чисел, и сократим дробь. Имеем:

$$\frac{x-121}{x^{\frac{1}{2}}+11} = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 11^2}{x^{\frac{1}{2}}+11} = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}+11\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-11\right)}{x^{\frac{1}{2}}+11} = x^{\frac{1}{2}} - 11.$$

5. Сначала выполним вычитание дробей в скобках (разложив знаменатели дробей на множители), а затем умножение. Получаем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x-y}{x^{1.5} + x^{0.5}y} - \frac{x+y}{x^{1.5} - x^{0.5}y} \right) \cdot \frac{y^2 - x^2}{xy} &= \left(\frac{x-y}{x^{0.5}(x+y)} - \frac{x+y}{x^{0.5}(x-y)} \right) \cdot \frac{y^2 - x^2}{xy} = \\ &= \frac{(x-y)(x-y) - (x+y)(x+y)}{x^{0.5}(x+y)(x-y)} \cdot \frac{(y^2 - x^2)}{xy} = \frac{\left((x-y)^2 - (x+y)^2\right)(y^2 - x^2)}{x^{0.5}(x^2 - y^2) \cdot xy} = \\ &= \frac{-(x-y+x+y)(x-y-x-y)}{x^{0.5}xy} = \frac{-2x \cdot (-2y)}{x^{0.5}xy} = \frac{4xy}{x^{0.5}xy} = \frac{4}{x^{0.5}}. \end{aligned}$$

Контрольная работа 7А

Вариант 1. К-7А

$$1. b_1 = -25, q = -\frac{1}{5}; b_7 = b_1 \cdot q^6 = -25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^6 = -\frac{5^5}{5^6} = -\frac{1}{625}.$$

$$2. b_1 = 11, q = 2; S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{11(2^5 - 1)}{2 - 1} = 11 \cdot 31 = 341.$$

$$3. 15; 5; 1\frac{2}{3}; \dots - \text{геометр. прогр. } b_1 = 15, b_2 = 5, q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{3}; S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{15}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{15 \cdot 3}{2} = 22.5.$$

$$4. b_5 = 81, b_3 = 36; b_5 = b_3 \cdot q^2; q = \pm \sqrt{\frac{b_5}{b_3}} = \pm \sqrt{\frac{81}{36}} = \pm 1.5; b_1 = \frac{b_3}{q^2} = \frac{36}{2.25} = 16;$$

$$\text{если } q = 1.5, \text{ то } S_5 = \frac{16 \cdot (1.5^5 - 1)}{1.5 - 1} = 211; \text{ если } q = -1.5, \text{ то } S_5 = \frac{16 \cdot (-1.5^5 - 1)}{-1.5 - 1} = 55.$$

5. а) $0,(31) = 0,3131\dots = 0,31 + 0,0031 + \dots, 0,31; 0,0031\dots$ – геометр. прогр.

$$b_1 = 0,31; q = 0,01; 0,(31) = S = \frac{0,31}{1-0,01} = \frac{31}{99}.$$

б) $0,5(6) = 0,566\dots = 0,5 + 0,06 + 0,006 + \dots, 0,06; 0,006\dots$ – геометр. прогр.

$$b_1 = 0,06, q = 0,1; 0,5(6) = 0,5 + S = \frac{1}{2} + \frac{0,06}{1-0,1} = \frac{1}{2} + \frac{6}{90} = \frac{51}{90}.$$

Вариант 2. К-7А

1. $b_1 = 4, q = \frac{1}{4}; b_6 = b_1 \cdot q^5 = 4 \cdot \frac{1}{4^5} = \frac{1}{256}.$

2. $b_1 = 4, q = 2; S_7 = \frac{b_1(q^7 - 1)}{q - 1} = \frac{4(2^7 - 1)}{2 - 1} = 4 \cdot 127 = 508.$

3. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots$ – геометр. прогр.; $b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{2}, q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{2}; S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$

4. $b_2 = 4, b_4 = 1; b_4 = b_2 \cdot q^2; q = \pm \sqrt{\frac{b_4}{b_2}} = \pm \frac{1}{2}; b_1 = \frac{b_2}{q};$

Если $q = \frac{1}{2}$, то $b_1 = 8; S_6 = \frac{8 \cdot \left(\frac{1}{2^6} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{8 \cdot 63 \cdot 2}{64} = 15,75;$

Если $q = -\frac{1}{2}$, то $b_1 = -8; S_6 = \frac{-8 \cdot \left(\frac{1}{2^6} - 1\right)}{-\frac{1}{2} - 1} = -5,25.$

5. а) $0,(31) = 0,313131\dots = 0,31 + 0,0031 + 0,000031\dots, 0,31; 0,0031\dots$ – геом. прогр.

$$b_1 = 0,31; q = 0,01; 0,(31) = S = \frac{0,31}{1-0,01} = \frac{31}{99}.$$

б) $0,2(3) = 0,233\dots = 0,2 + 0,03 + 0,003 + \dots, 0,03; 0,003; \dots$ – геометр. прогр.

$$b_1 = 0,03, q = 0,1; 0,2(3) = 0,2 + S = 0,2 + \frac{0,03}{1-0,1} = \frac{2}{10} + \frac{3}{90} = \frac{2}{10} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.$$

Вариант 3. К-7А

1. $b_1 = -18, q = \frac{1}{3}; b_8 = b_1 \cdot q^7 = -18 \cdot \frac{1}{3^7} = -\frac{2}{243}.$

2. $b_1 = 5, q = 2; S_8 = \frac{b_1(q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{5 \cdot (2^8 - 1)}{2 - 1} = 5 \cdot 225 = 1275.$

3. $-16; -8; -4; \dots$ – геометр. прогр.; $b_1 = -16, b_2 = -8, q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{2}; S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{16}{1 - \frac{1}{2}} = -32.$

$$4. b_3 = -4, b_5 = -16; b_5 = b_3 \cdot q^2; q = \pm \sqrt{\frac{b_5}{b_3}} = \pm 2; b_1 = \frac{b_3}{q^2} = -1;$$

$$\text{Если } q = 2, \text{ то } S_8 = \frac{-1 \cdot (2^8 - 1)}{2 - 1} = -255. \text{ Если } q = -2, \text{ то } S_8 = \frac{-1 \cdot (2^8 - 1)}{-2 - 1} = \frac{255}{3} = 85.$$

5. а) $0, (23) = 0,232323... = 0,23 + 0,0023 + 0,000023...; 0,23; 0,0023; ...$ — геом. прогресс.

$$b_1 = 0,23; q = 0,01; 0, (23) = S = \frac{0,23}{1 - 0,01} = \frac{23}{99};$$

б) $0,1(3) = 0,133... = 0,1 + 0,03 + 0,003 + ...; 0,03; 0,003; ...$ — геометр. прогр.

$$b_1 = 0,03, q = 0,1; 0,1(3) = 0,1 + S = \frac{1}{10} + \frac{0,03}{1 - 0,1} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}.$$

Вариант 4. К-7-А

$$1. b_1 = -8, q = \frac{1}{2}; b_2 = b_1 \cdot q^6 = -8 \cdot \frac{1}{2^6} = -\frac{8}{64} = -\frac{1}{8}.$$

$$2. b_1 = -1, q = -2; S_7 = \frac{b_1(q^7 - 1)}{q - 1} = \frac{-1 \cdot (-2^7 - 1)}{-2 - 1} = -\frac{129}{3} = -43.$$

$$3. 9; -3; 1; ... — геометр. прогр.; $b_1 = 9, b_2 = -3, q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{3}; S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{9}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{9 \cdot 3}{4} = 6,75.$$$

$$4. b_2 = 0,08, b_4 = 1,28; b_4 = b_2 \cdot q^2; q = \pm \sqrt{\frac{b_4}{b_2}} = \pm 4; b_1 = \frac{b_2}{q};$$

$$\text{Если } q = 4, \text{ то } b_1 = 0,02; S_6 = \frac{0,02 \cdot (4^6 - 1)}{4 - 1} = \frac{0,02 \cdot 4095}{3} = 27,3.$$

$$\text{Если } q = -4, \text{ то } b_1 = 0,02; S_6 = \frac{0,02 \cdot (4^6 - 1)}{-4 - 1} = \frac{0,02 \cdot 4095}{5} = 16,38.$$

5. а) $0, (17) = 0,1717... = 0,17 + 0,0017...; 0,17; 0,0017; ...$ — геом. прогр.

$$b_1 = 0,17; q = 0,01; 0, (17) = S = \frac{0,17}{1 - 0,01} = \frac{17}{99}.$$

б) $0,3(5) = 0,355... = 0,3 + 0,05 + 0,005 + ...; 0,05; 0,005; ...$ — геометр. прогр.

$$b_1 = 0,05, q = 0,1; 0,3(5) = 0,3 + S = \frac{3}{10} + \frac{0,05}{1 - 0,1} = \frac{3}{10} + \frac{5}{90} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}.$$

Контрольная работа 8

Вариант 1. К-8

1. Используем таблицу значений тригонометрических функций.

$$\text{а) Учтем, что } \sin 0^\circ = 0, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{Вычислим: } 5 \sin 0^\circ + 3 \cos 60^\circ = 5 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}.$$

б) Учтем, что $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. Находим: $2 \sin \frac{\pi}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1$.

2. Учтем, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ и основное тригонометрическое тождество. Тогда

$$\begin{aligned} \text{получаем: } 1 - \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha &= 1 - \sin \alpha \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 - \sin^2 \alpha = \\ &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

3. Используем основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Так

как по условию $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, то получаем $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$ или

$$\frac{25}{169} + \cos^2 \alpha = 1, \text{ откуда } \cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}. \text{ Так как по условию угол } \alpha$$

лежит во второй четверти (т.е. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), то $\cos \alpha$ величина

отрицательная. Поэтому $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}$. Теперь найдем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{13} : \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{5}{13} \cdot \left(-\frac{13}{12}\right) = -\frac{5}{12}.$$

4. Учтем, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, и сложим дроби, приведя их к общему

знаменателю. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством.

$$\text{Тогда получаем: } \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = 1 : \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} =$$

$$= \frac{\cos \alpha + (1 + \cos \alpha) + \sin \alpha \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{\cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} =$$

$$= \frac{\cos \alpha + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

5. Для доказательства тождества $\frac{1}{\sin x} - \sin x = \cos x \operatorname{ctg} x$ преобразуем его

левую и правую части к одинаковому выражению. В левой части приведем выражения к общему знаменателю и учтем основное тригонометрическое тождество. Получаем:

$$\frac{1}{\sin x} - \sin x = \frac{1 - \sin x \cdot \sin x}{\sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x}.$$

В правой части учтем, что $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Тогда имеем:

$$\cos x \operatorname{ctg} x = \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x}.$$

После преобразований видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

Вариант 2. К-8

1. Используем таблицу значений тригонометрических функций.

а) Учтем, что $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Тогда получаем: $\cos 180^\circ + 4 \operatorname{tg} 45^\circ = -1 + 4 \cdot 1 = -1 + 4 = 3$.

б) Учтем, что $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Находим: $3 \cos \frac{\pi}{2} - 2 \sin \frac{\pi}{6} = 3 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -1$.

2. Учтем, что $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ и основное тригонометр. тождество. Получаем:

$$1 - \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 1 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

3. Используем основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Так

как по условию $\cos \alpha = \frac{8}{17}$, то получаем: $\sin^2 \alpha + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1$ или

$$\sin^2 \alpha + \frac{64}{289} = 1, \text{ откуда } \sin^2 \alpha = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}.$$

Так как по условию угол α лежит в четвертой четверти (т.е. $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$), то $\sin \alpha$ - величина

отрицательная. Поэтому $\sin \alpha = -\sqrt{\frac{225}{289}} = -\sqrt{\left(\frac{15}{17}\right)^2} = -\frac{15}{17}$. Теперь найдем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \left(-\frac{15}{17}\right) : \frac{8}{17} = -\frac{15}{17} \cdot \frac{17}{8} = -\frac{15}{8}.$$

4. Учтем, что $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, и сложим дроби, приведя их к общему знаменателю.

Вспользуемся основным тригонометрическим тождеством

(т.е. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$). Тогда получаем: $\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = 1 : \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} =$

$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha(1 + \sin \alpha) + \cos \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha(1 + \sin \alpha)} = \frac{\sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha(1 + \sin \alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

5. Для доказательства тождества $\frac{1}{\cos \beta} - \cos \beta = \sin \beta \operatorname{tg} \beta$ преобразуем его левую

и правую части к одинаковому выражению. В левой части приведем

выражения к общему знаменателю и учтем основное тригонометрическое

тождество. Получаем: $\frac{1}{\cos \beta} - \cos \beta = \frac{1 - \cos \beta \cos \beta}{\cos \beta} = \frac{1 - \cos^2 \beta}{\cos \beta} =$

$$= \frac{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta - \cos^2 \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta}.$$

В правой части учтем, что $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$. Тогда имеем: $\sin \beta \operatorname{tg} \beta = \sin \beta \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta} =$

$$= \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta}.$$

После преобразований видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

Вариант 3. К-8

1. Используем таблицу значений тригонометрических функций.

а) Учтем, что $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Вычислим: $6 \sin 30^\circ - 2 \operatorname{tg} 45^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 = 1$

б) Учтем, что $\sin \pi = 0$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Находим: $4 \sin \pi + 2 \cos \frac{\pi}{3} = 4 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0 + 1 = 1$.

2. Используем формулу для разности квадратов чисел и основное тригонометрическое тождество (т.е. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$). Тогда получаем: $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = 1^2 - \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$

3. Используем основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Так как по условию $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, то получаем: $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$ или

$$\frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1, \text{ откуда } \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}. \text{ Так как по условию угол } \alpha$$

лежит в третьей четверти (т.е. $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$), то $\cos \alpha$ величина

отрицательная. Поэтому $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$. Теперь найдем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \left(-\frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{4}.$$

4. Приведем дроби к общему знаменателю. Используем формулу для разности квадратов чисел и основное тригонометрическое тождество. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} &= \frac{\sin \alpha(1 - \cos \alpha) + \sin \alpha(1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} = \\ &= \frac{\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{1^2 - \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

5. Для доказательства тождества $\frac{(1 + \cos \alpha)^2 - (1 - \cos \alpha)^2}{4 \cos \alpha} - \sin^2 \alpha = \operatorname{ctg} \alpha \sin \alpha \cos \alpha$

преобразуем его левую и правую части к одинаковому выражению. В левой части в числителе дроби используем формулы для разности квадрата чисел. Сократим дробь и учтем основное тригонометрическое тождество. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \cos \alpha)^2 - (1 - \cos \alpha)^2}{4 \cos \alpha} - \sin^2 \alpha &= \frac{(1 + \cos \alpha + 1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha - 1 + \cos \alpha)}{4 \cos \alpha} - \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{2 \cdot 2 \cos \alpha}{4 \cos \alpha} - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

В правой части учтем, что $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. Тогда имеем: $\operatorname{ctg} \alpha \sin \alpha \cos \alpha =$

$$= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \sin \alpha \cos \alpha = \cos \alpha \cdot \cos \alpha = \cos^2 \alpha. \text{ После преобразований видно, что}$$

левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

Вариант 4. К-8

1. Используем таблицу значений тригонометрических функций.

а) Учтем, что $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Вычислим: $3\sin 180^\circ - 2\cos 60^\circ = 3 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -1$

б) Учтем, что $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. Находим: $6\sin \frac{\pi}{2} - 5\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 6 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 6 - 5 = 1$.

2. Используем формулу для разности квадратов чисел и основное тригонометрическое тождество (т.е. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$). Тогда получаем: $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = 1^2 - \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$.

3. Используем основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Так как по условию $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, то получаем: $\sin^2 \alpha + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ или $\sin^2 \alpha + \frac{16}{25} = 1$,

откуда $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$. Так как по условию угол α лежит во второй

четверти (т.е. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), то $\sin \alpha$ величина положительная. Поэтому

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}. \text{ Теперь найдем } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{3}{4}.$$

4. Приведем дроби к общему знаменателю. Используем формулу для разности квадратов чисел и основное тригонометрическое тождество. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} &= \frac{\cos \alpha(1 + \sin \alpha) - \cos \alpha(1 - \sin \alpha)}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)} = \\ &= \frac{\cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha - \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha}{1^2 - (\sin \alpha)^2} = \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

5. Для доказательства тождества $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{2} - \cos^2 \alpha =$

$= \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha \sin \alpha$ преобразуем его левую и правую части к одинаковому выражению. В левой части в числителе дроби используем формулу для квадрата суммы и квадрата разности чисел. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{2} - \cos^2 \alpha &= \\ \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{2} - \cos^2 \alpha &= \\ = \frac{2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{2} - \cos^2 \alpha &= \frac{2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{2} - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

В правой части учтем, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Тогда имеем: $\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha \sin \alpha =$

$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos \alpha \sin \alpha = \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \sin^2 \alpha$. После преобразований видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

Контрольная работа 8 (итоговая)

Вариант 1. К-8А

1. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + (0,014)^0 - 4 \cdot 27^{\frac{2}{3}} = 3^2 + 1 - 4 \cdot (3^3)^{\frac{2}{3}} = 9 + 1 - 4 \cdot 9 = -26$.

б) $\frac{625^{\frac{1}{3}} \cdot 5}{25^{\frac{1}{3}}} = \frac{(5^4)^{\frac{1}{3}} \cdot 5}{(5^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{5^{\frac{4}{3}} \cdot 5}{5^{\frac{2}{3}}} = 5^{\frac{4}{3} + 1 - \frac{2}{3}} = 5^{-1} = 0,2$;

в) $(2 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{48} - \sqrt[3]{125} = 4 + 4\sqrt{3} + 3 - \sqrt{16 \cdot 3} - 5 = 2 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 2$;

г) $\cos(-240^\circ) - \sin(-300^\circ) + \operatorname{tg} 225^\circ = \cos 240^\circ + \sin 300^\circ + \operatorname{tg} 225^\circ =$
 $= \cos(180^\circ + 60^\circ) + \sin(360^\circ - 60^\circ) + \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) =$
 $= -\cos 60^\circ - \sin 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

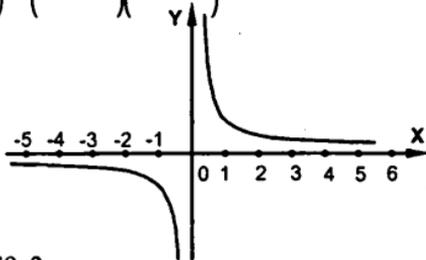
2. а) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + 2\cos^2 \alpha - 1} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$;

б) $\frac{2}{2 - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{4 - b} = \frac{2}{2 - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{\left(2 - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(2 + b^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{4 + 2b^{\frac{1}{2}} - 4}{\left(2 - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(2 + b^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{2b^{\frac{1}{2}}}{4 - b}$.

3. $y = \frac{1}{x}$;

$y \geq 0$ при $x \geq 0$;

$y \leq 0$ при $x \leq 0$.



4. 2; 4; 6; ... - арифм. прогр.

$\alpha_1 = 2, \beta = 2; \delta_{50} = \frac{2\alpha_1 + 49\beta}{2} \cdot 50 = \frac{2 \cdot 2 + 49 \cdot 2}{2} \cdot 50 = 51 \cdot 50 = 2550$.

5. $a_1 = -3, a_2 = 8; \beta = a_2 - a_1 = 8 - (-3) = 11$;

$D_{11} = \frac{2\alpha_1 + 10\beta}{2} \cdot 11 = \frac{-6 + 110}{2} \cdot 11 = 52 \cdot 11 = 572$.

Вариант 2. К-8А

1. а) $(16,017)^0 - \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} + 5 \cdot 16^{\frac{3}{4}} = 1 - 5^3 + 5 \cdot (2^4)^{\frac{3}{4}} = 1 - 125 + 5 \cdot 2^3 = 1 - 125 + 40 = -84$;

$$б) \frac{9^{-1} \cdot 27^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{(3^2)^{-1} \cdot (3^3)^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{3^{-2} \cdot 3^{\frac{6}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = 3^{-2 + \frac{6}{5} - \frac{1}{5}} = 3^{-1} = \frac{1}{3};$$

$$в) \sqrt{72} + (3 - \sqrt{2})^2 - \sqrt[4]{81} = \sqrt{2 \cdot 36} + 9 - 6\sqrt{2} + 2 - 3 = 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 8 = 8;$$

$$г) \sin(-390^\circ) - \cos(-780^\circ) + \sqrt{3} \operatorname{tg}(-120^\circ) = -\sin 390^\circ - \cos 780^\circ - \sqrt{3} \operatorname{tg} 120^\circ = \\ = -\sin(360^\circ + 30^\circ) - \cos(720^\circ + 60^\circ) - \sqrt{3} \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = \\ = -\sin 30^\circ - \cos 60^\circ + \sqrt{3} \operatorname{tg} 60^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 3 = 2.$$

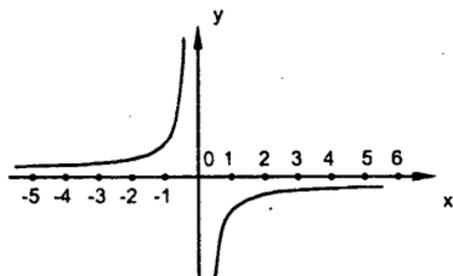
$$2. а) (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \sin 2\alpha;$$

$$б) \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}} + 1} + \frac{2}{\alpha^{-1}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}} + 1} + \frac{2}{\left(\alpha^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}} + 1\right)} = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}} - 1 + 2}{\left(\alpha^{\frac{1}{2}} + 1\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}} - 1\right)} = \\ = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}} + 1}{\left(\alpha^{\frac{1}{2}} + 1\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}} - 1\right)} = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}} - 1}.$$

$$3. y = -\frac{1}{x};$$

$$y \geq 0 \text{ при } x \leq 0;$$

$$y \leq 0 \text{ при } x \geq 0.$$



4. 1; 3; 5; ...; 99 – арифм. прогр.

$$\alpha_1 = 1, \beta = 2; \eta = 50; \zeta = \zeta_{50} = \frac{2\alpha_1 + 49\beta}{2} \cdot 50 = \frac{2 + 49 \cdot 2}{2} \cdot 50 = 2550.$$

$$5. \beta_6 = 200; \rho = 10; \beta_6 = \beta_1 \cdot \rho^5; \beta_1 = \frac{\beta_6}{\rho^5} = \frac{200}{100000} = \frac{1}{500};$$

$$\zeta_6 = \frac{\beta_6 \cdot \rho - \beta_1}{\rho - 1} = \frac{200 \cdot 10 - \frac{1}{500}}{10 - 1} = 222,222.$$

Вариант 3. К-8А

$$1. а) 5 \cdot 32^{\frac{3}{5}} + (7,028)^0 - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5(2^5)^{\frac{3}{5}} + 1 - 5^2 = 5 \cdot 8 + 1 - 25 = 16;$$

$$б) \frac{64^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{-2}}{4^{\frac{1}{10}}} = \frac{(2^6)^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{-2}}{(2^2)^{\frac{1}{10}}} = \frac{2^{\frac{6}{5}} \cdot 2^{-2}}{2^{\frac{1}{5}}} = 2^{\frac{6}{5} - 2 - \frac{1}{5}} = 2^{-1} = 0,5;$$

$$в) \sqrt{20} + (\sqrt{5} - 1)^2 - \sqrt[3]{27} = \sqrt{5} \cdot 4 + 5 - 2\sqrt{5} + 1 - 3 = 2\sqrt{5} + 6 - 3 - 2\sqrt{5} = 3;$$

$$г) \sin(-225^\circ) - \sqrt{3} \cos(-390^\circ) - \operatorname{tg} 315^\circ = -\sin 225^\circ - \sqrt{3} \cos 390^\circ - \operatorname{tg} 315^\circ = \\ = -\sin(180^\circ + 45^\circ) - \sqrt{3} \cos(360^\circ + 30^\circ) - \operatorname{tg}(360^\circ - 45^\circ) = \\ = \sin 45^\circ - \sqrt{3} \cos 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} + \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

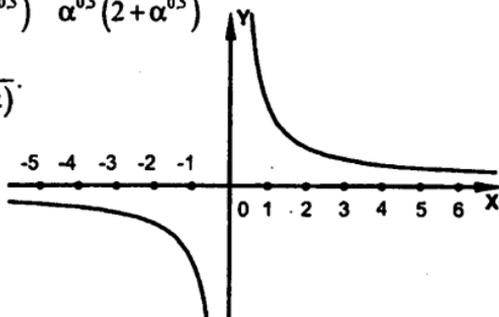
$$2. а) \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1 - 1 + 2\sin^2 \alpha}{2\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$б) \frac{4}{4 - \alpha} + \frac{2 - \alpha^{0.5}}{2\alpha^{0.5} + \alpha} = \frac{4}{(2 - \alpha^{0.5})(2 + \alpha^{0.5})} + \frac{2 - \alpha^{0.5}}{\alpha^{0.5}(2 + \alpha^{0.5})} = \\ \frac{4\alpha^{0.5} + 4 - 4\alpha^{0.5} + \alpha}{\alpha^{0.5}(2 - \alpha^{0.5})(2 + \alpha^{0.5})} = \frac{4 + \alpha}{\alpha^{0.5}(4 - \alpha)}.$$

$$3. y = \frac{2}{x};$$

$$y \geq 0 \text{ при } x \geq 0;$$

$$y \leq 0 \text{ при } x \leq 0.$$



$$4. 10; 11; 12; \dots; 99 - \text{арифм. прогр. } \alpha_1 = 10, \beta = 1; \alpha_n = 10 + \beta(\eta - 1) = \\ = 10 + \eta - 1 = 9 + \eta; 99 = 9 + \eta, \eta = 90, \text{ значит, } 99 = \alpha_{90};$$

$$S = S_{90} = \frac{2\alpha_1 + 89\beta}{2} \cdot 90 = (20 + 89) \cdot 45 = 4905.$$

$$5. \alpha_1 = 75, \alpha_2 = 60; \beta = \alpha_2 - \alpha_1 = -15; S_{10} = \frac{2\alpha_1 + \beta \cdot 9}{2} \cdot 10 = (2 \cdot 75 - 9 \cdot 15) \cdot 5 = 75.$$

Вариант 4. К-8А

$$1. а) (-5 \cdot 13)^0 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} - 27^{\frac{4}{3}} = 1 + 5^3 - (3^3)^{\frac{4}{3}} = 1 + 125 - 3^4 = 126 - 81 = 45;$$

$$б) \frac{16^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-1}}{4^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^4)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-1}}{(2^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{-1}}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{4}{3} - 1 - \frac{2}{3}} = 2^{-3} = \frac{1}{8};$$

$$в) (2 + \sqrt{3})^2 - \sqrt[3]{32} - \sqrt{48} = 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 2 - \sqrt{16 \cdot 3} = 5 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 5.$$

$$г) \cos(-240^\circ) - \sqrt{2} \sin(-315^\circ) - \operatorname{tg}(-405^\circ) = \cos 240^\circ + \sqrt{2} \sin 315^\circ + \operatorname{tg} 405^\circ = \\ = \cos(180^\circ + 60^\circ) + \sqrt{2} \sin(360^\circ - 45^\circ) + \operatorname{tg}(360^\circ + 45^\circ) = \\ = -\cos 60^\circ - \sqrt{2} \sin 45^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ = -\frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = -0,5 - 1 + 1 = -0,5.$$

2. а) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \sin 2\alpha$;

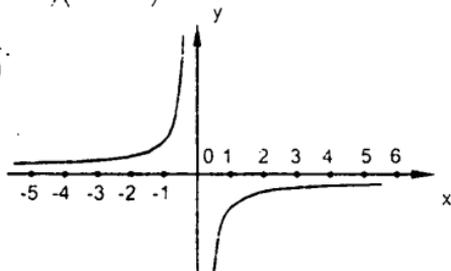
б)
$$\frac{3 + \alpha^{0.5}}{\alpha - 3\alpha^{0.5}} - \frac{6}{\alpha - 9} = \frac{3 + \alpha^{0.5}}{\alpha^{0.5}(\alpha^{0.5} - 3)} - \frac{6}{(\alpha^{0.5} - 3)(\alpha^{0.5} + 3)} =$$

$$= \frac{\alpha + 6\alpha^{0.5} + 9 - 6\alpha^{0.5}}{\alpha^{0.5}(\alpha^{0.5} - 3)(\alpha^{0.5} + 3)} = \frac{\alpha + 9}{\alpha^{0.5}(\alpha - 9)}$$

3. $y = -\frac{2}{x}$;

$y \geq 0$ при $x \leq 0$;

$y \leq 0$ при $x \geq 0$.



4. 100; 101; 102; ...; 999 – арифм. прогр. $\alpha_1 = 100$, $\beta = 1$; $\alpha_n = 100 + n - 1 = 99 + n$;
 $999 = 99 + n$, $n = 900$, значит, $999 = \alpha_{900}$;

$$S = S_{900} = \frac{2\alpha_1 + 899\beta}{2} \cdot 900 = (200 + 899) \cdot 450 = 494550.$$

5. $\beta_5 = 81$, $\rho = 0.5$; $\beta_5 = \beta_1 \cdot \rho^4$, $\beta_1 = \frac{\beta_5}{\rho^4} = \frac{81}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 81 \cdot 16$;

$$S_5 = \frac{\beta_5 \cdot \rho - \beta_1}{\rho - 1} = \frac{81 \cdot 0.5 - 81 \cdot 16}{0.5 - 1} = \frac{81 \cdot 15.5}{0.5} = 2511.$$

Контрольная работа 9

Вариант 1. К-9

1. Для вычисления значения тригонометрической функции используем формулу приведения.

а) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1$.

2. а) Используем формулы приведения и получим: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ и $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$. Поэтому $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha + \sin \alpha = 0$.

б) Используем формулу для синуса суммы двух углов. Имеем:

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin \beta \cos \alpha = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - \sin \beta \cos \alpha = \sin \alpha \cos \beta.$$

в) Применим формулу для косинуса двойного угла. Получаем:

$$\cos 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

3. Используем формулу для синуса двойного угла и преобразуем левую часть тождества: $2 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = (2 \sin \alpha \cos \alpha) \cos 2\alpha = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha =$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2 \sin \alpha \cos 2\alpha) = \frac{1}{2} \sin 4\alpha. \text{ Видно, что левая часть равна правой.}$$

Следовательно, тождество доказано.

4. а) В числителе дроби используем формулу для разности синусов двух углов, в знаменателе - для суммы косинусов двух углов. Тогда получим: $\frac{\sin \alpha - \sin 3\alpha}{\cos 3\alpha + \cos \alpha} =$

$$= \frac{2 \cos \frac{\alpha + 3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha - 3\alpha}{2}}{2 \cos \frac{3\alpha + \alpha}{2} \cos \frac{3\alpha - \alpha}{2}} = \frac{2 \cos 2\alpha \sin(-\alpha)}{2 \cos 2\alpha \cos \alpha} = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos \alpha} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha .$$

Была использована нечетность функции синус, т.е. $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.

б) В числителе дроби используем основное тригонометрическое тождество (т.е. $1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$) и формулу для косинуса двойного угла (т.е. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$), в знаменателе - формулу приведения $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

$$\text{Тогда получаем: } \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = 2 \sin \alpha .$$

Вариант 2. К-9

1. Для вычисления значения тригонометрической функции используем формулы приведения.

а) $\cos 210^\circ = \cos(360^\circ - 150^\circ) = \cos(-150^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

При решении было учтено, что период функции косинус 360° и функция косинус - четная, т.е. $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.

б) Учтем, что функция тангенс - нечетная, т.е. $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$. Поэтому получаем:

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1 .$$

2. а) Учтем периодичность функции синус (т.е. $\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$) и формулу приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$. Поэтому: $\sin(2\pi + \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha - (-\sin \alpha) = \sin \alpha + \sin \alpha = 2 \sin \alpha$.

б) Используем формулу для косинуса разности двух углов:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos \alpha \cos \beta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta = \sin \alpha \sin \beta .$$

в) Применим формулу для синуса двойного угла и учтем, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Тогда получаем: $\sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \sin^2 \alpha$.

3. В числителе дроби используем формулу для синуса двойного угла, в знаменателе - формулу для косинуса двойного угла. Тогда получаем:

$$\frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2(2 \sin \alpha \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 2 \operatorname{tg} 2\alpha .$$

Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

4. а) Используем в числителе дроби формулу для разности косинусов двух углов, в знаменателе - формулу для суммы синусов двух углов. Тогда получим:

$$\frac{\cos 5\alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \sin 5\alpha} = \frac{-2 \sin \frac{5\alpha + \alpha}{2} \sin \frac{5\alpha - \alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha + 5\alpha}{2} \cos \frac{\alpha - 5\alpha}{2}} = \frac{-2 \sin 3\alpha \sin 2\alpha}{2 \sin 3\alpha \cos(-2\alpha)} = \frac{-2 \sin 2\alpha}{\cos(-2\alpha)} =$$

$$= \frac{-2 \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -2 \operatorname{tg} 2\alpha. \text{ Было учтено, что } \cos(-2\alpha) = \cos 2\alpha.$$

б) В числителе дроби используем формулу для косинуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество, в знаменателе - формулу приведения

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$. Тогда получаем:

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cos \alpha.$$

Вариант 3. К-9

а) $\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ) = \operatorname{tg}(-45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$. Было учтено, что период функции тангенс равен 180° и эта функция является нечетной, т.е.

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

б) $\sin \frac{4\pi}{3} = \sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin \frac{2\pi}{3} = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Была учтена нечетность функции синус, т.е. $\sin(\alpha) = -\sin \alpha$.

2. а) Используем формулы приведения и периодичность функции косинус:

$$\cos(\pi + \alpha) = \cos(2\pi - (\pi - \alpha)) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \quad \text{и} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha.$$

Получаем: $\cos(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha + \cos \alpha = 0.$

б) Применим формулу для синуса разности двух углов. Имеем:

$$\sin(\alpha - \beta) + \sin \beta \cos \alpha = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta + \sin \beta \cos \alpha = \sin \alpha \cos \beta.$$

в) Используем формулу для косинуса двойного угла и основное

тригонометрическое тождество. Тогда получаем: $2 \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha =$
 $= 2 \cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$

3. Для доказательства тождества преобразуем его левую часть. Изменим порядок умножения. Имеем: $4 \cos 2\alpha \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cos 2\alpha (2 \sin \alpha \cos \alpha) = 2 \cos 2\alpha \cdot \sin 2\alpha =$
 $= 2 \cos 2\alpha \cdot \sin 2\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha.$ Была использована формула для синуса двойного угла. Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

4.а) В числителе дроби применим формулу для суммы косинусов двух углов, в знаменателе - формулу для разности синусов двух углов. Имеем:

$$\frac{\cos \alpha + \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} = \frac{2 \cos \frac{\alpha + 3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha - 3\alpha}{2}}{2 \cos \frac{3\alpha + \alpha}{2} \sin \frac{3\alpha - \alpha}{2}} = \frac{2 \cos 2\alpha \cos(-\alpha)}{2 \cos 2\alpha \sin \alpha} = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{\cos(-\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha. \text{ Была учтена четность функции косинус, т.е.}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

б) Используем основное тригонометрическое тождество, формулу для косинуса двойного угла и формулу

приведения: $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

Тогда: $(1 + \cos 2\alpha) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} =$

$$= 2 \cos^2 \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha.$$

Вариант 4. К-9

1. Используем формулы приведения.

а) $\operatorname{ctg} 135^\circ = \frac{\cos 135^\circ}{\sin 135^\circ} = \frac{\cos(180^\circ - 45^\circ)}{\sin(180^\circ - 45^\circ)} = \frac{-\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1.$

б) $\cos \frac{7\pi}{6} = \cos \left(2\pi - \frac{5\pi}{6} \right) = \cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) = \cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Была учтена периодичность функции косинус и ее четность, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.

2. а) Для функции $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ используем формулы приведения: $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) =$

$$= \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha. \text{ Для функции } \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) \text{ используем ее}$$

периодичность и нечетность: $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$. Тогда находим:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 0.$$

б) Применим формулу для косинуса разности двух углов:

$$\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta.$$

в) Учтем, что $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, и применим формулу для синуса двойного угла.

$$\begin{aligned} \text{Получаем: } \frac{2tg\alpha}{\sin 2\alpha} &= 2 \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} : (2 \sin\alpha \cos\alpha) = \frac{2 \sin\alpha}{\cos\alpha (2 \sin\alpha \cos\alpha)} = \\ &= \frac{2 \sin\alpha}{2 \sin\alpha \cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \end{aligned}$$

3. Для доказательства тождества преобразуем его левую часть. В числителе дроби используем формулу для косинуса двойного угла, в знаменателе - формулу для синуса двойного угла. Имеем:

$$\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{4 \sin\alpha \cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{2(2 \sin\alpha \cos\alpha)} = \frac{\cos 2\alpha}{2 \sin 2\alpha} = \frac{ctg 2\alpha}{2}. \text{ Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.}$$

4. а) Используем в числителе дроби формулу для разности синусов двух углов, в знаменателе - формулу для суммы косинусов двух углов. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} &= \frac{2 \cos \frac{2\alpha + 4\alpha}{2} \sin \frac{2\alpha - 4\alpha}{2}}{2 \cos \frac{4\alpha + 2\alpha}{2} \cos \frac{4\alpha - 2\alpha}{2}} = \frac{2 \cos 3\alpha \sin(-\alpha)}{2 \cos 3\alpha \cos\alpha} = \\ &= \frac{\sin(-\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\alpha. \text{ Была учтена нечетность функции синус, т.е.} \\ &\sin(-\alpha) = -\sin\alpha. \end{aligned}$$

б) Применим в числителе дроби формулы приведения и учтем периодичность функции косинус: $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$. В знаменателе дроби используем основное тригонометрическое тождество и

$$\begin{aligned} \text{формулу для косинуса двойного угла. Получаем: } \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{1 - \cos 2\alpha} &= \\ &= \frac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \\ &= \frac{\sin\alpha}{2 \sin^2\alpha} = \frac{1}{2 \sin\alpha}. \end{aligned}$$

Контрольная работа 9 (итоговая)

Вариант 1. К-9А

$$\begin{aligned} 1. \left(\frac{3+\alpha}{3-\alpha} - \frac{12\alpha}{9-\alpha^2}\right) + \frac{3-\alpha}{3} &= \left(\frac{3+\alpha}{3-\alpha} - \frac{12\alpha}{(3-\alpha)(3+\alpha)}\right) \cdot \frac{3}{3-\alpha} = \\ &= \frac{9+6\alpha+\alpha^2-12\alpha}{(3-\alpha)(3+\alpha)} \cdot \frac{3}{3-\alpha} = \frac{\alpha^2-6\alpha+9}{(3-\alpha)^2 \cdot (3+\alpha)} \cdot 3 = \frac{(3-\alpha)^2 \cdot 3}{(3-\alpha)^2 \cdot (3+\alpha)} = \frac{3}{3+\alpha} \end{aligned}$$

$$2. \begin{cases} 3x+2 \geq x-4 \\ 5-3x < 20 \end{cases}; \begin{cases} 3x-x \geq -4-2 \\ 3x > 5-20 \end{cases}; \begin{cases} 2x \geq -6 \\ 3x > -15 \end{cases}; \begin{cases} x \geq -3 \\ x > -5 \end{cases}$$

Ответ: $x \geq -3$.

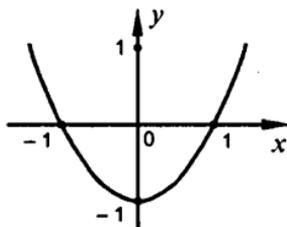


$$3. \frac{x-1}{3x^2-4x+1} = \frac{x-1}{3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3x-1}; 3x^2-4x+1=0; x_1 = \frac{4+2}{6} = 1; x_2 = \frac{1}{3}$$

$$4. y = x^2 - 1;$$

$$y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty);$$

$$y < 0 \text{ при } x \in (-1; 1).$$



$$5. \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,36} = -0,8;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 0,6 \cdot (-0,8) = -0,96.$$

6. Пусть x - коэффициент пропорциональности. Тогда $7x$ г, $3x$ г - меди и цинка соответственно содержится в куске латуни. Учитывая, что латунь весит 500 г, получаем уравнение: $7x + 3x = 500$; $10x = 500$; $x = 50$; 50 - коэффициент пропорциональности.

$7 \cdot 50 = 350$ (г) - меди в латуни; $3 \cdot 50 = 150$ (г) - цинка в латуни.

Ответ: 350 г; 150 г.

7. Пусть x м - ширина. Тогда $(x+30)$ м - длина, $x(x+30)$ м² - площадь или 6175 м². Получаем уравнение: $x(x+30) = 6175$;

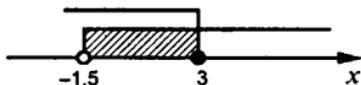
$$x^2 + 30x - 6175 = 0; x_1 = \frac{-30+180}{2} = 65; x_2 < 0 - \text{не удовлетворяет ус -}$$

ловию задачи. 65 м - ширина, 65+30=95 м - длина. Ответ: 95 м, 65 м.

Вариант 2. К-9А

$$1. \left(\frac{a-1}{a+1} - \frac{a}{a-1} \right) \cdot \frac{a+1}{1-3a} = \frac{a^2-2a+1-a-a^2}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{a+1}{1-3a} = \frac{1-3a}{(a-1)(1-3a)} = \frac{1}{a-1}$$

$$2. \begin{cases} 3x+2 < 7x-4 \\ -\frac{x}{3} \geq -1 \end{cases}; \begin{cases} 4x > 6 \\ \frac{x}{3} \leq 1 \end{cases}; \begin{cases} x > 1,5 \\ x \leq 3 \end{cases}$$



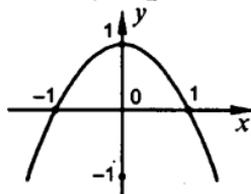
Ответ: (1,5; 3].

$$3. \frac{2x^2-5x+3}{x-1} = \frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)}{x-1} = 2x-3; 2x^2-5x+3=0; x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}; x_2 = 1.$$

$$4. y = -x^2 + 1;$$

$$y > 0 \text{ при } x \in (-1; 1);$$

$$y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$$



5. $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - 0,6^2 = 0,64$; $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0,36 - 0,64 = -0,28$.

6. Пусть x – коэффициент пропорциональности. Тогда в составе будут $10x$ г, $5x$ г, $2x$ г – воды, спирта, мела соответственно. Учитывая, что масса состава составляет 680 г, получаем уравнение: $10x + 5x + 2x = 680$; $17x = 680$; $x = 40$; 40 – коэффициент пропорциональности. $10 \cdot 40 = 400$ г – воды в составе; $5 \cdot 40 = 200$ г – спирта в составе; $2 \cdot 40 = 80$ г – мела в составе.

Ответ: 400 г, 200 г, 80 г.

7. Пусть x м – ширина. Тогда $(x+40)$ м – длина, $x(x+40)$ м² – площадь или 7700 м². Получаем уравнение: $x(x+40) = 7700$;

$$x^2 + 40x - 7700 = 0; x_1 = \frac{-40 + 160}{2} = 70; x_2 < 0 \text{ – не удовлетворяет}$$

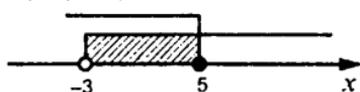
условию задачи. 70 м – ширина, $70+40=110$ м – длина. Ответ: 110 м, 70 м.

Вариант 3. К-9А

$$1. \left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{4a}{a^2-1} \right) \cdot \frac{1}{a+1} = \left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{4a}{(a-1)(a+1)} \right) \cdot \frac{1}{a+1} =$$

$$= \frac{a^2 - 2a + 1 + 4a}{(a-1)(a+1)} \cdot \frac{1}{a+1} = \frac{a^2 + 2a + 1}{(a+1)^2 \cdot (a-1)} = \frac{(a+1)^2}{(a+1)^2 \cdot (a-1)} = \frac{1}{a-1}.$$

$$2. \begin{cases} x+2 \leq 17-2x \\ 9-5x < 24 \end{cases}; \begin{cases} 3x \leq 15 \\ 5x > -15 \end{cases}; \begin{cases} x \leq 5 \\ x > -3 \end{cases}$$



Ответ: $(-3; 5]$.

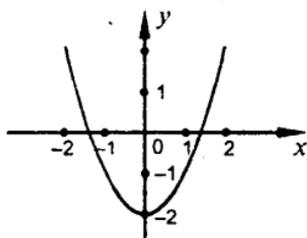
$$3. \frac{4x^2 + 7x + 3}{x+1} = \frac{4(x+1)\left(x + \frac{3}{4}\right)}{x+1} = 4x + 3; 4x^2 + 7x + 3 = 0; x_1 = \frac{-7+1}{8} = -\frac{3}{4}; x_2 = -1$$

Ответ: $4x+3$.

$$4. y = x^2 - 2;$$

$$y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty);$$

$$y < 0 \text{ при } x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}).$$



$$5. \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,8^2} = -0,6;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -2 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = -0,96.$$

6. Пусть x – коэффициент пропорциональности. Тогда в сплаве будет: $49x$ т, x т – железа и углерода соответственно. Учитывая, что масса сплава составляет 1 т, получаем уравнение: $49x + x = 1$; $50x = 1$;

$$x = \frac{1}{50}; \frac{1}{50} \text{ – коэффициент пропорциональности. } \frac{49}{50} \text{ т} = \frac{49}{50} \cdot 1000 = 980 \text{ кг}$$

железа в сплаве; $\frac{1}{50}$ т = 20 кг – углерода в сплаве. Ответ: 980 кг, 20 кг.

7. Пусть x м – ширина. Тогда $(x+31)$ м – длина, $x(x+31)$ м² – площадь или 1830 м². Получаем уравнение: $x(x+31)=1830$;

$$x^2+31x-1830=0; D=961+4 \cdot 1830=91^2; x_1=\frac{-31+91}{2}=30; x_2 < 0$$

не удовлетворяет условию задачи. 30 м – ширина, $30+31=61$ м – длина.

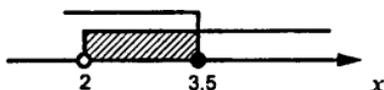
Ответ: 61 м, 30 м.

Вариант 4. К-9А

$$1. \left(\frac{a}{5+a} + \frac{5+a}{5-a} \right) \cdot \frac{3a+5}{a+5} = \frac{5a-a^2+25+10a+a^2}{(5+a)(5-a)} \cdot \frac{5+a}{3a+5} =$$

$$= \frac{25+15a}{(5-a)(3a+5)} = \frac{5(5+3a)}{(5-a)(3a+5)} = \frac{5}{5-a}.$$

$$2. \begin{cases} 2x+9 \geq 6x-5 \\ -\frac{x}{2} < -1 \end{cases}; \begin{cases} 4x \leq 14 \\ \frac{x}{2} > 1 \end{cases}; \begin{cases} x \leq 3,5 \\ x > 2 \end{cases}$$



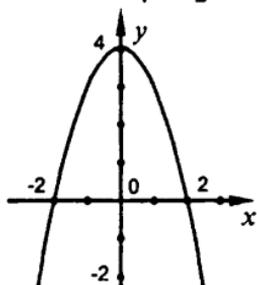
Ответ: (2; 3,5].

$$3. \frac{x-1,5}{2x^2-5x+3} = \frac{x-1,5}{2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2x-2}; 2x^2-5x+3=0; x_1=\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2}; x_2=1$$

$$4. y = -x^2 + 4;$$

$$y > 0 \text{ при } x \in (-2; 2);$$

$$y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty).$$



$$5. \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - 0,8^2 = 0,36;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0,36 - 0,64 = -0,28.$$

6. Пусть x – коэффициент пропорциональности. Тогда $4x$ кг, x кг – ячменя и риса в крахмале соответственно. Учитывая, что масса крахмала составляет 45 кг, получаем уравнение: $4x + x = 45$; $5x = 45$; $x = 9$;

9 – коэффициент пропорциональности.

$4 \cdot 9 = 36$ кг – ячменя в крахмале, 9 кг – риса в крахмале. Ответ: 36 кг, 9 кг.

7. Пусть x м – ширина. Тогда $(x+36)$ м – длина, $x(x+36)$ м² – площадь или 6400 м². Получаем уравнение: $x(x+36)=6400$;

$$x^2+36x-6400=0; D=1296+4 \cdot 6400=164^2; x_1=\frac{-36+164}{2}=64; x_2 < 0$$

не удовлетворяет условию задачи. 64 м – ширина, $64+36=100$ м – длина.

Ответ: 100 м, 64 м.

Контрольная работа 10

Вариант 1. К-10

1. В скобках приведем дроби к общему знаменателю $(a-2)(a+2)$: Получаем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+2}{a-2} - \frac{a}{a+2} \right) \cdot \frac{a-2}{3a+2} &= \frac{(a+2)(a+2) - a(a-2)}{(a-2)(a+2)} \cdot \frac{a-2}{3a+2} = \frac{(a+2)^2 - a^2 + 2a}{(a-2)(a+2)} \cdot \frac{a-2}{3a+2} = \\ &= \frac{a^2 + 4a + 4 - a^2 + 2a}{(a-2)(a+2)} \cdot \frac{a-2}{3a+2} = \frac{6a+4}{(a-2)(a+2)} \cdot \frac{a-2}{3a+2} = \frac{2(3a+2)(a-2)}{(a-2)(a+2)(3a+2)} = \frac{2}{a+2}. \end{aligned}$$

2. Для решения системы уравнений $\begin{cases} x-y=6 \\ xy=16 \end{cases}$ используем способ подстановки.

Из первого уравнения находим $x=y+6$ и подставим во второе уравнение: $(y+6)y=16$ или $y^2+6y-16=0$. Решим это квадратное уравнение с четным вторым коэффициентом ($a=1, k=\frac{b}{2}=3, c=-16$).

Находим дискриминант $D_1 = k^2 - ac = 3^2 - 1 \cdot (-16) = 9 + 16 = 25 = 5^2$ и корни

$$y = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-3 \pm \sqrt{5^2}}{1} = -3 \pm 5, \text{ т.е. } y_1 = 2 \text{ и } y_2 = -8. \text{ Теперь по формуле}$$

$x = y + 6$ найдем соответствующие значения x : $x_1 = 2 + 6 = 8$ и $x_2 = -8 + 6 = -2$.

Итак, данная система имеет два решения: $(8; 2)$ и $(-2; -8)$.

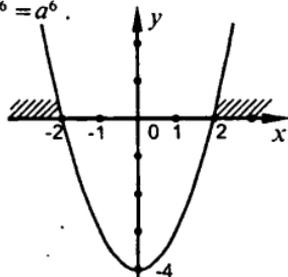
Ответ: $(8; 2)$ и $(-2; -8)$.

3. В левой части неравенства $5x - 1,5(2x + 3) < 4x + 1,5$ раскроем скобки и приведем подобные члены: $5x - 3x - 4,5 < 4x + 1,5$ или $2x - 4,5 < 4x + 1,5$. Перенесем слагаемые, зависящие от x , в правую часть неравенства, не зависящие от x – в левую часть, изменив знаки этих членов на противоположные. Получаем равносильное неравенство: $-4,5 - 1,5 < 4x - 2x$. Вновь приведем подобные члены: $-6 < 2x$. Разделим обе части неравенства на положительное число 2. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем равносильное неравенство:

$$\frac{-6}{2} < \frac{2x}{2} \text{ или } -3 < x, \text{ т.е. } x > -3. \text{ Ответ: } x > -3.$$

4. Запишем данный корень в виде степени с рациональным показателем. Учтем, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степени складываются. Получаем: $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{5}{6}} = a^{\frac{7}{6}}$.

5. График функции $y = x^2 - 4$ получается из графика функции $y = x^2$ смещением на четыре единицы вниз. Из рисунка видно, что функция принимает положительные значения ($y > 0$) при $x < -2$ и при $x > 2$, т.е. в промежутках $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$. Эти промежутки заштрихованы.



6. Учтем, что $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ (формула синуса двойного угла). Так как по условию $\sin \alpha$ известен, то надо найти $\cos \alpha$. Используем основное тригоном. тождество: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Так как $\sin \alpha = 0,8$, то подставляя, получим: $0,8^2 + \cos^2 \alpha = 1$ или $0,64 + \cos^2 \alpha = 1$. Откуда $\cos^2 \alpha = 1 - 0,64 = 0,36$. Так как угол α лежит во второй четверти (т.е. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), то значение $\cos \alpha$ отрицательное. Поэтому $\cos \alpha = -\sqrt{0,36} = -0,6$. Теперь найдем $\sin 2\alpha = 2 \cdot 0,8 \cdot (-0,6) = -0,96$.

7. Пусть по плану бригада должна была изготовить x деталей в час и за y часов выполнить всю работу (т.е. сделать 40 деталей). Тогда получаем первое уравнение: $xy = 40$. На самом деле бригада делала в час на 8 деталей больше, т.е. $(x + 8)$ деталей и работала на 2 часа меньше, т.е. $(y - 2)$ часа. За это время она изготовила $(x + 8)(y - 2)$ деталей, что на 8 деталей больше запланированного, т.е. $40 + 8 = 48$ деталей. Имеем второе уравнение: $(x + 8)(y - 2) = 48$.

Для нахождения неизвестных x и y получили систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 40 \\ (x + 8)(y - 2) = 48 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} xy = 40 \\ xy + 8y - 2x = 64 \end{cases}.$$

Подставим первое уравнение во второе: $40 + 8y - 2x = 64$ или $8y - 2x = 24$ или $4y - x = 12$. Выразим из этого соотношения $x = 4y - 12$ и подставим в первое уравнение системы: $(4y - 12)y = 40$ или $4y^2 - 12y - 40 = 0$ или $y^2 - 3y - 10 = 0$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 = 7^2$ и его корни

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2}, \text{ т.е. } y_1 = 5 \text{ и } y_2 = -2 \text{ (не подходит, т.к. по смыслу}$$

задачи $y > 0$). Тогда по формуле $x = 4y - 12$ найдем $x = 4 \cdot 5 - 12 = 20 - 12 = 8$. Итак, по плану бригада должна была изготовить 8 деталей в час.

Ответ: 8 деталей в час.

Вариант 2. К-10

1. В скобках приведем дроби к общему знаменателю и используем формулу для квадрата суммы двух чисел. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+3}{x-3} - \frac{x}{x+3} \right) \cdot \frac{x+1}{x+3} &= \frac{(x+3)(x+3) - x(x-3)}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x+3}{x+1} = \frac{(x+3)^2 - x^2 + 3x}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x+3}{x+1} = \\ &= \frac{x^2 + 6x + 9 - x^2 + 3x}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x+3}{x+1} = \frac{9x + 9}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x+3}{x+1} = \frac{9(x+1)(x+3)}{(x-3)(x+3)(x+1)} = \frac{9}{x-3}. \end{aligned}$$

2. Для решения системы уравнений $\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 15 \end{cases}$ применим способ подстановки.

Из первого уравнения находим $x = y + 2$ и подставим во второе уравнение: $(y + 2)y = 15$ или $y^2 + 2y - 15 = 0$. Решим это квадратное уравнение с четным вторым коэффициентом ($a = 1, b = 2$ и $k = \frac{b}{2} = 1, c = -15$). Найдем его

дискриминант $D_1 = k^2 - ac = 1^2 - 1 \cdot (-15) = 1 + 15 = 16 = 4^2$ и корни

$y = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{4^2}}{1} = -1 \pm 4$, т.е. $y_1 = 3$ и $y_2 = -5$. По формуле $x = y + 2$ найдем соответствующие значения x : $x_1 = 3 + 2 = 5$ и $x_2 = -5 + 2 = -3$. Итак, данная система имеет два решения: $(5; 3)$ и $(-3; -5)$.

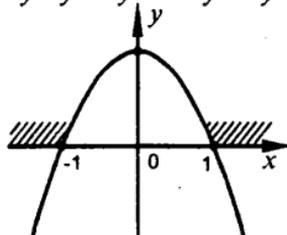
Ответ: $(5; 3)$ и $(-3; -5)$.

3. Для решения неравенства $2x - 4,5 > 6x - 0,5(4x - 3)$ раскроем скобки в правой части и приведем подобные члены: $2x - 4,5 > 6x - 2x + 1,5$ или $2x - 4,5 > 4x + 1,5$. Перенесем члены, зависящие от x , в правую часть неравенства, не зависящие от x , - в левую часть, изменив знаки этих членов на противоположные. Получаем равносильное неравенство: $-4,5 - 1,5 > 4x - 2x$. Вновь приведем подобные члены: $-6 > 2x$. Разделим обе части неравенства на положительное число 2. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем равносильное неравенство: $\frac{-6}{2} > \frac{2x}{2}$ или $-3 > x$, т.е. $x < -3$.

Ответ: $x < -3$.

4. Запишем корень в данном выражении в виде степени с рациональным показателем. Учтем, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степени складываются. Получаем: $y^{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{y^3} = y^{\frac{1}{5}} \cdot y^{\frac{3}{10}} = y^{\frac{1}{5} + \frac{3}{10}} = y^{\frac{2}{10} + \frac{3}{10}} = y^{\frac{5}{10}} = y^{\frac{1}{2}}$

5. График функции $y = -x^2 + 1$ получается из графика функции $y = -x^2$ при его смещении на одну единицу вверх. Из рисунка видно, что функция принимает отрицательные значения ($y < 0$) при $x < -1$ и при $x > 1$, т.е. в промежутках $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$.



6. Используем формулу для синуса двойного угла: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. По условию величина $\cos \alpha$ известна. Поэтому надо найти $\sin \alpha$. Используем основное тригоном. тождество: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Так как $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$, то подставляя эту величину, получим: $\sin^2 \alpha + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1$ или $\sin^2 \alpha + \frac{25}{169} = 1$. Откуда $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$. По условию угол α лежит во второй четверти (т.е. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), поэтому значение $\sin \alpha$ положительное и

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{144}{169}} = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}. \text{ Теперь найдем } \sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{120}{169}.$$

7. Пусть скорость первого велосипедиста x км/ч. тогда расстояние 45 км он проезжает за время $\frac{45}{x}$. Скорость второго велосипедиста на 3 км/ч больше, т.е. $(x + 3)$ км/ч. Такое же расстояние он проехал за время $\frac{45}{x+3}$ ч. Так как

второй велосипедист выехал на 30 минут позже первого, а приехал на 15 минут раньше, то на путь он затратил на $30 + 15 = 45$ мин $= \frac{45}{60}$ ч $= \frac{3}{4}$ ч меньше, чем первый велосипедист. Поэтому получаем уравнение: $\frac{45}{x} = \frac{45}{x+3} + \frac{3}{4}$.

Умножим все члены уравнения на наименьший общий знаменатель дробей $4x(x+3)$. Тогда получаем: $45 \cdot 4(x+3) = 45 \cdot 4x + 3x(x+3)$. Разделим все члены уравнения на число 3: $15 \cdot 4(x+3) = 15 \cdot 4x + x(x+3)$. Раскроем скобки и приведем подобные члены: $60x + 180 = 60x + x^2 + 3x$ или $0 = x^2 + 3x - 180$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-180) = 9 + 720 = 729 = 27^2$ и его корни $y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{27^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 27}{2}$, т.е. $x_1 = 12$ и $x_2 = -15$ (не подходит, т.к. по смыслу задачи $x > 0$). Следовательно, скорость первого велосипедиста 12 км/ч. **Ответ:** 12 км/ч.

Вариант 3. К-10

1. В скобках вычтем дроби, приведя их к общему знаменателю. Используем формулу для квадрата суммы двух чисел. Получаем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m+5}{m-5} - \frac{m}{m+5} \right) \frac{m+5}{3m+5} &= \frac{(m+5)(m+5) - m(m-5)}{(m-5)(m+5)} \cdot \frac{m+5}{3m+5} = \\ &= \frac{(m+5)^2 - m^2 + 5m}{(m-5)(m+5)} \cdot \frac{m+5}{3m+5} = \frac{m^2 + 10m + 25 - m^2 + 5m}{(m-5)(m+5)} \cdot \frac{m+5}{3m+5} = \\ &= \frac{15m + 25}{(m-5)(m+5)} \cdot \frac{m+5}{3m+5} = \frac{5(3m+5)(m+5)}{(m-5)(m+5)(3m+5)} = \frac{5}{m-5}. \end{aligned}$$

2. Для решения системы уравнений $\begin{cases} x+2y=11 \\ xy=14 \end{cases}$ используем способ подстановки.

Из первого уравнения находим $x = 11 - 2y$ и подставим во второе уравнение: $(11 - 2y)y = 14$ или $2y^2 - 11y + 14 = 0$. Найдем его дискриминант $D = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 14 = 121 - 112 = 9 = 3^2$ и его корни $y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 \pm \sqrt{3^2}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm 3}{4}$ т.е. $y_1 = \frac{14}{4} = 3,5$ и $y_2 = \frac{8}{4} = 2$. По формуле $x = 11 - 2y$ найдем соответствующие значения x : $x_1 = 11 - 2 \cdot 3,5 = 11 - 7 = 4$ и $x_2 = 11 - 2 \cdot 2 = 11 - 4 = 7$. Следовательно, система имеет два решения: (4; 3,5) и (7; 2).

Ответ: (4; 3,5) и (7; 2).

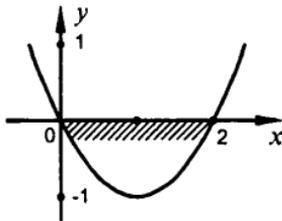
3. Для решения неравенства $5x - 3(x - 1,5) < 4x + 1,5$ раскроем скобки в левой части и приведем подобные члены $5x - 3x + 4,5 < 4x + 1,5$ или $2x + 4,5 < 4x + 1,5$. Перенесем члены, зависящие от x , в правую часть неравенства, не зависящие от x , - в левую часть, изменив знаки этих членов на противоположные. Получаем равносильное неравенство: $4,5 - 1,5 < 4x - 2x$. Вновь приведем подобные члены: $3 < 2x$. Разделим обе части неравенства на положительное

число 2. При этом знак неравенства сохраняется и получаем равносильное неравенство: $\frac{3}{2} < \frac{2x}{2}$ или $1,5 < x$, т.е. $x > 1,5$.

Ответ: $x > 1,5$.

4. В данном выражении запишем корень в виде степени с рациональным показателем. Учтем, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степени складываются. Получаем: $a^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{5}{6}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6} + \frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{6}}$.

5. Для построения графика функции $y = x^2 - 2x$ запишем ее в другом виде, выделив полный квадрат разности чисел. Получаем: $y = (x^2 - 2x + 1) - 1 = (x - 1)^2 - 1$. Поэтому график данной функции получается из графика функции $y = x^2$ его смещением на одну единицу вправо и на одну единицу вниз. Из рисунка видно, что функция принимает отрицательные значения ($y < 0$) при $0 < x < 2$, т.е. в промежутке $(0; 2)$. Этот промежуток заштрихован.



6. Применим формулу для синуса двойного угла: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. По условию известна величина $\sin \alpha$, поэтому надо найти $\cos \alpha$. Используем основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Подставим значение $\sin \alpha = -0,6$ и получим: $(-0,6)^2 + \cos^2 \alpha = 1$ или $0,36 + \cos^2 \alpha = 1$. Откуда $\cos^2 \alpha = 1 - 0,36 = 0,64$. По условию известно, что угол α находится в третьей четверти (т.е. $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$), поэтому величина $\cos \alpha$ отрицательная и $\cos \alpha = -\sqrt{0,64} = -\sqrt{0,8^2} = -0,8$. Теперь найдем $\sin 2\alpha = 2 \cdot (-0,6) \cdot (-0,8) = 0,96$.

7. Пусть бригада должна была изготавливать по плану по x деталей в день и закончить работу за y дней. Тогда получаем первое уравнение $xy = 210$. Реально бригада изготавливала в день на 10 деталей больше, т.е. $(x + 10)$ деталей, и работала на один день меньше, т.е. $(y - 1)$ день. За это время было сделано $(x + 10)(y - 1)$ деталей, что на 30 деталей больше плана, т.е. $210 + 30 = 240$ деталей. Получаем второе уравнение: $(x + 10)(y - 1) = 240$.

Для нахождения неизвестных x и y имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 210 \\ (x + 10)(y - 1) = 240 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} xy = 210 \\ xy + 10y - x = 250 \end{cases} . \text{ Подставим первое уравнение}$$

во второе: $210 + 10y - x = 250$ или $10y - x = 40$. Найдем отсюда $x = 10y - 40$ и подставим в первое уравнение системы: $(10y - 40)y = 210$ или $y^2 - 4y - 21 = 0$. Решим это квадратное уравнение с четным вторым коэффициентом

($a = 1$; $k = \frac{b}{2} = -2$; $c = -21$). Найдем его дискриминант $D = k^2 - ac = (-2)^2 - 1 \cdot (-21) =$

$= 4 + 21 = 25 = 5^2$ и его корни $y = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{2 \pm \sqrt{5^2}}{1} = 2 \pm 5$, т.е. $y_1 = 7$ и $y_2 = -3$ (не подходит, т.к. по смыслу задачи $y > 0$). Теперь по формуле $x = 10y - 40$ найдем $x = 10 \cdot 7 - 40 = 70 - 40 = 30$. Следовательно, по плану бригада должна была делать по 30 деталей в день.

Ответ: 30 деталей.

Вариант 4. К-10

1. В скобках вычтем дроби, приведя их к общему знаменателю. Используем формулу для квадрата суммы двух чисел. Получаем:

$$\left(\frac{y+1}{y-1} - \frac{y}{y+1} \right) \cdot \frac{3y+1}{y^2+y} = \frac{(y+1)(y+1) - y(y-1)}{(y-1)(y+1)} \cdot \frac{3y+1}{y^2+y} = \frac{(y+1)^2 - y^2 + y}{(y-1)(y+1)} \cdot \frac{y^2+y}{3y+1} = \frac{y^2+2y+1-y^2+y}{(y-1)(y+1)} \cdot \frac{y(y+1)}{3y+1} = \frac{(3y+1)y(y+1)}{(y-1)(y+1)(3y+1)} = \frac{y}{y-1}.$$

2. Для решения системы уравнений $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y^2=3 \end{cases}$ используем способ подстановки.

Из первого уравнения находим $x = 5 - y$ и подставим во второе уравнение системы: $5 - y - y^2 = 3$ или $0 = y^2 + y - 2$. Решим это квадратное уравнение ($a = 1, b = 1$ и $c = -2$). Найдем его дискриминант $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) =$

$$= 1 + 8 = 9 = 3^2 \text{ и корни } y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{3^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2}, \text{ т.е. } y_1 = 1 \text{ и } y_2 = -2.$$

Используя формулу $x = 5 - y$, найдем соответствующие значения x : $x^1 = 5 - 1 = 4$ и $x_2 = 5 - (-2) = 7$. Итак, система имеет два решения: $(4; 1)$ и $(7; -2)$.

Ответ: $(4; 1)$ и $(7; -2)$.

3. Для решения неравенства $x - 2,5(2x - 1) > x - 1,5$ раскроем скобки в левой части и приведем подобные члены: $x - 5x + 2,5 > x - 1,5$ или $-4x + 2,5 > x - 1,5$.

Перенесем члены, зависящие от x , в правую часть неравенства, не зависящие от x , - в левую часть, изменив знаки этих членов на противоположные.

Получаем равносильное неравенство: $2,5 + 1,5 > x + 4x$. Вновь приведем подобные члены: $4 > 5x$. Разделим обе части неравенства на положительное число 5. При этом знак неравенства сохраняется и получаем равносильное

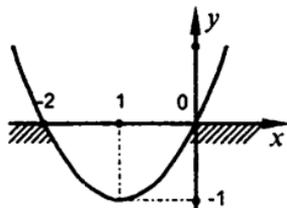
$$\text{неравенство: } \frac{4}{5} > \frac{5x}{5} \text{ или } 0,8 > x, \text{ т.е. } x < 0,8.$$

Ответ: $x < 0,8$.

4. В данном выражении запишем корень в виде степени с рациональным показателем. Учтем, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями

$$\text{показатели степени складываются. Получаем: } y^4 \cdot \sqrt[8]{y^3} = y^4 \cdot y^{\frac{3}{8}} = y^{4 + \frac{3}{8}} = y^{\frac{35}{8}}.$$

5. Для построения графика функции $y = x^2 + 2x$ выделим полный квадрат суммы чисел: $y = (x^2 + 2x + 1) - 1 = (x + 1)^2 - 1$. Видно, что такой график получается из графика функции $y = x^2$ при его смещении на одну единицу влево и на одну единицу вниз. Из рисунка видно, что функция принимает положительные значения при $x < -2$ и при $x > 0$, т.е. в промежутках $(-\infty; -2)$ и $(0; +\infty)$.



6. Используем формулу для синуса двойного угла: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. По условию известна величина $\cos \alpha$, поэтому надо найти значение $\sin \alpha$. Используем основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Подставим значение $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$ и получим: $\sin^2 \alpha + \left(-\frac{8}{17}\right)^2 = 1$ или $\sin^2 \alpha + \frac{64}{289} = 1$. Откуда $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}$. Так как угол α лежит во второй четверти (т.е. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), то величина $\sin \alpha$ положительная и $\sin \alpha = \sqrt{\frac{225}{289}} = \sqrt{\left(\frac{15}{17}\right)^2} = \frac{15}{17}$. Теперь находим $\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{15}{17} \cdot \left(-\frac{8}{17}\right) = -\frac{240}{289}$.
7. Пусть расстояние между пунктами A и B x км. Если бы автобус ехал со скоростью 60 км/ч, то он потратил бы на этот путь время $\frac{x}{60}$ ч. Но с такой скоростью он ехал только половину пути (т.е. $\frac{x}{2}$ км) и потратил время $\frac{x}{2} : 60 = \frac{x}{120}$ ч. Затем автобус задержался на 30 мин $= \frac{1}{2}$ ч. Оставшуюся половину пути автобус ехал со скоростью на 15 км/ч больше, т.е. $60 + 15 = 75$ км/ч. При этом было затрачено время $\frac{x}{2} : 75 = \frac{x}{150}$ ч. В итоге автобус приехал без опоздания. Поэтому получаем уравнение: $\frac{x}{60} = \frac{x}{120} + \frac{1}{2} + \frac{x}{150}$. Умножим обе части этого уравнения на наименьший общий знаменатель дробей – число 600. Тогда получаем: $10x = 5x + 300 + 4x$ или $10x = 9x + 300$ или $10x - 9x = 300$, откуда $x = 300$. Следовательно, расстояние между пунктами A и B 300 км.

Ответ: 300 км.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1

С-1. Функция

Область определения и область значений функции

1. $f(x) = 12x - 5$; $f(2) = 12 \cdot 2 - 5 = 19$; $f(0) = 12 \cdot 0 - 5 = -5$; $f(-1) = 12 \cdot (-1) - 5 = -17$;

2) $f(x) = x^2 - 8x$; $f(10) = 10^2 - 8 \cdot 10 = 20$; $f(-2) = (-2)^2 - 8 \cdot (-2) = 20$; $f(0) = 0^2 - 8 \cdot 0 = 0$;

3) Чтобы найти значение функции $g(x)$ в данной точке, надо в формулу, задающую функцию, подставить заданное значение аргумента x . Тогда для функции

$$g(x) = \frac{x-5}{x+3} \text{ получаем: } g(-2) = \frac{-2-5}{-2+3} = \frac{-7}{1} = -7; \quad g(2) = \frac{2-5}{2+3} = \frac{-3}{5} = -0,6;$$

$$g(0) = \frac{0-5}{0+3} = \frac{-5}{3} = -1\frac{2}{3}. \quad \text{Ответ: } g(-2) = -7; g(2) = -0,6; g(0) = -1\frac{2}{3}.$$

2. 1) Так как функция $g(x)$ принимает заданное значение, то в формулу, задающую функцию, надо подставить это значение и решить уравнение для нахождения x . Поэтому для функции $g(x) = 8 - 3x$ получаем линейное уравнение.

а) $5 = 8 - 3x$ или $5 - 8 = -3x$ или $-3 = -3x$, откуда $x = 1$;

б) $11 = 8 - 3x$ или $11 - 8 = -3x$ или $3 = -3x$, откуда $x = -1$;

в) $0 = 8 - 3x$ или $-8 = -3x$, откуда $x = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

2) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$; а) $-\frac{1}{3}x + 2 = 1$, $-\frac{1}{3}x = -1$, $x = 3$;

б) $-\frac{1}{3}x + 2 = 4$, $-\frac{1}{3}x = 2$, $x = -6$; в) $-\frac{1}{3}x + 2 = 0$, $-\frac{1}{3}x = -2$, $x = 6$.

Ответ: 1) а) $x = 1$; б) $x = -1$; в) $x = 2\frac{2}{3}$; 2) а) $x = 3$; б) $x = -6$; в) $x = 6$.

3. 1) Функция определена, если выполнены все действия в формуле, которая задает функцию.

а) Для функции $f(x) = 19 - 2x$ при любом значении x можно выполнить умножение числа 2 на величину x и вычитание из числа 19 выражения $2x$. Поэтому область определения этой функции – любое x .

б) Для функции $g(x) = \frac{40}{x}$ можно выполнить деление числа 40 на величину x для всех x , кроме нуля. Поэтому область определения этой функции любое x , кроме нуля (т.е. $x \neq 0$).

в) Для функции $\varphi(x) = x^2 - 4$ при любом значении x можно найти квадрат этой величины (т.е. x^2) и вычесть число 4. Следовательно, область определения этой функции – любое x .

г) Для функции $y = \sqrt{x}$ извлечь корень четной (второй) степени можно только из неотрицательного числа x . Поэтому область определения этой функции $x \geq 0$ или промежуток $[0; +\infty)$.

Ответ: а) любое x ; б) $x \neq 0$; в) любое x ; г) $x \geq 0$.

2) а) $g(x) = 8 - x^2$; $D(g) = R$; б) $f(x) = -\frac{5}{x}$; $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

в) $\varphi(x) = x - 2$; $D(\varphi) = R$; г) $y = \frac{8}{x+2}$; $x+2 \neq 0$, $x \neq -2$; $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

4. Область значений функции – те значения, которые принимает функция y при изменении x в области определения.

а) Для функции $y = 37x + 1$ область определения – любые значения x . При этом функция y также принимает любые значения из промежутка $(-\infty; +\infty)$, что и является областью значений функции.

б) Для функции $y = -23$ (которую можно задать в виде $y = -23 + 0 \cdot x$) величина x может быть любой. Однако при этом значении y только одно: $y = -23$, что и является областью значений данной функции.

в) Для функции $y = \frac{19}{x}$ область определения – любое x , кроме нуля. При этом функция принимает любые значения y , кроме нуля. Это и является областью значений функции.

г) Для функции $y = \sqrt{x}$ область определения $x \geq 0$. При этом по определению арифметического корня величина y может быть только неотрицательной, т.е. $y \geq 0$. Это и есть область значений данной функции.

д) Для функции $y = |x|$ область определения – любые значения x (т.к. можно найти модуль любого числа x). При этом по определению величина y может быть только неотрицательной, т.е. $y \geq 0$. Эти значения y являются областью значений данной функции.

Ответ: а) любое y , б) $y = -23$, в) $y \neq 0$, г) $y \geq 0$, д) $y \geq 0$.

5. а) Для функции $f(x) = \frac{5x^2}{x^2 + 1}$ сначала вычислим значения $f(2)$ и $f(-2)$. Для этого вместо x подставим его значение. Получаем:

$$f(2) = \frac{5 \cdot 2^2}{2^2 + 1} = \frac{5 \cdot 4}{4 + 1} = \frac{5 \cdot 4}{5} = 4 \quad \text{и} \quad f(-2) = \frac{5 \cdot (-2)^2}{(-2)^2 + 1} = \frac{5 \cdot 4}{4 + 1} = \frac{5 \cdot 4}{5} = 4.$$

вычислим $f(2) + f(-2) = 4 + 4 = 8$.

б) $g(x) = \frac{2x^2 - 5x}{10}$; $g(3) + g(-3) = g(3) - g(3) = 0$.

Ответ: а) 8; б) 0.

6. Для функции $f(x) = kx + b$ известны два значения $f(2) = 7$ и $f(3) = 12$, т.е. при $x = 2$ величина $f = 7$ и при $x = 3$ величина $f = 12$. Запишем эти условия, подставив в формулу $f = kx + b$ данные значения x и f . Получаем систему

уравнений: $\begin{cases} 7 = k \cdot 2 + b \\ 12 = k \cdot 3 + b \end{cases}$ или $\begin{cases} 7 = 2k + b \\ 12 = 3k + b \end{cases}$. Для нахождения коэффициентов k

и b используем способ подстановки. Из первого уравнения найдем $b = 7 - 2k$ и подставим эту величину во второе уравнение: $12 = 3k + 7 - 2k$ или $12 = k + 7$, откуда $k = 12 - 7 = 5$. Теперь найдем $b = 7 - 2 \cdot 5 = 7 - 10 = -3$.

Ответ: $k = 5, b = -3$.

7. а) $f(x) = \frac{2}{x-2} + \frac{101}{x-3}$; б) $f(x) = \sqrt{x-8}$.

С-2. График функции

1. 1) а) $f(-3) = -2$; б) $f(-2) = 2$; в) $f(0) = 1$; г) $f(3) = 0$;

2) а) $f(x) = 2; x_1 = -2; x_2 = -0,5; x_3 = 3,5$; б) $f(x) = 0; x_1 = -2,5; x_2 = 0,5; x_3 = 3$;

в) $f(x) = -2; x = -3$; 3) $f_{\max} = 3, f_{\min} = -2$; 4) $E(f) = [-2; 3]$.

2. 1) а) $y = 0,5x - 3$;

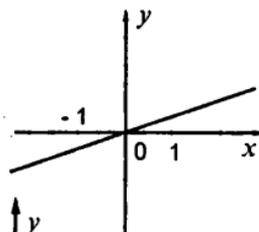
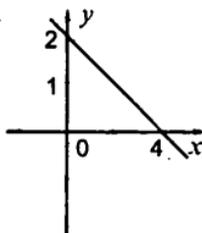
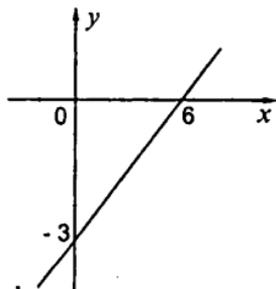
б) $y = -0,5x + 2$;

в) $y = \frac{x}{3}$;

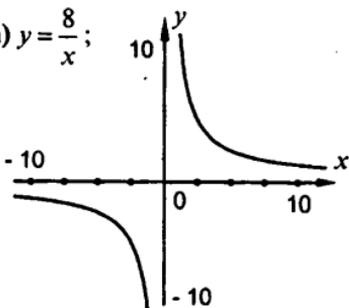
x	0	6
y	-3	0

x	0	4
y	2	0

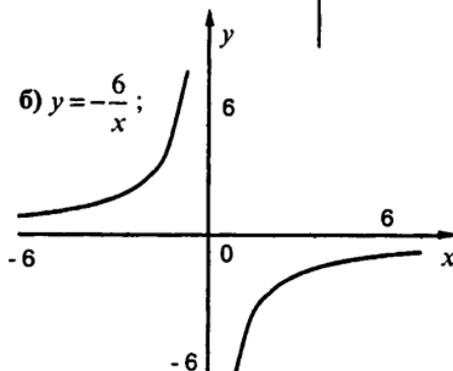
x	0	3
y	0	1



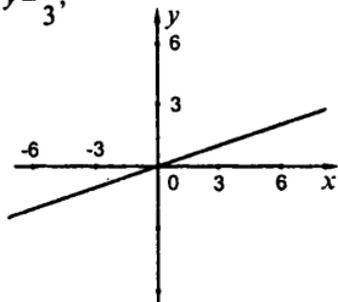
2) а) $y = \frac{8}{x}$;



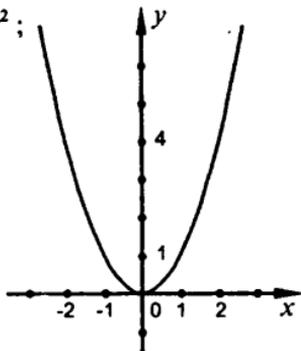
б) $y = -\frac{6}{x}$;



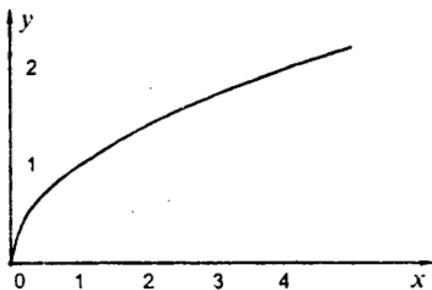
в) $y = \frac{x}{3}$;



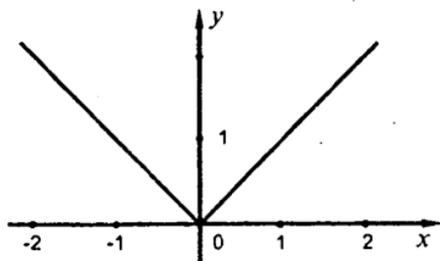
3) а) $y = x^2$;



б) $y = \sqrt{x}$; $x \geq 0$;



в) $y = |x|$.

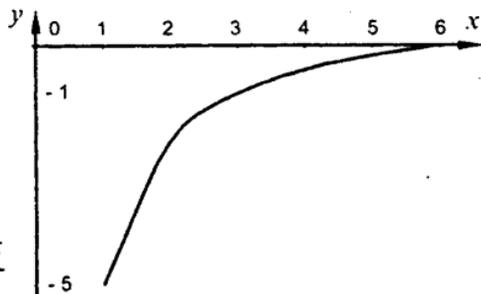
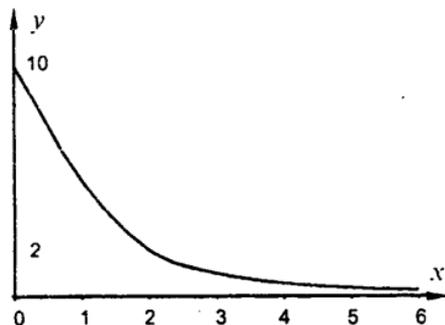


3. а) $y = \frac{10}{x^2 + 1}$; $0 \leq x \leq 6$;

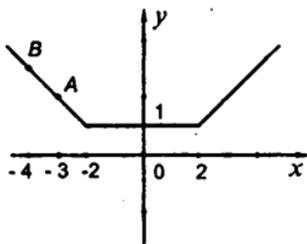
x	0	1	2	3	4	5	6
y	10	5	2	1	$\frac{10}{17}$	$\frac{10}{26}$	$\frac{10}{37}$

б) $y = \frac{x-6}{x} = 1 - \frac{6}{x}$; $1 \leq x \leq 6$.

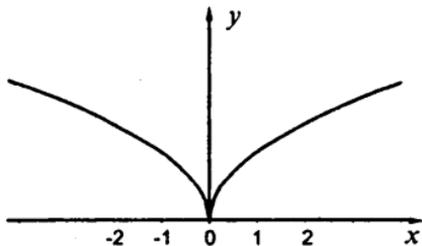
x	1	2	3	4	5	6
y	-5	-2	-1	-0,5	-0,2	0



4. а) Как видно из записи функции, она состоит из трех частей: $y_1 = -x - 1$ при $x < -2$, $y_2 = 1$ при $-2 \leq x \leq 2$ и $y_3 = x - 1$ при $x > 2$. Построим эти графики в указанных промежутках. Например, для функции y_1 возьмем две точки. При $x = -3$ находим $y = -(-3) - 1 = 2$ (точка А), при $x = -4$ получаем $y = -(-4) - 1 = 3$ (точка В). Через точки А и В проводим прямую.



- б) Построим график функции $y = \sqrt{|x|}$ сначала при $x \geq 0$. Для таких значений x по определению $|x| = x$. Поэтому строим график функции $y_1 = \sqrt{x}$. При $x < 0$ по определению $|x| = -x$ и строим график функции

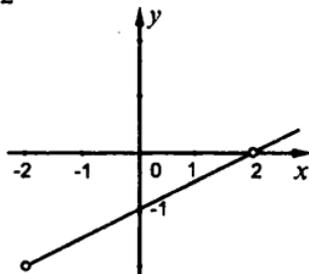


$y_2 = \sqrt{-x}$. Легко сообразить, что графики функций y_1 и y_2 симметричны относительно оси ординат. Например, при $x = -4$ и $x = 4$ значения функций одинаковы: $y(-4) = \sqrt{|-4|} = \sqrt{4} = 2$ и $y(4) = \sqrt{|4|} = \sqrt{4} = 2$.

$$5. f(x) = \begin{cases} -x, & -3 \leq x \leq 1 \\ 1, & -1 < x \leq 1 \\ -x+2, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

6. Чтобы построить график функции $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{2x^2 - 8}$, сначала упростим ее. Для этого разложим числитель и знаменатель на множители и сократим дробь. Получаем: $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = (x^3 - 2x^2) - (4x - 8) = x^2(x - 2) - 4(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 4) = (x - 2)(x - 2)(x + 2) = (x - 2)^2(x + 2)$ и $2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x - 2)(x + 2)$. Тогда: $f(x) = \frac{(x - 2)^2(x + 2)}{2(x - 2)(x + 2)} = \frac{x - 2}{2}$. Кроме того необходимо

учесть, что знаменатель в функции $f(x)$ не может равняться нулю, т.е. $(x - 2)(x + 2) \neq 0$ или $x \neq 2$ и $x \neq -2$. Построим график линейной функции $f(x) = \frac{x - 2}{2}$. Из этого графика удаляем точки с координатами $x = 2$ и $x = -2$.



7. 1) 1ч со скоростью, равной 4 км/ч; 2) $5 - 1 = 4(ч)$;
 3) $7 - 5 = 2(ч)$ скорость равна $\frac{4}{2} = 2(км/ч)$; 4) 4 км; 4 км; 2 км; 5) шоссе находится на расстоянии 2 км от дома, значит, от озера до шоссе он шел 1ч.
 8. 1) мотоциклист на 2 ч; 2) 5 ч; 1,5 ч; 3) $\frac{75}{5} = 15 (км/ч)$; $\frac{75}{1,5} = 50 (км/ч)$;
 4) мотоциклист на 1,5ч; 5) через 1ч; 6) $75 - 52,5 = 22,5(км)$.

С-3. Свойства функции

1. 1) а) $x_1 = -2,5, x_2 = 1$; б) $f(x) > 0$ при $x \in [-3; -2,5) \cup (1; 3]$; $f(x) < 0$ при $x \in (-2,5; 1)$; 2) $f(x)$ возрастает при $x \in [-0,25; 2]$; $f(x)$ убывает при $x \in [-3; -0,25]$ и $[2; 3]$; 3) $x_{max} = 2, x_{min} = -0,25$; 4) $E(f) = [-0,25; 2]$.
2. 1) а) $y = 28x + 35$; $D(y) = R, E(y) = R, y > 0$ при $x > -\frac{35}{28}, y < 0$ при $x < -\frac{35}{28}, y = 0$ при $x = -\frac{35}{28}, f(x)$ возрастает на R ; б) $y = -0,38x - 19$; $D(y) = R, E(y) = R, y > 0$ при $x < -\frac{19}{0,38} = -50, y < 0$ при $x > -50, y = 0$ при $x = -50, f(x)$ убывает на R ; в) $y = 38x$; $D(y) = R, E(y) = 38, y > 0$ на R .
- 2) а) $y = \frac{25}{x}$; $D(y) = E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $y > 0$ при $x > 0, y < 0$ при $x < 0, f(x)$ убывает на $D(y)$; б) $y = -\frac{56}{x}$; $D(y) = E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $y > 0$ при $x < 0, y < 0$ при $x > 0, f(x)$ возрастает на $D(y)$.
3. 1) а) $y = \frac{1}{3}x - 15, \frac{1}{3}x = 15, x = 45$; б) $y = -0,2x + 46, -0,2x = -46, x = 230$;
 в) $y = -24$ нет нулей функции.
 2) Напомним: что нулями функции называются такие значения аргумента x , при которых значение функции y равно нулю. Поэтому для нахождения нулей функции надо подставить $y = 0$ в формулу, задающую функцию, и из получившегося уравнения определить x .
 а) $0 = 7x(x + 4)$. Произведение множителей x и $(x + 4)$ равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем линейные уравнения: $x = 0$ (решение $x = 0$) и $x + 4 = 0$ (корень $x = -4$). Следовательно, в двух точках $x = 0$ и $x = -4$ значение функции равно нулю.
 б) $0 = 9(x^2 + 5)$. Разделим обе части этого уравнения на число 9 и получим квадратное уравнение $x^2 + 5 = 0$ или $x^2 = -5$. Очевидно, что такое уравнение корней не имеет, т.к. величина x^2 неотрицательная при всех значениях x . Следовательно, данная функция не равна нулю при всех x .

в) $0 = x(x+1)(x-2)$. Произведение трех множителей x , $(x+1)$ и $(x-2)$ равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем линейные уравнения: $x = 0$ (решение $x = 0$), $x + 1 = 0$ (корень $x = -1$) и $x - 2 = 0$ (решение $x = 2$).

Следовательно, в таких трех точках x значение функции равно нулю.

Ответ: а) $x = 0$ и $x = -4$; б) нет; в) $x = 0$, $x = -1$ и $x = 2$.

3) а) $y = \sqrt{x+2}$; $x = -2$; б) $y = \sqrt{x^2-1}$; $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; в) $y = \sqrt{x^2+1}$, нет нулей функции.

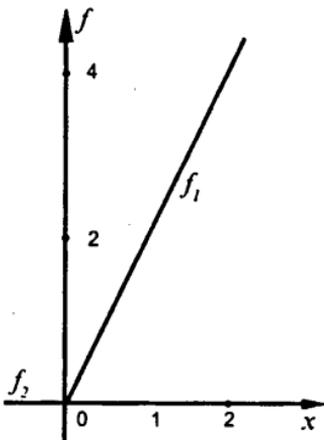
4. Для построения графика функции $f(x) = x + |x|$ воспользуемся определением модуля

числа: $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$. Тогда получаем

$$f(x) = \begin{cases} x+x, & \text{если } x \geq 0 \\ x-x, & \text{если } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Видно, что график функции состоит из двух частей: $f_1 = 2x$ при $x \geq 0$ и $f_2 = 0$ при $x < 0$.

Построим эти части в указанных промежутках. Опишем свойства данной функции, которые следуют из графика.



а) Область определения функции – любые значения x ; область значений функции f – все неотрицательные значения, т.е. $f \geq 0$.

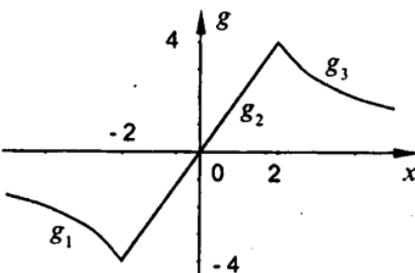
б) Функция $f(x)$ возрастает при $x \geq 0$. Наименьшее значение функции $f = 0$.

5. Сначала построим график данной функции. Он состоит из трех частей: $g_1 = \frac{8}{x}$ при $x < -2$, $g_2 = 2x$ при $-2 \leq x \leq 2$ и $g_3 = \frac{8}{x}$ при $x > 2$. Построим эти части в указанных промежутках. Из графика следуют следующие свойства функции.

а) Область определения функции – все значения x ; область значений функции – $-4 \leq g \leq 4$.

б) Функция $g(x)$ убывает при $x < -2$ и $x > 2$, возрастает при $-2 \leq x \leq 2$.

в) Наименьшее значение функции $g = -4$ и достигается при $x = -2$, наибольшее значение функции $g = 4$ и достигается при $x = 2$.



С-4. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график

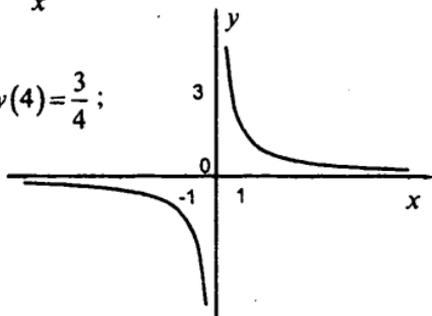
1. $y = \frac{3}{x}$; $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

а) $y(-4) = -\frac{3}{4}$; $y(-2) = -\frac{3}{2}$; $y(2) = \frac{3}{2}$; $y(4) = \frac{3}{4}$;

б) $-3 = \frac{3}{x}$; $x = -1$; $-2 = \frac{3}{x}$; $x = -\frac{3}{2}$;

$2 = \frac{3}{x}$; $x = \frac{3}{2}$; $3 = \frac{3}{x}$; $x = 1$;

в) $y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$.



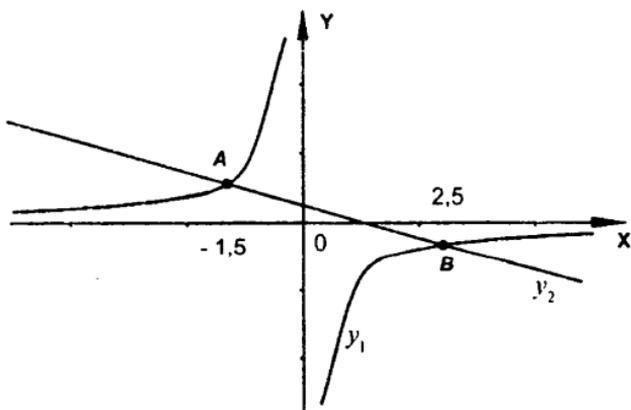
2. $y = \frac{126}{x}$; а) $21 = \frac{126}{6}$ — верно, значит, точка A принадлежит графику;

б) $-42 = \frac{126}{-3}$ — верно, значит, точка B принадлежит графику;

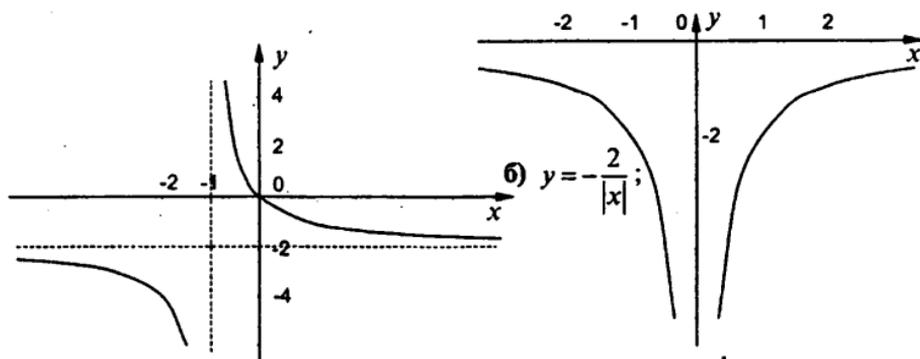
в) $-126 = \frac{126}{0}$ — неверно, значит, точка C не принадлежит графику;

г) $14 = \frac{126}{-9}$ — неверно, значит, точка D не принадлежит графику.

3. Для графического решения уравнения $-\frac{4}{x} = -x + 1$ построим графики функций $y = -\frac{4}{x}$ (гипербола) и $y_2 = -x + 1$ (прямая). Видно, что эти графики пересекаются в двух точках A и B . Абсциссы этих точек $x_1 \approx -1,5$ и $x_2 \approx 2,5$, соответственно, являются корнями данного уравнения.



4. а) График функции $y = \frac{2}{x+1} - 2$ получается из графика функции $y = \frac{2}{x}$ при его смещении на одну единицу влево и на две единицы вниз.



5. Обратная пропорциональная зависимость имеет вид $y = \frac{k}{x}$. Известно, что график этой функции проходит через точку $A(-16; 0,5)$. Поэтому подставим значения $x = -16$ и $y = 0,5$ в формулу для функции. Получаем: $-0,5 = \frac{k}{-16}$. Найдем коэффициент $k = -0,5 \cdot (-16) = 8$. Следовательно, данная функция $y = \frac{8}{x}$.

С-5. Квадратный трехчлен и его корни

1. 1) а) $x^2 - 5x + 6 = 0$, $D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$; $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$; $x_2 = 2$; б) $-y^2 - 3y + 4 = 0$, $y^2 + 3y - 4 = 0$;
 $D = 9 + 4 \cdot 4 = 25$; $y_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$; $y_2 = -4$; в) $7a^2 - 21a + 14 = 0$; $a^2 - 3a + 2 = 0$;
 $D = 9 - 4 \cdot 2 = 1$; $a_1 = \frac{3+1}{2} = 2$; $a_2 = 1$; г) $6b^2 - 12 = 0$; $b^2 - 4 = 0$; $b_{1,2} = \pm 2$.

Ответ: а) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$; б) $y_1 = 1$, $y_2 = -4$; в) $a_1 = 2$, $a_2 = 1$; г) $b_1 = -2$, $b_2 = 2$.

- 2) а) Для решения квадратного уравнения $2y^2 - y - 6 = 0$ используем формулу Виета. Найдем его дискриминант $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 1 + 48 = 49 = 7^2$ и его

$$\text{корни } y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 7}{4}, \text{ т.е. } y_1 = \frac{1+7}{4} = 2 \text{ и } y_2 = \frac{1-7}{4} = -1,5.$$

- б) Для решения квадратного уравнения $6a^2 + 5a + 1 = 0$ также используем формулу Виета. Находим дискриминант этого уравнения $D = 5^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1 = 1^2$

$$\text{и его корни } a = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{-5 \pm 1}{12}, \text{ т.е. } a_1 = \frac{-5+1}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3} \text{ и } a_2 = \frac{-5-1}{12} = -\frac{1}{2}.$$

- в) Квадратное уравнение $0,3x^2 + 0,1x = 0$ является неполным. Поэтому его удобно решать, раскладывая левую часть на множители. Вынесем x за скобки: $x(0,3x + 0,1) = 0$. Произведение двух множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Поэтому получаем два линейных уравнения: $x = 0$ (решение $x_1 = 0$) и $0,3x + 0,1 = 0$ (откуда $0,3x = -0,1$ и $x_2 = \frac{-0,1}{0,3} = -\frac{1}{3}$).

г) Квадратное уравнение $c^2 - 3 = 0$ также является неполным. Разложим его левую часть на множители, используя формулу для разности квадратов чисел: $(c - \sqrt{3})(c + \sqrt{3}) = 0$. Произведение двух множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $c - \sqrt{3} = 0$ (решение $c_1 = \sqrt{3}$) и $c + \sqrt{3} = 0$ (корень $c_2 = -\sqrt{3}$).

Ответ: а) $y_1 = 2$ и $y_2 = -1,5$; б) $a_1 = -\frac{1}{3}$ и $a_2 = -\frac{1}{2}$; в) $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{1}{3}$; г) $c_1 = \sqrt{3}$ и $c_2 = -\sqrt{3}$.

3) а) $0,5x^2 - x - 0,5 = 0$; $x^2 - 2x - 1 = 0$; $D = 4 + 4 = 8$; $x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$;

б) $-50a^2 + 5a + 1 = 0$; $50a^2 - 5a - 1 = 0$; $D = 25 + 4 \cdot 50 = 225$; $a_1 = \frac{5+15}{100} = 0,2$; $a_2 = -0,1$;

в) $36b^2 + 12b - 1 = 0$; $D = 144 + 4 \cdot 36 = 2 \cdot 144$; $b_{1,2} = \frac{-12 \pm 12\sqrt{2}}{2 \cdot 36} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{6}$.

Ответ: а) $1 \pm \sqrt{2}$; б) $a_1 = 0,2$, $a_2 = -0,1$; в) $\frac{-1 \pm \sqrt{2}}{6}$.

2. 1) Выделим квадрат двучлена из квадратного трехчлена.

а) В выражении $x^2 - 6x + 11$ запишем член $(-6x)$ в виде $-2 \cdot x \cdot 3$. Тогда понятно, что вторым числом является число 3. К данному выражению прибавим и вычтем квадрат этого числа, т.е. 3^2 . Получаем: $x^2 - 6x + 11 = (x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) - 3^2 + 11 = (x - 3)^2 - 9 + 11 = (x - 3)^2 + 2$.

б) В выражении $2y^2 - 4y - 1$ прежде всего вынесем число 2 за скобки:

$2y^2 - 4y - 1 = 2\left(y^2 - 2y - \frac{1}{2}\right)$. Запишем член $(-2y)$ в виде $-2 \cdot y \cdot 1$. Тогда понятно, что вторым числом является число 1. К выражению в скобках прибавим и вычтем квадрат этого числа, т.е. 1^2 . Получаем: $2\left((y^2 - 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2) - 1^2 - \frac{1}{2}\right) = 2\left((y-1)^2 - 1 - \frac{1}{2}\right) = 2\left((y-1)^2 - \frac{3}{2}\right)$. Теперь

раскроем внешние скобки в этом выражении. Имеем: $2(y - 1)^2 - 3$.

Следовательно, был выделен квадрат двучлена: $2y^2 - 4y - 1 = 2(y - 1)^2 - 3$.

в) Учтем, что $-2a = -2 \cdot a \cdot 1$. Поэтому вторым числом является число 1. Поэтому к данному выражению прибавим и вычтем квадрат этого числа, т.е. 1^2 . Получаем: $a^2 - 2a = (a^2 - 2 \cdot a \cdot 1 + 1^2) - 1^2 = (a - 1)^2 - 1$.

Ответ: а) $(x - 3)^2 + 2$; б) $2(y - 1)^2 - 3$; в) $(a - 1)^2 - 1$.

2) а) $-y^2 + 4y + 1 = -(y^2 - 4y - 1) = -(y^2 - 4y + 4 - 5) = -(y - 2)^2 + 5$;

б) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 5 = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 15) = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 9 + 6) = \frac{1}{3}(x - 3)^2 + 2$.

3. а) В квадратном трехчлене $y^2 - 4y + 7$ выделим квадрат двучлена. Учтем, что $-4y = -2 \cdot y \cdot 2$. Тогда вторым числом является число 2. Поэтому к данному

выражению прибавим и вычтем квадрат этого числа, т.е. 2^2 . Получаем:
 $y^2 - 4y + 7 = (y^2 - 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2) - 2^2 + 7 = (y - 2)^2 - 4 + 7 = (y - 2)^2 + 3$. При любых значениях y величина $(y - 2)^2$ неотрицательная, т.е. $(y - 2)^2 \geq 0$. Поэтому выражение $(y - 2)^2 + 3$ положительно при всех y , что и требовалось доказать.

$$\text{б) } -y^2 + 6y - 12 = -(y^2 - 6y + 12) = -(y^2 - 6y + 9 + 3) = -(y - 3)^2 - 3 < 0.$$

Ответ: а) доказано; б) доказано.

$$4. \text{ а) } a^2 - 10a + 27; a_0 = \frac{10}{2} = 5; \text{ б) } -a^2 - 6a - 15; a_0 = \frac{6}{-2} = -3.$$

Ответ: а) $a_0 = 5$; б) $a_0 = -3$.

5. После уменьшения большей стороны 5 см на a см она стала равна $(5 - a)$ см.

После увеличения меньшей стороны 3 см на a см она стала равна $(3 + a)$ см.

При этом площадь прямоугольника S равна произведению его сторон, т.е.

$$(5 - a)(3 + a) = 15 + 2a - a^2. \text{ Выделим в этом квадратном трехчлене квадрат двучлена: } S = -(a^2 - 2a - 15) = -((a^2 - 2a + 1) - 1 - 15) = -((a - 1)^2 - 16) =$$

$$= 16 - (a - 1)^2. \text{ При любом значении } a \text{ выражение } (a - 1)^2 \text{ неотрицательно, т.е.}$$

$$(a - 1)^2 \geq 0. \text{ Тогда величина } -(a - 1)^2 \leq 0 \text{ и выражение } 16 - (a - 1)^2 \leq 16.$$

Очевидно, что наибольшее значение этого выражения будет при $a = 1$ и будет составлять величину $S = 16$. Следовательно, наибольшая площадь получившегося прямоугольника будет при $a = 1$ см.

Ответ: $a = 1$ см.

С-6. Разложение квадратного трехчлена на множители

$$1. \text{ 1) а) } x^2 - 7x + 12 = 0; D = 49 - 4 \cdot 12 = 1; x_1 = \frac{7+1}{2} = 4; x_2 = 3; x^2 - 7x + 12 =$$

$$= (x - 4)(x - 3); \text{ б) } 5x^2 - 5x - 10 = 0; x^2 - x - 2 = 0; D = 1 + 4 \cdot 2 = 9;$$

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2; x_2 = -1; 5x^2 - 5x - 10 = 5(x - 2)(x + 1);$$

$$\text{в) } 4x^2 - 144x = (2x - 12)(2x + 12); \text{ г) } 10x^2 + 29x - 30 = 0; D = 841 + 40 \cdot 30.$$

2) а) Чтобы разложить квадратный трехчлен $x^2 - 2x - 63$ на множители, найдем его корни. Для этого решим квадратное уравнение $x^2 - 2x - 63 = 0$. Найдем его дискриминант $D_1 = k^2 - ac = (-1)^2 - 1 \cdot (-63) = 1 + 63 = 64 = 8^2$ (т.к. $a = 1$,

$$k = \frac{b}{2} = -1, c = -63) \text{ и корни } x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{8^2}}{1} = 1 \pm 8, \text{ т.е. } x_1 = 9 \text{ и } x_2 = -7.$$

Теперь по формуле $a(x - x_1)(x - x_2)$ разложим квадратный трехчлен на множители. Получаем: $1 \cdot (x - 9)(x - (-7)) = (x - 9)(x + 7)$.

б) Сначала найдем корни квадратного трехчлена $6x^2 + 5x - 4$. Вычисляем дискриминант $D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-4) = 25 + 96 = 121 = 11^2$ (т.к. $a = 6$,

$$b = 5, c = -4) \text{ и корни } x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{11^2}}{2 \cdot 6} = \frac{-5 \pm 11}{12}, \text{ т.е. } x_1 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ и}$$

$$x_2 = \frac{-16}{12} = -\frac{4}{3}. \text{ Теперь разложим квадратный трехчлен:}$$

$$6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \left(-\frac{4}{3}\right)\right) = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right).$$

Число 6 можно представить в виде произведения $6 = 2 \cdot 3$ и внести эти множители в скобки. Имеем:

$$6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right) = 2 \cdot 3 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right) = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 \cdot \left(x + \frac{4}{3}\right) =$$

$$= \left(2x - 2 \cdot \frac{1}{2}\right)\left(3x + 3 \cdot \frac{4}{3}\right) = (2x - 1)(3x + 4).$$

в) В данном выражении $17x^2 - 425$ вынесем общий множитель 17 за скобки и разложим разность квадратов чисел на множители: $17x^2 - 425 = 17(x^2 - 25) = 17(x^2 - 5^2) = 17(x - 5)(x + 5)$.

г) В выражении $5x^2 - 30x + 35$ вынесем общий множитель 5 за скобки: $5x^2 - 30x + 35 = 5(x^2 - 6x + 7)$. Теперь разложим квадратный трехчлен $x^2 - 6x + 7$ на множители. Найдем его корни. Определим дискриминант $D_1 = k^2 - ac = (-3)^2 - 1 \cdot 7 = 9 - 7 = 2$ и

корни $x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{1} = 3 \pm \sqrt{2}$. Теперь по формуле $a(x - x_1)(x - x_2)$ раскладываем квадратный трехчлен: $x^2 - 6x + 7 = 1 \cdot (x - (3 + \sqrt{2})) \cdot$

$(x - (3 - \sqrt{2})) = (x - 3 - \sqrt{2})(x - 3 + \sqrt{2})$. Тогда данное выражение имеет вид: $5x^2 - 30x + 35 = 5(x - 3 - \sqrt{2})(x - 3 + \sqrt{2})$.

Ответ: а) $(x - 9)(x + 7)$; б) $(2x - 1)(3x + 4)$; в) $17(x - 5)(x + 5)$;

г) $5(x - 3 - \sqrt{2})(x - 3 + \sqrt{2})$.

2) 1) Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ нельзя представить в виде произведения многочленов первой степени, если этот квадратный трехчлен не имеет действительных корней, т.е. если его дискриминант отрицательный. Проверим это.

а) Найдем дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - 3x + 4$. Получаем: $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 - 16 = -7 < 0$. Тогда этот трехчлен не раскладывается на множители.

б) Найдем дискриминант квадратного трехчлена $-2x^2 + 4x - 7$. Имеем $D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-7) = 16 - 56 = -40 < 0$. Следовательно, этот трехчлен также не раскладывается на множители.

2) а) $x^2 - 10x + 27 = 0$; $D = 100 - 4 \cdot 27 < 0$; б) $-7x^2 + 6x - 2 = 0$; $7x^2 - 6x + 2 = 0$; $D = 36 - 47 \cdot 2 < 0$; в) $x^2 + 1 = 0$; $D = -4 < 0$.

3.1) а) $\frac{a^2 - 4}{7a + 14} = \frac{(a - 2)(a + 2)}{7(a + 2)} = \frac{a - 2}{7}$; б) $\frac{b^2 - b - 6}{9b + 18} = \frac{(b - 3)(b + 2)}{9(b + 2)} = \frac{b - 3}{9}$;

$D = 1 + 4 \cdot 6 = 25$; $b_1 = \frac{1 + 5}{2} = 3$, $b_2 = -2$; в) $\frac{7 + 6c - c^2}{21 - 3c} = \frac{c^2 - 6c - 7}{3c - 21}$

$= \frac{c^2 - 6c + 9 - 16}{3(c - 7)} = \frac{(c - 3)^2 - 4^2}{3(c - 7)} = \frac{(c - 3 - 4)(c - 3 + 4)}{3(c - 7)} = \frac{(c - 7)(c + 1)}{3(c - 7)} = \frac{c + 1}{3}$.

2) Чтобы сократить дробь, надо разложить числитель и знаменатель на множители.

а) Числитель дроби разложим на множители, используя формулу разности квадратов чисел: $y^2 - 49 = y^2 - 7^2 = (y - 7)(y + 7)$. Найдем корни знаменателя $y^2 + 5y - 14$. Получаем $y_1 = -7$ и $y_2 = 2$. Теперь разложим квадратный трехчлен на множители: $y^2 + 5y - 14 = (x + 7)(y - 2)$. Наконец, сократим данную дробь:

$$\frac{y^2 - 49}{y^2 + 5y - 14} = \frac{(y - 7)(y + 7)}{(y + 7)(y - 2)} = \frac{y - 7}{y - 2}.$$

б) В числителе дроби вынесем сначала общий множитель x за скобки: $x^3 + x^2 - 72x = x(x^2 + x - 72)$. Теперь найдем корни квадратного трехчлена: $x^2 + x - 72$. Получаем: $x_1 = -9$ и $x_2 = 8$. Тогда имеем: $x^2 + x - 72 = (x + 9)(x - 8)$. Поэтому числитель дроби имеет вид: $x(x + 9)(x - 8)$. В знаменателе дроби вынесем общий множитель 9 за скобки: $9x - 72 = 9(x - 8)$. Теперь можно сократить дробь: $\frac{x^3 + x^2 - 72x}{9x - 72} = \frac{x(x + 9)(x - 8)}{9(x - 8)} = \frac{x(x + 9)}{9}$.

в) В числителе дроби вынесем общий множитель a за скобки: $5a - a^2 = a(5 - a)$. Найдем корни квадратного трехчлена $5 + 34a - 7a^2 = -7a^2 + 34a + 5$. Определим дискриминант $D = b^2 - 4ac = 34^2 - 4 \cdot (-7) \cdot 5 = 1156 + 140 = 1296 = 36^2$ и корни $a = \frac{-34 \pm \sqrt{36^2}}{2 \cdot (-7)} = \frac{-34 \pm 36}{-14}$, т.е. $a_1 = \frac{2}{-14} = -\frac{1}{7}$ и $a_2 = \frac{-70}{-14} = 5$. Тогда знаменатель имеет вид: $-7a^2 + 34a + 5 = -7\left(a + \frac{1}{7}\right) \cdot (a - 5) = (7a + 1)(5 - a)$. Теперь сократим дробь: $\frac{5a - a^2}{5 + 34a - 7a^2} = \frac{a(5 - a)}{(7a + 1)(5 - a)} = \frac{a}{7a + 1}$.

Ответ: а) $\frac{y - 7}{y - 2}$; б) $\frac{x(x + 9)}{9}$; в) $\frac{a}{7a + 1}$.

$$4. 1) \frac{y^2 - 11y - 26}{9y + 18} = \frac{(y - 13)(y + 2)}{9(y + 2)} = \frac{y - 13}{9} = f(x);$$

$$y^2 - 11y - 26 = 0; D = 121 + 4 \cdot 26 = 225; y_1 = \frac{11 + 15}{2} = 13; y_2 = -2;$$

$$f(-5) = \frac{-5 - 13}{9} = -2; f(31) = \frac{31 - 13}{9} = 2; f(112) = \frac{112 - 13}{9} = 9.$$

$$2) \frac{x^2 - 18x + 80}{5x - 50} = \frac{x^2 - 18x + 81 - 1}{5(x - 10)} = \frac{(x - 9)^2 - 1}{5(x - 10)} = \frac{(x - 9 - 1)(x - 9 + 1)}{5(x - 10)} = \frac{(x - 10)(x - 8)}{5(x - 10)} = \frac{x - 8}{5} = f(x);$$

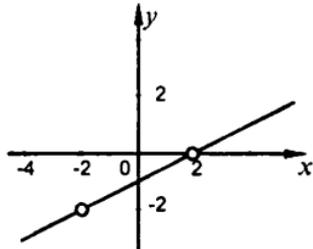
$$f(-12) = \frac{-12 - 8}{5} = -4; f(8,5) = \frac{8,5 - 8}{5} = 0,1; f(48) = \frac{48 - 8}{5} = 8.$$

5. Чтобы упростить данное выражение, разложим знаменатель второй дроби на множители: $a^2 + 2a - 15 = (a + 5)(a - 3)$ и вычтем дроби:

$$\begin{aligned} \frac{8a-3}{a+5} - \frac{40-27a}{a^2+2a-15} &= \frac{8a-3}{a+5} - \frac{40-27a}{(a+5)(a-3)} = \frac{(8a-3)(a-3) - (40-27a)}{(a+5)(a-3)} = \\ &= \frac{8a^2 - 24a - 3a + 9 - 40 + 27a}{(a+5)(a-3)} = \frac{8a^2 - 31}{(a+5)(a-3)} = \frac{8a^2 - 31}{a^2 + 2a - 15}. \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{2x^2 - 8} = \frac{x^2(x-2) - 4(x-2)}{2(x^2-4)} = \\ &= \frac{(x-2)(x^2-4)}{2(x^2-4)} = \frac{x-2}{2}; x \neq \pm 2. \end{aligned}$$



С-7. Функция $y = x^2$, ее график и свойства

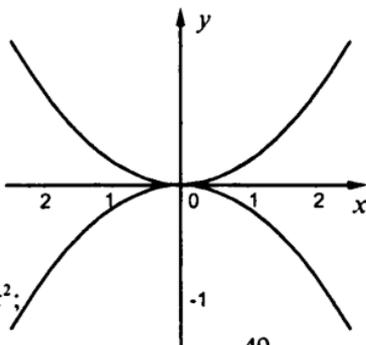
1. $f(x) = \frac{1}{5}x^2$

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
y	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{16}{5}$	5

$$f(-2,5) = f(2,5) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4};$$

$$f(-3,5) = f(3,5) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{20}; g(x) = -\frac{1}{5}x^2;$$

$$g(-2,5) = g(2,5) = -f(2,5) = -\frac{5}{4}; g(-3,5) = g(3,5) = -f(3,5) = -\frac{49}{20}.$$



2. а) Найдем координаты точек пересечения графика функции $y = 2x^2$ и прямой $y = 200$. Очевидно, что точки пересечения принадлежат двум графикам. Поэтому координаты этих точек удовлетворяют уравнениям данных функций $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 200 \end{cases}$. Для решения такой системы уравнений подставим второе уравнение

в первое и получим: $200 = 2x^2$. Решим это квадратное уравнение: $0 = 2x^2 - 200$ или $0 = x^2 - 100$ или $0 = (x - 10)(x + 10)$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x - 10 = 0$ (корень $x_1 = 10$) и $x + 10 = 0$ (решение $x_2 = -10$). Ординаты точек пересечения находим из второго уравнения системы: $y = 200$. Итак: графики функций пересекаются в двух точках с координатами: $(10; 200)$ и $(-10; 200)$.

Ответ: $(10; 200)$ и $(-10; 200)$.

б) $y = 800$, $800 = 2x^2$; $x^2 = 400$; $x_{1,2} = \pm 20$; $(20; 800)$, $(-20; 800)$.

в) Найдем координаты точек пересечения графика функции $y = 2x^2$ и прямой $y = 50x$. Следовательно, эти координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 50x \end{cases} \text{ . Для ее решения подставим второе уравнение в первое: } 50x = 2x^2.$$

Решим это квадратное уравнение: $0 = 2x^2 - 50x$ или $0 = 2x(x - 25)$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из них равен нулю.

Получаем два линейных уравнения: $x = 0$ (решение $x_1 = 0$) и $x - 25 = 0$ (решение $x_2 = 25$). Соответствующие значения ординат найдем из второго уравнения системы: $y = 50x$: $y_1 = 50 \cdot 0 = 0$ и $y_2 = 50 \cdot 25 = 1250$. Итак, графики данных функций пересекаются в двух точках с координатами: $(0; 0)$ и $(25; 1250)$.

г) $y = -3200x$, $-3200x = 2x^2$; $x_1 = 0$; $x_2 = -1600$; $(0; 0)$, $(-1600; 5120000)$.

Ответ: а) $(10; 200)$ и $(-10; 200)$; б) $(20; 800)$ и $(-20; 800)$; в) $(0; 0)$ и $(25; 1250)$; г) $(0; 0)$ и $(-1600; 5120000)$.

3. Для того, чтобы определить, принадлежит ли данная точка графику функции $y = -25x^2$, подставим абсциссу этой точки в формулу для нахождения функции и вычислим значение y . Если ордината точки равна этому значению y , то точка принадлежит графику функции; если не равна значению y , то точка не принадлежит графику.

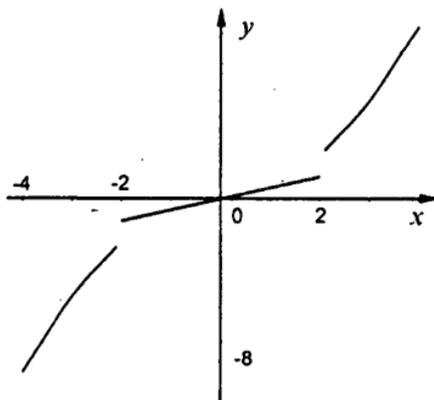
а) Для точки $A(-2; -100)$ найдем значение функции при $x = -2$: $y = -25 \cdot (-2)^2 = -25 \cdot 4 = -100$. Видим, что полученное значение y равно ординате точки A . Следовательно, эта точка принадлежит графику функции.

б) Для точки $B(2; 100)$ найдем значение функции при $x = 2$: $y = -25 \cdot 2^2 = -25 \cdot 4 = -100$. Видим, что полученное значение y не равно ординате точки B , т.к. $-100 \neq 100$. Поэтому эта точка не принадлежит графику функции.

в) $C(\frac{1}{5}; -1)$; $-1 = -25 \cdot \frac{1}{5^2}$ - верно, значит, принадлежит.

Ответ: а) да; б) нет; в) да.

4. График данной функции состоит из трех частей: параболы $y_1 = x^2$ при $x > 2$, прямой $y_2 = x$ при $-2 \leq x \leq 2$ и параболы $y_3 = -x^2$ при $x < -2$. Построим графики этих функций в указанных промежутках. При $x = 2$ значение функции y_2 существует и равно $y_2 = 2$, а значение функции y_1 не существует (т.к. эта функция существует только при $x > 2$).



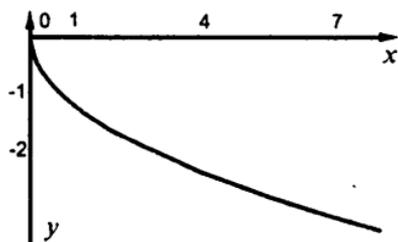
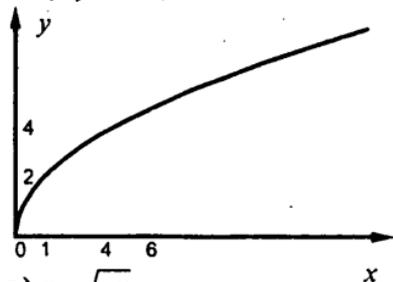
5. а) $y = \frac{1}{3}x^2$, $x \in [-3; 6]$; $y_{\min} = y(0) = 0$; $y_{\max} = y(6) = \frac{1}{3} \cdot 6^2 = 12$;

б) $y = -\frac{1}{4}x^2$, $x \in [-2; 8]$; $y_{\min} = y(8) = -\frac{1}{4} \cdot 8^2 = -16$; $y_{\max} = y(0) = 0$.

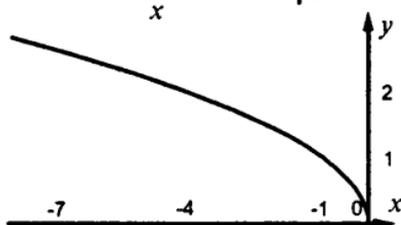
6. $h = \frac{9t^2}{2}$; $120 = \frac{10 \cdot t^2}{2}$; $12 = \frac{t^2}{2}$; $t^2 = 24$; $t = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ (с).

7. а) $y = 2\sqrt{x}$;

б) $y = -\sqrt{x}$;



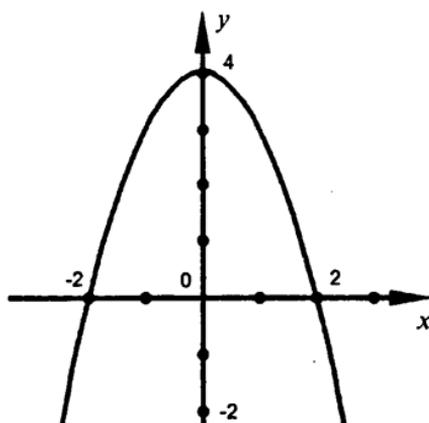
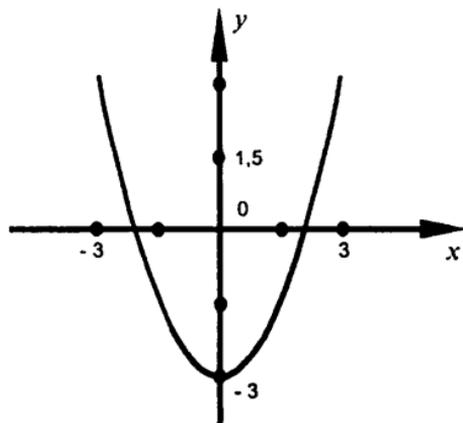
в) $y = \sqrt{-x}$.



С-8. График квадратичной функции

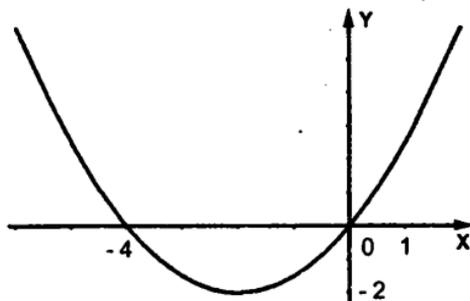
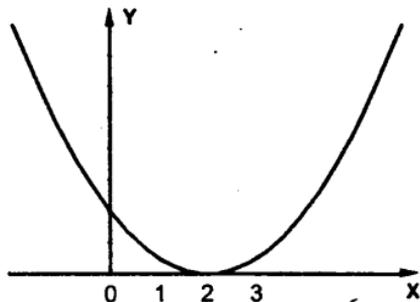
1. а) $y = x^2 - 3$;

б) $y = -x^2 + 4$;



$$в) y = (x-2)^2;$$

г) График функции $y = (x+2)^2 - 4$ получается из графика $y = x^2$ при его смещении на две единицы влево и на четыре единицы вниз.



2. а) $f(x) = x^2 - 6x + 4$; $m = \frac{6}{2} = 3$; $n = f(3) = 9 - 18 + 4 = -5$; $(3; -5)$;

б) $f(x) = -x^2 - 4x + 1$; $m = \frac{4}{-2} = -2$; $n = f(-2) = -4 + 8 + 1 = 5$; $(-2; 5)$;

в) Найдем координаты вершины параболы $f(x) = 3x^2 - 12x + 2$. Как известно,

абсцисса m вершины параболы $f(x) = ax^2 + bx + c$ ищется по формуле $m = -\frac{b}{2a}$.

В нашем случае $a = 3$ и $b = -12$, поэтому $m = -\frac{-12}{2 \cdot 3} = \frac{12}{6} = 2$. Ордината

вершины параболы равна значению функции при $x = m$, т.е. $y = f(m)$. Получаем:

$$n = f(m) = f(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 2 = 3 \cdot 4 - 24 + 2 = 12 - 24 + 2 = -10.$$

Следовательно, координаты вершины параболы $(2; -10)$.

Ответ: $(2; -10)$.

3. $f(x) = x^2 - 6x + 4$;

а) $x_1 = 0,7$; $x_2 = 5,2$;

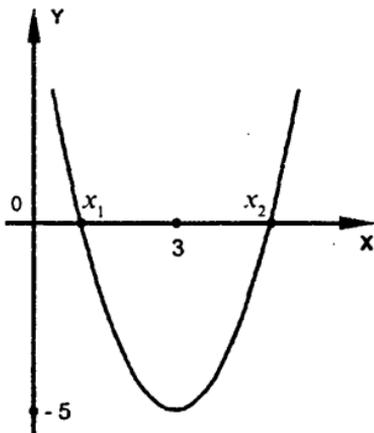
$$f(x) > 0 \text{ при } x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty);$$

$$f(x) < 0 \text{ при } x \in (x_1; x_2)$$

б) $f(x)$ возрастает при $x \in [3; +\infty)$;

$$f(x) \text{ убывает при } x \in (-\infty; 3];$$

$$f_{\min} = -5$$



4. $f(x) = -x^2 - 4x + 1$;

а) $x_1 = -4, 2$; $x_2 = 0, 2$;

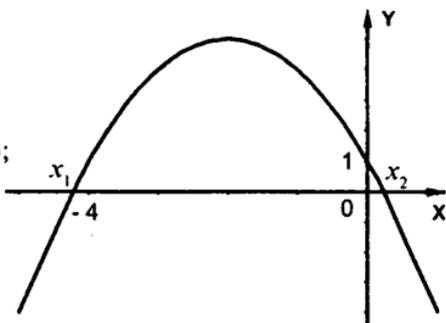
$f(x) > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$;

$f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;

б) $f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -2]$;

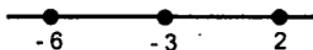
$f(x)$ убывает при $x \in [-2; +\infty)$;

$f_{\max} = 5$.



5. $y = x^2 + 6x + 5$, $x \in [-6; 2]$; $m = -\frac{6}{2} = -3$; $n = f(-3) = 9 - 18 + 5 = -4$;

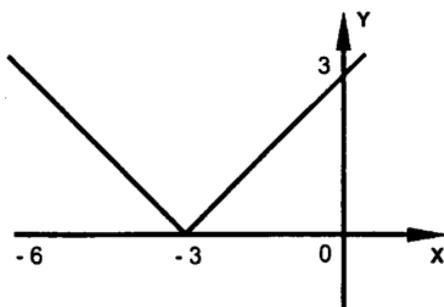
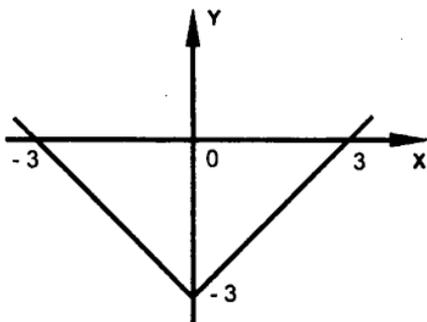
$(-3; -4)$; $y(2) = 4 + 12 + 5 = 21$; $E(y) = [-4; 21]$.



Ответ: $E(y) = [-4; 21]$.

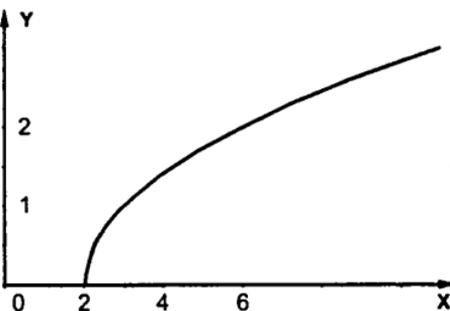
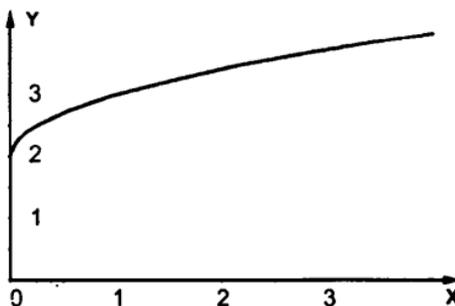
6. а) $y = |x| - 3$;

б) $y = |x + 3|$;



в) $y = \sqrt{x} + 2$;

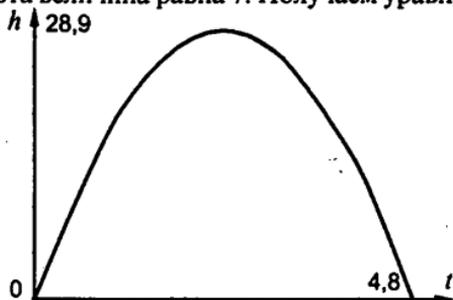
г) $y = \sqrt{x - 2}$.



7. Задача решается аналогично предыдущей. Абсцисса вершины параболы $f(x) = ax^2 + bx + c$ ищется по формуле $m = -\frac{b}{2a}$. Для данной параболы $y = x^2 + bx + c$ коэффициент $a = 1$. Поэтому $m = -\frac{b}{2}$. По условию задачи точка $M(5; 7)$ — вершина параболы. Значит, абсцисса вершины параболы $m = 5$. Получаем уравнение $5 = -\frac{b}{2}$, откуда $b = -10$. Ордината вершины параболы равна значению функции при $x = m$, т.е. $y = 5^2 + (-10) \cdot 5 + c = 25 - 50 + c = -25 + c$. По условию задачи эта величина равна 7. Получаем уравнение $-25 + c = 7$, откуда $c = 32$.

Ответ: $b = -10$; $c = 32$.

8. $h = 24t - 5t^2$;



1) $h_0 = 28,8$; 2) мяч поднимался вверх при $t \in [0; 2,4]$, опускался вниз при $t \in [2,4; 4,8]$; 3) через 4,8 с.

С-9. Решение неравенства второй степени

1. 1) $y = 2x^2 - x - 15$; а) вверх;

2) $y = -3x^2 + 5x + 28$; а) вниз;

б) $2x^2 - x - 15 = 0$; $D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 15 = 121$;

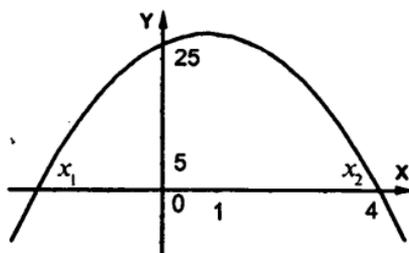
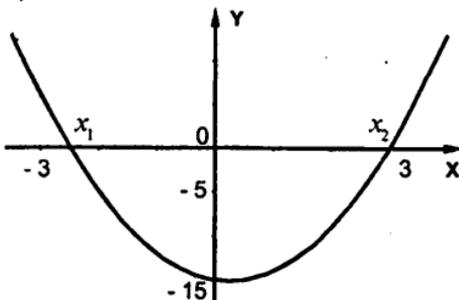
б) $3x^2 - 5x - 28 = 0$;

$$D = 25 + 12 \cdot 28 = 19^2;$$

$$x_2 = \frac{1+11}{4} = 3, x_1 = -2,5$$

$$x_2 = \frac{5+19}{6} = 4; x_1 = -\frac{7}{3}$$

в)



г) $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;

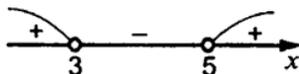
г) $y > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$;

$y < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$.

$y < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

2. а) $x^2 - 8x + 15 > 0$; $D = 64 - 60 = 4$;

$$x_1 = \frac{8+2}{2} = 5; x_2 = 3$$



Ответ: $(-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$.

б) Разложим левую часть неравенства на множители и сведем данное неравенство второй степени к двум системам линейных неравенств. Для неравенства $3x^2 + 11x - 4 < 0$ найдем корни квадратного трехчлена. Определим его дискриминант $D = b^2 - 4ac = 11^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 121 + 48 = 169 = 13^2$ и

$$\text{корни } x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-11 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 3} = \frac{-11 \pm 13}{6}, \text{ т.е. } x_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ и } x_2 = \frac{-24}{6} = -4.$$

Раскладывая квадратный трехчлен на множители, получаем неравенство:

$3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 4) < 0$ или $\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 4) < 0$. Так как произведение двух множителей отрицательно, то эти множители имеют противоположные знаки.

Возникают два случая.

$$1) \begin{cases} x - \frac{1}{3} > 0 \\ x + 4 < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x < -4 \end{cases}. \text{ Очевидно, что такая система неравенств}$$

решений не имеет.

$$2) \begin{cases} x - \frac{1}{3} < 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x > -4 \end{cases}. \text{ Значения } -4 < x < \frac{1}{3} \text{ удовлетворяют этой}$$

системе неравенств. Этот промежуток и является решением данного неравенства.

Ответ: $(-4; \frac{1}{3})$.



в) Разложим левую часть неравенства $x^2 - 9 > 0$ на множители, используя формулу для разности квадратов чисел: $(x - 3)(x + 3) > 0$. Так как произведение этих множителей положительно, то множители имеют одинаковые знаки. Поэтому возможны два случая.

$$1) \begin{cases} x - 3 < 0 \\ x + 3 < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < 3 \\ x < -3 \end{cases}. \text{ Числа } x < -3 \text{ являются решением данной}$$

системы неравенств.

$$2) \begin{cases} x - 3 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > 3 \\ x > -3 \end{cases}. \text{ Такой системе удовлетворяют значения } x > 3.$$

Объединяя решения, полученные при рассмотрении этих двух случаев, находим решение данного неравенства: $x < -3$ и $x > 3$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

г) $2x - x^2 > 0$; $x^2 - 2x < 0$; $x(x-2) < 0$.

Ответ: $(0; 2)$.

3. а) $x^2 \leq 4$; $(x-2)(x+2) \leq 0$.

Ответ: $[-2; 2]$.

б) $x^2 > 5$; $x^2 - 5 > 0$; $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) > 0$.

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.

в) $2x^2 \geq x$; $x^2 - \frac{x}{2} \geq 0$; $x(x - \frac{1}{2}) \geq 0$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [0,5; +\infty)$.

г) $-3x < 6x^2$; $-\frac{x}{2} < x^2$; $x^2 + \frac{x}{2} > 0$; $x(x + \frac{1}{2}) > 0$.

Ответ: $(-\infty; -0,5) \cup (0; +\infty)$.

4. а) Для доказательства неравенства $5a^2 - 2a + 1 > 0$ найдем дискриминант квадратного уравнения $D = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 4 - 20 = -16 < 0$. Так как дискриминант отрицательный, то квадратный трехчлен $5a^2 - 2a + 1$ не имеет корней и, следовательно, не меняет своего знака. Определим этот знак, например, при $a = 0$. Получаем: $5 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$. Следовательно, данный квадратный трехчлен положительный при всех значениях a , что и требовалось доказать.

б) $6a < a^2 + 10 > 0$; $a^2 - 6a + 10 > 0$; $D = 36 - 4 \cdot 10 < 0$; т.к. $b = 1 > 0$, то любое a — решение, ч.т.д.

5. а) $y = \sqrt{x^2 - 14x + 40}$; $x^2 - 14x + 40 \geq 0$; $D = 196 - 160 = 36$; $x_1 = \frac{14+6}{2} = 10$; $x_2 = 4$.

Ответ: а) $(-\infty; 4] \cup [10; +\infty)$;

б) $y = \frac{9}{\sqrt{8x - 2x^2}}$; $8x - 2x^2 > 0$; $2x^2 - 8x < 0$; $x^2 - 4x < 0$; $x(x-4) < 0$.

Ответ: б) $(0; 4)$.

6. а) Для того, чтобы промежуток $(1; 5)$ был множеством решений неравенства $x^2 - 6x + c < 0$, необходимо, чтобы числа 1 и 5 были корнями данного трехчлена. В этом случае выполнена теорема Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, т.е. $1 + 5 = -(-6) = 6$ и $1 \cdot 5 = 5 = c$. Легко проверить, что при $c = 5$ решением неравенства $x^2 - 6x + 5 < 0$ действительно является промежуток $(1; 5)$.

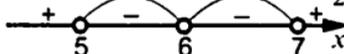
б) Чтобы промежуток $(-\infty; +\infty)$ был решением $x^2 - 6x + c < 0$, надо чтобы дискриминант квадратного трехчлена был отрицательный и значение этого

трехчлена в любой точки было также отрицательным. Найдем дискриминант $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 36 - 4c$. Решая неравенство $36 - 4c < 0$, получаем $c > 9$. Определим знак квадратного трехчлена $x^2 - 6x + c$ в любой точке, например, при $x = 0$. Получаем: $0^2 - 6 \cdot 0 + c = c$. Эта величина должна быть отрицательной, т.е. $c < 0$. Но условия $c > 9$ и $c < 0$ противоречат друг другу. Следовательно, ни при каких значениях c промежуток $(-\infty; +\infty)$ не будет решением неравенства $x^2 - 6x + c < 0$.

Ответ: а) $c = 5$; б) ни при каких c .

$$7. \frac{x^2 - 12x + 35}{(x-6)^2} < 0; x^2 - 12x + 35 = 0; D = 144 - 140 = 4; x_1 = \frac{12+2}{2} = 7; x_2 = 5; \frac{(x-7)(x-5)}{(x-6)^2} < 0$$

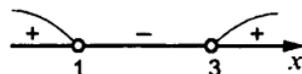
Ответ: $(5; 6) \cup (6; 7)$.



С-10. Решение неравенств методом интервалов

1. 1) а) $(x-1)(x-3) > 0$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.



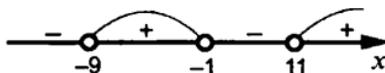
б) $(x+2)(x-5) < 0$.

Ответ: $(-2; 5)$.



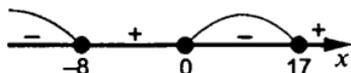
в) $(x+9)(x+1)(x-11) > 0$.

Ответ: $(-9; -1) \cup (11; +\infty)$.



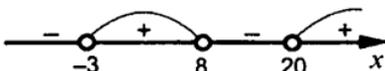
г) $x(x+8)(x-17) \leq 0$.

Ответ: $(-\infty; -8] \cup [0; 17]$.



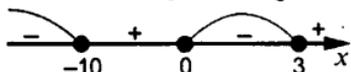
2) а) На координатной прямой отметим точки, в которых левая часть неравенства $(x+3)(x-8)(x-20) > 0$ равно нулю. Этими числами будут значения: $x_1 = -3, x_2 = 8, x_3 = 20$. Указанные точки разбивают числовую ось на четыре промежутка. В крайнем правом промежутке (т.е. при $x > 20$) все три множителя $(x+3)(x-8)$ и $(x-20)$ положительные. Поэтому их произведение также положительно, т.е. $(x+3)(x-8)(x-20) > 0$. При переходе к каждому следующему интервалу, знак данного выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения. Из рисунка видно, что неравенство выполняется при $-3 < x < 8$ и $x > 20$.

Ответ: $(-3; 8) \cup (20; +\infty)$.



б) $x(x+10)(x-3) \leq 0$.

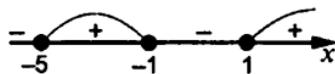
Ответ: $(-\infty; -10] \cup [0; 3]$.



в) Для решения неравенства $(x^2 - 1)(x + 5) \geq 0$ разложим первую скобку на множители, используя формулу для разности квадратов чисел: $(x+1)(x-1)(x+5) \geq 0$. На координатной прямой отметим значения x , при

которых данное выражение равно нулю: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -5$. Эти точки разбили числовую ось на четыре промежутка. В последнем интервале (т.е. при $x > 1$) все три множителя положительные и произведение их также положительное. При переходе к каждому следующему промежутку знак данного выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения. Из рисунка видно, что данное неравенство выполнено при $-5 \leq x \leq -1$ и $x \geq 1$.

Ответ: $[-5; -1] \cup [1; +\infty)$.



г) На координатной прямой отметим точки, в которых левая часть неравенства $(x^2 + 1)(x + 6)(x - 5) \leq 0$ равна нулю: $x_1 = -6$, $x_2 = 5$, (заметим, что выражение $x^2 + 1$ в нуль не обращается). Они разбивают числовую ось на три промежутка. В крайнем интервале (т.е. при $x > 5$) множители $(x + 6)$ и $(x - 5)$ положительные, а выражение $(x^2 + 1)$ всегда положительное. Поэтому произведение трех множителей положительное, т.е. $(x^2 + 1)(x + 6)(x - 5) > 0$. При переходе к каждому следующему промежутку знак этого выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков выражения. Из рисунка видно, что решением неравенства является промежуток $-6 \leq x \leq 5$.

Ответ: $[-6; 5]$.



2. 1) а) $(2x - 1)(x + 9) < 0$; $(x - \frac{1}{2})(x + 9) < 0$.

Ответ: $(-9; \frac{1}{2})$.



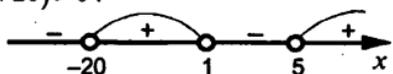
б) $(8 - x)(4x + 9) \leq 0$; $(x - 8)(x + \frac{9}{4}) \geq 0$.

Ответ: $(-\infty; -\frac{9}{4}] \cup [8; +\infty)$.



в) $-(x - 1)(5 - x)(x + 20) > 0$; $(x - 1)(x - 5)(x + 20) > 0$.

Ответ: $(-20; 1) \cup (5; +\infty)$.



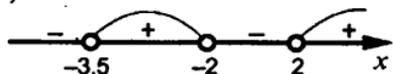
2) а) $(4x + 9)(10 - x) > 0$; $(x + \frac{9}{4})(x - 10) < 0$.

Ответ: $(-\frac{9}{4}; 10)$.



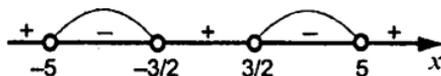
б) $(4 - x^2)(10x + 35) < 0$; $(x - 2)(x + 2)(x + 3,5) > 0$.

Ответ: $(-3,5; -2) \cup (2; +\infty)$.



$$в) (4x^2 - 9)(25 - x^2)(3x^2 + 2) > 0; (x^2 - \frac{9}{4})(x^2 - 25) < 0;$$

$$(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2})(x - 5)(x + 5) < 0.$$



$$\text{Ответ: } (-5; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; 5).$$

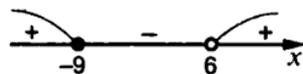
$$3. 1) а) \frac{x-3}{x+7} < 0.$$

$$\text{Ответ: } (-7; 3).$$



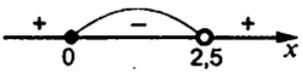
$$б) \frac{x+9}{x-6} \geq 0.$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -9] \cup (6; +\infty).$$



$$в) \frac{7x}{4x-10} \leq 0; \frac{x}{x-2,5} \leq 0.$$

$$\text{Ответ: } [0; 2,5).$$



$$2) а) \frac{2x-10}{x+8} < 0; \frac{x-5}{x+8} < 0.$$

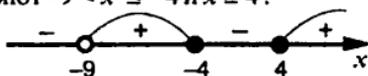
$$\text{Ответ: } (-8; 5).$$



б) Для решения неравенства $\frac{x^2-16}{x+9} \geq 0$ разложим числитель дроби на множители $\frac{(x-4)(x+4)}{x+9} \geq 0$. На координатной прямой ответим значения x , при которых числитель и знаменатель дроби равны нулю: $x_1 = 4, x_2 = -4, x_3 = -9$.

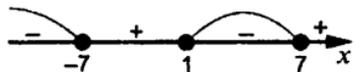
Эти точки разбили числовую ось на четыре интервала. В крайнем промежутке (т.е. при $x > 4$) выражения $(x-4), (x+4), (x+9)$ положительные, поэтому данная дробь также положительная. При переходе к следующему интервалу знак данного выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков дроби $\frac{x^2-16}{x+9}$. Учтем, что делить на ноль нельзя, поэтому $x \neq -9$. Из рисунка видно, что неравенству удовлетворяют $-9 < x \leq -4$ и $x \geq 4$.

$$\text{Ответ: } (-9; -4] \cup [4; +\infty).$$



$$в) \frac{(x-1)(x^2-49)}{x^2+8} \leq 0; (x-1)(x-7)(x+7) \leq 0.$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -7] \cup [1; 7].$$



$$4. а) y = \sqrt{(10-x)(x+21)}; (10-x)(x+21) \geq 0;$$

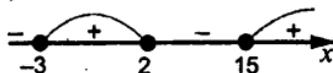
$$(x-10)(x+21) \leq 0.$$

$$\text{Ответ: } [-21; 10].$$



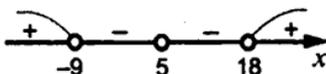
$$б) y = \sqrt{(x-2)(x-15)(x+3)}; (x-2)(x-15)(x+3) \geq 0.$$

$$\text{Ответ: } [-3; 2] \cup [15; +\infty).$$



$$5. а) (x+9)(x-5)^2(x-18) > 0.$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -9) \cup (18; +\infty).$$

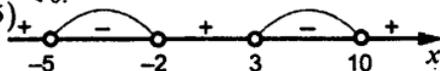


$$б) \frac{x^2 - 13x + 30}{x^2 + 7x + 10} < 0; x^2 - 13x + 30 = 0; D = 169 - 4 \cdot 30 = 49; x_1 = \frac{13+7}{2} = 10; x_2 = 3;$$

$$x^2 + 7x + 10 = 0; D = 49 - 4 \cdot 10 = 9;$$

$$x_1 = \frac{-7+3}{2} = -2; x_2 = -5; \frac{(x-10)(x-3)}{(x+2)(x+5)} < 0.$$

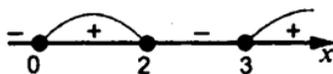
$$\text{Ответ: } (-5; -2) \cup (3; 10).$$



$$в) x^3 - 5x^2 + 6x \geq 0; x(x^2 - 5x + 6) \geq 0; x^2 - 5x + 6 = 0; D = 25 - 24 = 1;$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3; x_2 = 2; x(x-2)(x-3) \geq 0.$$

$$\text{Ответ: } [0; 2] \cup [3; +\infty).$$

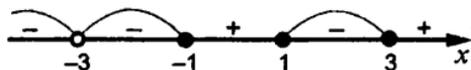


г) Прежде всего разложим числитель дроби $x^4 - 10x^2 + 9$ на множители. Для этого прежде всего найдем корни такого биквадратного выражения. Введем новую переменную $t = x^2 \geq 0$. Получаем уравнение $t^2 - 10t + 9 = 0$, корни которого $t_1 = 1$, $t_2 = 9$. Оба корня удовлетворяют условию $t \geq 0$ и являются решениями данного уравнения. Вернемся к неизвестной x и получим два простейших квадратных уравнения: $x^2 = 1$ (корни $x = \pm 1$) и $x^2 = 9$ (решения $x = \pm 3$). Теперь многочлен можно разложить на множители: $x^4 - 10x^2 + 9 = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$. Тогда неравенство $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{4x + 12} \leq 0$ имеет вид:

$$\frac{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)}{4(x+3)} \leq 0 \text{ или } (x-1)(x+1)(x-3) \leq 0 \text{ (при условии, что } x+3 \neq 0, \text{ т.е. } x \neq -3).$$

Решим это неравенство методом интервалов. Отметим точки, при которых данное выражение равно нулю: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$. На координатной прямой отметим эти точки. Они разбили числовую ось на четыре промежутка. При $x > 3$ (в последнем интервале) множители $(x-1)$, $(x+1)$, $(x-3)$ положительные. Поэтому их произведение также положительное. При переходе от одного промежутка к другому знак выражения меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков произведения $(x-1)(x+1)(x-3)$. Учтем также, что $x \neq -3$. Из рисунка видно, что решением данного неравенства являются промежутки: $x < -3$; $-3 < x \leq -1$ и $1 \leq x \leq 3$.

$$\text{Ответ: } (-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [1; 3).$$



С-11. Целое уравнение и его корни

1. а) $x^5 + 3x^6 - x^3 + 1 = 0$; $3x^6 + x^5 - x^3 + 1 = 0$ – шестая степень;

б) $(x+4)(x-7)(x+8) = 0$ – третья степень; в) $x^2(x+4) - (x-2)(x^2+1) = 3$;
 $x^3 + 4x^2 - (x^3 - 2x^2 + x - 2) - 3 = 0$; $6x^2 - x - 1 = 0$ – вторая степень;

г) В уравнении $(x^3 - 2)(3x^2 + 1) - 3(x^5 - 2) = 4$ раскроем скобки и приведем подобные члены: $3x^5 + x^3 - 6x^2 - 2 - 3x^5 + 6 = 4$ или $x^3 - 6x^2 = 0$. Видно, что наибольшая степень многочлена $x^3 - 6x^2 = 0$ равна трем. Следовательно, данное уравнение имеет третью степень (является кубическим).

Ответ: а) шестая; б) третья; в) вторая; г) третья.

2. а) $x^3 - 4x = 0$; $x(x^2 - 4) = 0$; $x(x-2)(x+2) = 0$; $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 2$.

б) Число является корнем данного уравнения, если при его подстановке в уравнение вместо неизвестной получается верное числовое равенство. Для уравнения $x^2(x+1) + (x+4) = 4$ проверим данные числа -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 . Получаем: При $x = -3$: $(-3)^2 \cdot (-3+1) + (-3+4) = 9 \cdot (-2) + 1 = -7$. Видно, что это число не равно 4. Следовательно, $x = -3$ не является корнем данного уравнения.

При $x = -2$: $(-2)^2 \cdot (-2+1) + (-2+4) = 4 \cdot (-1) + 2 = -2$. Полученное число также не равно 4. Поэтому $x = -2$ тоже не является корнем данного уравнения.

При $x = -1$: $(-1)^2 \cdot (-1+1) + (-1+4) = 1 \cdot 0 + 3 = 3$. Очевидно, что $x = -1$ также не корень данного уравнения.

При $x = 0$: $0^2 \cdot (0+1) + (0+4) = 0 \cdot 1 + 4 = 4$. Так как полученное значение левой части уравнения равно 4, то $x = 0$ – корень уравнения.

Аналогично проверяем, что числа 1 ; 2 ; 3 не являются корнями данного уравнения.

в) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; $D = 25 - 4 \cdot 4 = 9$; $x_1^2 = \frac{5+3}{2} = 4$; $x_2^2 = 1$; $x_{1,2} = \pm 2$; $x_{3,4} = \pm 1$.

Ответ: а) -2 ; 0 ; 2 ; б) число 0 ; в) -2 ; -1 ; 1 ; 2 .

3. 1) а) $(12x+1)(3x-1) - (6x+2)^2 = 10$; $36x^2 + 3x - 12x - 1 - (36x^2 + 24x + 4) - 10 = 0$;
 $-9x - 1 - 24x - 4 - 10 = 0$; $33x = -15$; $x = -\frac{15}{33}$;

б) $(3x+7)(3x-7) - 3x(3x+1) = 5$; $9x^2 - 49 - 9x^2 - 3x - 5 = 0$; $3x = -54$; $x = -18$;

в) $\frac{6x-1}{4} - \frac{3x+1}{3} = \frac{1}{4}$; $18x - 3 - 12x - 4 - 3 = 0$; $6x = 10$; $x = \frac{5}{3}$;

г) $\frac{x(2-x)}{2} + \frac{x(3+2x)}{4} = 1$; $2x(2-x) + x(3+2x) - 4 = 0$;

$$4x - 2x^2 + 3x + 2x^2 - 4 = 0; 7x - 4 = 0; x = \frac{4}{7}.$$

2) а) $(6x-1)(x+1) = 20$; $6x^2 + 5x - 21 = 0$; $D = 25 + 4 \cdot 6 \cdot 21 = 529$;

$$x_1 = \frac{-5+23}{12} = \frac{3}{2}; x_2 = \frac{-28}{12} = -\frac{7}{3};$$

б) Используя формулы сокращенного умножения, раскроем скобки и приведем подобные члены: $(x-7)(x+7) - 11x - 30 = (x+5)^2 + (x-2)^2$ или $x^2 - 49 - 11x - 30 = x^2 + 10x + 25 + x^2 - 4x + 4$ или $x^2 - 11x - 79 = 2x^2 + 6x + 29$ или $0 = (2x^2 - x^2) + (6x + 11x) + (29 + 79)$ или $0 = x^2 + 17x + 108$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения: $D = b^2 - 4ac = 17^2 - 4 \cdot 1 \cdot 108 = 289 - 432 = -143$. Так как дискриминант отрицательный, то уравнение решений не имеет.

в) Для решения уравнения $\frac{x^2}{16} - \frac{x}{8} = \frac{x+1}{3}$ умножим все члены на наименьшее общее кратное чисел 16, 8, 3, т.е. на число 48: $3x^2 - 6x = 16x + 16$ или $3x^2 - 22x - 16 = 0$. Используем формулу для корней с четным $2^{\text{м}}$ коэффициентом. Найдем дискриминант $D_1 = k^2 - ac = (-11)^2 - 3 \cdot (-16) = 121 + 48 = 169 = 13^2$ и корни уравнения $x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{11 \pm \sqrt{13^2}}{3} = \frac{11 \pm 13}{3}$, т.е. $x_1 = 8$ и $x_2 = -\frac{2}{3}$.

г) $17 - 2x + \frac{x(3x+4)}{2} = 54 \frac{1}{2}$; $34 - 4x + 3x^2 + 4x - 109 = 0$; $3x^2 = 75$; $x^2 = 25$; $x_{1,2} = \pm 5$;

Ответ: а) $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = -\frac{7}{3}$; б) решений нет; в) $x_1 = 8$ и $x_2 = -\frac{2}{3}$; г) $x_{1,2} = \pm 5$

4. а) $x - 13 = 0$; б) $(x-4)(x+11) = 0$; $x^2 + 7x - 44 = 0$; в) $(x-2)(x+2)(x-5) = 0$; $(x^2 - 4)(x-5) = 0$; $x^3 - 4x - 5x^2 + 20 = 0$; $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$.

5. а) Умножим все члены уравнения $\frac{x(x-1)}{4} + \frac{(x-3)^2}{2} = \frac{(4-x)^2}{3} - \frac{1}{3}$ на наименьшее

общее кратное чисел 4, 2, 3, т.е. на число 12. Получаем $3x(x-1) + 6(x-3)^2 = 4(4-x)^2 - 4$. Используя формулу для квадрата разности чисел, раскроем скобки и приведем подобные члены: $3x^2 - 3x + 6x^2 - 36x + 54 = 64 - 32x + 4x^2 - 4$ или $9x^2 - 39x + 54 = 4x^2 - 32x + 60$ или $5x^2 - 7x - 6 = 0$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения: $D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-6) = 49 + 120 = 169 = 13^2$

и его корни $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{13^2}}{2 \cdot 5} = \frac{7 \pm 13}{10}$, т.е. $x_1 = 2$ и $x_2 = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$.

б) $x+1 = \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{x(x+2)}{4} + \frac{x-1}{2}$; $4x+4 = 2(x^2 - 6x + 9) + x^2 + 2x + 2x - 2$; $2x^2 - 12x + 18 + x^2 + 4x - 2 - 4x - 4 = 0$; $3x^2 - 12x + 12 = 0$; $x^2 - 4x + 4 = 0$; $(x-2)^2 = 0$; $x = 2$.

Ответ: а) $x_1 = 2$ и $x_2 = -\frac{3}{5}$; б) $x = 2$.

б. а) $x^6 + 6x^4 + 7x^2 + 8 = 0$; уравнение не имеет корней, т.к. $x^6 + 6x^4 + 7x^2 + 8 > 0$ при всех x ; б) $12x^5 + 11x^3 + 10x - 4 = 140$; верно, т.к. если бы был отрицательный корень, то левая часть была бы меньше нуля (т.к. каждое

слагаемое было бы меньше нуля, а правая $140 > 0$); в) $9x(x-1) - (3x+4)(3x-4) = 51 - 9x$; $9x^2 - 9x - 9x^2 + 16 = 51 - 9x$; $16 = 51 - 9x$ — нет корней.

г) В левой части уравнения $7x^5 + 14x^4 - 21x^2 - 49x = 13$ вынесем общий множитель 7 за скобки: $7(x^5 + 2x^4 - 3x^2 - 7x) = 13$. Пусть корень этого уравнения x является целым числом. Тогда величина $(x^5 + 2x^4 - 3x^2 - 7x)$ также целое число. Поэтому выражение, стоящее в левой части уравнения, кратно числу 7. В правой части уравнения находится число 13, которое делится на 7 с остатком. Поэтому число кратное семи не может равняться числу, делящемуся на 7 с остатком. Следовательно, данное уравнение не имеет целых корней.

Ответ: а) верно; б) верно; в) верно; г) утверждение верно.

С-12. Уравнения с параметрами

1. а) $3(x-4) - 5(x+2) = cx - 6$; $3(6-4) - 5(6+2) = 6c - 6$; $6 - 40 = 6c - 6$;

$$6c = -34 + 6; 6c = -28; c = -\frac{14}{3}.$$

Ответ: $-\frac{14}{3}$.

б) Для решения этой задачи можно использовать два подхода.

Первый подход. Так как корнем уравнения $16x^2 + 2(b-4)x + (2-3b) = 0$ является число 4, то при его подстановки в уравнение получаем верное равенство: $16 \cdot 4^2 + 2(b-4) \cdot 4 + (2-3b) = 0$ или $256 + 8b - 32 + 2 - 3b = 0$ или $5b = -226$, откуда $b = -\frac{226}{5}$. Подставим эту величину b в данное уравнение:

$$16x^2 + 2\left(-\frac{226}{5} - 4\right)x + \left(2 + 3 \cdot \frac{226}{5}\right) \text{ или } 20x^2 - 123x + 172 = 0. \text{ Решим это квадратное уравнение и найдем второй корень } x_2 = \frac{43}{20} = 2\frac{3}{20}.$$

Второй подход. Запишем формулы Виета для суммы и произведения корней

$$\text{данного квадратного уравнения: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2(b-4)}{16} = \frac{b-4}{8} \\ x_1 x_2 = \frac{2-3b}{16} \end{cases}. \text{ Так как один}$$

корень уравнения известен ($x_1 = 4$), то подставим его в систему уравнений:

$$\begin{cases} 4 + x_2 = \frac{b-4}{8} \\ 4x_2 = \frac{2-3b}{16} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2 = \frac{4-b}{8} - 4 \\ x_2 = \frac{2-3b}{64} \end{cases}. \text{ Приравняем правые части}$$

этих уравнений: $\frac{4-b}{8} - 4 = \frac{2-3b}{64}$. Умножим все члены уравнения на 64

и получим: $32 - 8b - 256 = 2 - 3b$ или $-226 = 5b$, $b = -\frac{226}{5}$. Теперь из второго

уравнения $x_2 = \frac{2-3b}{64}$ находим $x_2 = \frac{2+3 \cdot \frac{226}{5}}{64} = \frac{668}{5 \cdot 64} = \frac{43}{20} = 2 \frac{3}{20}$.

Ответ: $b = -45 \frac{1}{5}$, $x_2 = 2 \frac{3}{20}$.

2. Прежде всего убедимся, что при $b = 0$ уравнение не имеет решений. Подставим значение $b = 0$ в уравнение $b x - 1 = 0$ и получим $0 \cdot x - 1 = 0$ или $-1 = 0$. Так как это равенство не выполняется, то при $b = 0$ данное уравнение решений не имеет. Найдем корень данного уравнения: $b x = 1$, откуда $x = \frac{1}{b}$ (т.к. $b \neq 0$).

По условию задачи надо найти такие целые значения b , чтобы число x также было целым. Очевидно, что $x = \frac{1}{b}$ будет целым числом, если b будет делителем числа 1. Поэтому $b = \pm 1$.

Ответ: $b = \pm 1$.

3. $5x - 3a = 2$; $x = \frac{2+3a}{5}$; а) $\frac{2+3a}{5} > 0$; $2+3a > 0$; $a > -\frac{2}{3}$;

б) $\frac{2+3a}{5} < 0$; $a < -\frac{2}{3}$; в) $\frac{2+3a}{5} > 10$; $2+3a > 50$; $3a > 48$; $a > 16$;

г) Прежде всего решим уравнение $5x - 3a = 2$. Получаем, $5x = 3a + 2$, откуда $x = \frac{3a+2}{5}$. Теперь найдем значения a , при которых этот корень принадлежит

промежутку $(1; 2)$. Получаем двойное линейное неравенство $1 < \frac{3a+2}{5} < 2$.

Умножим все части этого неравенства на положительное число 5. При этом знак неравенства сохраняется $1 \cdot 5 < \frac{3a+2}{5} \cdot 5 < 2 \cdot 5$ или $5 < 3a + 2 < 10$. Вычтем из всех частей неравенства число 2; $5 - 2 < 3a + 2 - 2 < 10 - 2$ или $3 < 3a < 8$.

Разделим все части неравенства на положительное число 3. При этом знак неравенства сохраняется: $\frac{3}{3} < \frac{3a}{3} < \frac{8}{3}$ или $1 < a < 2 \frac{2}{3}$. Итак, при $1 < a < 2 \frac{2}{3}$ корень уравнения $5x - 3a = 2$ принадлежит промежутку $(1; 2)$.

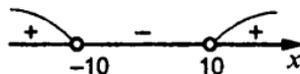
Ответ: а) $a > -\frac{2}{3}$; б) $a < -\frac{2}{3}$; в) $a > 16$; г) при $1 < a < 2 \frac{2}{3}$.

4. а) $4x^2 + 8x + b = 0$; $D = 64 - 4 \cdot 4b > 0$; $64 - 16b > 0$; $16b < 64$; $b < 4$;

Ответ: $b < 4$.

б) $5x^2 + bx + 5 = 0$; $D = b^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 > 0$; $b^2 - 100 > 0$; $(b-10)(b+10) > 0$

Ответ: $b \in (-\infty; -10) \cup (10; +\infty)$.



5. а) Квадратное уравнение $2x^2 - 6x + t = 0$ имеет один корень, если его дискриминант равен нулю. Найдем дискриминант $D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot t = 36 - 8t$. Приравняем его к нулю: $36 - 8t = 0$, откуда $t = \frac{36}{8} = 4,5$.

б) $x^2 + tx + 4 = 0$; $D = t^2 - 4 \cdot 4 = 0$; $t^2 = 16$; $t_1 = \pm 4$.

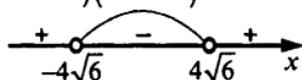
Ответ: а) $t = 4,5$; б) $t_{1,2} = \pm 4$.

6. а) $4x^2 + cx + 6 = 0$; $D = c^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6 < 0$; $c^2 - 96 < 0$; $(c - 4\sqrt{6})(c + 4\sqrt{6}) < 0$.

Ответ: $c \in (-4\sqrt{6}; 4\sqrt{6})$.

б) $x^2 + 6x + c = 0$; $D = 36 - 4c < 0$; $4c > 36$; $c > 9$.

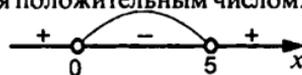
Ответ: $c \in (9; +\infty)$.



7. Сначала решим уравнение $a(x + 1) = 5$. Раскроем скобки и запишем уравнение в виде: $ax + a = 5$ или $ax = 5 - a$. Легко проверить, что при $a = 0$ это уравнение не имеет решений. Следовательно, $a \neq 0$ и можно найти корень уравнения $x = \frac{5 - a}{a}$. Найдем, при каких значениях a этот корень будет положительным числом. Для этого решим неравенство $\frac{5 - a}{a} > 0$ методом интервалов. На

числовой прямой отметим значения a , при которых числитель и знаменатель дроби равны нулю, т.е. $a_1 = 5$ и $a_2 = 0$. Эти точки разбивают координатную прямую на три интервала. При $a > 5$ (в крайнем промежутке) числитель $(5 - a)$ отрицательный, знаменатель a положительный. Поэтому дробь $\frac{5 - a}{a}$ имеет отрицательный знак. При переходе к каждому следующему промежутку знак дроби меняется на противоположный. Получаем диаграмму знаков дроби $\frac{5 - a}{a}$. Видно, что эта дробь положительна при $0 < a < 5$. Теперь из этого промежутка выберем целые значения a : 1; 2; 3; 4. Итак, при этих целых значениях a корень уравнения $a(x + 1) = 5$ является положительным числом.

Ответ: при $a = 1; 2; 3; 4$.



8. $x^2 + bx = 0$; при $b = 0$, $x = 0$ – единственный корень;

$x^2 - bx - 5 = 0$; $D = b^2 + 4 \cdot 5 > 0$ при любом b имеет два корня;

$x^2 + bx + 5 = 0$; $D = b^2 - 4 \cdot 5 > 0$ не при любом b ;

$x^2 - 2b = 0$ при $b = 0$, $x = 0$ – единственный корень;

$bx^2 - 2 = 0$ при $b = 0$ нет корней; $x^2 - 4x + b = 0$; $D = 16 - 4b > 0$ не при любом b .

Ответ: $x^2 - bx - 5 = 0$.

9. Запишем данное уравнение $x^2 + n^2(x - 1) - x = 0$ в виде: $x^2 + n^2x - n^2 - x = 0$ или $x^2 + (n^2 - 1)x - n^2 = 0$. Для этого квадратного уравнения запишем формулу Виета для суммы корней: $x_1 + x_2 = -(n^2 - 1)$. Т. к. по условию задачи корни x_1 и x_2 являются противоположными числами (т. е. $x_2 = -x_1$), то получаем: $0 = -(n^2 - 1)$ или $0 = n^2 - 1$, откуда $n^2 = 1$ и $n = \pm 1$. Проверим найденные значения n .

Подставим $n = \pm 1$ в данное уравнение: $x^2 + 1 \cdot (x - 1) - x = 0$ или $x^2 - 1 = 0$. Корни этого уравнения $x_{1,2} = \pm 1$ действительно являются противоположными числами.

Ответ: при $n = \pm 1$.

10. Сначала решим квадратное уравнение $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$. Найдем его дискриминант $D = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - 1) = 4a^2 - 4a^2 + 4 = 4$ и корни

$$x = \frac{2a \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{2a + 2}{2} = a + 1.$$

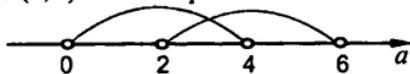
По условию задачи эти корни принадлежат промежутку $(1; 5)$. Получаем два двойных линейных неравенства $\begin{cases} 1 < a + 1 < 5 \\ 1 < a - 1 < 5 \end{cases}$.

Вычтем из всех частей первого неравенства число 1 и прибавим ко всем частям второго неравенства также число 1. Получаем:

$$\begin{cases} 1 - 1 < a - 1 - 1 < 5 - 1 \\ 1 + 1 < a - 1 + 1 < 5 + 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < a < 4 \\ 2 < a < 6 \end{cases}.$$

Изобразим на координатной прямой эти решения (первого – сверху, второго – снизу). Видно, что оба неравенства выполнены при $2 < a < 4$, т.е. промежуток $(2; 4)$ является решением системы неравенства.

Ответ: при $2 < a < 4$.



С-13. Решение уравнений с помощью разложения на множители и введения вспомогательной переменной

1. 1) а) $9x^3 - 27x^2 = 0$; $x^3 - 3x^2 = 0$; $x^2(x - 3) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 3$;

б) $x^3 - 64x = 0$; $x(x^2 - 64) = 0$; $x(x - 8)(x + 8) = 0$; $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 8$

в) $x^3 + 0,8x = 0$; $x(x^2 + 0,8) = 0$; $x = 0$;

Ответ: а) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; б) $x_1 = -8$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$; в) $x = 0$.

2) Используем разложение левой части уравнения на множители.

а) В уравнении $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$ сгруппируем члены $(x^3 - 4x^2) - (9x - 36) = 0$ и вынесем общие множители за скобки: $x^2(x - 4) - (9x - 36) = 0$ или $(x - 4)(x^2 - 9) = 0$. Используем формулу для разности квадратов чисел: $(x - 4)(x - 3)(x + 3) = 0$. Так как произведение трех множителей равно нулю, то любой из них может равняться нулю. Поэтому получаем три линейных уравнения: $x - 4 = 0$ (корень $x = 4$), $x - 3 = 0$ (решение $x = 3$) и $x + 3 = 0$ (корень $x = -3$). Итак, данное уравнение имеет три корня: $x = 4$, $x = 3$ и $x = -3$.

б) $x^6 + 3x^4 - x^2 - 3 = 0$; $x^4(x^2 + 3) - (x^2 + 3) = 0$; $(x^2 + 3)(x^4 - 1) = 0$; $x^4 = 1$; $x_{1,2} = \pm 1$.

в) Перенесем все члены уравнения в левую часть и сгруппируем их: $(y^3 - 2y^2) - (y - 2) = 0$ или $y^2(y - 2) - (y - 2) = 0$ или $(y - 2)(y^2 - 1) = 0$. Используем формулу для разности квадратов и разложим левую часть на множители: $(y - 2)(y - 1)(y + 1) = 0$. Так как произведение трех множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем три линейных уравнения: $y - 2 = 0$ (корень $y = 2$), $y - 1 = 0$ (решение $y = 1$) и $y + 1 = 0$ (корень $y = -1$). Следовательно, данное уравнение имеет три корня: $y = 2$, $y = 1$ и $y = -1$.

Ответ: а) $x = 4$, $x = 3$ и $x = -3$; б) $x = 1$, $x = -1$; в) $y = 2$, $y = 1$ и $y = -1$.

2. а) $(x^2 - 7)^2 - 4(x^2 - 7) - 45 = 0$; $x^2 - 7 = y$; $y^2 - 4y - 45 = 0$; $D = 16 + 4 \cdot 45 = 196$;
 $y_1 = \frac{4+14}{2} = 9$; $y_2 = -5$; $x^2 - 7 = 9$; $x^2 = 16$; $x_{1,2} = \pm 4$; $x^2 - 7 = -5$; $x^2 = 2$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.

б) Для решения уравнения введем вспомогательную переменную. В уравнении $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3 = 0$ введем вспомогательную переменную $t = x^2 + 2x$. Получим квадратное уравнение $t^2 - 2t - 3 = 0$. Решая его, находим два корня $t_1 = -1$ и $t_2 = 3$. Теперь вернемся к неизвестной x . Для $t = -1$ получаем квадратное уравнение: $x^2 + 2x = -1$ или $x^2 + 2x + 1 = 0$ или $(x + 1)^2 = 0$, которое имеет один корень $x = -1$. Для $t = 3$ получаем квадратное уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$, которое имеет два корня $x = -3$ и $x = 1$. Итак, данное уравнение имеет три корня: $x = -1$, $x = -3$ и $x = 1$.

в) В уравнении $(x^2 - x + 1)(x^2 - x - 7) = 65$ введем новую переменную $t = x^2 - x$. Тогда уравнение имеет вид: $(t + 1)(t - 7) = 65$ или $t^2 - 6t - 7 = 65$ или $t^2 - 6t - 72 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $t_1 = 12$ и $t_2 = -6$. Теперь вернемся к старой неизвестной x . Для $t = 12$ получаем квадратное уравнение: $x^2 - x = 12$ корни которого $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$. Для $t = -6$ получаем квадратное уравнение $x^2 - x = -6$, которое не имеет корней, т.к. $D = 1 - 4 \cdot 6 < 0$. Итак, данное уравнение имеет два корня: $x = -3$ и $x = 4$.

Ответ: а) $x = -4$, $x = 4$, $x = 1$, $x = \pm\sqrt{2}$; б) $x = -1$, $x = -3$, $x = 1$; в) $x = -3$ и $x = 4$.

3. а) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; $D = 169 - 4 \cdot 36 = 25$; $x_1^2 = \frac{13+5}{2} = 9$; $x_2^2 = 4$; $x_{1,2} = \pm 3$; $x_{3,4} = \pm 2$;

б) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; $D = 25 - 4 \cdot 4 = 9$; $x^2 = \frac{5+3}{2} = 4$ и $x^2 = 1$; $x_{1,2} = \pm 2$; $x_{3,4} = \pm 1$;

в) $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$; $D = 25 + 4 \cdot 6 = 49$; $x^2 = \frac{-5+7}{2} = 1$ и $x^2 = -6$; $x_{1,2} = \pm 1$;

г) $x^4 + 7x^2 - 44 = 0$; $D = 49 + 4 \cdot 44 = 225$; $x^2 = \frac{-7+15}{2} = 4$ и $x^2 < 0$; $x_{1,2} = \pm 2$;

д) $x^4 + 9x^2 + 8 = 0$; $D = 81 - 4 \cdot 8 = 49$; $x_1^2 = \frac{-9+7}{2} < 0$; $x_2^2 < 0$ нет корней;

е) $x^4 + 16x^2 = 0$; $x^2(x^2 + 16) = 0$; $x^2 = 0$; $x = 0$.

4. Если график функции $y = x^4 - 8x^2 - 9$ пересекает ось абсцисс, то ордината этих точек пересечения равна нулю, т.е. $y = 0$. Для нахождения абсцисс точек получаем биквадратное уравнение $0 = x^4 - 8x^2 - 9$. Введем вспомогательную переменную $t = x^2 \geq 0$. Получаем квадратное уравнение $0 = t^2 - 8t - 9$. Корни этого уравнения $t = -1$ (не подходит, т.к. $t \geq 0$) и $t = 9$. Теперь вернемся к старой неизвестной x . Получаем квадратное уравнение $x^2 = 9$, корни которого $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$.

Ответ: $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$.

5. $x^5 + x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0$; $x^4(x+1) + 3x^2(x+1) + 2(x+1) = 0$;

$(x+1)(x^4 + 3x^2 + 2) = 0$; $x_1 = -1$; $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$; $D = 9 - 4 \cdot 2 = 1$;

$x^2 = \frac{-3+1}{2} < 0$ и $x^2 = -2 < 0$. Ответ: -1 .

6. Для решения уравнения $\frac{x^2-4}{x} + \frac{x}{x^2-4} = 3\frac{1}{3}$ введем вспомогательную переменную $t = \frac{x^2-4}{x}$, тогда $\frac{1}{t} = \frac{x}{x^2-4}$. Учтем, что $3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$, и получим

уравнение $t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}$. Умножим все члены уравнения на $3t$ и получим квадратное уравнение $3t^2 - 10t + 3 = 0$. Используем формулу для корней уравнения с четным вторым коэффициентом. Найдем дискриминант

$$D_1 = k^2 - ac = (-5)^2 - 3 \cdot 3 = 25 - 9 = 16 = 4^2 \text{ и корни } t = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{5 \pm \sqrt{4^2}}{3} = \frac{5 \pm 4}{4},$$

т.е. $t_1 = 3$ и $t_2 = \frac{1}{3}$. Вернемся к неизвестной x . Для $t = 3$ получаем уравнение:

$$\frac{x^2-4}{x} = 3 \text{ или } x^2 - 3x - 4 = 0, \text{ корни которого } x = -1 \text{ и } x = 4. \text{ Для } t = \frac{1}{3} \text{ получаем}$$

$$\text{уравнение: } \frac{x^2-4}{x} = \frac{1}{3} \text{ или } 3x^2 - x - 12 = 0. \text{ Найдем дискриминант этого}$$

квадратного уравнения $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12) = 1 + 144 = 145$ и его корни

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{145}}{6}. \text{ Таким образом, данное уравнение имеет четыре корня: } x = -1,$$

$$x = 4, x = \frac{1 + \sqrt{145}}{6} \text{ и } x = \frac{1 - \sqrt{145}}{6}.$$

Ответ: $x = -1, x = 4, x = \frac{1 + \sqrt{145}}{6}$ и $x = \frac{1 - \sqrt{145}}{6}$.

7. а) $x^3 - 7x + 6; x^3 - x - 6x + 6 = 0; x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = 0; x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1) = 0;$
 $(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0; x_1 = 1; x^2 + x - 6 = 0; D = 1 + 4 \cdot 6 = 25; x_1 = \frac{-1 + 5}{2} = 2; x_2 = -3;$

б) Для решения уравнения $x^3 - 43x + 42 = 0$ разложим его левую часть на множители. Представим член $(-43x)$ в виде: $-43x = -x - 42x$ и сгруппируем члены уравнения: $x^3 - x - 42x + 42 = 0$ или $(x^3 - x) - (42x - 42) = 0$ или $x(x - 1)(x + 1) - 42(x - 1) = 0$ или $(x - 1)(x(x + 1) - 42) = 0$ или $(x - 1)(x^2 + x - 42) = 0$. Произведение двух множителей равно нулю. Поэтому один из них равен нулю. Получаем два уравнения: линейное $x - 1 = 0$ (корень $x = 1$) и квадратное $x^2 + x - 42 = 0$ (решения $x = -7$ и $x = 6$). Итак, данное уравнение имеет три корня: $x = 1, x = -7$ и $x = 6$.

Ответ: а) 2; -3; б) $x = 1, x = -7$ и $x = 6$.

8. а) Для решения $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 360$ умножим крайние скобки и средние скобки. Получаем: $((x + 1)(x + 4))((x + 2)(x + 3)) = 360$ или $(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 360$. Введем вспомогательную переменную $t = x^2 + 5x$. Имеем уравнение $(t + 4)(t + 6) = 360$ или $t^2 + 10t - 336 = 0$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения $D_1 = k^2 - ac = 5^2 - 1 \cdot (-336) = 361 = 19^2$ и корни $t = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-5 \pm 19}{1}$, т.е. $t_1 = 14$ и $t_2 = -24$. Теперь вернемся к неизвестной x .

Для $t = 14$ получаем уравнение: $x^2 + 5x = 14$ или $x^2 + 5x - 14 = 0$, корни которого $x_1 = 2$ и $x_2 = -7$. Для $t = -24$ получаем уравнение: $x^2 + 5x = -24$ или $x^2 + 5x + 24 = 0$, которое не имеет корней. Итак, данное уравнение имеет два корня: $x = 2$ и $x = -7$.

б) $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7) = 105$; $(x^2 - 8x + 7)(x^2 - 8x + 15) - 105 = 0$;
 $x^2 - 8x = y$; $(y+7)(y+15) - 105 = 0$; $y^2 + 22y = 0$; $y_1 = 0$; $y_2 = -22$;
 $x^2 - 8x = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 8$; $x^2 - 8 = -22$; $x^2 - 8x + 22 = 0$;
 корней нет, т.к. $D = 64 - 4 \cdot 22 < 0$.

Ответ: а) $x = 2$ и $x = -7$; б) $x = 0$ и $x = 8$.

9. а) $x^4 - 6x^2 + a = 0$; $x^2 = y$; $y^2 - 6y + a = 0$; $f(y) = y^2 - 6y + a$;

$$D = 36 - 4a < 0 \text{ или } \begin{cases} f(0) > 0 \\ m = \frac{6}{2} = 3 > 0 \end{cases} \text{ - нет решений;}$$

$$36 - 4a < 0; 4a > 36; a > 9.$$

б) $x^4 + ax^2 + 9 = 0$; $x^2 = y$; $y^2 + ay + 9 = 0$; $D = a^2 - 36 < 0$; $(a-6)(a+6) < 0$;

$$-6 < a < 6 \text{ или } \begin{cases} m = -\frac{a}{2} < 0 \\ f(0) = 9 > 0 \end{cases}; -a < 0; a > 0.$$

Ответ: а) $a > 9$; б) $a > 0$.

С-14. Графический способ решения систем уравнений

1. $\begin{cases} y = -0,5x^2 + 8 \\ xy = 6 \end{cases}$. Три решения: $(-4, 4)$; $(-1, 5)$, $(0, 8)$; $(7, 8)$, $(3, 5)$; $(1, 8)$.

2. $y = x^2 - 4$;

а) Для решения системы уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = x + 2 \end{cases} \text{ построим графики функций}$$

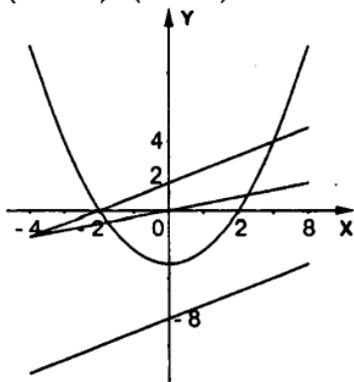
$y_1 = x^2 - 4$ (парабола) и $y_2 = x + 2$ (прямая).

Видно, что эти графики пересекаются в двух точках $A(-2; 0)$ и $B(3; 5)$. Координаты этих точек являются решениями данной системы уравнений.

Ответ: $A(-2; 0)$ и $B(3; 5)$.

б) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 0,5x \end{cases}$; две точки пересечения: $C(-1, 8; -0, 8)$, $D(2, 2; 1, 2)$.

Ответ: $(-1, 8; -0, 8)$, $(2, 2; 1, 2)$.



в) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = x - 8 \end{cases}$; нет точек пересечения.

Ответ: нет точек пересечения.

3. а) Для решения системы уравнений

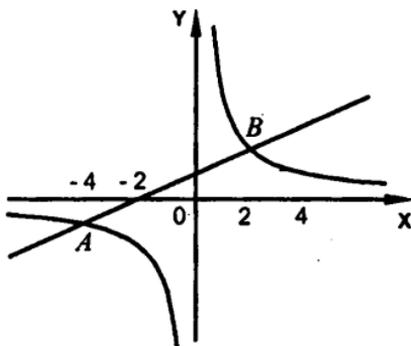
$$\begin{cases} xy = 8 \\ y - x = 2 \end{cases}$$

выразим из каждого

уравнения y и построим графики функций

$$y_1 = \frac{8}{x} \text{ (гипербола) и } y_2 = x + 2 \text{ (прямая).}$$

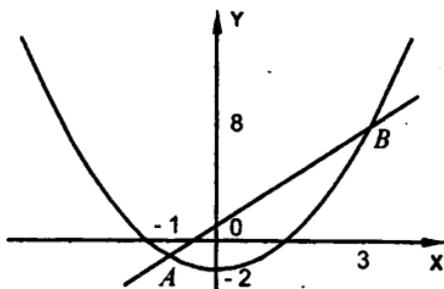
Видно, что эти графики пересекаются в двух точках $A(-4; -2)$ и $B(2; 4)$. Координаты этих точек являются решениями данной системы уравнений.



Ответ: $A(-4; -2)$ и $B(2; 4)$.

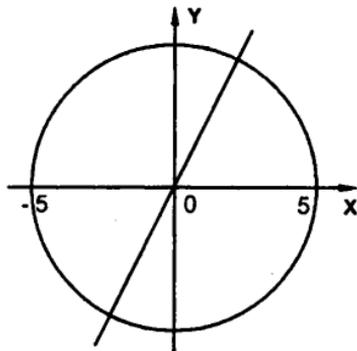
б) $\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

Ответ: $(-1; -1)$, $(3; 7)$.



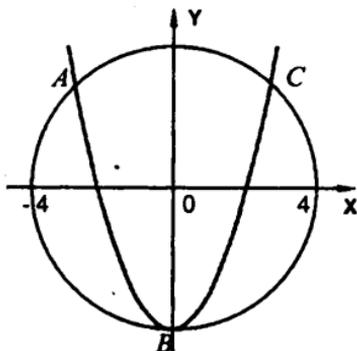
в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases}$

Ответ: $(-2,2; -4,4)$, $(2,2; 4,4)$.



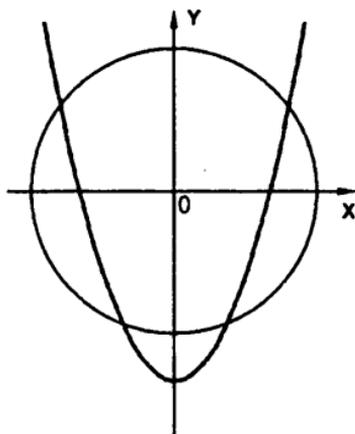
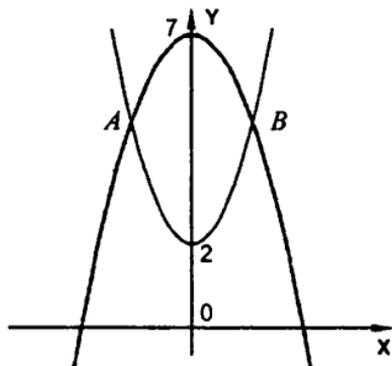
г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$

Ответ: $(-3,2; 2,5)$, $(3,2; 2,5)$, $(0; -4)$.



4. а) Ответ: два решения. б) Построим окружность $x^2 + y^2 = 9$ с центром в начале координат радиусом три единицы и параболу $y = x^2 - 4$. Видно, что графики пересекаются в четырех точках A, B, C, D . Координаты этих точек и являются решениями системы уравнений. Следовательно, данная система имеет четыре решения.

Ответ: четыре решения.



5. а)
$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = |x| \end{cases};$$

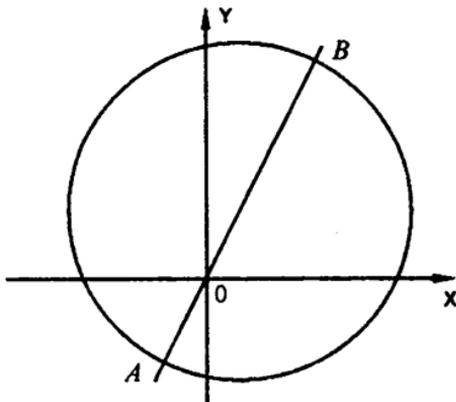
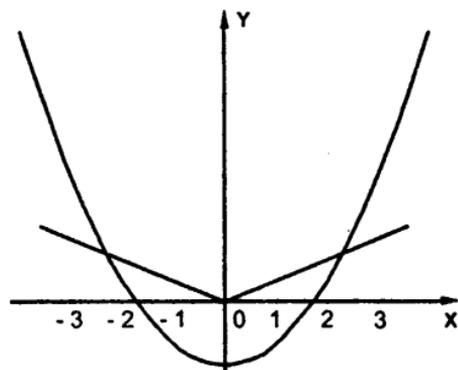
две точки пересечения.

Ответ: $A(-2, 2; 2, 2)$, $B(2, 2; 2, 2)$.

б)
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases};$$

две точки пересечения.

Ответ: $A(-1, 2; -2, 4)$, $B(3, 2; 6, 4)$.



6. Построим окружность $x^2 + y^2 = 16$ с центром в начале координат радиусом четыре единицы и прямую $y = x - k$. Эта прямая пересекает ось абсцисс в точке $x = k$ и ось ординат – в точке $y = -k$. Возможны три взаимных положения окружности и прямой (очевидно, что при измерении k прямой перемещается параллельно самой себе).

Первое такое положение – прямая касается окружности, как изображено на рисунке. Найдем, при каком значении k это достигается. Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник OAB , в котором $\angle A = 90^\circ$ (т.к. радиус OA перпендикулярен касательной AB), $\angle B = \angle O = 45^\circ$ (т.к. угловой коэффициент прямой $y = x - k$ равен 1). Тогда $OA = AB = 4$ и $OB = k$. Запишем теорему Пифагора: $AO^2 + AB^2 = OB^2$ или $4^2 + 4^2 = k^2$ или $32 = k^2$, откуда $k = \pm 4\sqrt{2}$. При этом случай $k = 4\sqrt{2}$ соответствует рисунку. Случай $k = -4\sqrt{2}$ соответствует касанию прямой и окружности в точке, симметричной точке A относительно начала координат (на рисунке не изображено). Очевидно, что при $k = \pm 4\sqrt{2}$ у окружности и прямой есть только одна общая точка (точка касания) и данная система уравнений имеет одно решение.

Легко изобразить, что при $-4\sqrt{2} < k < 4\sqrt{2}$ окружность и прямая пересекаются, т.е. имеют две общие точки. Следовательно, данная система уравнений имеет два решения.

При $k < -4\sqrt{2}$ и $k > 4\sqrt{2}$ прямая и окружность общих точек не имеют. Поэтому система уравнений решений не имеет. Эти же результаты можно получить и аналитически. Подставим $y = x - k$ в первое уравнение системы. Имеем: $x^2 + (x - k)^2 = 16$ или $2x^2 - 2kx + k^2 - 16 = 0$. Найдем дискриминант квадратного уравнения: $D_1 = (-k)^2 - 2 \cdot (k^2 - 16) = k^2 - 2k^2 + 32 = -k^2 + 32 = -k^2 + 32$.

Если этот дискриминант D_1 равен нулю, то квадратное уравнение имеет единственное решение. Получаем условие: $-k^2 + 32 = 0$, откуда $k^2 = 32$ и $k = \pm 4\sqrt{2}$. В этом случае система также имеет единственное решение.

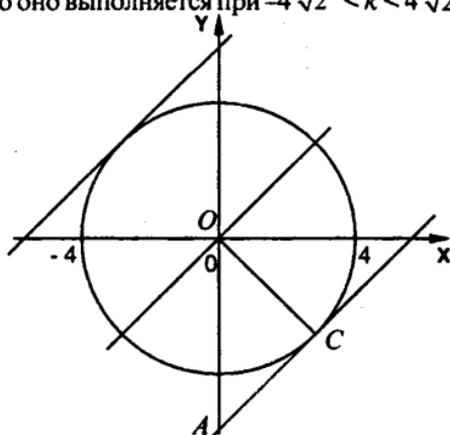
Если $D_1 > 0$, то квадратное уравнение (и система) имеет два решения. Из неравенства $-k^2 + 32 > 0$ находим, что оно выполняется при $-4\sqrt{2} < k < 4\sqrt{2}$.

При $D_1 < 0$ квадратное уравнение (и система) решений не имеет. Неравенство $-k^2 + 32 < 0$ справедливо при $k < -4\sqrt{2}$ и $k > 4\sqrt{2}$.

Ответ: а) при $k = -4\sqrt{2}$ и $k = 4\sqrt{2}$;

б) при $-4\sqrt{2} < k < 4\sqrt{2}$;

в) при $k < -4\sqrt{2}$ и $k > 4\sqrt{2}$.



С-15. Решение систем уравнений второй степени

1. Чтобы выяснить, является ли пара чисел $x = 6$ и $y = -8$ решением системы

уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 3x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$, подставим эти числа в каждое уравнение системы.

Получаем: $\begin{cases} 6^2 + (-8)^2 = 100 \\ 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-8) - 2 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 36 + 64 = 100 \\ 18 - 16 - 2 = 0 \end{cases}$. Видим, что каждое из

уравнений (при таких x и y) превратилось в верное числовое равенство.

Следовательно, пара чисел $x = 6$ и $y = -8$ является решением данной системы.

Ответ: является.

$$2. \begin{cases} x^2 - 3y + 12 = 0 \\ y = x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 3(x+4) + 12 = 0 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases}; \quad x(x-3) = 0$$

$$x_1 = 0; y_1 = 4; (0; 4); \quad x_2 = 3; y_2 = 7; (3; 7).$$

$$\text{Проверка: } (0; 4); \quad \begin{cases} 0^2 - 3 \cdot 4 + 12 = 0 \\ 4 = 0 + 4 \end{cases} \quad - \text{ верно;}$$

$$(3; 7); \quad \begin{cases} 3^2 - 3 \cdot 7 + 12 = 0 \\ 7 = 3 + 4 \end{cases} \quad - \text{ верно.}$$

$$3. 1) \text{ а) } \begin{cases} x^2 + 2y = 6 \\ y = x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2(x-1) = 6 \\ x^2 + 2x - 2 = 6 \end{cases}; \quad x^2 + 2x - 8 = 0; \quad D = 4 + 4 \cdot 8 = 36;$$

$$x_1 = \frac{-2+6}{2} = 2; \quad x_2 = -4; \quad y_1 = 1; \quad y_2 = -5.$$

$$б) \begin{cases} x = y - 2 \\ xy - y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} y(y-2) - y = 10; \\ y^2 - 3y - 10 = 0; \end{cases} \quad D = 9 + 4 \cdot 10 = 49;$$

$$y_1 = \frac{3+7}{2} = 5; \quad y_2 = -2; \quad x_1 = 3; \quad x_2 = -4.$$

$$в) \begin{cases} xy + x^2 = 4 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+2) + x^2 = 4 \\ 2x^2 + 2x - 4 = 0 \end{cases}; \quad x^2 + x - 2 = 0; \quad D = 1 + 4 \cdot 2 = 9;$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1; \quad x_2 = -2; \quad y_1 = 3; \quad y_2 = 0.$$

Ответ: а) (2; 1), (-4; -5); б) (3; 5); (-4; -2); в) (1; 3); (-2; 0).

2) а) Для решений данной системы уравнений используем способ подстановки.

При решении системы уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$ выразим из второго уравнения

величину $x = 7 + 2y$ и подставим в 1° уравнение. Получаем: $(7 + 2y)^2 - y^2 = 24$ или $49 + 28y + 4y^2 - y^2 = 24$ или $3y^2 + 28y + 25 = 0$. Это квадратное уравнение

имеет два корня: $y_1 = -\frac{25}{3} = -8\frac{1}{3}$ и $y_2 = -1$. По формуле $x = 7 + 2y$ находим

соответствующие значение x : $x_1 = 7 + 2 \cdot \left(-\frac{25}{3}\right) = 7 - \frac{50}{3} = -\frac{29}{3} = -9\frac{2}{3}$ и

$x_2 = 7 + 2 \cdot (-1) = 7 - 2 = 5$. Итак, данная система уравнений имеет два решения

$$\left(-9\frac{2}{3}; -8\frac{1}{3}\right) \text{ и } (5; -1).$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 3y = 11 \\ 2x + y^2 = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 11 - 3y \\ 2(11 - 3y) + y^2 - 14 = 0 \end{cases};$$

$$y^2 - 6y + 8 = 0; D = 36 - 4 \cdot 8 = 4; y_1 = \frac{6+4}{2} = 5; y_2 = 1; x_1 = -4; x_2 = 8.$$

$$\text{в) Из второго уравнения системы } \begin{cases} y^2 - xy = 12 \\ 3y - x = 10 \end{cases} \text{ выразим величину } x = 3y - 10 \text{ и}$$

подставим в первое уравнение: $y^2 - (3y - 10)y = 12$ или $y^2 - 3y^2 + 10y = 12$ или $2y^2 - 10y + 12 = 0$ или $y^2 - 5y + 6 = 0$. Корни этого квадратного уравнения

$y_1 = 2$ и $y_2 = 3$. По формуле $x = 3y - 10$ найдем соответствующие значения x :

$x_1 = 3 \cdot 2 - 10 = -4$ и $x_2 = 3 \cdot 3 - 10 = -1$. Следовательно, данная система уравнений имеет два решения $(-4; 2)$ и $(-1; 3)$.

$$\text{Ответ: а) } \left(-9\frac{2}{3}; -8\frac{1}{3}\right), (5; -1); \text{ б) } (-4; 5); (8; 1); \text{ в) } (-4; 2) \text{ и } (-1; 3).$$

$$\text{з) а) } \begin{cases} (x-2)(y-1) = 30 \\ 2x - y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2)(2x-11) = 30 \\ y = 2x - 10 \end{cases}; 2x^2 - 15x - 8 = 0;$$

$$D = 225 + 4 \cdot 2 \cdot 8 = 289; x_1 = \frac{15+17}{4} = 8; x_2 = -\frac{1}{2}; y_1 = 6; y_2 = -11.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 14 \\ x - 3y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} (10+3y)^2 - y(10+3y) + y^2 = 14 \\ x = 10+3y \end{cases};$$

$$100 + 60y + 9y^2 - 10y - 3y^2 + y^2 - 14 = 0; 7y^2 + 50y + 86 = 0; D = 2500 - 4 \cdot 7 \cdot 86 = 92;$$

$$y_{1,2} = \frac{-50 \pm 2\sqrt{23}}{2 \cdot 7} = \frac{-25 \pm \sqrt{23}}{7}; x_{1,2} = 10 + \frac{75 \pm 3\sqrt{23}}{7} = \frac{-5 \pm 3\sqrt{23}}{7}.$$

$$\text{Ответ: а) } (8; 6); \left(-\frac{1}{2}; -11\right); \text{ б) } \left(\frac{-5 \pm 3\sqrt{23}}{7}; \frac{-25 \pm \sqrt{23}}{7}\right).$$

4. Данная система уравнение
$$\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 5x - 3y = 12 \\ x^2 + y^2 - xy - y = 6 \end{cases}$$
 содержит две неизвестные x

и y и три уравнения. Поэтому сначала решим систему двух уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 5x - 3y = 12 \end{cases} \text{ с двумя неизвестными и для найденных значений } x \text{ и } y \text{ проверим,}$$

выполняется ли третье уравнение. Для решения этой системы используем, например, способ сложения. Умножим первое уравнение на 3, а второе – на

$$\text{число 2. Получаем систему равносильных уравнений } \begin{cases} 9x + 6y = 33 \\ 10x - 6y = 24 \end{cases}. \text{ Сложим}$$

эти уравнения: $9x + 6y + 10x - 6y = 33 + 24$ или $19x = 57$, откуда $x = 3$. Для нахождения y подставим эту величину в первое уравнение $3x + 2y = 11$. Получаем: $3 \cdot 3 + 2y = 11$ или $9 + 2y = 11$, откуда $y = 1$. Итак, система, образованная первыми двумя уравнениями, имеет единственное решение $x = 3, y = 1$.

Проверим, удовлетворяет ли пара чисел $x = 3$ и $y = 1$ последнему уравнению систему $x^2 + y^2 - xy - y = 6$. Подставляем эти значения в уравнение и получаем: $3^2 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 1 = 9 + 1 - 3 - 1 = 6$. Видно, что при таких значениях x и y третье уравнение является верным числовым равенством.

Следовательно, данная система уравнений имеет одно решение (3; 1).

Ответ: одно решение (3; 1).

$$5. \text{ а) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ xy = 20 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x^2 - \frac{400}{x^2} = 9 \\ y = \frac{20}{x} \end{array} \right. ; x^4 - 9x^2 - 400 = 0; D = 81 + 4 \cdot 400 = 1681;$$

$$x^2 = \frac{9+41}{2} = 25; x_{1,2} = \pm 5; y_{1,2} = \pm 4.$$

$$6) \begin{cases} x^2 - 3y^2 = 22 \\ x^2 + 3y^2 = 28 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 22 + 3y^2 = 28 - 3y^2; 6y^2 = 6; y_{1,2} = \pm 1; x^2 = 22 + 3 = 25; x_{1,2} = \pm 5. \end{array} \right.$$

в) При решении системы уравнений
$$\begin{cases} x^2 + 2x + 3y = 3 \\ x^2 + x + 2y = 4 \end{cases}$$
 надо найти более простую

связь между неизвестными x и y . Для этого почленно вычтем из первого уравнения второе: $x^2 + 2x + 3y - x^2 - x - 2y = 3 - 4$ или $x + y = -1$. Выразим из этого соотношения $y = -1 - x - 2y = 3 - 4$ или $x + y = -1$. Выразим из этого соотношения $y = -1 - x$ и подставим, например, в первое уравнение системы: $x^2 + 2x + 3(-1 - x) = 3$ или $x^2 + 2x - 3 - 3x = 3$ или $x^2 - x - 6 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$. По формуле $y = -1 - x$ находим

соответствующие значения y : $y_1 = -1 - (-2) = 1$ и $y_2 = -1 - 3 = -4$. Итак, данная система уравнений имеет два решения $(-2; 1)$ и $(3; -4)$.

Ответ: а) $(\pm 5; \pm 4)$; б) $(5; \pm 1)$; $(-5; \pm 1)$; в) $(-2; 1)$ и $(3; -4)$.

6. Очевидно, что координаты точек пересечения окружности $x^2 + (y - 2)^2 = 5$ и параболы $y = x^2 - 1$ удовлетворяют уравнениям двух этих линий, т.е. являются

решениями системы уравнений
$$\begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 = 5 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$$
. Для решения этой системы

удобно почленно сложить уравнения: $x^2 + (y - 2)^2 + y = 5 + x^2 - 1$ или $y^2 - 4y + 4 + y = 4$ или $y^2 - 3y = 0$. Разложим левую часть этого неполного квадратного уравнения на множители $y(y - 3) = 0$ и найдем корни: $y_1 = 0$ и $y_2 = 3$. Подставим эти значения во второе уравнение системы и найдем величины x . Для $y = 0$ получаем: $0 = x^2 - 1$ или $1 = x^2$, откуда $x = \pm 1$. Для $y = 3$ имеем: $3 = x^2 - 1$ или $4 = x^2$, откуда $x = \pm 2$. Таким образом, данная система уравнений имеет четыре решения: $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(-2; 3)$ и $(2; 3)$, т.е. определены координаты четырех точек пересечения.

Ответ: $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(-2; 3)$ и $(2; 3)$.

$$7. \text{ а) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ 2y - x = 1 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2y-1} + \frac{1}{y} - \frac{5}{6} = 0 \\ x = 2y - 1 \end{array} \right. ; 6y + 12y - 6 - 5y(2y - 1) = 0;$$

$$18y - 6 - 10y^2 + 5y = 0; 10y^2 - 23y + 6 = 0; D = 289 - 40 \cdot 6 = 289;$$

$$y_1 = \frac{23 + 17}{20} = 2; y_2 = \frac{3}{10}; x_1 = 3; x_2 = -0,4.$$

б) Для решения системы уравнений
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{16}{3} \\ x - y = 6 \end{cases}$$
 умножим обе части первого

уравнения на $3xy$. Получаем систему равносильных уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 16xy \\ x - y = 6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x^2 - 16xy + 3y^2 = 0 \\ x - y = 6 \end{cases}. \text{ Используем метод подстановки.}$$

Из второго уравнения выразим $x = y + 6$ и подставим в первое уравнение: $3(y + 6)^2 - 16y(y + 6) + 3y^2 = 0$ или $3y^2 + 36y + 108 - 16y^2 - 96y + 3y^2 = 0$ или $0 = 10y^2 + 60y - 108$ или $0 = 5y^2 + 30y - 54$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом $D_1 = k^2 - ac = = 15^2 - 5 \cdot (-54) = 225 + 270 = 495 = 9 \cdot 55$ и его корни

$$y = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-15 \pm \sqrt{9 \cdot 55}}{5} = \frac{-15 \pm 3\sqrt{55}}{5}. \text{ Теперь по формуле } x = y + 6.$$

найдем величину $x = \frac{-15 \pm 3\sqrt{55}}{5} + 6 = \frac{-15 \pm 3\sqrt{55} + 30}{5} = \frac{15 \pm 3\sqrt{55}}{5}$. Итак,

данная система уравнений имеет два решения: $\left(\frac{15 + 3\sqrt{55}}{5}; \frac{-15 + 3\sqrt{55}}{5} \right)$ и $\left(\frac{15 - 3\sqrt{55}}{5}; \frac{-15 - 3\sqrt{55}}{5} \right)$.

Ответ: а) $(-0,4; 0,3)$; б) $\left(\frac{15 + 3\sqrt{55}}{5}; \frac{-15 + 3\sqrt{55}}{5} \right)$ и $\left(\frac{15 - 3\sqrt{55}}{5}; \frac{-15 - 3\sqrt{55}}{5} \right)$.

С-16. Решение задач с помощью систем уравнений второй степени

1. Пусть x – первое число, y – второе число, тогда $\begin{cases} x - y = 5 & | x = 5 + y \\ xy = 84 & | y(5 + y) = 84 \end{cases}$;
 $y^2 + 5y - 84 = 0$; $D = 25 + 4 \cdot 84 = 361$; $y_1 = \frac{-5 + 19}{2} = 7$; $y_2 = -12$; $x_1 = 12$; $x_2 = -7$.

Ответ: 12 и 7 или -7 и -12 .

2. Пусть один катет прямоугольного треугольника равен x см, другой – y см. По условию один катет больше другого на 7 см. Получаем первое уравнение: $x - y = 7$. Известно, что гипотенуза треугольника равна 13 см. Запишем теорему Пифагора и получим второе уравнение: $x^2 + y^2 = 13^2 = 169$. Имеем систему

уравнений $\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases}$. Для решения используем способ подстановки. Из

первого уравнения выразим $x = y + 7$ и подставим во второе уравнение:

$(y + 7)^2 + y^2 = 169$ или $y^2 + 14y + 49 + y^2 = 169$ или $2y^2 + 14y - 120 = 0$ или $y^2 + 7y - 60 = 0$. Решаем это квадратное уравнение. Находим $D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60) =$

$= 49 + 240 = 289 = 17^2$ и корни $y = \frac{-7 \pm 17}{2}$, т.е. $y_1 = 5$ и $y_2 = -12$ (не подходит, т.к.

$y > 0$). Определяем $x = 5 + 7 = 12$. Итак, катеты треугольника 5 см и 12 см.

Ответ: 5 см и 12 см.

3. Пусть x м – длина, y м – ширина, тогда xy м² – площадь или 2080 м²;

$2(x + y)$ м – периметр или 184 м. Получаем систему:

$\begin{cases} xy = 2080 & | y(92 - y) = 2080; y^2 - 92y + 2080 = 0; \\ 2(x + y) = 184 & | x = 92 - y \end{cases}$

$D = 8464 - 4 \cdot 2080 = 144$; $y_1 = \frac{92 + 12}{2} = 52$; $y_2 = 40$; $x_1 = 40$; $x_2 = 52$.

Ответ: 40 м и 52 м.

4. Пусть стороны прямоугольника x см и y см. По условию его периметр (т.е. сумма длин всех сторон) равен 20 см. Поэтому получаем первое уравнение:

$2x + 2y = 20$ или $x + y = 10$. Сумма площадей квадратов, построенных на сторонах прямоугольника (т.е. x^2 и y^2), равна 104 см^2 . Имеем второе уравнение: $2x^2 + 2y^2 = 104$ или $x^2 + y^2 = 52$. Итак, получили систему уравнение

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 52 \end{cases}. \text{ Из первого уравнения выразим } y = 10 - x \text{ и подставим во второе}$$

уравнение: $x^2 + (10 - x)^2 = 52$ или $x^2 + 100 - 20x + x^2 = 52$ или $x^2 - 10x + 48 = 0$. Корни этого уравнения: $x_1 = 4$ и $x_2 = 6$. Теперь по формуле $y = 10 - x$ найдем y : $y_1 = 10 - 4 = 6$ и $y_2 = 10 - 6 = 4$. Итак, стороны прямоугольника 6 см и 4 см.

Ответ: 6 см и 4 см.

5. Пусть даны числа x и y . Известно, что произведение $xу$ на 29 больше их суммы ($x + y$). Получаем первое уравнение: $xу - (x + y) = 29$. Если к первому числу x прибавить удвоенное второе число $2y$, то получится 19. Имеем второе

уравнение: $x + 2x = 19$. Получили систему уравнений:
$$\begin{cases} xy - (x + y) = 29 \\ x + 2y = 19 \end{cases}. \text{ Из}$$

второго уравнения выразим $x = 19 - 2y$ и подставим в первое уравнение:

$(19 - 2y)y - (19 - y) - y - 29$ или $19y - 2y^2 - 19 + 2y - y = 29$ или $0 = 2y^2 - 20y + 48$ или $0 = y^2 - 10y + 24$. Корни этого уравнения: $y_1 = 4$ и $y_2 = 6$. По формуле $x = 19 - 2y$ найдем соответствующие значения x : $x_1 = 19 - 2 \cdot 4 = 11$ и $x_2 = 19 - 2 \cdot 6 = 7$. Итак, есть две пары таких чисел: $x = 11, y = 4$ и $x = 7, y = 6$.

Ответ: $x = 11, y = 4$ и $x = 7, y = 6$.

6. Пусть скорость первой группы туристов x км/ч, второй группы $-y$ км/ч. Тогда за 2 часа первая группа прошла $2x$ км, вторая группа $-2y$ км. Сумма этих расстояний равна расстоянию между пунктами, т.е. 18 км. Поэтому получаем первое уравнение: $2x + 2y = 18$ или $x + y = 9$.

Первая группа затрачивает на прохождение пути $\frac{18}{x}$ ч, вторая группа $-\frac{18}{y}$ ч.

По условию одной из групп понадобилось на 54 мин $= \frac{54}{60}$ ч $= \frac{9}{10}$ ч больше,

чем другой. Имеем второе уравнение: $\frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}$. Умножим обе части

уравнение на $\frac{10}{9}xy$ и получаем: $20y - 20x = xy$.

Имеем систему уравнений:
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 20y - 20x = xy \end{cases}. \text{ Из первого уравнения выразим}$$

$y = 9 - x$ и подставим во второе уравнение: $20(9 - x) - 20x = x(9 - x)$ или $180 - 20x - 20x = 9x - x^2$ или $x^2 - 49x + 180 = 0$. Корни этого квадратного уравнения: $x_1 = 4$ и $x_2 = 45$. Теперь найдем соответствующие значения y : $y_1 = 9 - 4 = 5$ и $y_2 = 9 - 45 = -36$. Очевидно, что второе решение не подходит, т.к. скорость второй группы туристов отрицательная. Система имеет одно решение: $x = 4, y = 5$.

Ответ: 4 км/ч и 5 км/ч.

7. Пусть l – вся работа, x ч – выполняет всю работу I машинистка, тогда $(x + 3)$ ч – выполняет всю работу II; $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+3}$ часть работы – производительность I и II. Известно, что за $6\frac{2}{3}$ ч обе машинистки, работая совместно, сделают всю работу, т.е. $\frac{20}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right) = 1$; $\frac{2x+3}{x(x+3)} - \frac{3}{20} = 0$;
 $40x + 60 - 3x(x+3) = 0$; $40x + 60 - 3x^2 - 9x = 0$; $3x^2 - 31x - 60 = 0$;
 $D = 961 + 4 \cdot 3 \cdot 60 = 1681$; $x_1 = \frac{31+41}{6} = 12$, $x_2 < 0$; 12 ч и 15 ч требуется I и II машинистке, чтобы выполнить всю работу.

Ответ: 12 и 15 ч.

С-17. Последовательности

1. а) 10, 11, 12, 13, 14; б) 1, 4, 9, 16, 25; в) 4, 7, 10, 13, 16.

2. Чтобы найти любой член последовательности $a_n = 5n - 2$, надо вместо n подставить номер этого члена. Поэтому получаем:

а) $a_1 = 5 \cdot 1 - 2 = 3$, б) $a_6 = 5 \cdot 6 - 2 = 28$, в) $a_{10} = 5 \cdot 10 - 2 = 48$,

г) $a_{100} = 5 \cdot 100 - 2 = 498$, д) $a_k = 5 \cdot k - 2 = 5k - 2$, е) $a_{k+1} = 5 \cdot (k + 1) - 2 = 5k + 5 - 2 = 5k + 3$.

Ответ: а) 3, б) 28, в) 48, г) 498, д) $5k - 2$, е) $5k + 3$.

3. а) $x_n = n + 6$; $x_2 = 2 + 6 = 8$; $x_5 = 5 + 6 = 11$; $x_{10} = 10 + 6 = 16$;

б) $x_n = \frac{2n-1}{3}$; $x_2 = \frac{2 \cdot 2 - 1}{3} = 1$; $x_5 = \frac{2 \cdot 5 - 1}{3} = 3$; $x_{10} = \frac{2 \cdot 10 - 1}{3} = \frac{19}{3}$;

в) $x_n = n^2$; $x_2 = 2^2 = 4$; $x_5 = 5^2 = 25$; $x_{10} = 10^2 = 100$; г) $x_n = n(n-1)$; $x_2 = 2(2-1) = 2$;
 $x_5 = 5(5-1) = 20$; $x_{10} = 10(10-1) = 90$;

д) $x_n = n^3 - n$; $x_2 = 2^3 - 2 = 6$; $x_5 = 5^3 - 5 = 120$; $x_{10} = 10^3 - 10 = 990$; е) $x_n = (-1)^n \cdot n$;
 $x_2 = (-1)^2 \cdot 2 = 2$; $x_5 = (-1)^5 \cdot 5 = -5$; $x_{10} = (-1)^{10} \cdot 10 = 10$.

4. Известно, что член последовательности $a_n = 55 - 4n$ равен 15, т.е. $a_n = 15$. Для прохождения номера n этого члена получаем уравнение: $15 = 55 - 4n$ или $15 - 55 = -4n$ или $-40 = -4n$, откуда $n = 10$.

Ответ: $n = 10$.

5. а) Чтобы найти пять первых членов последовательности $\{c_n\}$ (если $c_1 = 3$), подставим поочередно в формулу $c_{n+1} = c_n + 4$ значения $n = 1, 2, 3, 4$. Получаем: при $n = 1$: $c_{1+1} = c_1 + 4$ или $c_2 = c_1 + 4 = 3 + 4 = 7$; при $n = 2$: $c_{2+1} = c_2 + 4$ или $c_3 = c_2 + 4 = 7 + 4 = 11$; при $n = 3$: $c_{3+1} = c_3 + 4$ или $c_4 = c_3 + 4 = 11 + 4 = 15$ и при $n = 4$: $c_{4+1} = c_4 + 4$ или $c_5 = c_4 + 4 = 15 + 4 = 19$.

Ответ: $c_1 = 3, c_2 = 7, c_3 = 11, c_4 = 15, c_5 = 19$.

б) $C_1 = 4, C_{n+1} = 2C_n; C_2 = 2C_1 = 8, C_3 = 2C_2 = 16, C_4 = 2C_3 = 32, C_5 = 2C_4 = 64$.

6. 0,4; 0,42; 0,428; 0,4285; 0,42857.

7. Если данное число является членом последовательности $a_n = n^2 - 2n + 3$, то, подставив вместо a_n это число, можно решить получившееся квадратное уравнение и найти номер такого члена.

а) При $a_n = 3$ получаем уравнение: $3 = n^2 - 2n + 3$ или $0 = n^2 - 2n$ или $0 = n(n - 2)$. Корни этого уравнения $n_1 = 0$ (не подходит, т.е. n - число натуральное) и $n_2 = 2$. Поэтому второй член данной последовательности равен 3.

б) При $a_n = 66$ имеем уравнение: $66 = n^2 - 2n + 3$ или $0 = n^2 - 2n - 63$. Корни этого уравнения $n_1 = -7$ (не подходит, т.к. n - число натуральное) и $n_2 = 9$. Поэтому девятый член данной последовательности равен 66.

в) При $a_n = 103$ имеем уравнение: $103 = n^2 - 2n + 3$ или $0 = n^2 - 2n - 100$. Корни этого уравнения $n_{1,2} = 1 \pm \sqrt{101}$ не являются натуральными числами. Поэтому никакой член данной последовательности не равен 103, т.е. число 103 не является членом данной последовательности.

Ответ: а) да; б) да; в) нет.

8. Запишем данную формулу для значений n , равных $1, 2, 3, \dots, k - 1$.

а) Получаем: $b_2 = b_1 + 4, b_3 = b_2 + 4, b_4 = b_3 + 4, \dots, b_k = b_{k-1} + 4$. Сложим левые и правые части этих равенств: $b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_k = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{k-1} + 4 \cdot (k - 1)$. Сократим в обеих частях одинаковые суммы $b_2 + b_3 + \dots + b_{k-1}$ и получим: $b_k = b_1 + 4 \cdot (k - 1)$. Учтем, что $b_1 = 4$, тогда $b_k = 4 + 4 \cdot (k - 1) = 4(1 + k - 1) = 4k$. Итак, k -ый член этой последовательности можно найти по формуле $b_k = 4k$.

б) Получаем равенства: $b_2 = 5b_1, b_3 = 5b_2, b_4 = 5b_3, \dots, b_k = 5b_{k-1}$. Перемножим левые и правые части этих равенств. Имеем: $b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot \dots \cdot b_k = 5b_1 \cdot 5b_2 \cdot 5b_3 \cdot \dots \cdot 5b_{k-1}$ или $b_2 b_3 b_4 \cdot \dots \cdot b_k = 5^{k-1} b_1 b_2 b_3 \cdot \dots \cdot 5b_{k-1}$. Разделим обе части этого равенства на $b_2 b_3 b_4 \cdot \dots \cdot b_{k-1}$ и получим: $b_k = b_1 \cdot 5^{k-1}$. Учтем, что $b_1 = 1$, и найдем $b_k = 5^{k-1}$.

Ответ: а) $b_k = 4k$; б) $b_k = 5^{k-1}$.

С-18. Арифметическая прогрессия. Формула n -го члена

1. $a_1 = 3,4; a_2 = -0,2; d = a_2 - a_1 = -0,2 - 3,4 = -3,6$;

$a_3 = a_2 + d = -0,2 - 3,6 = -3,8; a_4 = a_2 + 2d = -0,2 - 2 \cdot 3,6 = -7,4$;

$a_5 = a_2 + 3d = -0,2 - 3 \cdot 3,6 = -11; a_6 = a_5 + d = -11 - 3,6 = -14,6$.

2. Чтобы найти нужные члены арифметической прогрессии, воспользуемся формулой n -го члена $b_n = b_1 + d(n - 1)$. По условию известны $b_1 = -0,8$ и $d = 4$, тогда $b_n = -0,8 + 4(n - 1) = 4n - 4,8$. Теперь подставим номера нужных членов. Получаем:

а) $b_3 = 4 \cdot 3 - 4,8 = 12 - 4,8 = 7,2$; б) $b_7 = 4 \cdot 7 - 4,8 = 28 - 4,8 = 23,2$;

в) $b_{24} = 4 \cdot 24 - 4,8 = 96 - 4,8 = 91,2$; г) $b_{k+1} = 4 \cdot (k+1) - 4,8 = 4k - 0,8$.

Ответ: а) 7,2; б) 23,2; в) 91,2; г) $b_{k+1} = 4k - 0,8$.

3. а) $a_1 = 16, a_8 = 37; a_8 = a_1 + 7d, 7d = a_8 - a_1, d = \frac{a_8 - a_1}{7} = \frac{37 - 16}{7} = 3$.

б) Используем формулу n -го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$.

В этой задаче известны $a_1 = 4, a_{18} = -11, n = 18$. Подставим эти значения в формулу и получим линейное уравнение для нахождения d : $-11 = 4 + d(18-1)$

или $-11 = 4 + 17d$ или $-15 = 17d$, откуда $d = -\frac{15}{17}$.

в) $a_1 = 0,5, a_{23} = -2,3; a_{23} = a_1 + 22d$,

$$d = \frac{a_{23} - a_1}{22} = \frac{-2,3 - 0,5}{22} = -\frac{2,8}{22} = -\frac{1,4}{11} = -\frac{14}{110} = -\frac{7}{55}$$

Ответ: а) 3; б) $d = -\frac{15}{17}$; в) $-\frac{7}{55}$.

4. $a_1 = 106; d = 12; a_6 = a_1 + 5d = 106 + 5 \cdot 12 = 166; a_{12} = a_1 + 11d = 106 + 11 \cdot 12 = 238$

5. а) Снова воспользуемся формулой n -го члена арифметической прогрессии $x_n = x_1 + d(n-1)$. По условию задачи известны $x_1 = 14, d = 0,5$ и $x_n = 17,5$.

Найдем порядковый номер члена x_n . Подставим эти величины в формулу и получим линейное уравнение для нахождения n : $17,5 = 14 + 0,5(n-1)$ или

$$3,5 = 0,5(n-1), \text{ откуда } n-1 = \frac{3,5}{0,5} = 7 \text{ и } n = 8.$$

б) $x_n = 19 = x_1 + d(n-1) = 13,5 + 0,5n; 19 = 13,5 + 0,5n; 0,5n = 5,5; n = 11$,

значит, $19 = x_{11}$; в) $x_n = 34 = 13,5 + 0,5n; 0,5n = 20,5; n = 41$, значит, $34 = x_{41}$.

Ответ: а) 8; б) 11; в) 41.

6. $a_1 = 18, d = a_2 - a_1 = 4 - 18 = -14$;

а) $-38 = a_1 + d(n-1) = 18 - 14(n-1) = 32 - 14n$;

$$14n = 70, n = 5, \text{ значит, } -38 = a_5; \text{ б) } -64 = 32 - 14n; 14n = 96,$$

$$n = \frac{48}{7} \notin N, \text{ значит, } -64 \text{ не встретится среди данных чисел.}$$

в) $-80 = 32 - 14n; 14n = 112, n = 8$, значит, $-80 = a_8$.

Ответ: а) $n = 5$; б) не встретится; в) $n = 8$.

7. Если между членами 2 и 22 вставить четыре числа, то число 2 будет первым членом арифметической прогрессии (т.е. $a_1 = 2$), а число 22 – шестым членом этой прогрессии (т.е. $a_6 = 22$). Найдем разность прогрессии d . Используя формулу n -го члена арифмет. прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$, получаем уравнение:

$22 = 2 + d(6 - 1)$ или $22 - 2 = 5d$, откуда $d = 4$. Теперь по той же формуле найдем вставленные числа: $a_2 = a_1 + d = 2 + 4 = 6$, $a_3 = a_1 + 2d = 2 + 2 \cdot 4 = 10$, $a_4 = a_1 + 3d = 2 + 3 \cdot 4 = 14$, $a_5 = a_1 + 4d = 2 + 4 \cdot 4 = 18$. Итак, между числами 2 и 22 надо вставить числа 6, 10, 14, 18. Тогда все шесть чисел составят арифметическую прогрессию.

Ответ: 6, 10, 14, 18.

8. Используя формулу n -го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n - 1)$, запишем члены: $a_2 = a_1 + d(2 - 1) = a_1 + d$, $a_{n-2} = a_1 + d(n - 2 - 1) = a_1 + d(n - 3)$, $a_5 = a_1 + d(5 - 1) = a_1 + 4d$, $a_{n-5} = a_1 + d(n - 5 - 1) = a_1 + d(n - 6)$. Теперь проверим данное равенство $a_2 + a_{n-2} = a_5 + a_{n-5}$, вычислив его левую и правую части. Левая часть равна: $a_2 + a_{n-2} = a_1 + d + a_1 + d(n - 3) = 2a_1 + d(1 + n - 3) = 2a_1 + d(n - 2)$, правая часть: $a_5 + a_{n-5} = a_1 + 4d + a_1 + d(n - 6) = 2a_1 + d(4 + n - 6) = 2a_1 + d(n - 2)$. Видно, что левая часть равна правой. Равенство доказано.

9. В данной арифметической прогрессии первый член равен 7 (т.е. $a_1 = 7$), второй – квадрату натурального числа n (т.е. $a_2 = n^2$), третий – квадрату следующего натурального числа $n + 1$ (т.е. $a_3 = (n + 1)^2$). Запишем разность этой прогрессии $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, откуда $2a_2 = a_1 + a_3$. Получаем: $2n^2 = 7 + (n + 1)^2$ или $2n^2 = 7 + n^2 + 2n + 1$ или $n^2 - 2n - 8 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $n_1 = 4$ и $n_2 = -2$ (не подходит, т.к. n – число натуральное). Теперь получаем: $a_2 = 4^2 = 16$ и $a_3 = (4 + 1)^2 = 5^2 = 25$.

Ответ: $a_2 = 16$ и $a_3 = 25$.

10. Прежде всего заметим, что если числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, то выполняется равенство $2a_2 = a_1 + a_3$ (см. предыдущую задачу).

Поэтому, если числа $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$ образуют арифметическую прогрессию, то выполняется равенство:

$\frac{2}{a+c} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}$. Умножим его части на произведение $(a+c)(b+c)(a+b)$ и получим: $2(b+c)(a+b) = (a+c)(a+b) + (a+c)(b+c)$. Раскроем скобки и приведем подобные члены: $2ab + 2b^2 + 2ac + 2bc = a^2 + ab + ac + bc + ab + ac + bc + c^2$ или $2b^2 = a^2 + c^2$. Но, так как числа a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию, то и выполняется именно такое равенство: $2b^2 = a^2 + c^2$. Следовательно, числа $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$ образуют арифметическую прогрессию.

C-19. Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии

1. Для арифметической прогрессии $-16, -13, \dots$ определим первый член $a_1 = -16$ и разность $d = a_2 - a_1 = -13 - (-16) = 3$. Воспользуемся формулой суммы n первых членов прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ и получим

$S_n = \frac{2 \cdot (-16) + 3(n-1)}{2} \cdot n = \frac{-32 + 3n - 3}{2} \cdot n = \frac{(3n-35)n}{2}$. Теперь легко найти необходимые суммы:

а) $S_6 = \frac{(3 \cdot 6 - 35) \cdot 6}{2} = (18 - 35) \cdot 3 = -51$; б) $S_{16} = \frac{(3 \cdot 16 - 35) \cdot 16}{2} = (48 - 35) \cdot 8 = 104$;

в) $S_{25} = \frac{(3 \cdot 25 - 35) \cdot 25}{2} = \frac{(75 - 35) \cdot 25}{2} = 500$;

г) $S_{k+1} = \frac{(3 \cdot (k+1) - 35) \cdot (k+1)}{2} = \frac{(3k+3-35) \cdot (k+1)}{2} = \frac{(3k-32)(k+1)}{2}$.

Ответ: а) -51; б) 104; в) 500; г) $\frac{(3k-32)(k+1)}{2}$.

2. а) $a_1 = 4$; $d = 2$; $S_{12} = \frac{2a_1 + 11d}{2} \cdot 12 = \frac{2 \cdot 4 + 11 \cdot 2}{2} \cdot 12 = 180$;

б) $a_1 = -5$; $d = 3$; $S_{12} = (2 \cdot (-5) + 11 \cdot 3) \cdot 6 = 23 \cdot 6 = 138$;

в) $a_1 = 16,5$; $d = -1,5$; $S_{12} = (2 \cdot 16,5 + 11 \cdot (-1,5)) \cdot 6 = 99$;

г) $a_1 = 1 + \sqrt{3}$; $d = -\sqrt{3}$; $S_{12} = (2 \cdot (1 + \sqrt{3}) + 11 \cdot (-\sqrt{3})) \cdot 6 = (2 - 9\sqrt{3}) \cdot 6 = 12 - 54\sqrt{3}$.

Ответ: а) 180; б) 138; в) 99; г) $12 - 54\sqrt{3}$.

3. Прежде всего убедимся, что данная последовательность является арифметической прогрессией. Найдем разность двух соседних членов $a_n = 3n + 2$ и $a_{n-1} = 3(n-1) + 2 = 3n - 1$. Получаем: $a_n - a_{n-1} = 3n + 2 - (3n - 1) = 3n + 2 - 3n + 1 = 3$.

Видно, что эта разность величина постоянная (т.е. не зависит от номера n). Следовательно, данная последовательность – арифметическая прогрессия с разностью $d = 3$. Найдем ее первый член по формуле $a_n = 3n + 2$. Получаем:

$a_1 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$. Воспользуемся формулой суммы n первых членов прогрессии

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 5 + 3(n-1)}{2} \cdot n = \frac{10 + 3n - 3}{2} \cdot n = \frac{(3n+7)n}{2}.$$

Найдем нужные суммы: $S_5 = \frac{(3 \cdot 5 + 7) \cdot 5}{2} = \frac{22 \cdot 5}{2} = 55$; $S_{40} = \frac{(3 \cdot 40 + 7) \cdot 40}{2} =$

$$= \frac{127 \cdot 40}{2} = 2540; S_k = \frac{(3k+7)k}{2}.$$

Ответ: $S_5 = 55$; $S_{40} = 2540$; $S_k = \frac{(3k+7)k}{2}$.

4. а) $a_1 = 1, d = 1, S_{80} = ?; S_{80} = \frac{2a_1 + 79d}{2} \cdot 80 = 81 \cdot 40 = 3240;$

б) $a_1 = 10, d = 1, S_{90} = ?; S_{90} = \frac{2a_1 + 89d}{2} \cdot 90 = (20 + 89) \cdot 45 = 4905;$

в) Очевидно, что четные члены 2, 4, 6, ... образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 2$ и разностью $d = 2$. Таких чисел, не превышающих 100, ровно пятьдесят (каждое второе), т.е. $n = 50$. Используем формулу для суммы n первых членов прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ и найдем:

$$S_{50} = \frac{2 \cdot 2 + 2(50-1)}{2} \cdot 50 = \frac{6+98}{2} \cdot 50 = 51 \cdot 50 = 2550.$$

Ответ: а) 3240; б) 4908; в) 2550.

5. а) $a_1 = 8, a_7 = 24; a_7 = a_1 + 6d; d = \frac{a_7 - a_1}{6} = \frac{24 - 8}{6} = \frac{8}{3};$

$$S_{10} = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = (16 + 24) \cdot 5 = 200;$$

б) Прежде всего найдем первый член a_1 и разность d арифметической прогрессии по известным условиям $a_4 = 16$ и $a_{12} = 88$. Используем формулу n -го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$ и запишем эти условия:

$$\begin{cases} a_1 + d(4-1) = 16 \\ a_1 + d(12-1) = 88 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a_1 + 3d = 16 \\ a_1 + 11d = 88 \end{cases}. \text{ Вычтем из второго уравнения первое:}$$

$a_1 + 11d - (a_1 + 3d) = 88 - 16$ или $8d = 72$, откуда $d = 9$. Из первого уравнения найдем $a_1 = 16 - 3d = 16 - 3 \cdot 9 = 16 - 27 = -11$. Теперь по формуле суммы n

первых членов прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ легко найти

$$S_{10} = \frac{2(-11) + d(10-1)}{2} \cdot 10 = \frac{-22 + 81}{2} \cdot 10 = 59 \cdot 5 = 295.$$

Ответ: а) 200; б) 295.

6. $a_1 = 15, d = 2; S_{26} = \frac{2a_1 + 25d}{2} \cdot 26 = (30 + 50) \cdot 13 = 1040.$

Ответ: 1040.

7. Используя формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии

$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ запишем условия задачи $S_3 = 48$ и $S_6 = 141$. Получаем:

$$\frac{2a_1 + d(3-1)}{2} \cdot 3 = 48 \text{ и } \frac{2a_1 + d(6-1)}{2} \cdot 6 = 141. \text{ Упростим эти уравнения,}$$

раскрывая скобки и выполняя необходимые действия: $a_1 + d = 16$ и $2a_1 + 5d = 47$. Решим полученную систему уравнений. Из первого уравнения выразим $a_1 = 16 - d$ и подставим во второе уравнение: $2(16 - d) + 5d = 47$ или $32 - 2d + 5d = 47$ или $3d = 15$, откуда $d = 5$. Находим $a_1 = 16 - 5 = 11$.

Ответ: $a_1 = 11$ и $d = 5$.

8. Из условия задачи ясно, что за первый час расстояние между автомобилями сократится на 10 км, за второй час – на 15 км, за третий час – на 20 км. Поэтому



$$a_1 = 10, d = 5; S_n = 135; n = ?; 135 = \frac{2 \cdot 10 + 5 \cdot (n-1)}{2} \cdot n;$$

$$270 = (20 + 5n - 5) \cdot n, n(5n + 15) - 270 = 0, n(n + 3) - 54 = 0, n^2 + 3n - 54 = 0;$$

$$D = 9 + 4 \cdot 54 = 225; n_1 = \frac{-3 + 15}{2} = 6; n_2 < 0 - \text{не удовлетворяет условию задачи.}$$

Итак, через 6 ч легковой автомобиль догонит грузовой.

Ответ: через 6 ч.

9. а) Прежде всего, нужно найти сумму чисел, стоящих в левой части уравнения.

Пусть последний член x является n -ым членом прогрессии. Тогда, используя формулу n -го члена, запишем $x = a_1 + d(n - 1) = 3 + 4(n - 1) = 4n - 1$ (т.к. $a_1 = 3, d = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$). Также можно записать, что $3 + 7 + 11 + \dots + x = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 3 + 4(n-1)}{2} \cdot n = \frac{6 + 4n - 4}{2} \cdot n = \frac{4n + 2}{2} \cdot n = (2n + 1) \cdot n = 2n^2 + n = 289$.

Итак, получили систему уравнений: $\begin{cases} x = 4n - 1 \\ 2n^2 + n = 289 \end{cases}$. Решим сначала второе

уравнение системы: $2n^2 + n = 289$ или $2n^2 + n - 289 = 0$. Корни этого уравнения

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-289)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2313}}{4} = \frac{-1 \pm 3\sqrt{257}}{4} \quad \text{не являются}$$

натуральными числами. Следовательно, полученная система и данное уравнение решений не имеют.

- б) $8 + 5 + 2 + \dots + x = 270; d = -3; a_1 = 8; S_n = 270 = \frac{16 - 3(n-1)}{2} \cdot n; 540 = n(19 - 3n);$

$$3n^2 - 19n + 540 = 0; D = 361 - 4 \cdot 3 \cdot 540 < 0 - \text{решений нет.}$$

10. а) Надо воспользоваться определением арифметической прогрессии и найти разность соседних членов. Сначала найдем формулу n -го члена данной последовательности. Запишем сумму: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$, тогда

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 5n^2 + 3n - (5(n-1)^2 + 3(n-1)) = 5n^2 + 3n - (5n^2 - 10n + 5 + 3n - 3) = 5n^2 + 3n - (5n^2 - 7n + 2) = 5n^2 + 3n - 5n^2 + 7n - 2 = 10n - 2. \text{ Таким образом, получили } a_n = 10n - 2. \text{ Теперь найдем разность между соседними членами последовательности: } a_n - a_{n-1} = 10n - 2 - (10(n-1) - 2) = 10n - 2 - (10n - 10 - 2) =$$

$= 10n - 2 - (10n - 12) = 10n - 2 - 10n + 12 = 10$. Видно, что эта разность является постоянным числом и не зависит от номера n . Следовательно, по определению данная последовательность – арифметическая прогрессия.

$$\text{б) } S_n = 3n^2; 3n^2 = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n; \frac{d}{2} = 3; d = 6; a_1 - \frac{d}{2} = 0; a_1 = 3.$$

Значит, $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.

$$\text{в) } S_n = (4n-1)n = 4n^2 - n; 4n^2 - n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n;$$

$$\begin{cases} \frac{d}{2} = 4, d = 8 \\ a_1 - \frac{d}{2} = -1, a_1 = 3 \end{cases} \quad \text{Значит, } \{a_n\} \text{ – арифметическая прогрессия.}$$

Ответ: а) да; б) да; в) да.

С-20. Геометрическая прогрессия. Формула n -го члена

$$1. b_1 = 0,3; b_2 = 1,8; q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1,8}{0,3} = 6; b_3 = b_2 \cdot q = 1,8 \cdot 6 = 10,8;$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = 10,8 \cdot 6 = 64,8; b_5 = b_4 \cdot q = 64,8 \cdot 6 = 388,8;$$

$$b_6 = b_5 \cdot q = 388,8 \cdot 6 = 2331,8.$$

Ответ: 10,8; 64,8; 388,8; 2331,8.

$$2. b_1 = 1,6; q = 2; b_3 = b_1 q^2 = 1,6 \cdot 4 = 6,4; b_5 = b_3 q^2 = 6,4 \cdot 4 = 25,6;$$

$$b_7 = b_5 q^2 = 25,6 \cdot 4 = 102,4; b_k = b_1 q^{k-1} = 1,6 \cdot 2^{k-1} = 0,8 \cdot 2^k.$$

Ответ: 6,4; 25,6; 102,4; $0,8 \cdot 2^k$.

3. а) Используем формулу n -го члена геометрической прогрессии $a_n = a_1 q^{n-1}$. В этой задаче $a_1 = 3, q = 2$ и $n = 6$. Тогда $a_6 = 3 \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96$.

$$\text{б) } a_1 = 64; q = -\frac{1}{4}; a_7 = a_1 q^6 = 64 \cdot \frac{1}{4^6} = \frac{1}{64}; \text{ в) } a_1 = 125; q = \frac{1}{5}; a_5 = a_1 q^4 = 5^3 \cdot \frac{1}{5^4} = \frac{1}{5};$$

$$\text{г) } a_1 = 2\sqrt{2}; q = \frac{1}{\sqrt{2}}; a_8 = a_1 q^7 = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2^{7/2}} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: а) 96; б) $\frac{1}{64}$; в) $\frac{1}{5}$; г) $\frac{1}{4}$.

4. а) Используем формулу n -го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$.

В нашем случае $b_6 = \frac{1}{27}, q = \frac{1}{3}$ и $n = 6$. Получаем уравнение $\frac{1}{27} = b_1 \left(\frac{1}{3}\right)^5$

$$\text{или } \frac{1}{27} = b_1 \cdot \frac{1}{243}, \text{ откуда } b_1 = \frac{1}{27} : \frac{1}{243} = \frac{1}{27} \cdot 243 = 9;$$

$$\text{б) } b_7 = 256, q = -2; b_7 = b_1 \cdot q^6, 256 = b_1 \cdot 2^6; b_1 = \frac{256}{64} = 4.$$

5. а) По условию задачи $b_3 = 12$ и $b_5 = 48$. Запишем эти члены, используя формулу n -го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$: $b_1 q^2 = 12$ и $b_1 q^4 = 48$.

Почленно разделим второе уравнение на первое. Имеем уравнение: $\frac{b_1 q^4}{b_1 q^2} = \frac{48}{12}$

или $q^2 = 4$, откуда $q = \pm 2$.

$$\text{б) } b_4 = 25; b_6 = 16; b_6 = b_4 q^2; q = \sqrt{\frac{b_6}{b_4}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: а) $q = \pm 2$; б) $q = \frac{4}{5}$.

6. После вставки четырех чисел образуется геометрическая прогрессия. При этом

число $\frac{1}{9}$ – ее первый член (т.е. $b_1 = \frac{1}{9}$), число 27 – шестой член (т.е. $b_6 = 27$).

Воспользуемся формулой n -го члена прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$. Для шестого члена ($n = 6$) получаем уравнение: $27 = \frac{1}{9} \cdot q^5$, откуда $q^5 = 27 \cdot 9 = 243$ и $q = \sqrt[5]{243} = 3$.

Теперь можно найти нужные числа: $b_2 = b_1 q = \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{3}$; $b_3 = b_1 q^2 = \frac{1}{9} \cdot 3^2 = 1$;

$$b_4 = b_1 q^3 = \frac{1}{9} \cdot 3^3 = \frac{1}{9} \cdot 27 = 3; b_5 = b_1 q^4 = \frac{1}{9} \cdot 3^4 = \frac{1}{9} \cdot 81 = 9.$$

Ответ: $\frac{1}{3}, 1, 3, 9$.

7. Запишем формулу n -го члена данной геометрической прогрессии $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Теперь проверим, являются ли последовательности геометрическими прогрессиями. Для этого найдем отношение соседних членов.

$$\text{а) } \frac{2a_n}{2a_{n-1}} = \frac{2a_1 q^{n-1}}{2a_1 q^{n-2}} = q^{n-1-(n-2)} = q^{n-1-n+2} = q. \text{ Так как отношение этих членов}$$

величина постоянная (т.е. не зависит от номера n), то по определению такая последовательность является геометрической прогрессией.

$$\text{б) } \frac{a_n + 3}{a_{n-1} + 3} = \frac{a_1 q^{n-1} + 3}{a_1 q^{n-2} + 3}. \text{ Видно, что отношение соседних членов не является}$$

постоянной величиной. Следовательно, данная последовательность – не геометрическая прогрессия.

$$\text{в) } \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_{n-1}}} = \frac{\sqrt{a_1 q^{n-1}}}{\sqrt{a_1 q^{n-2}}} = \sqrt{\frac{a_1 q^{n-1}}{a_1 q^{n-2}}} = \sqrt{q^{n-1-(n-2)}} = \sqrt{q}. \text{ Отношение этих членов –}$$

величина постоянная. Поэтому данная последовательность по определению является геометрической прогрессией.

Ответ: а) да, б) нет, в) да.

8. По условию известно, что $a_4 - a_2 = 18$ и $a_5 - a_3 = 36$. Используем формулу n -го члена геометрической прогрессии $a_n = a_1 q^{n-1}$ и запишем условия:

$$\begin{cases} a_1 q^3 - a_1 q = 18 \\ a_1 q^4 - a_1 q^2 = 36 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a_1 q (q^2 - 1) = 18 \\ a_1 q^2 (q^2 - 1) = 36 \end{cases} . \text{ Для решения этой системы почленно}$$

разделим второе уравнение на первое: $\frac{a_1 q^2 (q^2 - 1)}{a_1 q (q^2 - 1)} = \frac{36}{18}$, откуда $q = 2$.

Подставим это значение в первое уравнение $a_1 \cdot 2(2^2 - 1) = 18$ или $6a_1 = 18$, откуда $a_1 = 3$.

Ответ: $a_1 = 3$ и $q = 2$.

9. Используя формулу n -го члена геометр. прогрессии, запишем ее четыре первых члена: $a_1, a_1 q, a_1 q^2, a_1 q^3$. Сумма крайних членов равна 52, т.е. $a_1 + a_1 q^3 = 52$. Сумма средних членов равна 16, т.е. $a_1 q + a_1 q^2 = 16$. Получили систему

$$\text{уравнений: } \begin{cases} a_1 + a_1 q^3 = 52 \\ a_1 q + a_1 q^2 = 16 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a_1 (1 + q^3) = 52 \\ a_1 q (1 + q) = 16 \end{cases} . \text{ Разделим первое уравнение}$$

на второе: $\frac{a_1 (1 + q^3)}{a_1 q (1 + q)} = \frac{52}{16}$ или $\frac{(1 + q)(1 - q + q^2)}{q(1 + q)} = \frac{13}{4}$ или $\frac{1 - q + q^2}{q} = \frac{13}{4}$ или

$4 - 4q + 4q^2 = 13q$ или $4q^2 - 17q + 4 = 0$. Решим это квадратное уравнение

$q = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{8} = \frac{17 \pm 5}{8}$, т.е. $q_1 = 4$ и $q = \frac{1}{4}$. Из первого уравнения

системы найдем $a_1 = \frac{52}{1 + q^3}$. Для $q = 4$ получаем: $a_1 = \frac{52}{1 + 4^3} = \frac{52}{65}$,

$$a_2 = a_1 q = \frac{52}{65} \cdot 4 = \frac{208}{65}, \quad a_3 = a_1 q^2 = \frac{52}{65} \cdot 4^2 = \frac{52 \cdot 16}{65} = \frac{832}{65}.$$

$$a_4 = a_1 q^3 = \frac{52}{65} \cdot 4^3 = \frac{52 \cdot 64}{65} = \frac{3328}{65}$$

Для $q = \frac{1}{4}$ находим: $a_1 = \frac{52}{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{52}{1 + \frac{1}{64}} = \frac{52 \cdot 64}{65} = \frac{3328}{65}$, $a_2 = a_1 q = \frac{3328}{65} \cdot \frac{1}{4}$,

$$a_3 = a_1 q^2 = \frac{3328}{65} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{208}{65}, \quad a_4 = a_1 q^3 = \frac{3328}{65} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{52}{65}.$$

Ответ: $\frac{52}{65}, \frac{208}{65}, \frac{832}{65}, \frac{3328}{65}$.

10. Если числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, то ее знаменатель

$q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, откуда $b^2 = ac$. Сначала упростим левую часть данного равенства:

$$(a + b + c)(a - b + c) = ((a + c) + b)((a + c) - b) = (a + c)^2 - b^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2.$$

Так как $ac = b^2$, то получаем: $a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 - b^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Видим, что левая часть равна правой. Следовательно, данное равенство является тождеством.

С-21. Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии

1. а) Используем формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии

$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. В нашем случае $b_1 = 32$, $q = \frac{1}{4}$ и $n = 5$. Тогда получаем:

$$S_5 = \frac{32 \left(\left(\frac{1}{4} \right)^5 - 1 \right)}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{32 \left(\frac{1}{1024} - 1 \right)}{-\frac{3}{4}} = \frac{32 \cdot \left(-\frac{1023}{1024} \right)}{-\frac{3}{4}} = \frac{1023 \cdot 3}{32 \cdot 4} = \frac{1023 \cdot 4}{32 \cdot 3} = \frac{341}{8} = 42 \frac{5}{8}$$

б) $b_1 = -4$, $q = 2$; $S_5 = \frac{-4(2^5 - 1)}{2 - 1} = -124$; в) $b_1 = 27$, $q = -\frac{1}{3}$; $S_5 = \frac{27 \left(-\frac{1}{3^5} - 1 \right)}{-\frac{1}{3} - 1} =$

$$= \frac{244 \cdot 27 \cdot 3}{4 \cdot 243} = \frac{4941}{243} = \frac{183}{9} = \frac{61}{3}; \quad \text{г) } b_1 = 2\sqrt{3}, q = \sqrt{3}; S_5 = \frac{2\sqrt{3}(3^{5/2} - 1)}{\sqrt{3} - 1} = \frac{54 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

Ответ: а) $42 \frac{5}{8}$; б) -124 ; в) $\frac{61}{3}$; г) $\frac{54 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$.

2. а) $b_1 = 3$, $q = \frac{6}{3} = 2$; $S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{3 \cdot 63}{1} = 189$; б) $b_1 = 5$, $q = -\frac{2,5}{5} = -\frac{1}{2}$;

$$S_6 = \frac{5 \left(\left(\frac{1}{64} \right) - 1 \right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{5 \cdot 63 \cdot 2}{64 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 21}{32} = \frac{105}{32}; \quad \text{в) } b_1 = 4, q = \frac{4^2}{4} = 4;$$

$$S_6 = \frac{4(4^6 - 1)}{4 - 1} = \frac{4 \cdot 4095}{3} = 5460; \quad \text{г) } b_1 = \sqrt{3}, q = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}; S_6 = \frac{\sqrt{3}(27 - 1)}{\sqrt{3} - 1} = \frac{26\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

Ответ: а) 189; б) $\frac{105}{32}$; в) 5460; г) $\frac{26\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$.

$$3. \text{ а) } a_1 = 64, q = \frac{1}{4}; S_5 = \frac{64 \left(\frac{1}{4^5} - 1 \right)}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{64 \cdot 1023 \cdot 4}{4^5 \cdot 3} = \frac{341}{4};$$

$$\text{б) } a_1 = 10, q = \frac{1}{2}; S_8 = \frac{10 \left(\frac{1}{2^8} - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{10 \cdot 255 \cdot 2}{2^8} = \frac{5 \cdot 255}{2^6} = \frac{1275}{64};$$

$$\text{в) } a_1 = 3, q = -2; S_4 = \frac{3(16-1)}{-3} = -15; \text{ г) } a_1 = 3\sqrt{2}, q = \sqrt{2}; S_6 = \frac{3\sqrt{2}(8-1)}{\sqrt{2}-1} = \frac{21\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.$$

$$4. \text{ а) } b_3 = \frac{1}{25}; b_4 = \frac{1}{125}; q = \frac{b_4}{b_3} = \frac{1}{5}; b_3 = b_1 q^2; b_1 = \frac{b_3}{q^2} = 1; S_4 = \frac{5^4 - 1}{5 - 1} = \frac{624 \cdot 5}{625 \cdot 4} = \frac{156}{125};$$

б) Прежде всего найдем первый член b_1 и знаменатель q прогрессии. Известно, что $b_2 = 6$, $b_4 = 24$ и $q > 0$. Запишем эти условия, используя формулу n -го члена: $b_1 q = 6$ и $b_1 q^3 = 24$. Разделим почленно второе уравнение на первое:

$$\frac{b_1 q^3}{b_1 q} = \frac{24}{6} \text{ или } q^2 = 4. \text{ Учтем, что } q > 0 \text{ и найдем } q = 2. \text{ Подставим это значение}$$

в первое уравнение: $2b_1 = 6$, откуда $b_1 = 3$. Используем формулу суммы n первых

$$\text{членов геометрической прогрессии } S_4 = \frac{3(2^4 - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot 15 = 45.$$

5. а) Воспользуемся формулой суммы n первых членов геометрической

$$\text{прогрессии } S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}. \text{ В этой задаче известны: } n = 5, S_5 = 93 \text{ и } q = 2.$$

$$\text{Подставим эти величины в формулу и получим: } 93 = \frac{b_1(2^5 - 1)}{2 - 1} \text{ или}$$

$$93 = b_1 \cdot 31, \text{ откуда } b_1 = 3.$$

$$\text{б) } q = \frac{2}{3}; S_4 = 65,65 = \frac{b_1 \left(\frac{16}{81} - 1 \right)}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{b_1 \cdot 65 \cdot 3}{81}, b_1 = 27.$$

Ответ: а) 3; б) 27.

6. а) Если данная последовательность является геометрической прогрессией, то отношение любых двух соседних членов будет величиной постоянной.

$$\text{Проверим это. } \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{2 \cdot 3^n}{2 \cdot 3^{n-1}} = 3^{n-(n-1)} = 3. \text{ Следовательно, такая последо-}$$

вательность является геометрической прогрессией со знаменателем $q = 3$. Определим ее первый член $x_1 = 2 \cdot 3^1 = 6$. Теперь легко найти сумму ее первых

пяти членов: $S_5 = \frac{6(3^5 - 1)}{3 - 1} = 3 \cdot 242 = 726$.

б) $x_n = 2^n$; $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = 2$, значит, $\{x_n\}$ – геометрическая прогрессия;

в) $\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{3^n - 3}{3^{n-1} - 3}$. Такое отношение не является постоянной величиной, т.е. зависит от номера n . Поэтому данная последовательность не является геометрической прогрессией.

Ответ: а) да, $S_5 = 726$; б) да; в) нет.

7. Пусть дана геометрич. прогрессия $\{b_n\}$. Известно, что $b_6 - b_4 = 72$, $b_3 - b_5 = 9$. Используя формулу n -го члена, запишем эти условия: $b_1 q^5 - b_1 q^3 = 72$ и

$b_1 q^2 - b_1 q^4 = 9$. Получим систему уравнений: $\begin{cases} b_1 q^5 - b_1 q^3 = 72 \\ b_1 q^2 - b_1 q^4 = 9 \end{cases}$. Разделим

почленно первое уравнение на второе: $\frac{b_1 q^3 (q^2 - 1)}{b_1 q^2 (1 - q^2)} = \frac{72}{9}$ или $-q = 8$, откуда

$q = -8$. Из второго уравнения системы находим: $b_1 = \frac{9}{q^2 (1 - q^2)} =$
 $= \frac{9}{(-8)^2 (1 - (-8)^2)} = \frac{9}{64 \cdot (-63)} = -\frac{1}{148}$.

Теперь найдем суммы восьми первых членов этой прогрессии:

$$S_8 = \left(-\frac{1}{148}\right) \cdot \frac{(-8)^8 - 1}{(-8) - 1} = \frac{8^8 - 1}{4032}$$

Ответ: $\frac{8^8 - 1}{4032}$.

8. Используя формулу n -го члена геометрической прогрессии, запишем ее первые три члена: $b_1; b_1 q; b_1 q^2$. Так как их сумма равна 13, то имеем первое уравнение: $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 13$. Квадраты этих членов: $b_1^2; b_1^2 q^2; b_1^2 q^4$. Их сумма равна 91. Получаем второе уравнение: $b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 = 91$ или

$$\frac{b_1^2 (1 + q^2 + q^4)(1 - q^2)}{1 - q^2} = 91 \text{ или } \frac{b_1^2 (1 - (q^2)^3)}{1 - q^2} = 91 \text{ или } \frac{b_1^2 (1 - q^6)}{1 - q^2} = 91.$$

Получили систему уравнение:
$$\begin{cases} \frac{b_1(1-q^3)}{1-q} = 13 \\ \frac{b_1^2(1-q^6)}{1-q^2} = 91 \end{cases}$$

Возведем первое уравнение системы в квадрат:
$$\begin{cases} \frac{b_1^2(1-q^3)^2}{(1-q)^2} = 169 \\ \frac{b_1^2(1-q^6)}{1-q^2} = 91 \end{cases}$$
 . Разделим

первое уравнение на второе:
$$\frac{(1-q^3)^2(1-q^2)}{(1-q)^2(1-q^6)} = \frac{169}{91} = \frac{13}{7}$$
 . Разложим числитель и

знаменатель дроби на множители и сократим ее:

$$\frac{(1-q^3)(1-q^3)(1-q)(1+q)}{(1-q)(1-q)(1-q^3)(1+q^3)} = \frac{13}{7} \quad \text{или} \quad \frac{(1-q^3)(1+q)}{(1-q)(1+q^3)} = \frac{13}{7} \quad \text{или}$$

$$\frac{(1-q)(1+q+q^2)(1+q)}{(1-q)(1+q)(1-q+q^2)} = \frac{13}{7} \quad \text{или} \quad \frac{1+q+q^2}{1-q+q^2} = \frac{13}{7} \quad \text{или} \quad 7+7q+7q^2 =$$

$$= 13 - 13q + 13q^2 \quad \text{или} \quad 0 = 6q^2 - 20q + 6 \quad \text{или} \quad 0 = 3q^2 - 10q + 3. \quad \text{Корни этого}$$

квадратного уравнения $q_1 = 3$ и $q_2 = \frac{1}{3}$.

Для каждого значения q найдем $1^{\text{ый}}$ член прогрессии b_1 и сумму пяти первых

членов. Из первого уравнения системы выразим $b_1 = \frac{13(1-q)}{1-q^3} = \frac{13}{1+q+q^2}$.

При $q = 3$ получаем: $b_1 = \frac{13}{1+3+3^2} = 1$ и $S_5 = \frac{1 \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{242}{2} = 121$. Для $q = \frac{1}{3}$

имеем: $b_1 = \frac{13}{1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 13 \cdot \frac{13}{9} = 9$ и $S_5 = \frac{9 \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = 9 \cdot \frac{242 \cdot 2}{243 \cdot 3} = \frac{9 \cdot 242 \cdot 3}{243 \cdot 2} = \frac{121}{9}$

Ответ: $q = 3, b_1 = 1, S_5 = 121$ и $q = \frac{1}{3}, b_1 = 9, S_5 = \frac{121}{9}$.

С-22. Бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем q , где $|q| < 1$

1. При условии, что $|q| < 1$, сумма геометрической прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q}$, где b_1 –

первый член прогрессии, q – ее знаменатель. а) Найдем знаменатель

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}. \quad \text{Очевидно, что } |q| = \left| \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} < 1. \quad \text{Поэтому}$$

$$S = \frac{36}{1 - \frac{1}{3}} = 36 \cdot \frac{2}{3} = 36 \cdot \frac{3}{2} = 54.$$

б) $b_1 = \frac{1}{8}$, $b_2 = \frac{1}{4}$, $q = 2$, $q > 1$, значит, это не бесконечно убывающая геометрическая прогрессия;

в) В данной прогрессии $b_1 = 0,6$ и $b_2 = -0,06$. Поэтому $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-0,06}{0,6} = -0,1 = -\frac{1}{10}$.

$$\text{Очевидно, что } |q| = \left| -\frac{1}{10} \right| = \frac{1}{10} < 1. \text{ Тогда } S = \frac{0,6}{1 - \left(-\frac{1}{10}\right)} = 0,6 \cdot \frac{11}{10} = 0,6 \cdot \frac{10}{11} = \frac{6}{11}.$$

$$\text{г) } b_1 = \sqrt{2}, b_2 = 1, q = \frac{1}{\sqrt{2}}, |q| < 1, S = \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2} - 1};$$

$$\text{д) } b_1 = 3\sqrt{3}, b_2 = 3, q = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, |q| < 1, S = \frac{3\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{9}{\sqrt{3} - 1};$$

е) В этом примере $b_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $b_2 = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$. Найдем $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}. \text{ Тогда } |q| = \left| \frac{1}{2+\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2+\sqrt{2}} < 1.$$

$$\text{Находим } S = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2}(3+2\sqrt{2})}{2-1} = 3\sqrt{2}+4.$$

Ответ: а) 54; б) нет; в) $\frac{6}{11}$; г) $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$; д) $\frac{9}{\sqrt{3}-1}$; е) $3\sqrt{2}+4$.

$$2. \text{ а) } S = 8, q = \frac{1}{2}, 8 = \frac{b_1}{1 - \frac{1}{2}} = 2b_1, b_1 = 4; \text{ б) } S = 54, q = -\frac{1}{3}, 54 = \frac{b_1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3b_1}{4}, b_1 = 72;$$

$$\text{ в) } S = \frac{3\sqrt{3}}{2}, q = \frac{1}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{b_1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3b_1}{2}, b_1 = \sqrt{3};$$

$$\text{ г) } S = 2(\sqrt{2} + 1), q = \frac{1}{\sqrt{2}}, 2(\sqrt{2} + 1) = \frac{b_1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{b_1\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}, b_1 = \sqrt{2}(2 - 1) = \sqrt{2}.$$

$$3. \text{ а) } 0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5};$$

$$\text{ б) } 0,(17) = 0,171717\dots = 0,17 + 0,0017 + 0,000017 + \dots = \frac{0,17}{1 - 0,01} = \frac{0,17}{0,99} = \frac{17}{99};$$

$$\text{ в) } 2,(4) = 2,4444\dots = 2 + 0,4 + 0,04 + 0,004 + \dots = 2 + \frac{0,4}{1 - 0,1} = 2 + \frac{0,4}{0,9} = 2 + \frac{4}{9} = \frac{22}{9};$$

г) Запишем данное число в виде суммы обыкновенных дробей

$$3,(16) = 3,1616\dots = 3 + \frac{16}{100} + \frac{16}{10000} + \dots. \text{ Видно, что числа } \frac{16}{100}, \frac{16}{10000}, \dots$$

образуют бесконечную геом. прогрессию с первым членом $b_1 = \frac{16}{100}$ и знаменателем

$$q = \frac{1}{100}. \text{ Найдем ее сумму: } S = \frac{16}{100} + \frac{16}{10000} + \dots = \frac{16}{100} \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{16}{100} \cdot \frac{99}{100} = \frac{16}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{16}{99}. \text{ Поэтому данное число } 3,(16) = 3 + \frac{16}{99} = \frac{297 + 16}{99} = \frac{313}{99}.$$

Используем и другой способ. Обозначим $x = 3,(16) = 3,16\dots$ В периоде этой дроби два знака. Поэтому найдем $100x = 100 \cdot 3,(16) = 100 \cdot 3,1616\dots = 316,16\dots$ Вычис-

лим разность $100x - x = 316,16\dots - 3,16\dots$ или $99x = 313$. Тогда находим $x = \frac{313}{99}$.

$$\text{ д) } 0,4(5) = 0,4555\dots = 0,4 + 0,05 + 0,005 + \dots = \frac{2}{5} + \frac{0,05}{1 - 0,1} = \frac{2}{5} + \frac{0,05}{0,9} = \frac{2}{5} + \frac{5}{90} = \frac{41}{90};$$

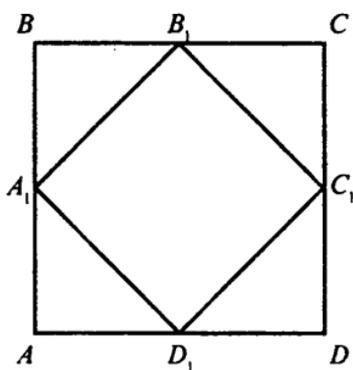
$$\text{ е) } 0,6(12) = 0,61212\dots = 0,6 + 0,012 + 0,00012 + \dots = \frac{3}{5} + \frac{0,012}{1 - 0,01} = \frac{3}{5} + \frac{0,012}{0,99} = \frac{3}{5} + \frac{12}{990} = \frac{3}{5} + \frac{6}{495} = \frac{3}{5} + \frac{2}{165} = \frac{101}{165};$$

$$\text{ Ответ: а) } \frac{4}{5}; \text{ б) } \frac{17}{99}; \text{ в) } \frac{22}{9}; \text{ г) } \frac{313}{99}; \text{ д) } \frac{41}{90}; \text{ е) } \frac{101}{165}.$$

$$4. q = \frac{\sqrt{3}}{6}, S = \frac{6(\sqrt{30}+5)}{5}, \frac{6(\sqrt{30}+5)}{5} = \frac{b_1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{6b_1}{6 - \sqrt{3}};$$

$$b_1 = \frac{(6 - \sqrt{3})(\sqrt{30} + 5)}{5}, b_3 = b_1 q^2 = \frac{(6 - \sqrt{3})(\sqrt{30} + 5)}{5} \cdot \frac{3}{36} = \frac{(6 - \sqrt{3})(\sqrt{30} + 5)}{3}.$$

5. Прежде всего покажем, что периметры таких квадратов образуют бесконечную геометрическую прогрессию, и найдем ее знаменатель. Пусть сторона квадрата $ABCD$ равна a_n , сторона вписанного квадрата $A_1B_1C_1D_1$ равна a_{n+1} . Рассмотрим прямоугольный треугольник AA_1D_1 : $AA_1 = AD_1 = \frac{a_n}{2}$, т.к. точки A_1 и D_1 – середины сторон AB и AD соответственно, $A_1D_1 = a_{n+1}$. Запишем теорему



Пифагора: $A_1D_1^2 = AA_1^2 + AD_1^2$ или $a_{n+1}^2 = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2$ или $a_{n+1}^2 = \frac{a_n^2}{2}$, откуда

$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{2}}$. Вычислим отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{\sqrt{2}a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Видно, что такое}$$

отношение является постоянной величиной (т.е. не зависит от номера n). Следовательно, последовательность длин сторон квадратов образует геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Так как $|q| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, то это – бесконечная геометрическая прогрессия.

Рассмотрим теперь последовательность, образованную периметрами квадратов

$P_n = 4a_n$. Найдем отношение $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{4a_{n+1}}{4a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, периметры также образуют бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Так как сторона первого квадрата $a_1 = 8$ см, $P_1 = 4 \cdot 8 = 32$ см.

Найдем сумму периметров всех таких квадратов: $S = \frac{P_1}{1 - q} = \frac{32}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{32\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{64 + 32\sqrt{2}}{1} = 64 + 32\sqrt{2} \text{ (см).}$$

Ответ: $64 + 32\sqrt{2}$ (см).

6. Запишем второй член b_2 бесконечной геометрической прогрессии: $b_2 = b_1q$ (по условию он равен 24) или $24 = b_1q$. Сумма прогрессии равна 108, т.е.

$$\frac{b_1}{1-q} = 108. \text{ Имеем систему уравнений: } \begin{cases} 24 = b_1q \\ \frac{b_1}{1-q} = 108 \end{cases}. \text{ Разделим первое}$$

$$\text{уравнение на второе: } b_1q : \frac{b_1}{1-q} = \frac{24}{108} \text{ или } q(1-q) = \frac{2}{9} \text{ или } 0 = 9q^2 - 9q + 2.$$

$$\text{Корни этого квадратного уравнения } q = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 9 \cdot 2}}{18} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{18} = \frac{9 \pm 3}{18}, \text{ т.е.}$$

$$q = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \text{ и } q = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}. \text{ Оба значения подходят, т.к. } |q| < 1.$$

Теперь из первого уравнения найдем $b_1 = \frac{24}{q}$. Для $q = \frac{2}{3}$ получаем $b_1 = 24 : \frac{2}{3} = 36$,

для $q = \frac{1}{3}$ находим $b_1 = 24 : \frac{1}{3} = 72$. Итак, условиям задачи удовлетворяют две

прогрессии, для которых $b_1 = 36, q = \frac{2}{3}$ и $b_1 = 72, q = \frac{1}{3}$.

Ответ: $b_1 = 36, q = \frac{2}{3}$ и $b_1 = 72, q = \frac{1}{3}$.

С-23. Иррациональные уравнения

1. 1) а) $\sqrt{x} = 9, x = 81$; б) $\sqrt{x} = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{4}$; в) $\sqrt{x} = 0, x = 0$;

2) а) $\sqrt{x-1} = 2, x-1 = 4, x = 5$; б) $\sqrt{2x+1} = 0,5, 2x+1 = \frac{1}{4}, 2x = -\frac{3}{4}, x = -\frac{3}{8}$;

в) $\sqrt{2-x} = 0, 2-x = 0, x = 2$;

3) а) $\sqrt{x+6} = x, x \geq 0, x+6 = x^2, x^2 - x - 6 = 0, D = 1 + 4 \cdot 6 = 25, x_1 = \frac{1+5}{2} = 3, x_2 < 0$;

б) Обе части уравнения $\sqrt{3-2x} = x$ возведем в квадрат: $3 - 2x = x^2$ или $0 = x^2 + 2x - 3$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$. Так как при возведении в квадрат могут появиться посторонние решения, то необходимо проверить полученные корни, подставив их в исходное уравнение.

Для $x = -3$ имеем: $\sqrt{3-2(-3)} = -3$ или $\sqrt{9} = -3$ или $3 = -3$ (напомним, что $\sqrt{9}$ по определению арифметического корня число положительное). Видно, что равенство не выполняется. Следовательно, $x = -3$ не является корнем данного уравнения (постороннее решение). Для $x = 1$ получаем: $\sqrt{3-2 \cdot 1} = 1$ или $\sqrt{1} = 1$ или $1 = 1$. Имеем верное равенство. Следовательно, $x = 1$ – единственный корень данного уравнения.

Ответ: $x = 1$.

в) $\sqrt{40-x^2} = 3x, x \geq 0, 40-x^2=9x^2, 10x^2=40, x^2=4, x=2.$

2. а) $\sqrt{x} = -1$ – нет корней, т.к. $E(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$; б) $\sqrt{2x} = 0$ – есть корни;

в) Уравнение $\sqrt{x-1} = -\sqrt{2}$ не имеет решений, т.к. по определению арифметического корня $\sqrt{x-1} \geq 0$. Число $(-\sqrt{2})$ отрицательное. Разумеется, неотрицательная величина не может равняться отрицательному числу.

г) Рассмотрим подкоренное выражение в уравнении $\sqrt{-5-x^2} = 10$. Имеем: $-5-x^2 = -(5+x^2)$. При всех значениях x величина $x^2 \geq 0$, величина $5+x^2 \geq 5$. Умножим обе части этого неравенства на отрицательное число (-1) . Знак неравенства меняется на противоположный. Получаем: $-(5+x^2) \leq -5$. Поэтому корень из отрицательной величины $-(5+x^2)$ не существует. Следовательно, данное иррациональное уравнение корней не имеет.

д) По определению арифметич. корня $\sqrt{x^2+4x} \geq 0$ и $\sqrt{7x} \geq 0$. Сумма этих неотрицательных величин также величина неотрицательная и не может равняться отрицательному числу $(-0,5)$. Поэтому данное уравнение корней не имеет.

Ответ: а) нет корней, б) есть корни, в) нет корней, г) нет корней, д) нет корней.

3. 1) а) Возведем обе части уравнения $\sqrt{3x^2+2x-8} = \sqrt{x^2+x-2}$ в квадрат: $3x^2+2x-8 = x^2+x-2$ или $2x^2+x-6 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = -2$ и $x_2 = \frac{3}{2}$. Так как при возведении в квадрат могут появиться посторонние решения, то необходимо проверить корни, подставив их в уравнение.

Для $x = -2$ получаем: $\sqrt{3(-2)^2+2(-2)-8} = \sqrt{(-2)^2-2-2}$ или $\sqrt{12-4-8} = \sqrt{4-2-2}$ или $\sqrt{0} = \sqrt{0}$ или $0 = 0$. Т.к. равенство выполняется, то $x = -2$ –

корень уравнения. Для $x = \frac{3}{2}$ имеем: $\sqrt{3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} - 8} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} - 2}$ или

$\sqrt{\frac{27}{4} + 3 - 8} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{2} - 2}$ или $\sqrt{\frac{7}{4}} = \sqrt{\frac{7}{4}}$. Это равенство также является верным, поэтому $x = \frac{3}{2}$ тоже корень уравнения.

б) Возведем в квадрат обе части уравнения $\sqrt{5-4x} = 2-x$ и получим: $5-4x = 4-4x+x^2$ или $x^2 = 1$, откуда $x = \pm 1$. Проверим корни. Для $x = 1$ получаем: $\sqrt{5-4 \cdot 1} = 2-1$ или $\sqrt{1} = \sqrt{1}$ или $1=1$. Т.к. равенство верное, то $x = 1$ – решение данного уравнения. При $x = -1$: $\sqrt{5-4(-1)} = 2-(-1)$ или $\sqrt{9} = 3$ или $3 = 3$. Равенство выполняется, поэтому $x = -1$ также корень уравнения.

Ответ: а) $x = -2$ и $x = \frac{3}{2}$, б) $x = 1$ и $x = -1$.

2) а) $\sqrt{4x^2 + 7x} = x - 2$, $4x^2 + 7x = x^2 - 4x + 4$, $3x^2 + 11x - 4 = 0$,

$$D = 121 + 4 \cdot 3 \cdot 4 = 169, x_1 = \frac{-11 + 13}{6} = \frac{1}{3}, x_2 = -4.$$

Проверка: $x_1 = \frac{1}{3}$, $\sqrt{4 \cdot \frac{1}{9} + 7 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} - 2$ — ложно,

$$x_2 = -4; \sqrt{4 \cdot 16 - 7 \cdot 4} = -4 - 2$$
 — ложно;

б) $\sqrt{11x^2 + 24x - 2} = 2x + 1$, $11x^2 + 24x - 2 = 4x^2 + 4x + 1$, $7x^2 + 20x - 3 = 0$,

$$D = 400 + 4 \cdot 7 \cdot 3 = 484, x_1 = \frac{-20 + 22}{14} = \frac{1}{7}, x_2 = -3.$$

Проверка: $x_1 = \frac{1}{7}$, $\sqrt{11 \cdot \frac{1}{49} + 24 \cdot \frac{1}{7} - 2} = \frac{2}{7} + 1$ — верно,

$$x_2 = -3; \sqrt{11 \cdot 9 - 24 \cdot 3 - 2} = -6 + 1$$
 — ложно.

Ответ: а) нет корней; б) $1/7$.

4. а) $\sqrt{2-x} + 0,01 = 0$, $\sqrt{2-x} = -0,01$ — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$;

б) $\sqrt{x} + \sqrt{2x-3} = -2$ — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$;

в) $\sqrt{-x^2 - 5} = 25$ — нет корней, т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$;

г) $\sqrt{2x - x^2 - 3} = 7$, $-x^2 + 2x - 3 \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$; $x^2 - 2x + 3 \leq 0$, $D = 4 - 4 \cdot 3 < 0$, значит, у неравенства нет решений, следовательно, нет корней и у уравнения.

5. 1) а) Запишем данное уравнение в виде $\sqrt{x+13} = 2 + \sqrt{x+1}$ и возведем обе части в квадрат: $x+13 = 4 + 4\sqrt{x+1} + x+1$ или $8 = 4\sqrt{x+1}$ или $2 = \sqrt{x+1}$. Вновь возведем обе части этого уравнения в квадрат: $4 = x+1$, откуда $x = 3$. Проверим этот корень, подставив его в данное уравнение: $\sqrt{3+13} - \sqrt{3+1} = 2$ или $\sqrt{16} - \sqrt{4} = 2$ или $4 - 2 = 2$. Равенство выполняется, следовательно $x = 3$ — корень данного уравнения.

б) Возведем обе части уравнения $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2x$ в квадрат: $3x+4 + 2\sqrt{(3x+4)(x-4)} + x-4 = 4x^2$ или $\sqrt{(3x+4)(x-4)} = 0$. Очевидно, такое выражение равно нулю, если подкоренное выражение равно нулю. Получаем уравнение $(3x+4)(x-4) = 0$, корни которого $x = -\frac{4}{3}$ и $x = 4$. Очевидно, что при $x = -\frac{4}{3}$ величина \sqrt{x} не существует. Поэтому $x = -\frac{4}{3}$ не является решением данного уравнения. Подставим значение $x = 4$ в уравнение.

Получаем: $\sqrt{3 \cdot 4 + 4} + \sqrt{4 - 4} = 2\sqrt{4}$ или $\sqrt{16} + \sqrt{0} = 2 \cdot 2$ или $4 + 0 + 0$. Так как равенство верное, то $x = 4$ – корень данного уравнения.

Ответ: а) $x = 3$; б) $x = 4$.

$$2) \text{ а) } \sqrt{11x^2 + 24x - 2} = 2x + 1, 11x^2 + 24x - 2 = 4x^2 + 4x + 1, 7x^2 + 20x - 3 = 0, \\ \sqrt{4+x} \cdot \sqrt{5-x} = 2\sqrt{2}, (4+x)(5-x) = 8, 20+x-x^2 = 8, x^2 - x - 12 = 0,$$

$$D = 49, x_1 = \frac{1+7}{2} = 4, x_2 = -3. \text{ Проверка: } x_1 = 4, \sqrt{8} \cdot \sqrt{1} = 2\sqrt{2} - \text{ верно,}$$

$$x_2 = -3, \sqrt{1} \cdot \sqrt{8} = 2\sqrt{2} - \text{ верно.}$$

$$\text{б) } \sqrt{8+x} \cdot \sqrt{8-x} = x, 64 - x^2 = x^2, x^2 = 32, x_{1,2} = \pm 4\sqrt{2},$$

$$\text{Проверка: } x_1 = 4\sqrt{2}, \sqrt{8+4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{8-4\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - \text{ верно,}$$

$$x_2 = -4\sqrt{2}, \sqrt{8-4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{8+4\sqrt{2}} = -4\sqrt{2} - \text{ ложно.}$$

Ответ: а) $-3; 4$; б) $4\sqrt{2}$.

$$3) \text{ а) } \sqrt{7-\sqrt{x+1}} = 2, 7-\sqrt{x+1} = 4, \sqrt{x+1} = 3, x+1 = 9, x = 8.$$

$$\text{Проверка: } \sqrt{7-3} = 2 - \text{ верно.}$$

С-24. Четные и нечетные функции

$$1. 1) \text{ а) } f(-x) = (-x)^6 = x^6 = f(x), \text{ значит, } f(x) - \text{ четная;}$$

$$\text{б) } f(-x) = (-x)^8 - 3(-x)^4 = x^8 - 3x^4 = f(x), \text{ значит, } f(x) - \text{ четная;}$$

$$\text{в) } f(-x) = |-x| = |x| = f(x), \text{ значит, } f(x) - \text{ четная.}$$

$$2) \text{ а) } g(-x) = -4(-x)^4 + (-x)^2 = -4x^4 + x^2 = g(x), \text{ значит, } g(x) - \text{ четная;}$$

б) Докажем, что функция $g(x) = (x+2)(x-3) + x$ является четной. Раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем: $g(x) = x^2 - 3x + 2x - 6 + x$ или $g(x) = x^2 - 6$. Найдем значение $g(-x) = (-x)^2 - 6 = (-1)^2 \cdot x^2 - 6 = x^2 - 6$. Видим, что $g(-x) = g(x)$. Тогда по определению функция $g(x)$ – четная.

$$\text{в) } g(-x) = \frac{1}{(-x)^4 - (-x)^2 - 1} = \frac{1}{x^4 - x^2 - 1} = g(x), \text{ значит, } g(x) - \text{ четная.}$$

$$2. 1) \text{ а) } f(-x) = (-x)^7 = -x^7 = -f(x), \text{ значит, } f(x) - \text{ нечетная;}$$

$$\text{б) } f(-x) = \frac{12}{-x} = -f(x), \text{ значит, } f(x) - \text{ нечетная;}$$

$$\text{в) } f(-x) = (-x)^3 + 3 = -(x^3 - x) = -f(x), \text{ значит, } f(x) - \text{ нечетная.}$$

$$2) \text{ а) } g(-x) = (-x)^9 + \frac{1}{(-x)^5} = -(x^9 + \frac{1}{x^5}) = -g(x), \text{ значит, } g(x) - \text{ нечетная.}$$

в) $f(-x) = (-x)^3 + 3 = -(x^3 + x) = -f(x)$, значит, $f(x)$ – нечетная.

2) а) $g(-x) = (-x)^9 + \frac{1}{(-x)^5} = -(x^9 + \frac{1}{x^5}) = -g(x)$, значит, $g(x)$ – нечетная.

б) Докажем, что функция $g(x) = (x+2)^2 - (x-2)^2$ является нечетной. Используем формулу для разности квадратов чисел: $g(x) = (x+2+x-2)(x+2-(x-2)) = 2x \cdot 4 = 8x$. Найдем значение $g(-x) = 8 \cdot (-x) = -8x = -(8x) = -g(x)$. Получили, что $g(-x) = -g(x)$. Следовательно, функция по определению является нечетной.

в) $g(-x) = \frac{1}{(-x)^9 - x} = -\frac{1}{x^9 + x} = -g(x)$, значит, $g(x)$ – нечетная.

3. Воспользуемся определением четной и нечетной функцией.

а) Если $f(x)$ – четная функция, то по определению $f(-x) = f(x)$. Подставим в это соотношение $x = 8$ и получим: $f(-8) = f(8)$. Так как $f(-8) = 13$, то и $f(8) = 13$.

б) Если $f(x)$ – нечетная функция, то по определению $f(-x) = -f(x)$. Подставим в это соотношение $x = 8$ и получим: $f(-8) = -f(8)$. Умножим обе части этого равенства на число (-1) . Тогда: $(-1)f(-8) = (-1) \cdot (-f(8))$ или $-f(-8) = f(8)$ или $f(8) = -f(-8)$. Так как $f(-8) = 13$, то $f(8) = -13$.

Ответ: а) $f(-8) = 13$, б) $f(8) = -13$.

4. 1) а) $y(-x) = \frac{8}{(-x)^4} = \frac{8}{x^4} = y(x)$, значит, y – четная.

б) $y(-x) = -\frac{7}{(-x)^9} = \frac{7}{x^9} = -y(x)$, значит, y – нечетная.

в) Докажем, что функция $y(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$ не имеет определенной четности. Найдем

значение $y(-x) = \frac{1}{(-x)^3 - 1} = \frac{1}{(-1)^3 x^3 - 1} = \frac{1}{-x^3 - 1} = -\frac{1}{x^3 + 1}$. Сравнивая

величины $y(-x) = -\frac{1}{x^3 + 1}$ и $y(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$, видим, что $y(-x) \neq y(x)$. Поэтому

функция $y(x)$ не является четной. Найдем значение $-y(x) = -\frac{1}{x^3 - 1}$.

Сравнивая величины $y(-x) = -\frac{1}{x^3 + 1}$ и $-y(x) = -\frac{1}{x^3 - 1}$, видим, что

$y(-x) \neq -y(x)$. Поэтому функция $y(x)$ не является нечетной. Следовательно, данная функция не имеет определенной четности.

г) $y(-x) = \frac{1}{(-x)^4 + 1} = \frac{1}{x^4 + 1} = y(x)$, значит, y – четная.

Ответ: а) четная; б) нечетная; в) не имеет определенной четности; г) четная.

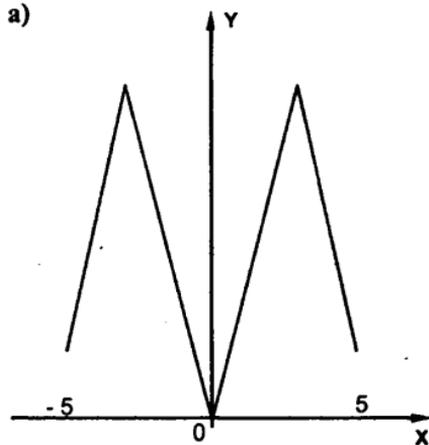
2) а) $y = \frac{x^4}{5x} = \frac{x^3}{5}, y(-x) = \frac{(-x)^3}{5} = \frac{-x^3}{5} = -y(x)$, значит, y – нечетная;

б) $y = \frac{7x}{x^5} = \frac{7}{x^4}, y(-x) = \frac{7}{(-x)^4} = \frac{7}{x^4} = y(x)$, значит, y – четная;

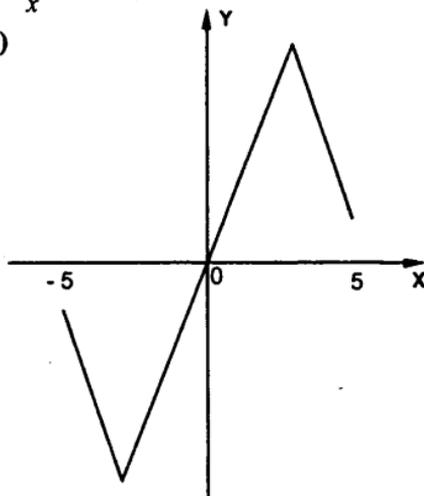
в) $y = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6} = \frac{x^2(x - 2)}{3(x - 2)} = \frac{x^2}{3}, y(-x) = \frac{(-x)^2}{3} = \frac{x^2}{3} = y(x)$, значит, y – четная;

г) $y = \frac{x + 15}{x^2 + 3x} = \frac{5(x + 3)}{x(x + 3)} = \frac{5}{x}, y(-x) = \frac{5}{-x} = -\frac{5}{x} = -y(x)$, значит, y – нечетная.

5. а)

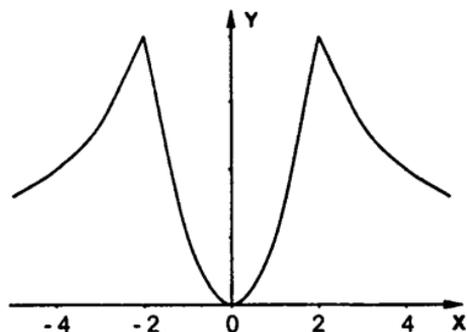


б)

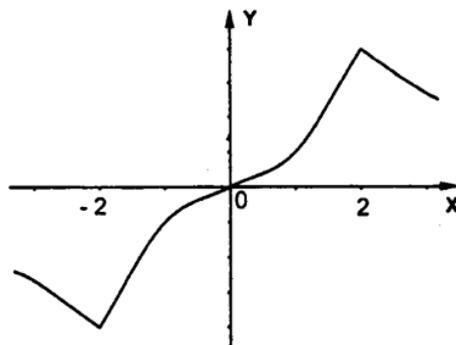


$$6. g(x) = \begin{cases} 0,5x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{4}{x}, & x > 2 \end{cases}$$

а)



б)



7. а) $f(-x) = |-x+5| + |-x-5| = |x-5| + |x+5| = f(x)$, значит, $f(x)$ — четная;

б) $f(-x) = |-x+5| - |-x-5| = |x-5| - |x+5| = -f(x)$, значит, $f(x)$ — нечетная;

в) $f(-x) = \frac{5(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{5x^2}{x^2 - 4} = f(x)$, значит, $f(x)$ — четная;

г) $f(-x) = \frac{6(-x)^3}{(-x)^2 - 9} = -\frac{6x^3}{x^2 - 9} = -f(x)$, значит, $f(x)$ — нечетная;

д) $f(-x) = \frac{2(-x)^4}{(-x-2)^2} = \frac{2x^4}{(x+2)^2} \neq \pm f(x)$, значит, $f(x)$ — ни четная, ни нечетная;

е) $f(-x) = \frac{(-x-1)(-x-2)(-x-3)}{(-x)^2 + 4x + 3} = \frac{-(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = -(x+2)$,

$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-1)} = x-2$, $f(-x) \neq \pm f(x)$, значит,

$f(x)$ — ни четная, ни нечетная.

С-25. Функция $y = x^n$

1. 1) $f(x) = x^{100}$ а) $f(0,125) < f(0,13)$, т.к. $|0,125| < |0,13|$;

б) $f(-245) > f(-239)$, т.к. $|-245| > |-239|$; в) $f(-5,7) = f(5,7)$, т.к. $|-5,7| = |5,7|$;

г) $f(-12,4) > f(10,7)$, т.к. $|-12,4| > |10,7|$;

2) а) $f\left(\frac{2}{3}\right) > f\left(\frac{3}{5}\right)$, т.к. $\left|\frac{2}{3}\right| > \left|\frac{3}{5}\right|$; б) $f\left(-\frac{3}{7}\right) > f\left(-\frac{2}{5}\right)$, т.к. $\left|-\frac{3}{7}\right| > \left|-\frac{2}{5}\right|$;

в) $f(-0,325) = f\left(\frac{13}{40}\right)$, т.к. $|-0,325| = \left|\frac{13}{40}\right|$; г) $f\left(-\frac{4}{7}\right) > f(0,57)$, т.к. $\left|-\frac{4}{7}\right| > |0,57|$.

2. $g(x) = x^{105}$; 1) а) $g(1,023) < g(1,13)$; т.к. $1,023 < 1,13$;

б) $g(-2,7) < g(-2,2)$; т.к. $-2,7 < -2,2$; в) $g(-4,1) < g(4,1)$; т.к. $-4,1 < 4,1$;

г) $g(20,8) > g(-21,3)$; т.к. $20,8 > -21,3$;

2) а) $g\left(\frac{4}{7}\right) < g\left(\frac{3}{5}\right)$; т.к. $\frac{4}{7} < \frac{3}{5}$; б) $g\left(-\frac{8}{11}\right) < g(-0,7)$; т.к. $-\frac{8}{11} < -0,7$;

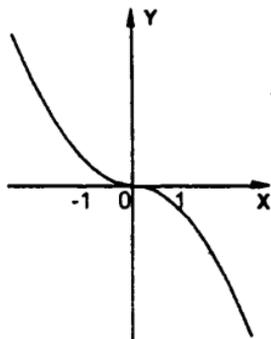
в) $g\left(-\frac{5}{7}\right) < g\left(\frac{9}{13}\right)$; т.к. $-\frac{5}{7} < \frac{9}{13}$; г) $g\left(-\frac{19}{25}\right) = -g(0,76)$; т.к. $-\frac{19}{25} = -0,76$;

3. $x^n = 2500$; а) 2 корня; б) 1 корень.

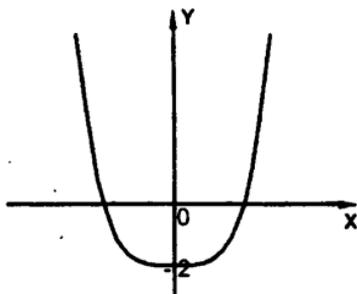
4. а) $x^3 = -27$, $x = -3$; б) $x^3 = \frac{8}{125}$, $x = \frac{2}{5}$;

в) $x^4 = -81$, нет корней, т.к. $E(x^4) = [0; +\infty)$; г) $x^4 = 625$, $x = \pm 5$.

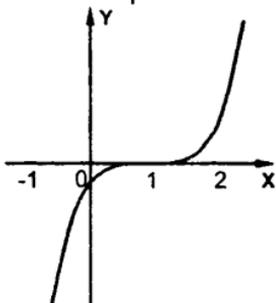
5. а)



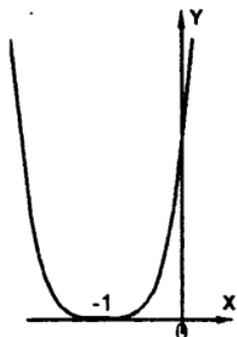
б)



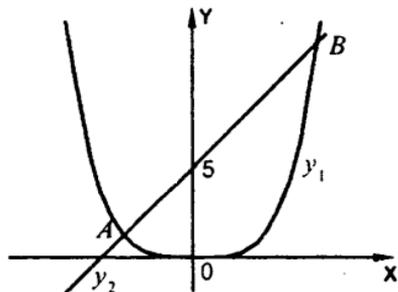
в)



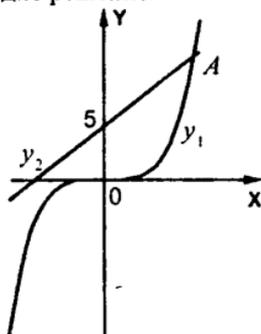
г)



6. а) Для анализа уравнения $x^4 = 32x + 5$ построим графики функций $y_1 = x^4$ и $y_2 = 32x + 5$. Видно, что эти графики пересекаются в двух точках A и B . Следовательно, данное уравнение имеет два корня.



б) Для определения числа корней уравнения $x^3 = 32x + 5$ построим графики функций $y_1 = x^3$ и $y_2 = 32x + 5$. Видно, что эти графики пересекаются в одной точке A . Следовательно, уравнение имеет одно решение.



в) $x^3 = 32x + 5$, три корня; г) $x^3 = 0,5x - 8$, один корень.

7. а) $y = x^9$; $548,471 = (-2,1)^9$ – ложно, значит, точка A не принадлежит графику; $-10,8973 = (-0,973)^9$ – ложно, значит, точка B не принадлежит графику;

б) $y = x^8$; $0,98746 = 1,2^8$ – ложно, значит, точка C не принадлежит графику; $250,4781 = (-2,01)^8$ – ложно, значит, точка D не принадлежит графику.

С-26. Определение корня n -й степени

1. 1) а) $\sqrt{0,16} = 0,4$; б) $\sqrt[3]{216} = 6$; в) $\sqrt[4]{0,0001} = 0,1$; г) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}$.

2) а) $6\sqrt{0,125} = 6 \cdot 0,5 = 3$; б) $0,7\sqrt[4]{81} = 0,7 \cdot 3 = 2,1$;

в) $4\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$; г) $6\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}} = 6 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -8$.

Ответ: а) 3; б) 2,1; в) 6; г) -8.

2. 1) а) Запишем число $\frac{16}{81}$ в виде четвертой степени дроби $\frac{2}{3}$ (т.е. $\frac{16}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$),

а число $\left(-\frac{1}{8}\right)$ в виде третьей степени дроби $\left(-\frac{1}{2}\right)$ (т.е. $-\frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$).

Воспользуемся определением корня n -й степени. Тогда получаем:

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^4} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

б) $\sqrt[3]{0,00032} + \sqrt[4]{-0,008} = 0,2 - 0,2 = 0$;

в) $1,5\sqrt[6]{\frac{1}{64}} - \sqrt[4]{\frac{81}{625}} = 1,5 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{4} - \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$.

2) а) $\sqrt[7]{\frac{128}{2187}} - \sqrt[4]{\frac{81}{625}} = \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$; б) $\sqrt[3]{0,216} - \sqrt[4]{-0,01024} = 0,6 + 0,4 = 1$;

в) Запишем число $7\frac{19}{32}$ в виде неправильной дроби, $7\frac{19}{32} = \frac{243}{32}$, а эту дробь -

в виде пятой степени числа $\frac{3}{2}$, т.е. $\frac{243}{32} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$. Число 12,25 также представим

в виде неправильно дроби: $12,25 = 12\frac{1}{4} = \frac{49}{4}$, а эту дробь - в виде квадрата

числа $\frac{7}{2}$, т.е. $\frac{49}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2$. Тогда по определению корня n -й степени получаем:

$$\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} + \sqrt{12,25} = \sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^5} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

3. а) $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$;

б) Прежде всего оценим число 23 кубами двух последовательных целых чисел, т.е. $8 < 23 < 27$ или $2^3 < 23 < 3^3$. Из всех частей этого двойного неравенства извлечем кубический корень. Знак неравенства при этом сохраняется.

Получаем: $\sqrt[3]{2^3} < \sqrt[3]{23} < \sqrt[3]{3^3}$ или $2 < \sqrt[3]{23} < 3$;

в) $0 < \sqrt[4]{0,8} < 1$; г) $1 < \sqrt[3]{30} < \sqrt[3]{32} = 2$.

Ответ: а) 2 и 3; б) 2 и 3; в) 0 и 1; г) 1 и 2.

4. 1) а) $(\sqrt{13})^2 = 13$; б) $(\sqrt[3]{7})^3 = 7$; в) $(-\sqrt[4]{21})^4 = 21$; г) $-\sqrt[4]{21^4} = -21$; д) $(-\sqrt[5]{2})^5 = -2$.

2) а) $(2\sqrt[3]{3})^3 = 8 \cdot 3 = 24$; б) $(-3\sqrt[4]{5})^4 = 81 \cdot 5 = 405$; в) $(-\sqrt[5]{14})^5 = -14$;

г) $-2\sqrt[7]{7^5} = -14$; д) $(-\sqrt[6]{5})^6 = 5$.

5. а) $x^3 = 5$, $x = \sqrt[3]{5}$; б) $x^6 = 17$, $x_{1,2} = \pm\sqrt[6]{17}$; в) $\frac{1}{8}x^2 - 2 = 0$, $x^2 = 16$, $x_{1,2} = \pm 4$;

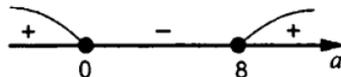
г) $\frac{1}{2}x^5 + 16 = 0$, $x^5 = -32$, $x = -2$.

Ответ: а) $\sqrt[3]{5}$; б) $\pm\sqrt[6]{17}$; в) ± 4 ; г) -2 .

6. а) $\sqrt[10]{y-3}$, $y-3 \geq 0$, $y \geq 3$;

б) Выражение $\sqrt{x+5}$ имеет смысл при любых значениях x , т.к. корень нечетной степени (девятой) можно извлечь из любого числа (отрицательного, нуля, положительного).

в) $\sqrt{a(a-8)}$, $a(a-8) \geq 0$, $a \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$;



г) Выражение $\sqrt[8]{b^2+b-12}$ имеет смысл при тех значениях переменной b , для которых подкоренное выражение неотрицательно (т.к. корень четной (восьмой) степени можно извлечь только из неотрицательного числа). Получаем неравенство: $b^2 + b - 12 \geq 0$. Решая это квадратное неравенство любым способом, например, методом интервалов, найдем: $b \leq -4$ и $b \geq 3$. Только при таких значениях b данное выражение имеет смысл.

Ответ: $b \in (-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$.



7. а) $x^{10} - 31x^5 - 32 = 0$, $x^5 = y$, тогда $y^2 - 31y - 32 = 0$, $D = 961 + 4 \cdot 32 = 1089$,

$$y_1 = \frac{31+33}{2} = 32, y_2 = -1, x_1^5 = 32, x_1 = 2, x_2^5 = -1, x_2 = -1.$$

б) $x^8 - 82x^4 + 81 = 0$, $x^4 = y$, тогда $y^2 - 82y + 81 = 0$, $D = 6724 - 4 \cdot 81 = 6400$,

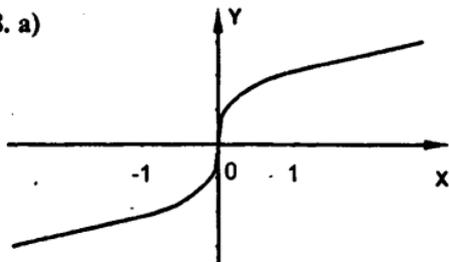
$$y_1 = \frac{82+80}{2} = 81, y_2 = 1, x^4 = 81, x_{1,2} = \pm 3, x^4 = 1, x_{3,4} = \pm 1.$$

в) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$, $x^2 = y$, тогда $y^2 + 2y - 15 = 0$, $D = 4 + 4 \cdot 15 = 64$,

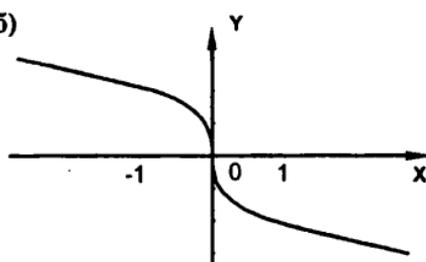
$$y_1 = \frac{-2+8}{2} = 3, y_2 = -5, x^2 = 3, x_{1,2} = \pm\sqrt{3}, x^2 = -5 - \text{нет корней}.$$

Ответ: а) $x_1 = 2, x_2 = -1$; б) $x_{1,2} = \pm 3, x_{3,4} = \pm 1$; в) $\pm\sqrt{3}$.

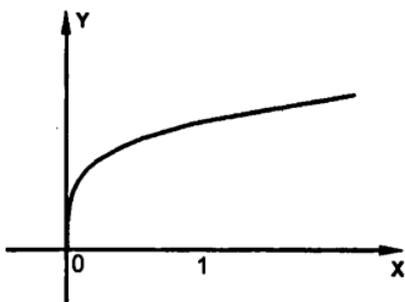
8. а)



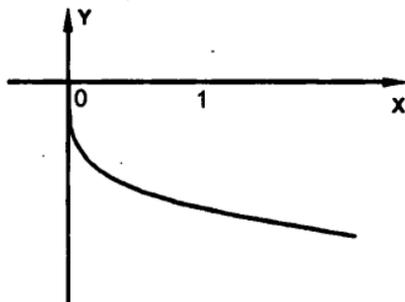
б)



в)



г)



С-27. Свойства арифметического корня

1. а) Учтем, что корень из произведения чисел равен произведению корней этих чисел. Получаем: $\sqrt[4]{16 \cdot 81} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3^4} = 2 \cdot 3 = 6$.

б) $\sqrt[5]{2^6 \cdot 5^3} = 2^2 \cdot 5 = 20$; в) $\sqrt[5]{0,00032 \cdot 5^{10}} = 0,2 \cdot 5^2 = 5$;

г) Учтем, что корень из отношений двух чисел равен отношению корней из этих

чисел. Получаем: $\sqrt[6]{\frac{3^6}{5^{12}}} = \frac{\sqrt[6]{3^6}}{\sqrt[6]{5^{12}}} = \frac{\sqrt[6]{6}}{\sqrt[6]{(5^2)^6}} = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$.

Ответ: а) 6; б) 20; в) 5; г) $\frac{3}{25}$.

2. а) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{4 \cdot 8} = \sqrt[3]{2^5} = 2$; б) $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{27 \cdot 3} = \sqrt[4]{3^4} = 3$;

в) Учтем, что произведение корней из чисел равно корню из произведения чисел.

Имеем: $\sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{50 \cdot 20} = \sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$.

г) $\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{625}} = \frac{3}{5}$; д) $\sqrt[3]{9^5 \cdot 2^3} \cdot \sqrt[3]{2^7} = 9 \cdot \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^7} = 9 \cdot \sqrt[3]{2^{10}} = 9 \cdot 2^2 = 36$;

е) $\sqrt[8]{3^{13}} \cdot \sqrt[8]{5^8 \cdot 3^3} = 5 \cdot \sqrt[8]{3^{13} \cdot 3^3} = 5 \cdot \sqrt[8]{3^{16}} = 5 \cdot 3^2 = 45$.

Ответ: а) 2; б) 3; в) 10; г) $\frac{3}{5}$; д) 36; е) 45.

$$3. \text{ а) } \sqrt{36x^2} = 6x; \text{ б) } \sqrt[3]{27y^6} = 3y^2; \text{ в) } \sqrt[3]{32x^5y^{15}} = 2xy^3; \text{ г) } \sqrt[4]{\frac{16x^8y^4}{625}} = \frac{2x^2y}{5}.$$

$$4. \text{ а) } \sqrt{16a} = 4\sqrt{a}; \text{ б) } \sqrt{50b^3} = 5b\sqrt{2b}; \text{ в) } \sqrt[3]{40 \cdot c^3} = \sqrt[3]{8 \cdot 5 \cdot c^3 \cdot c^2} = 2c\sqrt[3]{5c^2};$$

$$\text{ г) } \sqrt[4]{243x^7} = \sqrt[4]{81 \cdot 3x^4 \cdot x^3} = 3x\sqrt[4]{3x^3}.$$

$$5. \text{ а) } 4\sqrt{3x} = \sqrt{16 \cdot 3x} = \sqrt{48x}; \text{ б) } 2\sqrt[3]{2y} = \sqrt[3]{8 \cdot 2y} = \sqrt[3]{16y}; \text{ в) } a\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3a^4};$$

$$\text{ г) } b\sqrt[3]{4b^2} = \sqrt[3]{b^3 \cdot 4b^2} = \sqrt[3]{4b^7}.$$

$$6. \text{ а) } \sqrt{4 - \sqrt{7}} \cdot \sqrt{4 + \sqrt{7}} = \sqrt{(4 - \sqrt{7})(4 + \sqrt{7})} = \sqrt{16 - 7} = 3;$$

б) Учтем, что произведение корней из чисел равно корню и произведению чисел.

Используем формулу для разности квадратов чисел. Получаем:

$$\sqrt{7 - \sqrt{22}} \cdot \sqrt{7 + \sqrt{22}} = \sqrt{(7 - \sqrt{22})(7 + \sqrt{22})} = \sqrt{7^2 - (\sqrt{22})^2} = \sqrt{49 - 22} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3};$$

$$\text{ в) } \sqrt[4]{\sqrt{629} - 2} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{629} + 2} = \sqrt[4]{(\sqrt{629} - 2)(\sqrt{629} + 2)} = \sqrt[4]{629 - 4} = 5.$$

$$7. \text{ а) } \sqrt{a^2b} = a\sqrt{b} - \text{ верно при } a, b \geq 0;$$

$$\text{ б) } \sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b} - \text{ верно при } a \leq 0, b \geq 0;$$

$$\text{ в) } \sqrt{a^3b^3} = ab\sqrt{ab} - \text{ верно при } ab \geq 0, \text{ т.е. при } a, b \geq 0 \text{ или } a, b \leq 0.$$

$$8. \text{ а) } \sqrt{8xy^2} = -2y\sqrt{2x}; \text{ б) } \sqrt[4]{-81a^5} = \sqrt[4]{-3^4 \cdot a^4 \cdot a} = -3a\sqrt[4]{-a};$$

$$\text{ в) } \sqrt[4]{a^7b^7} = \sqrt[4]{a^6b^6ab} = |a||b|\sqrt[4]{ab} = ab\sqrt[4]{ab}.$$

$$9. \text{ а) } x\sqrt{\frac{2}{x^2}} = \sqrt{\frac{2x^2}{x^2}} = \sqrt{2x}; \text{ б) } ax\sqrt{\frac{7}{ax}} = \sqrt{\frac{7a^2x^2}{ax}} = \sqrt{7ax};$$

$$\text{ в) } by\sqrt{\frac{3}{b^2y^3}} = \sqrt{\frac{3b^4y^4}{b^2y^3}} = \sqrt{3b^2y}.$$

$$10. 8b\sqrt[3]{3b^{-4}} - 3\sqrt[3]{96b} - b^2\sqrt[3]{3b^{-9}} = 8\sqrt[3]{3b^5 \cdot b^{-4}} - 3\sqrt[3]{32 \cdot 3b} - \sqrt[3]{b^{10} \cdot 3b^{-9}} =$$

$$= 8\sqrt[3]{3b} - 3 \cdot 2\sqrt[3]{3b} - \sqrt[3]{3b} = \sqrt[3]{3b}$$

С-28. Свойства арифметического корня (продолжение)

1. а) $\sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$; б) Используем свойство арифметического корня: корень из отношения двух чисел равен отношению корней из этих чисел. Получаем:

$$\sqrt[3]{\frac{4}{125}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{5}; \text{ в) } \sqrt[4]{\frac{1}{a^4}} = \frac{1}{a}; \text{ г) } \sqrt[3]{\frac{8}{b^{15}}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{b^5}.$$

$$2. \text{ а) } \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{10}; \text{ б) } \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{3} \sqrt{3};$$

в) $\frac{7}{\sqrt[3]{4}} = \frac{7 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4^2}} = \frac{7}{4} \cdot \sqrt[3]{16}$; г) Запишем данное выражение в виде $\frac{4}{\sqrt[4]{125}} = \frac{4}{\sqrt[4]{5^3}}$.

Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе, умножим числитель и знаменатель на $\sqrt[4]{5}$. Получаем: $\frac{4\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5^3} \sqrt[4]{5}} = \frac{4\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5^3 \cdot 5}} = \frac{4\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5^4}} = \frac{4\sqrt[4]{5}}{5} = \frac{4}{5} \sqrt[4]{5}$;

д) $\frac{6}{\sqrt[3]{16}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{16^4}}{\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{16^4}} = \frac{6\sqrt[3]{65536}}{16} = \frac{3}{8} \sqrt[3]{65536}$;

3. а) Используем свойство арифметического корня: $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5}$;

б) $\sqrt[4]{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2}$; в) $\sqrt[10]{6^3} = \sqrt[2]{6}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{81}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3^4}} = \sqrt[9]{3^4} = \sqrt[3]{3}$;

д) Воспользуемся свойством арифметического корня, записав выражение c^3 в виде шестой степени числа \sqrt{c} , т.е. $c^3 = (\sqrt{c})^6$. Тогда получаем: $\sqrt[6]{c^3} = \sqrt[6]{(\sqrt{c})^6} = \sqrt{c}$.

е) $\sqrt{a\sqrt{a}} = \sqrt{\sqrt{a^3}} = \sqrt[4]{a^3}$;

ж) Сначала упростим произведение $b^4\sqrt{b}$, внося b число под корень:

$$b^4\sqrt{b} = \sqrt[4]{b^4} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{b^5}. \text{ Тогда получаем: } \sqrt[4]{b^4\sqrt{b}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{b^5}} = \sqrt[16]{b^5} = \sqrt[4]{b^5}.$$

з) $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^8 \cdot x}} = \sqrt[12]{x^9} = \sqrt[4]{x}$;

4. а) $\sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{15}$, $\sqrt[4]{4^2} > \sqrt[4]{15}$, $\sqrt[5]{16} > \sqrt[5]{15}$; б) $\sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{26}$, $\sqrt[4]{3^3} > \sqrt[4]{26}$, $\sqrt[5]{27} > \sqrt[5]{26}$;

в) Запишем числа $\sqrt[4]{4}$ и $\sqrt[4]{8}$ в виде корней одинаковой степени: $\sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2]{2}$ и $\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[2]{2}$. Видно, что эти числа равны, т.е. $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{8}$;

г) $\sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{2\sqrt{7}}$, $\sqrt[4]{3^3} < \sqrt[4]{(2\sqrt{7})^2}$, $\sqrt[5]{27} < \sqrt[5]{28}$.

5. Запишем данные числа в виде корней одинаковой степени: $\sqrt{2} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[8]{8}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{6}$. Очевидно, что $4 < 8 < 9$. Извлечем из всех частей этого неравенства корень шестой степени. При этом знак неравенства сохраняется.

Получим: $\sqrt[6]{4} < \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9}$, т.е. $\sqrt[4]{4} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

6. а) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt[3]{ab}}{\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})} = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$;

б) Запишем все величины в виде корней шестой степени и используем свойства арифметического корня. Получаем:
$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[6]{y}} = \frac{\sqrt[6]{x^3} - \sqrt[6]{y^3}}{\sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{xy} + \sqrt[6]{y^2}} = \frac{(\sqrt[6]{x})^3 - (\sqrt[6]{y})^3}{(\sqrt[6]{x})^2 + \sqrt[6]{x}\sqrt[6]{y} + (\sqrt[6]{y})^2} = \frac{(\sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y})((\sqrt[6]{x})^2 + \sqrt[6]{x}\sqrt[6]{y} + (\sqrt[6]{y})^2)}{(\sqrt[6]{x})^2 + \sqrt[6]{x}\sqrt[6]{y} + (\sqrt[6]{y})^2} = \sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y}.$$

В числителе дроби была использована формула для разности кубов чисел.

$$в) \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{xy}} + \frac{1}{\sqrt[4]{xy} + \sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})} + \frac{1}{\sqrt[4]{y}(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})} = \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{xy}(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})} = \frac{1}{\sqrt[4]{xy}}$$

Ответ: а) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$; б) $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}$; в) $\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}$.

7. а) $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} = 0$, $\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x} - 5) = 0$, $\sqrt[4]{x_1} = 0$, $x_1 = 0$, $\sqrt[4]{x_2} - 5 = 0$, $\sqrt[4]{x_2} = 5$, $x_2 = 625$;

б) $\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x} = 0$, $\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x} + 2) = 0$, $\sqrt[4]{x_1} = 0$, $x_1 = 0$, $\sqrt[4]{x_2} = -2$ — нет корней;

в) $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 6 = 0$, $\sqrt[4]{x} = y$, $y^2 - 5y + 6 = 0$; $D = 1$, $y_1 = \frac{5+1}{2} = 3$, $y_2 = 2$,
 $\sqrt[4]{x} = 3$, $x_1 = 81$, $\sqrt[4]{x} = 2$, $x_2 = 16$;

г) $\sqrt{x} + 3\sqrt[10]{x} - 10 = 0$, $\sqrt[10]{x} = y$, $y^2 + 3y - 10 = 0$, $D = 49$, $y_1 = \frac{-3+7}{2} = 2$,
 $y_2 = -5$, $\sqrt[10]{x_1} = 2$, $x_1 = 2^{10} = 1024$, $\sqrt[10]{x_2} = -5$ — нет корней.

Ответ: а) $x_1 = 0$, $x_2 = 625$; б) $x = 0$; в) $x_1 = 81$, $x_2 = 16$; г) $x = 1024$.

8. а) $x - 2\sqrt{x} > 0$, $\sqrt{x} = y$, $y^2 - 2y > 0$, $y(y - 2) > 0$, $y < 0$, $y > 2$,
 $\sqrt{x} < 0$ — нет решений, $\sqrt{x} > 2$, $x > 4$.

Ответ: $(4; +\infty)$.

б) $x + 3\sqrt{x} < 0$, $\sqrt{x} = y$, $y^2 + 3y < 0$, $y(y + 3) < 0$, $-3 < y < 0$, $-3 < \sqrt{x} < 0$ — нет решений.
 Ответ: нет решений.

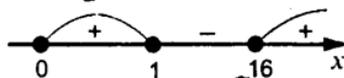
в) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2 \geq 0$, $\sqrt[4]{x} = y$, $y^2 - 3y + 2 \geq 0$, $D = 1$, $y_1 = \frac{3+1}{2} = 2$, $y_2 = 1$,
 $\sqrt[4]{x} \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$, $\sqrt[4]{x} \geq 2$, $x \geq 16$.

Ответ: $[0; 1] \cup [16; +\infty)$.

г) $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3) < 0$, $\sqrt{x} < 0$ — нет решений,

$2 < \sqrt{x} < 3$, $4 < x < 9$.

Ответ: $(4; 9)$.



С-29. Степень с целыми показателями

1. а) $7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$; б) $3^{-1} = \frac{1}{3}$; в) $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; г) $2b^{-1}c = \frac{2c}{b}$; д) $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000}$.

2. а) $\frac{1}{3^7} = 3^{-7}$; б) $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$; в) $\frac{1}{2} = 2^{-1}$; г) $\frac{1}{100} = 10^{-2}$;

д) $0,000001 = \frac{1}{1000000} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$;

2) а) $\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{12^3} = 12^{-3}$; б) $\frac{1}{a^5b^5} = \frac{1}{(ab)^5} = (ab)^{-5}$;

$$в) \frac{1}{(x-y)(x+y)} = ((x-y)(x+y))^{-1}; \quad г) \frac{1}{(x+y)(x+y)} = \frac{1}{(x+y)^2} = (x+y)^{-2}.$$

$$3. а) \left(\frac{4}{7}\right)^5 = \left(\frac{7}{4}\right)^5 > 1; \quad б) 0,127^0 = 1; \quad в) 10^{-10} = \frac{1}{10^{10}} < 1; \quad г) \left(2\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{11}{4}\right)^2 = \left(\frac{4}{11}\right)^2 < 1.$$

$$4. 1) а) 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}; \quad б) (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}; \quad в) 1^{-7} = \frac{1}{1^7} = 1;$$

$$г) (-5,3)^0 = 1; \quad д) -13,1^0 = -1.$$

$$2) а) (-0,2)^{-3} = \frac{1}{(-0,2)^3} = -\frac{1}{0,008}; \quad б) \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = (-2)^4 = 16;$$

$$в) \left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{4}; \quad г) \left(3\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{10}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{10}\right)^2 = 0,3^2 = 0,09;$$

$$3) а) 3^4 \cdot 3^{-13} \cdot 3^{-5} \cdot 3^{11} = 3^{4-13-5+11} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}; \quad б) 8^6 \cdot 8^{-7} = 8^{-6+7} = 8;$$

$$в) (0,1)^2 : (0,1)^{-2} = 0,1^{2+2} = 0,0001;$$

$$г) \left(\frac{2}{3}\right)^{-7} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-7+5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

$$4) а) 2^{-1} + (-3)^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{27} = \frac{25}{54};$$

$$б) \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} - 4^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{1}{4^2} = \frac{27}{8} - \frac{1}{16} = \frac{53}{16};$$

$$в) (-0,1)^{-4} + (-0,2)^{-4} = \frac{1}{(-0,1)^4} + \frac{1}{(-0,2)^4} = \frac{1}{0,0001} + \frac{1}{0,0016} = 10000 + 625 = 10625;$$

$$г) (-0,2)^{-2} + (-0,5)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29.$$

5) а) Учтем определение степени с отрицательным показателем и что при делении степеней с одинаковым основанием показатели степени вычитаются. Тогда

$$\text{имеем: } \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - 4^{-3}; \quad 4^{-5} = 1; \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - 4^{-3-(-5)} = 1; \quad \frac{1^2}{4^2} - 4^2 = 4^2 - 4^2 = 0.$$

$$б) 2^{-2} \cdot 2^{-4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^{-2+4} - 2^4 = 2^2 - 2^4 = 4 - 16 = -12;$$

$$в) 2,7 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4 = 2,7 \cdot 2 \cdot 10^{-4+4} = 5,4 \cdot 10^0 = 5,4.$$

Ответ: а) 0; б) -12; в) 5,4.

5. а) Учтем определение степени с отрицательным показателем, приведем дроби к общему знаменателю и используем формулу для квадрата суммы чисел.

$$\begin{aligned} \text{Получаем: } (a^{-1} + a^{-2})^2 - \frac{2}{a^3} &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right)^2 - \frac{2}{a^3} = \frac{(a+1)^2}{(a^2)^2} - \frac{2}{a^3} = \frac{a^2 + 2a + 1}{a^4} - \frac{2}{a^3} = \\ &= \frac{a^2 + 2a + 1 - 2a}{a^4} = \frac{a^2 + 1}{a^4}. \end{aligned}$$

$$\text{б) } (x^{-2} - x^{-1})^3 = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)^3 = \left(\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - 1\right)\right)^3 = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{(1-x)^3}{x^3} = \frac{(1-x)^3}{x^6};$$

в) Используем определение степени с отрицательным показателем и приведем дроби к общему знаменателю. Имеем: $(a^{-2} - b^{-2}) : (a^{-2} + b^{-2}) = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) :$
 $\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} : \frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2} = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}.$

$$\text{Ответ: а) } \frac{a^2 + 1}{a^4}; \text{ б) } \frac{(1-x)^3}{x^6}; \text{ в) } \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}.$$

С-30. Степень с целым показателем (продолжение)

$$1. \text{ а) } (x-y)^{-3} = \frac{1}{(x-y)^3}; \quad \text{б) } 2(bc)^{-1} = \frac{2}{bc};$$

в) Используем понятие степени с отрицательным показателем и приведем выражение к общему знаменателю: $a - a^{-1} = a - \frac{1}{a} = \frac{a^2 - 1}{a}.$

$$\text{г) } a^{-2} - a^{-1} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} = \frac{1-a}{a^2}; \quad \text{д) } a^{-3} - b^{-3} = \frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} = \frac{b^3 - a^3}{a^3 b^3}.$$

$$2. \text{ а) } (a^2)^{-2} = a^{2 \cdot (-2)} = a^{-4};$$

б) Учтем, что при возведении степени числа в степень показатели степени умножаются. Получаем: $(cb^{-2})^{-2} = c^{1 \cdot (-2)} b^{-2 \cdot (-2)} = c^{-2} b^4 = \frac{b^4}{c^2};$

$$\text{в) } (2c^{-3})^3 = 8c^{-9}; \quad \text{г) } \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^{-1} = \frac{b^2}{a^3}; \quad \text{д) } \left(\frac{2x^{-4}}{y^3}\right)^{-2} = \left(\frac{y^3}{2x^{-4}}\right)^2 = \left(\frac{x^4 y^3}{2}\right)^2 = \frac{x^8 y^6}{4}.$$

$$3. \text{ а) } 16^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-6} = (4^2)^{-2} \cdot 4^6 = 4^{-4} \cdot 4^6 = 4^2 = 16;$$

$$\text{б) } 9^{-2} \cdot 27^2 = (3^2)^{-2} \cdot (3^3)^2 = 3^{-4} \cdot 3^6 = 3^2 = 9; \quad \text{в) } 15^{-3} \cdot 5^{-4} = (3 \cdot 5)^{-3} \cdot 5^{-4} =$$

$$= 3^{-3} \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-4} = 3^{-3} \cdot 5 = \frac{5}{27}; \quad \text{г) } \left(\frac{2}{3}\right)^{-7} : \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = \left(\frac{3}{2}\right)^7 : \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27};$$

$$\text{д) } \frac{3^{-2} \cdot 9^3}{27} = \frac{3^{-2} (3^2)^3}{3^3} = \frac{3^{-2} \cdot 3^6}{3^3} = \frac{3^4}{3^3} = 3.$$

$$4. \text{ а) } (a^{-2} - b^{-2})a^2b^2 = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)a^2b^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2} \cdot a^2b^2 = b^2 - a^2;$$

$$\text{б) } (x+y)^2 \cdot (x+y)^{-1} = x+y;$$

в) Используем понятие степени с отрицательным показателем, приведем дроби

$$\text{к общему знаменателю. Имеем: } a^8(a^{-2} - a^{-4})(a^4 + a^2)^{-1} = a^8 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^4}\right) \cdot \frac{1}{a^4 + a^2} = a^8 \cdot \frac{a^2 - 1}{a^4} \cdot \frac{1}{a^4(1+a)} = \frac{a^8(a-1)(a+1)}{a^{4+4}(1+a)} = \frac{a^8(a-1)}{a^8} = a-1.$$

$$5. (9x^{-3} - x^{-3}y^{-2}) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{-3} = x^{-3}(9 - y^2) \cdot \frac{1}{x^{-3}} = 9 - y^2 = 9 - 5^2 = 9 - 25 = -16.$$

$$6. 1) \text{ а) } 10000^3 = (10^4)^3 = 10^{12}; \text{ б) } 0,002^2 = (2 \cdot 10^{-3})^2 = 4 \cdot 10^{-6};$$

$$\text{в) } 2000^{-2} = (2 \cdot 10^3)^{-2} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-6} = 0,25 \cdot 10^{-6} = 2,5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-6} = 2,5 \cdot 10^{-7};$$

$$\text{г) } 0,001^{-3} = (10^{-3})^{-3} = 10^9.$$

$$2) \text{ а) } 0,000021 = 2,1 \cdot 10^{-5}; \text{ б) } 0,0000002081 = 2,081 \cdot 10^{-7};$$

$$\text{в) } \frac{1}{64} = 0,015625 = 1,5625 \cdot 10^{-2}; \text{ г) } \frac{1}{256} = 0,00390625 = 3,90625 \cdot 10^{-3};$$

$$7. \text{ а) } (3x^{-2} - 2)(2 + 3x^{-2}) = \left(\frac{3}{x^2} - 2\right) \left(\frac{3}{x^2} + 2\right) = \left(\frac{3}{x^2}\right)^2 - 2^2 = \frac{9}{x^4} - 4;$$

б) Учтем понятие степени с отрицательным показателем, приведем дроби к общему знаменателю, используем формулу для разности кубов чисел.

$$\text{Получаем: } (a^{-1} - 3) \left(a^{-2} + \left(\frac{1}{3}a\right)^{-1} + 9 \right) = \left(\frac{1}{a} - 3\right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{3}{a} + 9\right) = \frac{1-3a}{a}.$$

$$\frac{1+3a+9a^2}{a^2} = \frac{(1-3a)(1+3a+(3a)^2)}{a \cdot a^2} = \frac{1^3 - (3a)^3}{a^{1+2}} = \frac{1-27a^3}{a^3};$$

$$\text{в) } (a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} - (ab)^{-1} + b^{-2}) = (a^{-1} + b^{-1}) \left((a^{-1})^2 - a^{-1}b^{-1} + (b^{-1})^2 \right) = \\ = (a^{-1})^3 + (b^{-1})^3 = a^{-3} + b^{-3} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} = \frac{a^3 + b^3}{a^3b^3}.$$

С-31. Определение степени с рациональным показателем

$$1. 1) \text{ а) } 5^{1/2} = \sqrt{5}; 3^{2/3} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}; 10^{-1/4} = \sqrt[4]{10^{-1}} = \sqrt[4]{0,1}; 17^{-1/5} = \sqrt[5]{17^{-1}};$$

$$\text{б) } x^{0,5} = x^{1/2} = \sqrt{x}; y^{1,5} = y^{3/2} = \sqrt{y^3}; b^{-0,5} = b^{-1/2} = \sqrt{b^{-1}};$$

$$2) \text{ а) } 5x^{1/4} = 5\sqrt[4]{x}; -3y^{2/3} = -3\sqrt[3]{y^2}; (2a)^{0,5} = (2a)^{1/2} = \sqrt{2a}; (3b)^{-1,5} = (3b)^{-3/2} = \sqrt{(3b)^{-3}};$$

$$\text{б)} (a-b)^{3/5} = \sqrt[5]{(a-b)^3}; a^{3/4} - b^{3/4} = \sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b^3}; ax^{1.5} + b^{1.5} = ax^{3/2} + b^{3/2} = a\sqrt{x^3} + \sqrt{b^3};$$

$$2. 1) \text{ а)} \sqrt{3} = 3^{1/2}; \sqrt[3]{5} = 5^{1/3}; \sqrt[4]{2} = 2^{1/4}; \sqrt[5]{9^2} = 9^{2/5};$$

$$\text{б)} \sqrt[3]{a^2} = a^{2/3}; \sqrt[10]{b^3} = b^{3/10} = b^{0.3}; \sqrt[8]{2x} = (2x)^{1/8}; \sqrt[6]{8x^3} = (8x^3)^{1/6} = ((2x)^3)^{1/6} = (2x)^{1/2};$$

$$2) \text{ а)} \sqrt[3]{3^{-1}} = 3^{-1/3}; \sqrt[7]{27} = \sqrt[7]{3^3} = 3^{3/7}; \sqrt[15]{8^2} = 8^{2/15} = (2^3)^{2/15} = 2^{2/5};$$

$$\sqrt[20]{25^3} = 25^{3/20} = (5^2)^{3/20} = 5^{0.3};$$

$$\text{б)} \sqrt[4]{x^{-3}} = x^{-3/4}; \sqrt[3]{(a+b)^2} = (a+b)^{2/3}; \sqrt[5]{a^2+b^2} = (a^2+b^2)^{1/5}.$$

$$3.1) \text{ а)} 9^{1/2} = (3^2)^{1/2} = 3; \text{ б)} 36^{-1/2} = \frac{1}{36^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}; \text{ в)} 2 \cdot 125^{-1/3} = 2 \cdot \frac{1}{125^{1/3}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5};$$

$$\text{г)} -4 \cdot 0,01^{-3/2} = -4 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{-3/2} = -4 \cdot 100^{3/2} = -4 \cdot (10^2)^{3/2} = -4 \cdot 10^3 = -4000.$$

$$\text{Ответ: а) } 3; \text{ б) } \frac{1}{6}; \text{ в) } \frac{2}{5}; \text{ г) } -4000.$$

$$2) \text{ а)} 0,125^{-1/3} = (0,5^3)^{-1/3} = 0,5^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2; \text{ б)} 0,00032^{0.4} = (0,2^5)^{0.4} = 0,2^2 = 0,04;$$

$$\text{в)} \left(3\frac{3}{8}\right)^{-2/3} = \left(\frac{27}{8}\right)^{-2/3} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^{-2/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9};$$

$$\text{г)} \left(2\frac{10}{27}\right)^{-1/6} = \left(\frac{64}{27}\right)^{-1/6} = \left(\frac{27}{64}\right)^{1/6} = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)^{1/6} = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ответ: а) } 2; \text{ б) } 0,04; \text{ в) } \frac{4}{9}; \text{ г) } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$4. \text{ а)} 0 \leq x \leq 0,00032; 0 \leq x^{0.4} \leq (0,00032)^{0.4}; 0 \leq x^{0.4} \leq 0,04;$$

$$\text{б)} 1 \leq x \leq 243; 1 \leq x^{0.4} \leq 243^{0.4}; 243^{0.4} = (3^5)^{2/5} = 9; 1 \leq x^{0.4} \leq 9;$$

$$\text{в)} 0,00001 \leq x \leq 1; (0,00001)^{0.4} \leq x^{0.4} \leq 1; 0,00001^{0.4} = (10^{-5})^{2/5} = 10^{-2} = 0,01; 0,01 \leq x^{0.4} \leq 1;$$

$$\text{г)} 243 \leq x \leq 1024; 243^{0.4} \leq x^{0.4} \leq 1024^{0.4}; 1024^{0.4} = (2^{10})^{2/5} = 2^4 = 16; 9 \leq x^{0.4} \leq 16;$$

$$\text{Ответ: а) } 0 \leq x^{0.4} \leq 0,04; \text{ б) } 1 \leq x^{0.4} \leq 9; \text{ в) } 0,01 \leq x^{0.4} \leq 1; \text{ г) } 9 \leq x^{0.4} \leq 16.$$

$$5. \text{ а)} y = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}; D(y) = R;$$

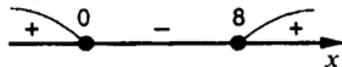
$$\text{б) } y = x^{-0.6} = x^{-3/5} = \frac{1}{x^{3/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}; D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty);$$

$$\text{в) } y = (x-8)^{-0.9} = \frac{1}{(x-8)^{0.9}} = \frac{1}{\sqrt[10]{(x-8)^9}}; (x-8)^9 > 0; x-8 > 0; x > 8;$$

$$\text{значит, } D(y) = (8; +\infty);$$

$$\text{г) } y = (x^2 - 8x)^{1/4} = \sqrt[4]{x^2 - 8x}; x^2 - 8x \geq 0; x(x-8) \geq 0;$$

$$D(y) = (-\infty; 0] \cup [8; +\infty).$$



$$\text{6. а) } x^{1/2} = 3, \sqrt{x} = 3, x = 9; \text{ б) } x^{1/5} = 2, \sqrt[5]{x} = 2, x = 32; \text{ в) } (x-3)^{1/2} = 5, \sqrt{x-3} = 5,$$

$$x-3 = 25, x = 28; \text{ г) } (x+2)^{1/3} = 0, x+2 = 0, x = -2; \text{ д) } (x^2-9)^{0.5} = \sqrt{7},$$

$$\sqrt{x^2-9} = \sqrt{7}, x^2-9 = 7, x^2 = 16, x_{1,2} = \pm 4; \text{ е) } (x^2-6x)^{1/3} = 3, \sqrt[3]{x^2-6x} = 3,$$

$$x^2-6x = 27, x^2-6x-27 = 0, D = 36 + 4 \cdot 27 = 144, x_1 = \frac{6+12}{2} = 9; x_2 = -3;$$

C-32. Свойства степени с рациональным показателем

$$\text{1. 1) а) } x^{1/2} \cdot x^{1/3} = x^{1/2+1/3} = x^{5/6}; \text{ б) } (x^{1/2})^{1/3} = x^{1/6}; \text{ в) } x^{1/2} : x^{1/3} = x^{1/2-1/3} = x^{1/6};$$

$$\text{г) } y : y^{2/3} = y^{1-2/3} = y^{1/3}; \text{ д) } x^{1/2} \cdot x^{1/6} \cdot x^{-1/3} = x^{1/2+1/6-1/3} = x^{1/3}.$$

$$\text{Ответ: а) } x^{5/6}; \text{ б) } x^{1/6}; \text{ в) } x^{1/6}; \text{ г) } y^{1/3}; \text{ д) } x^{1/3}.$$

$$\text{2) а) } (y^{0.7})^{0.5} \cdot y^{0.15} = y^{0.35} \cdot y^{0.15} = y^{0.5};$$

б) При повторном возведении числа в степень показатели степеней умножаются.

При умножении степеней с одинаковым основанием показатели степеней

$$\text{складываются. Получаем: } \left(y^{\frac{5}{7}}\right)^{1.4} \cdot \left(y^{\frac{3}{8}}\right)^{2.4} = y^{\frac{5 \cdot 1.4}{7}} \cdot y^{\frac{-3 \cdot 2.4}{8}} = y^{\frac{7}{7}} \cdot y^{\frac{-7.2}{8}} =$$

$$= y^1 \cdot y^{-0.9} = y^{1-0.9} = y^{0.1}.$$

$$\text{в) } \frac{y^{5/6} \cdot y^{2/3}}{y^{-0.5}} = \frac{y^{3/2}}{y^{-1/2}} = y^2;$$

г) При умножении степеней с одинаковым основанием показатели степеней складываются, при делении степеней с одинаковым основанием показатели

$$\text{степеней вычитаются. Имеем: } \frac{y^{3.5} y^{-2.7}}{y^{2.9} y^{-3.1}} = \frac{y^{3.5-2.7}}{y^{2.9+(-3.1)}} = \frac{y^{0.8}}{y^{-0.2}} = y^{0.8-(-0.2)} = y.$$

$$\text{Ответ: а) } y^{0.5}; \text{ б) } y^{0.1}; \text{ в) } y^2; \text{ г) } y.$$

$$2. 1) \text{ а) } (2^{0.5})^{-0.5} \cdot (0.5)^{-1.25} = 2^{-0.25} \cdot (2^{-1})^{-1.25} = 2^{-0.25} \cdot 2^{1.25} = 2;$$

$$\text{б) } (3^{-1/9})^{1.8} \cdot 9^{0.1} = 3^{-0.2} \cdot (3^2)^{0.1} = 3^{-0.2} \cdot 3^{0.2} = 1;$$

$$2) \text{ а) } 16^{0.125} \cdot 8^{-5/6} \cdot 4^{2.5} = (2^4)^{0.125} \cdot (2^3)^{-5/6} \cdot (2^2)^{2.5} = 2^{0.5} \cdot 2^{-5/2} \cdot 2^5 = 2^3 = 8;$$

$$\text{б) } \frac{81^{0.4} \cdot 3^{0.5}}{9^{0.3} \cdot 27^{1/6}} = \frac{(3^4)^{0.4} \cdot 3^{0.5}}{(3^2)^{0.3} \cdot (3^3)^{1/6}} = \frac{3^{1.6} \cdot 3^{0.5}}{3^{0.6} \cdot 3^{0.5}} = 3.$$

Ответ: 1) а) 2; б) 1; 2) а) 8; б) 3.

$$3. a^4 = (a^2)^2; a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2; a^3 = (a^{3/2})^2; a = (\sqrt{a})^2; a^{1/2} = (a^{1/4})^2;$$

$$a^{1/3} = (a^{1/6})^2; a^{3/7} = (a^{3/14})^2.$$

$$4. b^6 = (b^2)^3; b^{-9} = (b^{-3})^3; b^{1/2} = (b^{1/6})^3; b^{1/3} = (b^{1/9})^3; b^{2/5} = (b^{2/15})^3.$$

5. а) Раскроем скобки. Учтем, что при умножении степеней с одинаковым основанием показатели степеней складываются. Получаем:

$$\left(x^{\frac{1}{2}} - 3\right) \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 2x \dots$$

$$\text{б) } (x^{0.5} - y^{0.5})(x^{0.5} + y^{0.5}) = (x^{0.5})^2 - (y^{0.5})^2 = x - y;$$

$$\text{в) } (1 - x^{0.5})^2 + 2x^{0.5} = 1 - 2x^{0.5} + x + 2x^{0.5} = 1 + x;$$

г) Используем формулу для разности кубов чисел. Учтем, что при возведении степени числа в степень показатели степеней перемножаются. Имеем:

$$\left(y^{\frac{1}{3}} - 1\right) \left(y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + 1\right) = \left(y^{\frac{1}{3}} - 1\right) \left(\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 + y^{\frac{1}{3}} + 1\right) = \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 1^3 = y^1 - 1 = y - 1.$$

Ответ: а) $2x$; б) $x - y$; в) $1 + x$; г) $y - 1$.

$$6. \text{ а) } x = a^{0.25}, y = a^{-0.25}; x \cdot y = a^{0.25} \cdot a^{-0.25} = a^0 = 1, \text{ т.е. } xy = 1;$$

$$\text{б) } x = a^{1/3}, y = a^{1/6}; x \cdot y^{-2} = a^{1/3} \cdot (a^{1/6})^{-2} = a^{1/3} \cdot a^{-1/3} = 1, \text{ т.е. } xy^{-2} = 1, x = y^2;$$

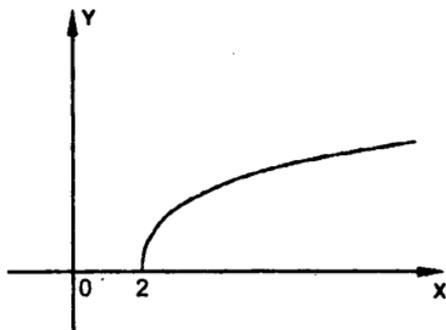
$$\text{в) } x = a^{1/4}, y = \sqrt{1 - a^{0.5}}; x^2 + y^2 = (a^{1/4})^2 + (\sqrt{1 - a^{0.5}})^2 = a^{0.5} + 1 - a^{0.5} = 1, \text{ т.е. } x^2 + y^2 = 1;$$

г) Чтобы найти зависимость между x и y возведем выражения $x = \sqrt{a}$ и $y = \sqrt{a-3}$ в квадрат. Получаем: $x^2 = a$ и $y^2 = a-3$. Вычтем из первого равенства

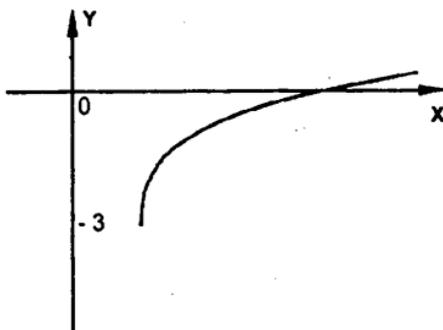
второе: $x^2 - y^2 = a - (a - 3)$ или $x^2 - y^2 = 3$. При этом $a - 3 \geq 0$, т.е. $a \geq 3$.

Ответ: а) $xy = 1$; б) $x = y^2$; в) $x^2 + y^2 = 1$; г) $x^2 - y^2 = 3$.

7. а)



б)



С-33. Преобразования выражений, содержащих степени с дробными показателями

1. 1) а) $x + 3x^{1/2} = x^{1/2}(x^{1/2} + 3)$; б) $y^{1/2} - 2y^{1/4} = y^{1/4}(y^{1/4} - 2)$;

в) $(a^{1/2})^2 - 4 = (a^{1/2} - 2)(a^{1/2} + 2)$; г) $(b^{1/2})^3 + 8 = (b^{1/2} + 2)(b - 2b^{1/2} + 4)$;

д) $x^{2/3} - y^{2/3} = (x^{1/3} - y^{1/3})(x^{1/3} + y^{1/3})$;

е) $a^{3/2} - b^{3/2} = (a^{1/2})^3 - (b^{1/2})^3 = (a^{1/2} - b^{1/2})(a + a^{1/2}b^{1/2} + b)$;

2) а) $a^{1/2} - 2a^{1/4} = a^{1/4}(a^{1/4} - 2)$; б) $b^{3/4} + b^{1/2} = b^{1/4}(b^{1/2} + 1)$;

в) $ax^{1/6} - ax^{1/3} = ax^{1/6}(1 - x^{1/6})$; г) $y^{2/7} + y^{1/7} = y^{1/7}(y^{1/7} + 1)$;

д) $a - 4 = (\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 2)$; е) $b + 27 = (b^{1/3})^3 + 3^3 = (b^{1/3} + 3)(b^{2/3} - 3b^{1/3} + 9)$.

2. 1) а) $\frac{x + 7x^{1/2}}{x^{1/2} + 7} = \frac{x^{1/2}(x^{1/2} + 7)}{x^{1/2} + 7} = x^{1/2}$; б) $\frac{3y^{1/4}}{y^{1/4} - 5y^{1/4}} = \frac{3y^{1/4}}{y^{1/4}(y^{1/4} - 5)} = \frac{3}{y^{1/4} - 5}$;

в) $\frac{a - b}{a^{0.5} + b^{0.5}} = \frac{(a^{0.5} - b^{0.5})(a^{0.5} + b^{0.5})}{a^{0.5} + b^{0.5}} = a^{0.5} - b^{0.5}$;

г) Вынесем в числителе дроби за скобки ab , в знаменателе — $a^{0.5}b^{0.5}$ и сократим

дробь: $\frac{a^{1.5}b - ab^{1.5}}{ab^{0.5} - a^{0.5}b} = \frac{ab(a^{0.5} - b^{0.5})}{a^{0.5}b^{0.5}(a^{0.5} - b^{0.5})} = \frac{ab}{a^{0.5}b^{0.5}} = a^{0.5}b^{0.5} = (ab)^{0.5}$.

$$д) \frac{x^{3/2} - c^{3/2}}{x + x^{1/2} \cdot c^{1/2} + c} = \frac{(x^{1/2} - c^{1/2})(x + x^{1/2} \cdot c^{1/2} + c)}{x + x^{1/2} \cdot c^{1/2} + c} = x^{1/2} - c^{1/2};$$

$$е) \frac{m+n}{m^{1/3} + n^{1/3}} = \frac{(m^{1/3} + n^{1/3})(m^{2/3} - m^{1/3}n^{1/3} + n^{2/3})}{m^{1/3} + n^{1/3}} = m^{2/3} - m^{1/3}n^{1/3} + n^{2/3}.$$

Ответ: а) $x^{1/2}$ б) $\frac{3}{y^{1/4} - 5}$ в) $a^{0.5} - b^{0.5}$ г) $\frac{m^{1/3} + n^{1/3}}{m^{2/3}}$ д) $x^{1/2} - c^{1/2}$ е) $m^{2/3} - m^{1/3}n^{1/3} + n^{2/3}$

$$2) а) \frac{a - 2a^{1/2}}{a^{3/2} - 2a} = \frac{a^{1/2}(a^{1/2} - 2)}{a(a^{1/2} - 2)} = a^{1/2}; \quad б) \frac{b^{5/6} - b^{1/3}}{b^{5/6} + b^{1/3}} = \frac{b^{1/3}(b^{1/2} - 1)}{b^{1/3}(b^{1/2} + 1)} = \frac{b^{1/2} - 1}{b^{1/2} + 1};$$

$$в) \frac{4x - y}{2x + x^{0.5}y^{0.5}} = \frac{(2x^{0.5} - y^{0.5})(2x^{0.5} + y^{0.5})}{x^{0.5}(2x^{0.5} + y^{0.5})} = \frac{2x^{0.5} - y^{0.5}}{x^{0.5}};$$

$$г) \frac{m^{2/3} - n^{2/3}}{m - m^{2/3}n^{1/3}} = \frac{(m^{1/3} - n^{1/3})(m^{1/3} + n^{1/3})}{m^{2/3}(m^{1/3} - n^{1/3})} = \frac{(m^{1/3} + n^{1/3})}{m^{2/3}};$$

$$д) \frac{x^{3/2} - y^{3/2}}{x^{3/2}y^{1/2} + xy + x^{1/2}y^{3/2}} = \frac{(x^{1/2} - y^{1/2})(x + x^{1/2}y^{1/2} + y)}{x^{1/2}y^{1/2}(x + x^{1/2}y^{1/2} + y)} = \frac{x^{1/2} - y^{1/2}}{x^{1/2}y^{1/2}};$$

$$е) \frac{a^{0.3} + b^{0.3}}{a^{0.1} + b^{0.1}} = \frac{(a^{0.1} + b^{0.1})(a^{0.2} - a^{0.1}b^{0.1} + b^{0.2})}{a^{0.1} + b^{0.1}} = a^{0.2} - a^{0.1}b^{0.1} + b^{0.2}.$$

Ответ: а) $a^{1/2}$; б) $\frac{b^{1/2} - 1}{b^{1/2} + 1}$; в) $\frac{2x^{0.5} - y^{0.5}}{x^{0.5}}$; г) $\frac{(m^{1/3} + n^{1/3})}{m^{2/3}}$; д) $\frac{x^{1/2} - y^{1/2}}{x^{1/2}y^{1/2}}$;

е) $a^{0.2} - a^{0.1}b^{0.1} + b^{0.2}$.

$$3. \frac{x - 9x^{1/2}}{x^{3/4} + 3x^{1/2}} = \frac{x^{1/2}(x^{1/2} - 9)}{x^{1/2}(x^{1/4} + 3)} = \frac{x^{1/2}(x^{1/4} - 3)(x^{1/4} + 3)}{x^{1/2}(x^{1/4} + 3)} = x^{1/4} - 3 =$$

$$= (20,25)^{1/4} - 3 = \sqrt{4,5} - 3 = 3\sqrt{0,5} - 3.$$

Ответ: $3\sqrt{0,5} - 3$.

$$4. а) \frac{x^{0.5}}{x^{0.5} - 5} - \frac{5}{x^{0.5} + 5} + \frac{x}{25 - x} = \frac{x^{0.5}}{x^{0.5} - 5} - \frac{5}{x^{0.5} + 5} - \frac{x}{(x^{0.5} - 5)(x^{0.5} + 5)} =$$

$$= \frac{x^{0.5}(x^{0.5} + 5) - 5(x^{0.5} - 5) - x}{x - 25} = \frac{x + 5x^{0.5} - 5x^{0.5} + 25 - x}{x - 25} = \frac{25}{x - 25};$$

б) Приведем дроби в скобках к общему знаменателю и учтем действия со

$$\begin{aligned} \text{степенями: } & \left(\frac{5a^{0.5} + b^{0.5}}{a^{0.5} - 5b^{0.5}} + \frac{5a^{0.5} - b^{0.5}}{a^{0.5} + 5b^{0.5}} \right) \cdot \frac{a - 25b}{a + b} = \\ & = \frac{(5a^{0.5} + b^{0.5})(a^{0.5} + 5b^{0.5}) + (5a^{0.5} - b^{0.5})(a^{0.5} - 5b^{0.5})}{(a^{0.5} - 5b^{0.5})(a^{0.5} + 5b^{0.5})} \cdot \frac{a - 25b}{a + b} = \\ & = \frac{10a + 10b}{a - 25b} \cdot \frac{a - 25b}{a + b} = \frac{10(a + b)}{a + b} = 10. \end{aligned}$$

Ответ: а) $\frac{25}{x - 25}$; б) 10.

С-34. Радианная мера угла

1. а) $\frac{\pi}{4} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$; б) $\frac{\pi}{10} = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$; в) $\frac{3}{4}\pi = 3 \cdot \frac{\pi}{4} = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$;

г) $\frac{2}{5}\pi = \frac{2}{5} \cdot 180^\circ = 72^\circ$; д) $3\pi = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$.

Ответ: а) 45° ; б) 18° ; в) 135° ; г) 72° ; д) 540° .

2. а) $25^\circ = 25 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5}{36}\pi$; б) $40^\circ = 40 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2}{9}\pi$; в) $150^\circ = 150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5}{6}\pi$;

г) $90^\circ = 90 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$; д) $18^\circ = 18 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{10}$.

Ответ: а) $\frac{5}{36}\pi$; б) $\frac{2}{9}\pi$; в) $\frac{5}{6}\pi$; г) $\frac{\pi}{2}$; д) $\frac{\pi}{10}$.

3.

Градусы	60°	45°	105°	120°	135°	36°	144°
Радианы	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$

$105^\circ = 105 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7}{12}\pi$; $\frac{\pi}{5} = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$;

$70^\circ = 70 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{18}$; $\frac{7\pi}{9} = \frac{7}{9} \cdot 180^\circ = 140^\circ$.

Градусы	70°	140°	540°
Радианы	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{7\pi}{9}$	3π

4. а) $\pi \approx 3.1$; б) $\frac{\pi}{2} \approx 1.6$; в) $\frac{3}{4}\pi \approx 2.4$; г) $\frac{3\pi}{2} \approx 4.7$; д) $2\pi \approx 6.3$.

б Федоскина

5. а) $\frac{\pi}{2} > 1,5$, $1,6 > 1,5$; б) $\pi < 3\frac{1}{3}$, $3,14 < 3,33$; в) $-\frac{\pi}{2} > -2$, $-1,6 > -2$.

6. Длина окружности равна $2\pi R = 2 \cdot 3,14 \cdot 2,6 \approx 16,33$ (см). За 20 мин конец стрелки пройдет одну треть окружности, т.е. $\frac{1}{3} \cdot 16,33 \approx 5,44$ (см).

Ответ: 5,44 см.

7. Пусть x – коэффициент пропорциональности. Тогда $2x$, $3x$ и $4x$ – углы треугольника. Их сумма равна π , т.е. $2x + 3x + 4x = \pi$, $9x = \pi$, $x = \frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9}$ – I угол треугольника, $3\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{3}$ – II угол, $\frac{4\pi}{9}$ – III угол.

Ответ: $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{9}$.

8. Пусть x см – радиус. тогда $\pi x^2 \text{ см}^2$ – площадь круга, $\frac{\pi x^2}{2\pi} \cdot 2 \text{ см}^2$ – площадь сектора или $7,29 \text{ см}^2$. Получаем уравнение: $\frac{\pi x^2 \cdot 2}{2\pi} = 7,29$; $x^2 = 7,29$ $x = 2,7$; $2,7 \text{ см}$ – радиус.

Ответ: 2,7.

9. $36^\circ = \frac{\pi}{5}$ – I угол; $\frac{\pi - \frac{\pi}{5}}{2} = \frac{4\pi}{2 \cdot 5} = \frac{2\pi}{5}$ – II и III углы.

Ответ: $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$ и $\frac{2\pi}{5}$.

10. Внутренний угол правильного n -угольника равен $\pi \left(1 - \frac{2}{n}\right)$.

Получаем: $\frac{4\pi}{5} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi$; $\frac{4}{5} = 1 - \frac{2}{n}$; $\frac{2}{n} = \frac{1}{5}$; $n = 10$.

Ответ: 10.

С–35 Поворот точки вокруг начала координат

1. 1) а) (0; 1); б) (-1; 0); в) (0; -1); г) (1; 0); д) (-1; 0).

2) а) (0; -1); б) (-1; 0); в) (0; 1); г) (1; 0); д) (0; 1).

2. а) II; б) I; в) III; г) I; д) III.

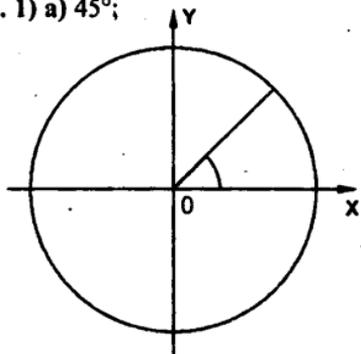
3. а) $\pi + 2\pi n$; $n \in z$; б) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in z$. в) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $n \in z$.

4. а) (0; 1); б) (0; 1); в) (1; 0).

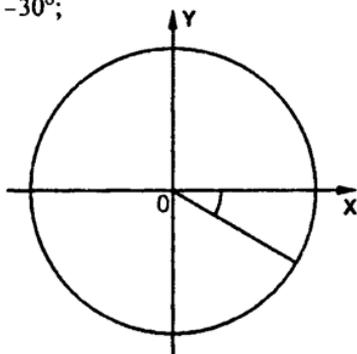
5. а) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; $n \in z$; б) $\frac{5\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in z$.

C-36. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса

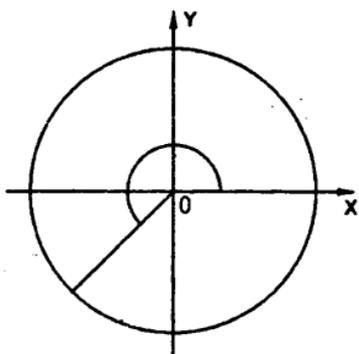
1. 1) а) 45° ;



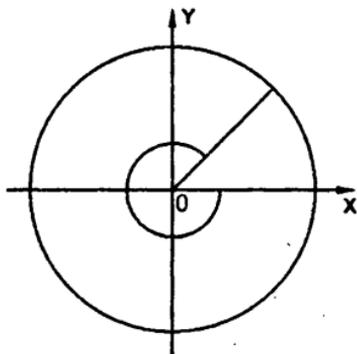
б) -30° ;



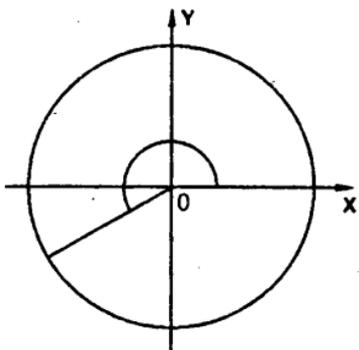
в) 225° ;



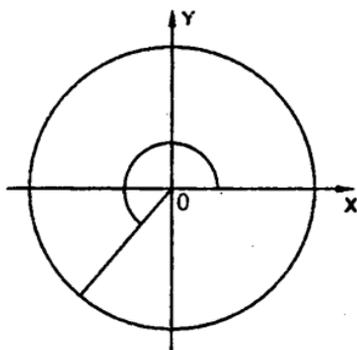
г) -315° .

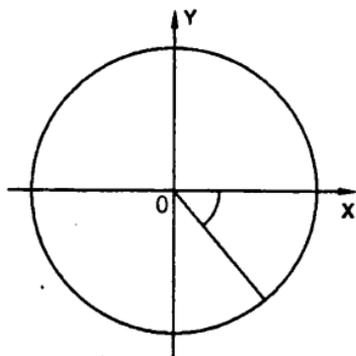
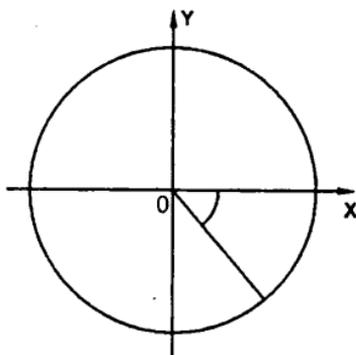


2) а) 210° ;



б) 590° ;



в) -50° ;г) -410° .

2. 1) а) I; б) III; в) III; г) II.

2) а) IV; б) I; в) I; г) IV.

3.

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	-	0	-	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	0	-	0	-

4. 1) а) $\beta = 360^\circ$; б) $\beta = 450^\circ$; в) $\beta = 630^\circ$;2) а) $\beta = 450^\circ$; б) $\beta = 360^\circ$; в) $\beta = 540^\circ$;5. а) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; $3 - 1 \leq 3 + \sin \alpha \leq 3 + 1$; $2 \leq 3 + \sin \alpha \leq 4$;б) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; $-1 \leq -\sin \alpha \leq 1$; $2 \leq 3 - \sin \alpha \leq 4$;в) $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$; $5 - 1 \leq 5 + \cos \alpha \leq 5 + 1$; $4 \leq 5 + \cos \alpha \leq 6$;г) $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$; $-1 \leq -\cos \alpha \leq 1$; $4 \leq 5 - \cos \alpha \leq 6$.6. а) нет, т.к. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; а $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$; б) нет, т.к. $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$; а $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$;

в) да; г) да.

7. 1) а) $\cos 0^\circ + 3 \sin 90^\circ = 1 + 3 = 4$; б) $\sin 270^\circ - 2 \cos 180^\circ = -1 - 2 \cdot (-1) = 1$;в) $6 \operatorname{tg} 180^\circ + 3 \operatorname{ctg} 90^\circ = 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$; г) $1 + \operatorname{ctg} 270^\circ - 5 \operatorname{tg} 360^\circ = 1 + 0 - 5 \cdot 0 = 1$;2) а) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; б) $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$;

$$\text{в) } \sin 45^\circ + \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}; \quad \text{г) } \operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$8. \text{ а) } \sin x = 0, x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \text{б) } \sin x = -1, x = \frac{3\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{в) } \sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \text{г) } \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{д) } \cos x = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \text{е) } \cos x = 1, x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$9. \text{ а) } \sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1.5;$$

$$\text{б) } \operatorname{tg}^2 45^\circ + \operatorname{ctg}^2 45^\circ = 1^2 + 1^2 = 2; \quad \text{в) } \sin 45^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \operatorname{ctg} 90^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

$$10. 0^\circ < \beta < 90^\circ, \cos \beta > 0, \cos \beta < 2, \text{ значит, } \cos^2 \beta < 2 \cos \beta.$$

$$11. \alpha = 90^\circ; \quad \text{а) } \sin 3\alpha = \sin 270^\circ = -1; \quad \text{б) } 3 \sin \alpha = 3 \sin 90^\circ = 3;$$

$$\text{в) } \cos 2\alpha = \cos 180^\circ = -1; \quad 2 \cos \alpha = 2 \cos 90^\circ = 0.$$

С-37. Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса

$$1. \text{ а) } \sin 36^\circ > 0, \sin 117^\circ > 0, \sin 197^\circ < 0, \sin 311^\circ < 0;$$

$$\text{б) } \cos 16^\circ > 0, \cos 108^\circ < 0, \cos 288^\circ > 0, \cos 304^\circ > 0;$$

$$\text{в) } \operatorname{tg} 5^\circ > 0, \operatorname{tg} 91^\circ < 0, \operatorname{tg} 183^\circ > 0, \operatorname{tg} 303^\circ < 0;$$

$$\text{г) } \operatorname{ctg} 77^\circ > 0, \operatorname{ctg} 97^\circ < 0, \operatorname{ctg} 209^\circ > 0, \operatorname{ctg} 281^\circ < 0.$$

$$2. 1) \text{ а) } \sin 185^\circ < 0; \quad \text{б) } \operatorname{tg} 116^\circ < 0; \quad \text{в) } \cos 210^\circ < 0; \quad \text{г) } \operatorname{ctg} 310^\circ < 0;$$

$$2) \text{ а) } \sin 510^\circ > 0; \quad \text{б) } \cos 388^\circ > 0; \quad \text{в) } \operatorname{tg} 456^\circ < 0; \quad \text{г) } \operatorname{ctg} 373^\circ > 0;$$

$$3) \text{ а) } \sin(-16^\circ) < 0; \quad \text{б) } \cos(-88^\circ) > 0; \quad \text{в) } \operatorname{tg}(-110^\circ) > 0; \quad \text{г) } \operatorname{ctg}(-93^\circ) > 0.$$

3.

α	135°	216°	400°	460°	-16°	-126°
$\sin \alpha$	+	-	+	+	-	-
$\cos \alpha$	-	-	+	-	+	-
$\operatorname{tg} \alpha$	-	+	+	-	-	+
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	+	+	-	-	+

$$4. \text{ а) } \sin 92^\circ \cdot \cos 200^\circ = \ll + \gg \cdot \ll - \gg < 0; \quad \text{б) } \sin 143^\circ \cdot \cos 311^\circ = \ll + \gg \cdot \ll + \gg > 0;$$

$$в) \frac{\sin 167^\circ}{\cos 267^\circ} = \frac{\ll + \gg}{\ll - \gg} < 0; \quad г) \frac{\cos 131^\circ}{\sin 88^\circ} = \frac{\ll - \gg}{\ll + \gg} < 0;$$

$$д) \sin 116^\circ \cdot \cos 116^\circ \cdot \operatorname{tg} 197^\circ = \ll + \gg \cdot \ll - \gg \cdot \ll + \gg < 0;$$

$$е) \cos 225^\circ \cdot \sin 83^\circ \cdot \operatorname{tg} 100^\circ = \ll - \gg \cdot \ll + \gg \cdot \ll - \gg > 0.$$

5. а) $\sin \alpha < 0$ и $\operatorname{tg} \alpha > 0$, III или IV, I или III, значит, III четверть;

б) $\cos \alpha > 0$ и $\operatorname{tg} \alpha > 0$, I или IV, I или III, значит, I четверть.

$$6. 1) а) \sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad б) \cos(-90^\circ) = \cos 90^\circ = 0;$$

$$в) \operatorname{tg}(-45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1; \quad г) \operatorname{ctg}(-30^\circ) = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3};$$

$$2) а) \sin(-30^\circ) + \operatorname{tg} 45^\circ = -\frac{1}{2} + 1 = 0,5; \quad б) \sin(-90^\circ) - \cos 0^\circ = -1 - 1 = -2;$$

$$в) \cos(-180^\circ) \sin(-30^\circ) = -\cos 180^\circ \sin 30^\circ = -(-1) \cdot \frac{1}{2} = 0,5;$$

$$г) \sin(-60^\circ) \operatorname{tg}(-30^\circ) = \sin 60^\circ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5.$$

$$7. а) \sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = 0,5;$$

$$б) \cos 405^\circ = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad в) \operatorname{tg} 420^\circ = \operatorname{tg}(360^\circ + 60^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3};$$

$$г) \operatorname{ctg} 750^\circ = \operatorname{ctg}(720^\circ + 30^\circ) = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}; \quad д) \sin 780^\circ = \sin(720^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$е) \cos 390^\circ = \cos(360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$8. \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \quad а) \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \ll + \gg \cdot \ll - \gg < 0; \quad б) \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\ll + \gg}{\ll - \gg} < 0;$$

$$\frac{\operatorname{tg}^3 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\ll - \gg}{\ll + \gg} < 0; \quad г) \sin \alpha - \cos \alpha = \ll + \gg - \ll - \gg > 0.$$

$$9. \sin \alpha = a; \quad а) 1 - \sin \alpha = 1 - a; \quad б) 1 - \sin(-\alpha) = 1 + \sin \alpha = 1 + a;$$

$$в) \sin(\alpha + 360^\circ) = \sin \alpha = a; \quad г) \sin(\alpha - 360^\circ) = -\sin(360^\circ - \alpha) = \sin \alpha = a;$$

$$д) \sin(720^\circ + \alpha) = \sin \alpha = a; \quad е) \sin(720^\circ - \alpha) = -\sin \alpha = -a.$$

10. $\sin \alpha + \cos \alpha = -1,01$; III четверти.

$$11. \beta \in \text{II четверти}; \quad а) |\cos \beta| + \cos \beta = -\cos \beta + \cos \beta = 0; \quad б) |\sin \beta| - \sin \beta = \sin \beta - \sin \beta = 0;$$

$$в) |\operatorname{tg} \beta| + \operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta = 0; \quad г) |\sin \beta| - |\cos \beta| = \sin \beta + \cos \beta.$$

C-38. Вычисление значений тригонометрических функций

$$1. 1) \text{ а) } 2 \sin 30^\circ + 6 \cos 60^\circ - 3 \operatorname{ctg} 30^\circ + 9 \operatorname{tg} 30^\circ =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} - 3\sqrt{3} + 9 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 + 3 - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4;$$

$$\text{б) } \sin(-45^\circ) + \cos(-45^\circ) + 2 \sin(-30^\circ) - 4 \cos(-60^\circ) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = -1 - 2 = -3;$$

$$\text{в) } 4 \sin(-30^\circ) + \operatorname{tg}(-45^\circ) \operatorname{ctg}(-45^\circ) - 3 \cos 90^\circ = -4 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = -2 + 1 = -1;$$

$$2) \text{ а) } 3 \sin \frac{\pi}{6} - 2 \cos \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + 4 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 + 4 \cdot 1 = 1,5 - 1 - 1 + 4 = 3,5;$$

$$\text{б) } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 3 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 3 \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 4 \sin \pi = -1 - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot 0 = -1 - 3\sqrt{2};$$

$$\text{в) } 2 \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 3 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 5 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 + 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} - 1.$$

$$2. \text{ а) } \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1; \quad \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1; \quad \sin \pi + \cos \pi = 0 - 1 = -1;$$

$$\sin \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2} = -1 + 0 = -1;$$

$$\text{б) } \sin 0 + 2 \cos 0 = 0 + 2 \cdot 1 = 2; \quad \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0 + 2 \cdot 0 = 0; \quad \sin 2\pi + 2 \cos \pi = 0 + 2 \cdot (-1) = -2;$$

$$\text{в) } 2 \sin 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1; \quad 2 \sin \frac{\pi}{6} - \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 0 = 1;$$

$$2 \sin \frac{\pi}{3} - \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - (-1) = \sqrt{3} + 1; \quad 2 \sin \pi - \cos 3\pi = 2 \cdot 0 - (-1) = 1;$$

$$\text{г) } 3 \sin 0 - 2 \cos 0 = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2; \quad 3 \sin \frac{\pi}{6} - 2 \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 0 = 1,5;$$

$$3 \sin \frac{\pi}{3} - 2 \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot (-1) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2; \quad 3 \sin \frac{\pi}{2} - 2 \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 3.$$

$$3. 1) \text{ а) } \sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0;$$

$$\text{б)} 2 \sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4};$$

$$\text{в)} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{9}; \quad \text{г)} \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = \frac{3}{4};$$

$$\text{2) а)} \sin^2 \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2 \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1,5;$$

$$\text{б)} 2 \cos^2 \left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{ctg}^2 \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 1^2 = 1; \quad \text{в)} \operatorname{tg}^2 \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{ctg}^2 \left(-\frac{\pi}{6}\right) = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 6;$$

$$\text{г)} \operatorname{tg}^2 \left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{ctg}^2 \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 1.$$

4. а) Используем таблицу значений тригонометрических функций, находим:

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ и } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \text{ Теперь находим:}$$

$$\frac{0,3 + \sin^2 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \frac{\pi}{3}}{2 \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{0,3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{0,3}{1} = 0,3.$$

$$\text{б)} \frac{1,5 - \sin^2 \left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos^2 \left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2 \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1,5 - \left(\sin^2 \left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos^2 \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1,5 - 1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\text{5. а)} \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin(15^\circ + \alpha) - 2 \sin \alpha} = \frac{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ}{\sin 45^\circ - 2 \sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} : \frac{\sqrt{2} - 2}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2} - 2}.$$

$$\text{б)} \frac{\sin(30^\circ + 60^\circ)}{\sin(30^\circ - 60^\circ) + \cos(30^\circ + 60^\circ)} = \frac{1}{-0,5} = -2;$$

$$\text{в)} \frac{\sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)}{\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - 0}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1} = 1; \quad \text{г)} \frac{3 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) - \sin \left(3 - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{1 - 0} = 1,5.$$

$$6. \text{ а) } \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} > 1; \quad \text{б) } \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 < 1;$$

$$\text{в) } \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} > 1;$$

г) Для проверки неравенства используем таблицу значений тригонометрических

функций и найдем: $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда:

$$2 \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} < 2. \text{ Поэтому данное неравенство } 2 \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} < 2$$

не верно.

Ответ: а) верно; б) не верно; в) верно; г) не верно.

$$7. \cos \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = 0,5; \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{3} \cdot \left(1 + \cos^2 \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = \\ = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = 0,5, \text{ значит, } \cos \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - 1 = \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{3} \cdot \left(1 + \cos^2 \frac{\pi}{4}\right), \text{ ч.т.д.}$$

С-39. Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла

$$1. \text{ а) } \sin \alpha = 0,6, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \quad \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,6^2} = -0,8;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{0,6}{0,8} = -\frac{3}{4}; \quad \text{б) } \cos \alpha = 0,8, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4};$$

в) Известно, что $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ (т.е. α лежит в третьей четверти).

Для нахождения $\cos \alpha$ используем основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{или} \quad \left(-\frac{7}{25}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{или} \quad \frac{49}{625} + \cos^2 \alpha = 1, \text{ откуда}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}. \text{ Так как угол } \alpha \text{ лежит в третьей четверти, то } \cos \alpha$$

величина отрицательная. Поэтому $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{576}{625}} = -\sqrt{\frac{(24)^2}{(25)^2}} = -\frac{24}{25}$. Теперь

$$\text{найдем } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \left(-\frac{7}{25}\right) : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{24}{7}.$$

$$\text{Ответ: } \cos \alpha = -\frac{24}{25}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24} \text{ и } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{24}{7}.$$

$$\text{г) } \cos \alpha = \frac{7}{25}, \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi, \quad \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{49}{625}} = -\frac{24}{25};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-24 \cdot 25}{25 \cdot 7} = -\frac{24}{7}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{7}{24}; \quad \text{д) } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{7}{24}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{49}{576}}} = -\frac{24}{25}; \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{576}{625}} = \frac{7}{25};$$

$$\text{е) } \operatorname{ctg} \alpha = 3 \frac{3}{7} = \frac{24}{7}, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}; \quad \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{576}{49}}} = -\frac{7}{25},$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{49}{625}} = -\frac{24}{25}.$$

2. а) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (-1)^2 + (-1)^2 = 2 \neq 1$, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

б) Известно, что $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ и $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Проверим, выполняется ли основное

тригонометрическое тождество. Найдем значение $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha =$

$$= \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \neq 1. \text{ Так как основное тригонометрическое}$$

тождество не выполняется, то равенства $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ и $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ не могут выполняться одновременно.

$$\text{3. а) } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \frac{8}{9} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}; \quad \frac{8}{9} = \frac{4}{5} -$$

ложно, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

$$\text{б) } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}; \quad \frac{4}{9} = \frac{1}{1 + 2,5}; \quad \frac{4}{9} = \frac{2}{7} -$$

ложно, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

4. а) $\cos \beta = \frac{40}{41}$, $0 < \beta < \pi$; т.к. $\cos \beta > 0$; то $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{1600}{1681}} = \frac{9}{41}; \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{9 \cdot 41}{41 \cdot 40} = \frac{9}{40}; \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{40}{9};$$

б) $\sin \beta = -\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}$; т.к. $\sin \beta < 0$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$; $\cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$;

$\operatorname{tg} \beta = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg} \beta = \frac{3}{4}$; в) $\operatorname{tg} \beta = 2$, $0 < \beta < \pi$; т.к. $\operatorname{tg} \beta > 0$, то $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{2};$$

г) $\operatorname{ctg} \beta = -1$, $\pi < \beta < 2\pi$; т.к. $\operatorname{ctg} \beta < 0$, то $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$, $\sin \beta = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta}} =$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \operatorname{tg} \beta = -1.$$

5. $\cos \alpha$; $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$; $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$;

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}; \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}; \operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}.$$

6. Известно, что $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, $\sin \alpha = 1 + b$. Т.к. по определению функции $\sin \alpha$ величина $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ и угол α лежит в I^{ой} четверти, то $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ или $0 \leq 1 + b \leq 1$. Вычтем из всех частей этого неравенства число 1 и получим: $-1 \leq b \leq 0$. Теперь найдем из основного тригоном. тождества $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - (1 + b)^2 = 1 - 1 - 2b - b^2 = -2b - b^2 = -b(2 + b)$ и $\cos \alpha = \sqrt{-b(2 + b)}$

Ответ: $\cos \alpha = \sqrt{-b(2 + b)}$, $-1 \leq b \leq 0$.

7. Известно, что $\sin \varphi = \frac{a}{a+2}$ и $\cos \varphi = \frac{2\sqrt{1+a}}{a+2}$ (где $a \neq -2$). Проверим, выполняется ли основное тригонометрическое тождество. Найдем $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi =$

$$= \left(\frac{a}{a+2}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{1+a}}{a+2}\right)^2 = \frac{a^2}{(a+2)^2} + \frac{4(1+a)}{(a+2)^2} = \frac{a^2 + 4 + 4a}{(a+2)^2} = \frac{(a+2)^2}{(a+2)^2} = 1. \quad \text{Так}$$

как тригонометрическое тождество выполняется, то такой угол φ может быть.

С- 40. Преобразование тригонометрических выражений

1. 1) а) Учтем, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, и используем основное тригонометрическое

$$\begin{aligned} \text{тождество. Получаем: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \\ &= 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

б) Учтем, что $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, и основное тригонометрическое тождество:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) &= \cos^2 \alpha \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) = \cos^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \cos^2 \alpha \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{в) } 1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} = -\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = -\operatorname{tg}^2 \alpha; \quad \text{г) } \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha + 1 = 1 + 1 = 2.$$

$$2) \text{ а) } \sin^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \beta = \sin^2 \beta (1 - \cos^2 \beta) = \sin^2 \beta \sin^2 \beta = \sin^4 \beta;$$

$$\text{б) } \cos^4 \beta + \cos^2 \beta \sin^2 \beta = \cos^2 \beta (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = \cos^2 \beta;$$

$$\text{в) } \operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{ctg}^2 \beta - \cos^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = \sin^2 \beta; \quad \text{г) } \frac{1 - \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta - 1} = \frac{\cos^2 \beta}{-\sin^2 \beta} = -\operatorname{ctg}^2 \beta.$$

$$2. 1) \text{ а) } \sin \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \sin \alpha \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cos \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{б) } \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} + 1 = \frac{\sin \alpha \sin \alpha}{\cos \alpha \cos \alpha} + 1 = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ ч.т.д.}$$

$$2) \text{ а) } \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{б) } \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} = \frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

3. 1) а) Учтем, что функция синус нечетная, т.е. $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$. Также используем основное тригонометрическое тождество. Получаем:

$$\begin{aligned} (1 - \sin(-\alpha))(1 - \sin \alpha) &= (1 - (-\sin \alpha))(1 - \sin \alpha) = (1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha) = \\ &= 1^2 - \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$б) \operatorname{tg}(-\alpha) \operatorname{ctg} \alpha + \sin^2(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \sin^2 \alpha = -1 + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha;$$

$$в) \cos(-\alpha) + \cos \alpha \operatorname{tg}^2(-\alpha) = \cos \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha = \\ = \cos \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \cos \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha};$$

$$2) а) \frac{1 + \sin(-\beta)}{\cos(-\beta)} - \operatorname{tg}(-\beta) = \frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta} + \operatorname{tg} \beta = \frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{1}{\cos \beta};$$

$$б) \frac{\cos^2(-\beta) - \cos^4(-\beta)}{\sin^2(-\beta)} = \frac{\cos^2 \beta - \cos^4 \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{\cos^2 \beta (1 - \cos^2 \beta)}{\sin^2 \beta} = \frac{\cos^2 \beta \cdot \sin^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \cos^2 \beta;$$

$$в) \frac{\cos(-\alpha)}{1 + \sin(-\alpha)} + \operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \\ = \frac{\cos^2 \alpha - \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

4. Учтем, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ и $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$. Преобразуем числитель и

$$\text{знаменатель данной дроби. Получаем: } \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg}^2 \varphi} - \operatorname{tg}^2 \varphi =$$

$$= \left(1 + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right) : \left(1 + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) - \operatorname{tg}^2 \varphi =$$

$$= \frac{\cos^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi + \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} : \frac{\sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} - \operatorname{tg}^2 \varphi =$$

$$= \frac{1 + \sin \varphi \cos \varphi}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{1 + \sin \varphi \cos \varphi} - \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} - \operatorname{tg}^2 \varphi = \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi = 0.$$

В результате вычислений получили число 0, которое не зависит от φ .

$$5. а) \frac{1 - \sin^4 \alpha}{3 \sin \alpha + 3 \sin^3 \alpha} = \frac{(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \sin^2 \alpha)}{3 \sin \alpha (1 + \sin^2 \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha}{3 \sin \alpha};$$

б) Учтем, что $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, и преобразуем данное выражение:

$$\sin^3 \alpha \operatorname{ctg}^3 \alpha + 7 \cos^3 \alpha = \sin^3 \alpha \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} + 7 \cos^3 \alpha = \cos^3 \alpha + 7 \cos^3 \alpha = 8 \cos^3 \alpha. \text{ Эта}$$

величина будет наибольшей, если значение $\cos \alpha$ будет наибольшим из

возможных, т.е. при $\cos \alpha = 1$. Тогда получаем: $8 \cos^3 \alpha = 8 \cdot 1^3 = 8$. Следовательно, наибольшее значение данного выражения равно 8.

6. Учтем, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ и $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$ и основное тригонометрическое

тождество. Преобразуем данное выражение: $\frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{ctg} \varphi} =$

$$= \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right) : \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right) = \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\cos \varphi \sin \varphi} : \frac{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}{\cos \varphi \sin \varphi} =$$

$$= \frac{1}{\cos \varphi \sin \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \varphi - (1 - \sin^2 \varphi)} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \varphi - 1 + \sin^2 \varphi} = \frac{1}{2 \sin^2 \varphi - 1}. \text{ Теперь найдем значение этого выражения при}$$

$$\sin \varphi = \frac{2}{3}. \text{ Получаем: } \frac{1}{2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 - 1} = \frac{1}{2 \cdot \frac{4}{9} - 1} = \frac{1}{\frac{8}{9} - 1} = 1 : \left(-\frac{1}{9} \right) = -9.$$

С-41. Преобразование тригонометрических выражений (продолжение)

$$1. 1) \text{ а) } \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{\cos \alpha (1 + \cos \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\text{б) } (1 - \sin^2 \alpha)(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha;$$

в) Приведем дроби к общему знаменателю и используем основное

тригонометрическое тождество. Получаем: $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} =$

$$= \frac{\cos \alpha \cdot \cos \alpha + (1 + \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + (1 + \sin \alpha)^2}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha + 1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = \frac{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + 1 + 2 \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} =$$

$$= \frac{1 + 1 + 2 \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = \frac{2(1 + \sin \alpha)}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}.$$

$$\begin{aligned} \text{г)} \quad \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} &= \frac{\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} = \\ &= -\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = -2 \operatorname{ctg} \alpha; \end{aligned}$$

$$\text{2) а)} \quad \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha;$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \sin^2 \alpha = \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha; \end{aligned}$$

$$\text{в)} \quad \frac{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{(1 + \operatorname{tg}^4 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

г) Учтем, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. Используем основное

$$\begin{aligned} \text{тригонометрическое тождество. Имеем: } \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} &= \\ = \sin^2 \alpha : \left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right) + \cos^2 \alpha : \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right) &= \sin^2 \alpha : \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \\ + \cos^2 \alpha : \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} &= \sin^2 \alpha : \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \cos^2 \alpha : \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \\ = \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha &= 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. а)} \quad \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

б) Преобразуем левую часть равенства. Разложим числитель дроби, используя формулу для суммы кубов чисел. Также используем основное тригонометрическое тождество. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{1 - \sin \alpha \cos \alpha} &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{1 - \sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}{1 - \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha)}{1 - \sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \sin \alpha + \cos \alpha. \text{ Видно, что левая часть равна правой. Следовательно,} \\ &\text{тождество доказано.} \end{aligned}$$

3. Учтем, что $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ и основное тригонометрическое тождество.

Преобразуем данное выражение: $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos^2 \alpha =$

$$\frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{(1 - \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{(1 - \sin^2 \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}$$

Учтем, что $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ и найдем значение этого выражения:

$$\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2\right)^2 : \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(1 - \frac{9}{25}\right)^2 : \frac{9}{25} = \left(\frac{16}{25}\right)^2 : \frac{9}{25} = \frac{256}{625} : \frac{9}{25} = \frac{256}{625} \cdot \frac{25}{9} = \frac{256}{25 \cdot 9} = \frac{256}{225}$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ а) } \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

б) Учтем, что $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, и преобразуем левую часть данного выражения.

$$\begin{aligned} \text{Получаем: } \frac{3 \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha} &= \frac{3 \cos^2 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha)^2}{1 + \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha} = \frac{3 \cos^2 \alpha + 1 - 2 \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha} = \\ &= \frac{1 + \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha}. \end{aligned}$$

Видим, что левая часть равна правой, тождество доказано

5. По условию задачи известно значение $\operatorname{ctg} \alpha = 0,125$. Так как $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, то

разделим числитель и знаменатель данного выражения на $\sin^2 \alpha$. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} &= \frac{\frac{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \\ &= \frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha (\operatorname{ctg} \alpha + 1)} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}. \end{aligned}$$

Теперь найдем значение этого выражения: $\frac{1}{0,125} = 8$.

6. Учтем, что $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$, и преобразуем данное выражение. Получаем:

$$\frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{1 - \sin^6 \varphi - \cos^6 \varphi} = \frac{(1 - \cos^2 \varphi) \cos^2 \varphi}{1 - (1 - \cos^2 \varphi)^3 - \cos^6 \varphi}$$

$$= \frac{(1 - \cos^2 \varphi) \cos^2 \varphi}{1 - (1 - 3 \cos^2 \varphi + 3 \cos^4 \varphi - \cos^6 \varphi) - \cos^6 \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi - \cos^4 \varphi}{3 \cos^2 \varphi - 3 \cos^4 \varphi} =$$

$$\frac{\cos^2 \varphi - \cos^4 \varphi}{3(\cos^2 \varphi - \cos^4 \varphi)} = \frac{1}{3}. \text{ Видим, что полученная величина одинакова при всех}$$

допустимых значениях φ

7. Вновь используем основное тригонометрическое $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Тогда данная функция имеет вид: $y = 3 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = 3(1 - \cos^2 x) - 2 \cos^2 x = 3 - 3 \cos^2 x - 2 \cos^2 x = 3 - 5 \cos^2 x$. Теперь найдем наименьшее и наибольшее значения функции $y = 3 - 5 \cos^2 x$. Напишем очевидное неравенство $0 \leq \cos^2 x \leq 1$. Умножим обе части этого неравенства на отрицательное число (-5) . Знак неравенства меняется на противоположный. Получаем: $0 \cdot (-5) \geq (-5) \cos^2 x \geq 1 \cdot (-5)$ или $0 \geq -5 \cos^2 x \geq -5$ или $-5 \leq -5 \cos^2 x \leq 0$. Ко всем частям этого двойного неравенства прибавим число 3. Имеем: $-5 + 3 \leq -5 \cos^2 x + 3 \leq 0 + 3$ или $-2 \leq 3 - 5 \cos^2 x \leq 3$, т.е. $-2 \leq y \leq 3$. Следовательно, наименьшее значение функции (-2) , наибольшее значение 3.
- Ответ:** наименьшее значение функции (-2) , наибольшее значение 3.

8. $2 \sin x = \sqrt{3}$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$.

С-42. Формулы сложения

1. 1) а) $\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = \cos 180^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 180^\circ \cdot \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos \frac{3}{4}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \pi \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \pi \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) а) Используем формулу для косинуса разности двух углов. Получаем

$$\cos 63^\circ \cos 18^\circ + \sin 63^\circ \sin 18^\circ = \cos(63^\circ - 18^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) $\cos \frac{5\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} \sin \frac{13\pi}{9} = \cos\left(\frac{5\pi}{9} + \frac{13\pi}{9}\right) = \cos 2\pi = 1$;

в) $\cos 32^\circ 30' \cos 27^\circ 30' - \sin 32^\circ 30' \sin 27^\circ 30' =$
 $= \cos(32^\circ 30' + 27^\circ 30') = \cos 60^\circ = 0,5$;

3) а) Так как известно, что $\sin \alpha = -0,8$ и $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ (т.е. α лежит в четвертой

четверти), то найдем $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - (-0,8)^2} =$

$= \sqrt{1-0,64} = \sqrt{0,36} = 0,6$. Используя формулу для косинуса суммы двух углов,

получим:
$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,6 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-0,8) =$$

$$= 1,4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7\sqrt{2}. \text{ Было учтено, } \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0,6^2} = 0,8;$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{6} + \sin\alpha\sin\frac{\pi}{6} = 0,6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,8 \cdot \frac{1}{2} = \frac{6\sqrt{3}+8}{20} = \frac{3\sqrt{3}+4}{10};$$

в) $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -0,96;$ $\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -0,6;$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 0,96 \cdot 0,8 + 0,28 \cdot 0,6 = 0,936;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 0,96 \cdot 0,8 - 0,28 \cdot 0,6 = 0,6.$$

2. а) Учтем, нечетность функции синус, т.е. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ и воспользуемся формулой для косинуса суммы двух углов. Получаем:

$$\cos\alpha\cos 2\alpha + \sin(-\alpha)\sin 2\alpha = \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos 3\alpha.$$

б) $\cos 2\alpha\cos 3\alpha + \sin 2\alpha\sin 3\alpha = \cos(2\alpha - 3\alpha) = \cos\alpha;$

в) $\cos\left(\frac{\pi}{5} + \alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{10} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{5} + \alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5} + \alpha + \frac{3\pi}{10} - \alpha\right) = \cos\frac{5\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{2} = 0;$

г) $\sin\left(\frac{9}{7}\pi + \alpha\right)\sin\left(\frac{2}{7}\pi + \alpha\right) - \cos\left(\frac{9}{7}\pi + \alpha\right)\cos\left(\frac{2}{7}\pi + \alpha\right) = \cos\left(\frac{9}{7}\pi + \alpha - \frac{2}{7}\pi - \alpha\right) = \cos\pi = -1;$

д) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \cos(\alpha - \beta) = \sin\alpha\sin\beta - (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta.$

3. Используем формулу для косинуса суммы двух углов и косинуса разности двух углов. Преобразуем левую часть равенства:

$$\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) =$$

$$= (\cos\alpha\cos\beta)^2 - (\sin\alpha\sin\beta)^2 = \cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta. \text{ Учтем: что}$$

$$\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta \text{ и } \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha. \text{ Получаем: } \cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta =$$

$$= \cos^2\alpha(1 - \sin^2\beta) - (1 - \cos^2\alpha)\sin^2\beta = \cos^2\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta =$$

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\beta. \text{ Левая часть равна правой. Тождество доказано.}$$

4. а) Преобразуем левую часть равенства. Используем формулу для косинуса раз-

ности двух углов и учтем, $\cos\frac{3}{2}\pi = 0$ и $\sin\frac{3}{2}\pi = -1$. Получаем: $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) =$

$= \cos \frac{3}{2} \pi \cos \alpha + \sin \frac{3}{2} \pi \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha + (-1) \sin \alpha = 0 - \sin \alpha = -\sin \alpha$. Видно, что левая часть равна правой. Тождество доказано.

б) $\cos(\pi + \alpha) = \cos \pi \cdot \cos \alpha - \sin \pi \cdot \sin \alpha = -\cos \alpha$, ч.т.д.

5. а) $\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \alpha\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2}{3}\pi \cdot \cos \alpha - \sin \frac{2}{3}\pi \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = 0$;

б) Используем формулы для косинуса разности двух углов и косинуса суммы

двух углов. Имеем: $\frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos \alpha \cos \beta}{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta} =$
 $= \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$.

С-43. Формулы сложения (продолжение)

1. 1) а) Представим угол 75° в виде: $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ и используем формулу для синуса суммы двух углов: $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) =$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4};$$

б) $\sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}$;

2) а) $\sin 80^\circ \cdot \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ = \sin(80^\circ - 20^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) Используем формулу для синуса суммы двух углов:

$$\sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} = \sin\left(\frac{3\pi}{7} + \frac{4\pi}{7}\right) = \sin \pi = 0.$$

в) $\sin 43^\circ 30' \cdot \cos 88^\circ 30' - \cos 43^\circ 30' \sin 88^\circ 30' = \sin(43^\circ 30' - 88^\circ 30') = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) а) $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{25}{269}} = -\frac{12}{13}$;

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{12}{13} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{13} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3} - 12}{26}$$
;

б) $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,6^2} = -0,8$;

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(-0,8 + 0,6) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{10};$$

$$\text{в) } \sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}; \quad \sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5};$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta = -\frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{-4\sqrt{7} - 9}{20};$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta = -\frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{4}{5} - \frac{9}{20} = \frac{9 - 4\sqrt{7}}{20}.$$

$$2. \text{ а) } \sin 2\alpha \cos\alpha - \cos 2\alpha \sin\alpha = \sin(2\alpha - \alpha) = \sin\alpha;$$

$$\text{б) } \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos(-\alpha) \sin(-2\alpha) = \sin\alpha \cos 2\alpha + \cos\alpha \sin 2\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin 3\alpha;$$

в) Воспользуемся формулой для синуса разности двух углов:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left(\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) - \left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\right) = \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha - \frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \sin(\alpha + \beta) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \sin(-\beta) &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\beta = \\ &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta - \cos\alpha \sin\beta = \sin\alpha \cos\beta; \end{aligned}$$

$$3. \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta, \text{ ч.т.д.}$$

4. Преобразуем левую часть равенства:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta}.$$

Разделим числитель и знаменатель этой дроби на $\cos\alpha \cos\beta$. Получаем:

$$\frac{\frac{\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} - \frac{\cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} + \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

$$5. \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1 \cdot 9}{7} = 1 \frac{2}{7}.$$

$$6. \text{ а) } \frac{\operatorname{tg}43^\circ + \operatorname{tg}17^\circ}{1 - \operatorname{tg}43^\circ \operatorname{tg}17^\circ} = \operatorname{tg}(43^\circ + 17^\circ) = \operatorname{tg}60^\circ = \sqrt{3}.$$

б) Используем результаты задачи 4: $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$. Тогда данное

$$\text{выражение имеет вид: } \frac{\operatorname{tg} \frac{9\pi}{16} - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{16}}{1 + \operatorname{tg} \frac{9\pi}{16} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{16}} = \operatorname{tg} \left(\frac{9\pi}{16} - \frac{5\pi}{16} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{4\pi}{16} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

$$7. \text{ а) } \operatorname{tg}135^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg}180^\circ - \operatorname{tg}45^\circ}{1 + \operatorname{tg}180^\circ \operatorname{tg}45^\circ} = \frac{-1}{1} = -1;$$

$$\text{б) } \operatorname{ctg}120^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ + 30^\circ) = \frac{\operatorname{ctg}90^\circ \cdot \operatorname{ctg}30^\circ - 1}{\operatorname{ctg}90^\circ + \operatorname{ctg}30^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{в) } \operatorname{tg}(-240^\circ) = -\operatorname{tg}240^\circ = -\operatorname{tg}(180^\circ + 60^\circ) = -\frac{\operatorname{tg}180^\circ + \operatorname{tg}60^\circ}{1 - \operatorname{tg}180^\circ \operatorname{tg}60^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}.$$

С-44. Синус и косинус двойного угла

$$1. \text{ 1) а) } 2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ = \sin(2 \cdot 75^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = 0,5;$$

$$\text{б) } 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

в) Используем формулу для синуса двойного угла:

$$\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \cdot (2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ) = \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 15^\circ) = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{г) } \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right)^2 = \cos^2 \frac{\pi}{8} + 2 \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 + \sin \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{д) } \left(\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12} \right)^2 = \sin^2 \frac{\pi}{12} - 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \sin \frac{\pi}{6} = 0,5;$$

$$\text{е) } \cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ = \cos(2 \cdot 75^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{ж) } \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{з) } 1 - 2 \cos^2 \frac{\pi}{12} = - \left(2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1 \right) = -\cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{12} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

1. 2) а) Так как $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ и известно значение $\sin \alpha = -0,6$, то найдем $\cos \alpha$. Используем основное тригонометрическое тождество:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ или $(-0,6)^2 + \cos^2 \alpha = 1$ или $0,36 + \cos^2 \alpha = 1$, откуда $\cos^2 \alpha = 1 - 0,36 = 0,64$. Учтем, что $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ (т.е. угол α лежит в третьей четверти) и значение $\cos \alpha$ отрицательно. Тогда $\cos \alpha = -\sqrt{0,64} = -0,8$. Находим $\sin 2\alpha = 2(-0,6) \cdot (-0,8) = 0,96$.

$$\text{б) } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \frac{8}{17}; \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -2 \cdot \frac{8}{17} \cdot \frac{15}{17} = -\frac{240}{289};$$

$$\text{в) } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2,4^2}} = \frac{1}{2,6}; \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{2,6^2}} = \frac{2,4}{2,6};$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \cdot 2,4}{2,6 \cdot 2,6} = \frac{12}{13 \cdot 1,3} = \frac{120}{169}.$$

$$\text{3) а) } \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{25}{169} = \frac{119}{169};$$

б) Используем формулу косинуса двойного угла $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$. Воспользуемся также основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$. Тогда получаем: $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$.

Найдем это значение при $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. $\cos 2\alpha = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$.

$$\text{в) } \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2,25}} = \frac{1}{\sqrt{3,25}}; \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{1}{3,25} - 1 = -\frac{1,25}{3,25} = -\frac{5}{13}$$

$$\text{2. 1) а) } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 1,5}{1 - 2,25} = \frac{3}{-1,25} = -\frac{12}{5}; \quad \text{б) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{3}{\sqrt{2}};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{9}{4}} = -\frac{6 \cdot 4}{\sqrt{2} \cdot 5} = -\frac{24}{5\sqrt{2}} = -\frac{24\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = -\frac{12\sqrt{2}}{5};$$

2) Используя основное тригонометрическое тождество, найдем

$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$. Учтем, что $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (т.е. угол α лежит во второй четверти) и величина $\cos \alpha$ отрицательна. Тогда

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}. \quad \text{Теперь вычислим: } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)$$

$$= -\frac{4\sqrt{21}}{25}, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{21}{25} - \frac{4}{25} = \frac{17}{25} \text{ и}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \left(-\frac{4\sqrt{21}}{25}\right) : \frac{17}{25} = -\frac{4\sqrt{21}}{17}.$$

Ответ: 1) а) $-\frac{12}{5}$; б) $-\frac{12\sqrt{2}}{5}$; 2) $\sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{21}}{25}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{4\sqrt{21}}{17}$.

3. а) $\frac{2\operatorname{tg} 75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ} = \operatorname{tg}(2 \cdot 75^\circ) = \operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

б) Учтем формулы для синуса и косинуса двойного угла. Получаем:

$$\frac{2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}}{\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}} = \frac{\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. а) Возведем обе части равенства $\cos \alpha - \sin \alpha = -\frac{1}{2}$ в квадрат:

$$\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \text{ или } (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{4}$$

или $1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4}$, откуда $\sin 2\alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

б) $\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$; $\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$; $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$;

$$1 + \sin \alpha = \frac{1}{4}, \quad \sin \alpha = -\frac{3}{4}.$$

С-45. Синус и косинус двойного угла (продолжение)

1. а) $1 - \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 2 \sin^2 \alpha$;

б) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos \alpha} - \cos \alpha = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha$;

в) Используем формулу для косинуса двойного угла и основное

тригонометрическое тождество: $1 - 2 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha -$

$$- 2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha = 2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 2 \cos 2\alpha.$$

г) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 2$;

$$д) (1 - \cos 2\alpha) \operatorname{ctg} \alpha = 2 \sin^2 \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha;$$

$$е) (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \sin 2\alpha;$$

$$ж) \cos^2 \alpha - \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha;$$

$$з) \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha;$$

$$и) \operatorname{tg}^2 \alpha (1 + \cos 2\alpha)^2 = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} (2 \cos^2 \alpha)^2 = \frac{4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 = \sin^2 2\alpha;$$

$$к) \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha - \sin 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2} = \frac{1}{\cos \alpha - \sin \alpha}.$$

$$2. а) \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

б) Используем основное тригонометрическое тождество и формулу для косинуса двойного угла. Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha} &= \frac{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha - (\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)}{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} \\ &= \frac{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{2 \cos^2 2\alpha} = \frac{2 \sin^2 2\alpha}{2 \cos^2 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 2\alpha. \end{aligned}$$

Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

Ответ: а) доказано; б) доказано.

3. а) Используем формулу для косинуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$. Получаем:
 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$

$$б) \cos \alpha = \cos \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1.$$

Ответ: а) $2 \cos^2 \alpha - 1$; б) $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$.

$$4. а) \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2 \cos \frac{\alpha}{2};$$

$$\text{б) } \sin 20^\circ \cdot \sin 70^\circ = \sin 20^\circ \cdot \sin(90^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ = \frac{1}{2} \sin 40^\circ;$$

$$\text{в) } \sin \alpha \sin(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha;$$

$$\text{г) } \frac{\sin 160^\circ}{\cos^4 10^\circ - \sin^4 10^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{(\cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ)(\cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ)} = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \operatorname{tg} 20^\circ;$$

д) Учтем, что $\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$. Используем формулы для синуса и косинуса

$$\begin{aligned} \text{двойного угла. Имеем: } \frac{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}{2 \operatorname{tg} 15^\circ} &= \frac{1 - \frac{\sin^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}}{2 \frac{\sin^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}} = \frac{\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}{2 \sin^2 15^\circ} : \frac{2 \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \\ &= \frac{\cos 30^\circ}{\cos^2 15^\circ} \cdot \frac{\cos 15^\circ}{2 \sin 15^\circ} = \frac{\cos 30^\circ}{2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ответ: а) $2 \cos \frac{\alpha}{2}$; б) $\frac{1}{2} \sin 40^\circ$; в) $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$; г) $\operatorname{tg} 20^\circ$; д) $\sqrt{3}$.

5. а) Используем основное тригонометрическое тождество и формулы для косинуса и синуса двойного угла. Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{2 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{\operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha) - 1}{\operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha) + 1} &= \cos^2(45^\circ + \alpha) \left(\frac{\sin^2(45^\circ + \alpha)}{\cos^2(45^\circ + \alpha)} \right) = \sin^2(45^\circ + \alpha) - \cos^2(45^\circ + \alpha) = \\ &= -\cos(2(45^\circ + \alpha)) = -\cos(90^\circ + 2\alpha) = \sin 2\alpha, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

Ответ: а) доказано; б) доказано.

$$\begin{aligned} \text{6. а) } \sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ &= \frac{2 \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ \cdot \cos 36^\circ}{2 \cos 18^\circ} = \frac{2 \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ}{4 \cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{4 \cos 18^\circ} = \\ &= \frac{\sin(90^\circ - 18^\circ)}{4 \cos 18^\circ} = \frac{\cos 18^\circ}{4 \cos 18^\circ} = \frac{1}{4}, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

б) Используем формулу для синуса двойного угла. Левую часть выражения умножим и разделим на $\sin \frac{\pi}{7}$. Тогда получим: $8 \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} =$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} \left(\sin \frac{\pi}{7} \cdot 8 \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \right) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} \cdot \left(2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} \right) \cdot \left(4 \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \right) = \\
 &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot 4 \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} \cdot \left(2 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \right) \cdot 2 \cos \frac{4\pi}{7} = \\
 &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} \cdot \sin \frac{4\pi}{7} \cdot 2 \cos \frac{4\pi}{7} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} \cdot 2 \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = \frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}}. \text{ Упростим величину}
 \end{aligned}$$

$$\sin \frac{8\pi}{7} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{7} \right) = \sin \pi \cos \frac{\pi}{7} + \cos \pi \sin \frac{\pi}{7} = 0 \cdot \cos \frac{\pi}{7} + (-1) \cdot \sin \frac{\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7}.$$

Поэтому имеем: $\frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{-\sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = -1$. Видно, что левая часть равна правой.

Следовательно тождество доказано.

Ответ: а) доказано; б) доказано.

С-46. Формулы приведения

1. Используем периодичность тригонометрических функций и их четность, а также формулы приведения.

$$\text{а) } \sin 945^\circ = \sin(3 \cdot 360^\circ - 135^\circ) = \sin(135^\circ) = -\sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{б) } \cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{в) } \operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1; \quad \text{г) } \operatorname{ctg} 210^\circ = \operatorname{ctg}(270^\circ - 60^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3};$$

$$\text{д) } \sin \frac{15\pi}{4} = \sin \left(4\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{е) } \cos \frac{7\pi}{6} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{ж) } \operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} = \operatorname{tg} \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}; \quad \text{з) } \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{и) } \sin(-960^\circ) = -\sin 960^\circ = -\sin(720^\circ + 240^\circ) = -\sin 240^\circ = -\sin(180^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{к) } \cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) = \cos \frac{2\pi}{3} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -0,5;$$

$$\text{л) } \operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3} = -\operatorname{tg}\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3};$$

$$\text{м) } \operatorname{ctg}(-420^\circ) = \operatorname{ctg}(-2 \cdot 180^\circ - 60^\circ) = \operatorname{ctg}(-60^\circ) = -\operatorname{ctg}60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ а) } \sin(-570^\circ) + \sqrt{3} \cos 150^\circ + \operatorname{tg} 315^\circ &= -\sin(360^\circ + 210^\circ) + \sqrt{3} \cos(180^\circ - 30^\circ) + \operatorname{tg}(360^\circ - 45^\circ) = \\ &= -\sin(180^\circ + 30^\circ) - \sqrt{3} \cos 30^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ = \sin 30^\circ - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 1 = -2; \end{aligned}$$

б) Сначала упростим слагаемые данной суммы, учитывая их периодичность, четность, используя формулы приведения:

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\cos(-480^\circ) = \cos(360^\circ - 120^\circ) = \cos(-120^\circ) = \cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{ctg} 480^\circ = \operatorname{ctg}(2 \cdot 180^\circ + 120^\circ) = \operatorname{ctg} 120^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ + 60^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Теперь найдем числовое значение данного выражения:

$$\sin 210^\circ + \cos(-480^\circ) - \sqrt{3} \operatorname{ctg} 480^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \sqrt{3} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -1 + 1 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} + \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) - 2\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right) &= \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{6} = -1 + 0,5 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ответ: а) -2; б) 0; в) $-0,5 - \sqrt{3}$.

3. а) Используем формулы приведения: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$, $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

$$\text{Тогда: } 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(\pi - \alpha) = 1 - \sin \alpha \cdot \sin \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha.$$

$$\text{б) } \cos(\pi - \alpha) \cos(2\pi - \alpha) + \cos^2 \alpha = -\cos \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 0;$$

$$\text{в) } \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha; \quad \text{г) } \sin(\alpha - \pi) = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\text{д) } \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

$$е) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(-2\alpha)}{2\operatorname{tg}(\pi + \alpha)} = \frac{-\cos \alpha \sin 2\alpha}{2\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = -\cos^3 \alpha;$$

ж) Учтем периодичность и четность функции косинус:

$\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$ и $\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$. Получаем:

$$\cos(2\pi - \alpha) \cos(2\pi + \alpha) - \sin^2 \alpha = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha.$$

$$з) \cos^2(\pi - \alpha) + \sin(2\pi - \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos^2 \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos 2\alpha.$$

4. а) Используем нечетность функции синус и формулы приведения.

Преобразуем левую часть равенства. Сначала упростим отдельные составляющие этого выражения:

$$\sin(x - \pi) = \sin(-(\pi - x)) = -\sin(\pi - x) = -\sin x;$$

$$\sin(0,5\pi + x) = -\cos x; \operatorname{ctg}(0,5\pi - x) = \operatorname{tg} x; \cos(1,5\pi - x) = -\sin x;$$

$\cos(0,5\pi + x) = -\sin x$. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x - \pi) \sin(0,5\pi + x)}{\operatorname{ctg}(0,5\pi - x) \cos(1,5\pi - x) \cos(0,5\pi + x)} &= \frac{-\sin x \cdot \cos x}{\operatorname{tg} x (-\sin x) (-\sin x)} = \frac{-\sin x \cdot \cos x}{\operatorname{tg} x \cdot \sin^2 x} = \\ &= -\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x} = -\frac{\cos x \cdot \cos x}{\sin x \cdot \sin x} = -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}^2 x. \end{aligned}$$

Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

$$\begin{aligned} б) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha - \cos \alpha + \sin \alpha) = 0, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

Ответ: а) доказано; б) доказано.

5. б) Используем формулы приведения и упростим составляющие данного

$$\text{выражения: } \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{ctg}\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) = -\operatorname{tg} \alpha;$$

$$\cos(\alpha - \pi) = \cos(-(\pi - \alpha)) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\sin(\alpha - 3\pi) = \sin(-(\pi - \alpha)) = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha;$$

Тогда данное выражение имеет вид:

$$\frac{\operatorname{tg}^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{ctg}^2\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}{\cos^2(\alpha - \pi) + \sin^2(\alpha - 3\pi)} =$$

$$= \frac{(-\operatorname{ctg}\alpha)^2 (-\operatorname{tg}\alpha)^2}{(-\cos\alpha)^2 + (-\sin\alpha)^2} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{(\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha)^2}{1} = \frac{1^2}{1} = 1.$$

Ответ: 1.

6. $\cos\alpha = -0,6$; $\cos\beta = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha = 0,6$.

Ответ: 0,6.

7. Пусть один из острых углов прямоугольного треугольника равен α , тогда другой угол $(90^\circ - \alpha)$. Найдем: $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

Ответ: 1.

С-47. Формулы суммы и разности тригонометрических функций

1. 1) а) $\sin 36^\circ + \sin 24^\circ = 2 \sin \frac{36^\circ + 24^\circ}{2} \cos \frac{36^\circ - 24^\circ}{2} = 2 \sin 30^\circ \cos 6^\circ = \cos 6^\circ$;

б) $\sin 18^\circ + \sin 11^\circ = 2 \sin \frac{18^\circ + 11^\circ}{2} \cos \frac{18^\circ - 11^\circ}{2} = 2 \sin 14,5^\circ \cos 3,5^\circ$;

в) $\sin 6^\circ + \sin 14^\circ = 2 \sin \frac{6^\circ + 14^\circ}{2} \cos \frac{14^\circ - 6^\circ}{2} = 2 \sin 10^\circ \cos 4^\circ$;

г) $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} = 2 \sin \frac{\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6}}{2} \cos \frac{\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$;

2) а) Используем формулу для суммы синусов двух углов:

$$\sin 72^\circ - \sin 52^\circ = 2 \sin \frac{72^\circ - 52^\circ}{2} \cos \frac{72^\circ + 52^\circ}{2} = 2 \sin 10^\circ \cos 62^\circ.$$

б) $\sin 16^\circ - \sin 7^\circ = 2 \sin \frac{16^\circ - 7^\circ}{2} \cos \frac{16^\circ + 7^\circ}{2} = 2 \sin 4,5^\circ \cos 11,5^\circ$;

в) $\sin 13^\circ - \sin 23^\circ = 2 \sin \frac{13^\circ - 23^\circ}{2} \cos \frac{13^\circ + 23^\circ}{2} = -2 \sin 5^\circ \cos 18^\circ$;

г) Используем формулу для разности косинусов двух углов:

$$\sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{12} = 2 \sin \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{8}.$$

$$3) \text{ а) } \cos 18^\circ + \cos 8^\circ = 2 \cos \frac{18^\circ + 8^\circ}{2} \cos \frac{18^\circ - 8^\circ}{2} = 2 \cos 13^\circ \cos 5^\circ;$$

$$\text{б) } \cos 7^\circ + \cos 4^\circ = 2 \cos \frac{7^\circ + 4^\circ}{2} \cos \frac{7^\circ - 4^\circ}{2} = 2 \cos 5,5^\circ \cos 1,5^\circ;$$

$$\text{в) } \cos 16^\circ + \cos 66^\circ = 2 \cos \frac{16^\circ + 66^\circ}{2} \cos \frac{16^\circ - 66^\circ}{2} = 2 \cos 41^\circ \cos 25^\circ;$$

$$\text{г) } \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8} = 2 \cos \frac{\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8}}{2} \cos \frac{\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8}}{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8};$$

$$4) \text{ а) } \cos 36^\circ - \cos 26^\circ = -2 \sin \frac{36^\circ + 26^\circ}{2} \sin \frac{36^\circ - 26^\circ}{2} = -2 \sin 31^\circ \sin 5^\circ;$$

$$\text{б) } \cos 17^\circ - \cos 10^\circ = -2 \sin \frac{17^\circ + 10^\circ}{2} \sin \frac{17^\circ - 10^\circ}{2} = -2 \sin 13,5^\circ \sin 3,5^\circ;$$

$$\text{в) } \cos 5^\circ - \cos 15^\circ = -2 \sin \frac{5^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{5^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \sin 10^\circ \sin 5^\circ;$$

$$\text{г) } \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5} = -2 \sin \frac{\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{5}}{2} \sin \frac{\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{5}}{2} = -2 \sin \frac{3\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10}$$

$$2. 1) \text{ а) } \sin 5\alpha + \sin 3\alpha = 2 \sin 4\alpha \cos \alpha; \quad \text{б) } \sin 8\alpha - \sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 6\alpha;$$

$$\text{в) } \cos 27\alpha + \cos 17\alpha = 2 \cos 22\alpha \cos 5\alpha; \quad \text{г) } \cos 4\alpha - \cos \alpha = -\sin \frac{5\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2};$$

$$2) \text{ а) } \sin(15^\circ + \alpha) + \sin(15^\circ - \alpha) = 2 \sin \frac{15^\circ + \alpha + 15^\circ - \alpha}{2} \cos \frac{15^\circ + \alpha - 15^\circ + \alpha}{2} = 2 \sin 15^\circ \cos \alpha;$$

б) Используем формулу для разности синусов двух углов:

$$\begin{aligned} \sin(60^\circ - \beta) - \sin(60^\circ + \beta) &= 2 \sin \frac{(60^\circ - \beta) - (60^\circ + \beta)}{2} \cos \frac{(60^\circ - \beta) + (60^\circ + \beta)}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{60^\circ - \beta - 60^\circ - \beta}{2} \cos \frac{60^\circ - \beta + 60^\circ + \beta}{2} = 2 \sin \frac{-2\beta}{2} \cos \frac{120^\circ}{2} = \\ &= 2 \sin(-\beta) \cos 60^\circ = 2(-\sin \beta) \cdot \frac{1}{2} = -\sin \beta. \end{aligned}$$

в) Используем формулу для суммы косинусов двух углов:

$$\begin{aligned} \cos(17^\circ + x) + \cos(17^\circ - x) &= 2 \cos \frac{(17^\circ + x) + (17^\circ - x)}{2} \cos \frac{(17^\circ + x) - (17^\circ - x)}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{17^\circ + x + 17^\circ - x}{2} \cos \frac{17^\circ + x - 17^\circ - x}{2} = 2 \cos \frac{2 \cdot 17^\circ}{2} \cos \frac{2x}{2} = 2 \cos 17^\circ \cos x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г)} \quad & \cos(40^\circ - \alpha) - \cos(40^\circ + \alpha) = \\ & = -2 \sin \frac{40^\circ - \alpha + 40^\circ + \alpha}{2} \sin \frac{40^\circ - \alpha - 40^\circ - \alpha}{2} = 2 \sin 40^\circ \sin \alpha; \end{aligned}$$

$$\text{д)} \quad \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta - \alpha + \beta}{2} = 2 \sin \alpha \cos \beta;$$

$$\text{е)} \quad \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \frac{\alpha + \beta - \alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2} = -2 \sin \beta \cdot \sin \alpha.$$

$$3. \text{ а)} \quad \frac{\sin 7\alpha + \sin \alpha}{\cos 7\alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \sin 4\alpha \cos 3\alpha}{2 \cos 4\alpha \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha;$$

б) В числителе и знаменателе дроби используем формулу для суммы косинусов

$$\begin{aligned} & \text{двух углов. После этого сократим дробь. Имеем: } \frac{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha}{\cos \alpha + \cos 9\alpha} = \\ & = \frac{2 \cos \frac{4\alpha + 6\alpha}{2} \cos \frac{4\alpha - 6\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + 9\alpha}{2} \cos \frac{\alpha - 9\alpha}{2}} = \frac{2 \cos 5\alpha \cos(-\alpha)}{2 \cos 5\alpha \cos(-4\alpha)} = \frac{\cos(-\alpha)}{\cos(-4\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\cos 4\alpha}. \end{aligned}$$

Была

учтена четность функции косинус.

$$\text{в)} \quad \frac{\sin 11\alpha - \sin \alpha}{\cos 11\alpha - \cos \alpha} = \frac{2 \sin 5\alpha \cos 6\alpha}{-2 \sin 5\alpha \sin 6\alpha} = -\operatorname{ctg} 6\alpha;$$

$$\text{г)} \quad \frac{\cos 7\alpha - \cos 3\alpha}{\sin 7\alpha + \sin 3\alpha} = \frac{-2 \sin 2\alpha \sin 5\alpha}{2 \sin 5\alpha \cos 2\alpha} = -\operatorname{tg} 2\alpha.$$

$$4. \text{ а)} \quad \sin^2 43^\circ - \sin^2 13^\circ = (\sin 43^\circ - \sin 13^\circ)(\sin 43^\circ + \sin 13^\circ) = \\ = 2 \sin 15^\circ \cos 28^\circ \cdot 2 \sin 28^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ \cdot \sin 56^\circ = 0,5 \sin 56^\circ;$$

б) Используем формулу для разности квадратов чисел: $\cos^2 37^\circ - \cos^2 17^\circ =$
 $= (\cos^2 37^\circ + \cos^2 17^\circ)(\cos^2 37^\circ - \cos^2 17^\circ)$. Теперь применим формулы для суммы косинусов и разности косинусов двух углов. Получаем:

$$\begin{aligned} & 2 \cos \frac{37^\circ + 17^\circ}{2} \cos \frac{37^\circ - 17^\circ}{2} \cdot 2 \sin \frac{37^\circ + 17^\circ}{2} \sin \frac{17^\circ - 37^\circ}{2} = \\ & = 2 \cos \frac{54^\circ}{2} \cos \frac{20^\circ}{2} \cdot 2 \sin \frac{54^\circ}{2} \sin \left(-\frac{20^\circ}{2} \right) = 2 \cos 27^\circ \cos 10^\circ \cdot 2 \sin 27^\circ \sin(-10^\circ) = \\ & = (2 \sin 27^\circ \cos 27^\circ)(2 \sin(-10^\circ) \cos 10^\circ) = \sin 54^\circ \cdot (-2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ) = \\ & = \sin 54^\circ \cdot (-\sin 20^\circ) = -\sin 20^\circ \sin 54^\circ. \end{aligned}$$

Ответ: а) $0,5 \sin 56^\circ$; б) $-\sin 20^\circ \sin 54^\circ$.

$$5. \text{ а)} \quad \frac{\sin 56^\circ + \sin 14^\circ}{\cos 56^\circ + \cos 14^\circ} = \frac{2 \sin 35^\circ \cos 21^\circ}{2 \cos 35^\circ \cos 21^\circ} = \operatorname{tg} 35^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 55^\circ) = \operatorname{ctg} 55^\circ, \text{ т.е.}$$

равенство верно.

$$б) \frac{\sin 72^\circ - \sin 62^\circ}{\cos 72^\circ + \cos 62^\circ} = \frac{2 \sin 5^\circ \cos 67^\circ}{2 \cos 67^\circ \cos 5^\circ} = \operatorname{tg} 5^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 85^\circ) = \operatorname{ctg} 85^\circ, \text{ т.е. равенство верно.}$$

б. а) Преобразуем обе части данного равенства. В левой части используем формулы для суммы синусов и суммы косинусов двух углов. Получаем:

$$\frac{\sin 3\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 7\alpha} = \frac{2 \sin \frac{3\alpha + 7\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha - 7\alpha}{2}}{2 \cos \frac{3\alpha + 7\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha - 7\alpha}{2}} = \frac{2 \sin 5\alpha \cos(-2\alpha)}{2 \cos 5\alpha \cos(-2\alpha)} = \frac{\sin 5\alpha}{\cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 5\alpha.$$

В правой части используем формулу приведения: $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 5\alpha\right) = \operatorname{tg} 5\alpha$. Видно,

что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

б) Преобразуем левую часть равенства. В числителе и знаменателе дроби сгруппируем крайние и средние слагаемые. Используем формулы для суммы синусов и суммы косинусов двух углов. После этого сократим дробь. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \beta + \sin 3\beta + \sin 5\beta + \sin 7\beta}{\cos \beta + \cos 3\beta + \cos 5\beta + \cos 7\beta} &= \frac{(\sin \beta + \sin 7\beta) + (\sin 3\beta + \sin 5\beta)}{(\cos \beta + \cos 7\beta) + (\cos 3\beta + \cos 5\beta)} = \\ &= \frac{2 \sin 4\beta \cos(-3\beta) + 2 \sin 4\beta \cos(-\beta)}{2 \cos 4\beta \cos(-3\beta) + 2 \cos 4\beta \cos(-\beta)} = \frac{2 \sin 4\beta (\cos 3\beta + \cos \beta)}{2 \cos 4\beta (\cos 3\beta + \cos \beta)} = \frac{\sin 4\beta}{\cos 4\beta} = \operatorname{tg} 4\beta. \end{aligned}$$

Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

$$\begin{aligned} в) \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} &= \frac{\cos \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin \alpha} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot \cos \frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right), \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

$$г) \frac{\operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - 1} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin \alpha} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right), \text{ ч.т.д.}$$

$$\begin{aligned} д) \cos^2(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta) &= (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) = \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

С-48. Решение тригонометрических уравнений

1. а) $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$; б) $\alpha = 60^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$.

2. Известно, что один из корней уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ равен $\frac{\pi}{12}$.

Следовательно, при подстановке этого числа получаем верное равенство:

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \text{ Найдем второй положительный корень этого уравнения, не}$$

превосходящий 2π . Для этого используем формулу приведения:

$$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12} \text{ или } \sin \frac{11\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12}. \text{ Число } \frac{11\pi}{12} \text{ удовлетворяет данному}$$

уравнению, является положительным и не превосходит 2π . Поэтому $x = \frac{11\pi}{12}$ — требуемый корень.

3. Решим уравнение $\cos x = 0$. Очевидно, что один из корней этого уравнения $x = \frac{\pi}{2}$, т.к. $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Все остальные корни отличаются от этого числа на целое число

величины π , т.е. могут быть записаны в виде $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$

При $n = 0; 1; 2; \dots$ получаем арифметическую прогрессию: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$. При

$n = -1; -2; -3; \dots$ имеем арифметическую прогрессию: $-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \dots$.

Таким образом, каждый член этих прогрессий является корнем уравнения $\cos x = 0$.

Ответ: доказано.

4. 1) а) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

в) $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

2) а) $\sin x - 1 = 0$, $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

в) $2\operatorname{tg} x = 0$, $\operatorname{tg} x = 0$, $\frac{\sin x}{\cos x} = 0$, $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. а) $\sin \beta = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5\pi}{6}$; б) $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta = \frac{3\pi}{4}$.

6. 1) а) Решим уравнение $\sin 2x = 1$. Одно его решение $2x = \frac{\pi}{2}$ (т.к. $\sin \frac{\pi}{2} = 1$),

остальные отличаются на $2\pi n$ (где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$). Получаем $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$,

откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

б) $\cos 3x = 0$, $3x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ б) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) а) Разложим левую часть уравнения $\sin^2 x - \sin x = 0$ на множители: $\sin x (\sin x - 1) = 0$. Получаем два простейших уравнения: $\sin x = 0$ (его решения

$x = \pi n$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$) и $\sin x = 1$ (корни $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$).

б) $\cos^2 x + \cos x = 0$, $\cos x (\cos x + 1) = 0$; $\cos x = 0$, $\cos x = -1$,

$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x_2 = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) а) Используем формулу для синуса разности двух углов и упростим левую часть уравнения: $\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x = 0$. Получаем: $\sin(2x - x) = 0$ или $\sin x = 0$. Корни этого уравнения $x = \pi n$ где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$

б) $\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x = 0$; $\cos(x - 2x) = 0$, $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4) а) Используем формулу для косинуса двойного угла. Получаем: $\cos^2 x = \cos 2x$ или $\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$ или $\sin^2 x = 0$, откуда $\sin x = 0$. Корни такого уравнения $x = \pi n$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$

б) $2 \sin x = \sin 2x$; $2 \sin x = 2 \sin x \cdot \cos x$;

$\sin x = 0$, $\cos x = 1$. $x_1 = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x_2 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: а) $x = \pi n$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$; б) $x_1 = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x_2 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. а) В левой части уравнения $\cos x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$ применим формулу

приведения и формулу для синуса двойного угла. Получаем: $\cos x \cdot \sin x = 1$ или $2 \cos x \cdot \sin x = 2$ или $\sin 2x = 2$. Учтем ограниченность функции $\sin 2x$, т.е.

$-1 \leq \sin 2x \leq 1$. Следовательно, данное уравнение решений не имеет.

б) $\frac{\cos 2x}{2 \cos^2 x - 1} = 0$; $\frac{2 \cos^2 x - 1}{2 \cos^2 x} = 0$; $1 = 0$ — нет корней.

Ответ: а) доказано; б) доказано.

Вариант 2

С-1. Функция.

Область определения и область значений функции

1. 1) $f(x)=21x-7$; $f(3)=21 \cdot 3-7=56$; $f(0)=21 \cdot 0-7=-7$; $f(-2)=21 \cdot (-2)-7=-49$;

2) $g(x)=x^2-10x$; $g(8)=8^2-10 \cdot 8=-16$; $g(-3)=(-3)^2-10 \cdot (-3)=39$; $g(0)=0^2-10 \cdot 0=0$;

3) $\varphi(x)=\frac{x-6}{x+4}$; $\varphi(-3)=\frac{-3-6}{-3+4}=-9$; $\varphi(6)=\frac{6-6}{6+4}=0$; $\varphi(0)=\frac{0-6}{0+4}=-1,5$.

2. 1) $f(x)=12-5x$; а) $12-5x=2$, $5x=10$, $x=2$; б) $12-5x=24$, $5x=-12$, $x=-\frac{12}{5}$;

в) $12-5x=0$, $5x=12$, $x=\frac{12}{5}$;

2) $g(x)=\frac{1}{4}x+9$; а) $\frac{1}{4}x+9=10$, $\frac{1}{4}x=1$, $x=4$; б) $\frac{1}{4}x+9=1$, $\frac{1}{4}x=-8$, $x=-32$;

в) $\frac{1}{4}x+9=0$, $\frac{1}{4}x=-9$, $x=36$.

Ответ: 1) а) $x=2$; б) $x=-\frac{12}{5}$; в) $x=\frac{12}{5}$; 2) а) $x=4$; б) $x=-32$; в) $x=36$.

3. 1) а) $f(x)=37-3x$, $D(f)=R$; б) $g(x)=\frac{53}{x}$, $D(g)=(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

в) $\varphi(x)=x^2-7$, $D(\varphi)=R$; г) $y=\sqrt{x}$, $D(y)=[0; +\infty)$;

Ответ: а) любое x ; б) $x \neq 0$; в) любое x ; г) $x \geq 0$.

2) а) $g(x)=10-x^2$, $D(g)=R$; б) $f(x)=-\frac{42}{x}$, $D(f)=(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

в) $\varphi(x)=\sqrt{x-3}$, $x-3 \geq 0$, $x \geq 3$, $D(\varphi)=[3; +\infty)$;

г) $y=\frac{12}{x+4}$, $x+4 \neq 0$, $x \neq -4$, $D(y)=(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$.

Ответ: а) любое x ; б) $x \neq 0$; в) $x \geq 3$; г) $x \neq -4$.

4. а) $y=-24x+5$, $E(y)=R$; б) $y=41$, $E(y)=41$;

в) $y=-\frac{22}{x}$, $E(y)=(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $y=\sqrt{x}$, $E(y)=[0; +\infty)$;

д) $y=|x|$, $E(y)=[0; +\infty)$.

Ответ: а) любое y , б) $y=41$, в) $y \neq 0$, г) $y \geq 0$, д) $y \geq 0$.

5. а) $f(x)=\frac{x^2+5}{6x^2}$, $f(5)+f(-5)=2f(5)=2 \cdot \frac{5^2+5}{6 \cdot 5^2}=0,4$;

б) $g(x) = \frac{4x^3 - x}{9}$, $g(-2) + g(2) = -g(2) + g(2) = 0$.

Ответ: а) 0,4; б) 0.

6. $g(x) = kx + b$, $\begin{cases} 5 = k + b \\ -1 = 3k + b \end{cases}$, $\begin{cases} k = 5 - b \\ -1 = 3(5 - b) + b \end{cases}$; $-1 = 15 - 3b + b$;

$2b = 16$; $b = 8$; $k = 5 - 8 = -3$.

Ответ: $k = -3$, $b = 8$.

7. а) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-4}$; б) $g(x) = \sqrt{x-6}$.

С-2. График функции

1. 1) а) $g(-1) = -3$; б) $g(0) = -1$; в) $g(1) = 0$; г) $g(3) = 1,5$;

2) а) $g(x) = 3$; $x = -3$; б) $g(x) = 0$; $x_1 = -2,5$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3,5$;

в) $g(x) = -2$; $x_1 = -2$; $x_2 = -0,5$; 3) $g_{\max} = 3$, $g_{\min} = -3$;

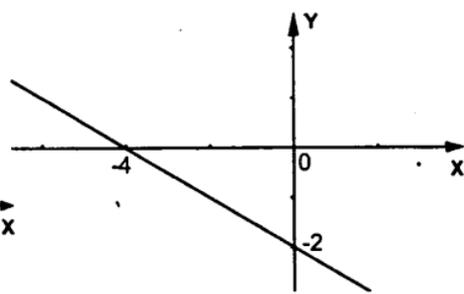
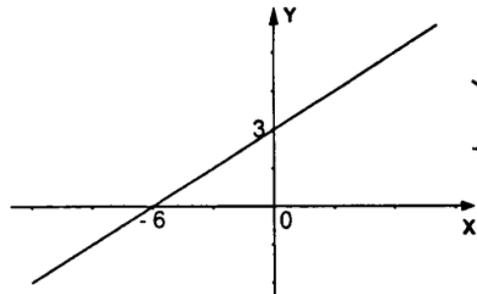
4) $E(g) = [-3; 3]$.

2. 1) а) $y = 0,5x + 3$;

x	0	-6
y	3	0

б) $y = -0,5x - 2$;

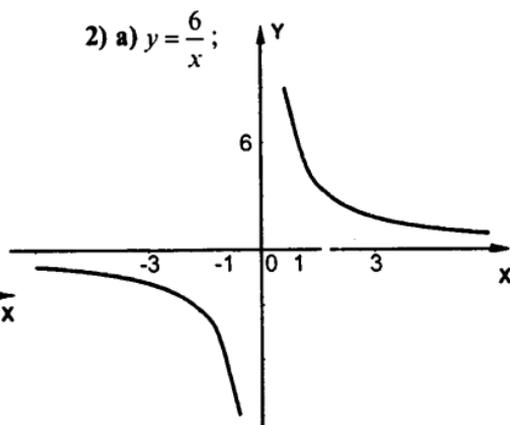
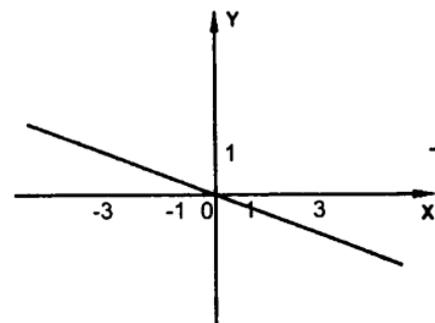
x	0	-4
y	-2	0



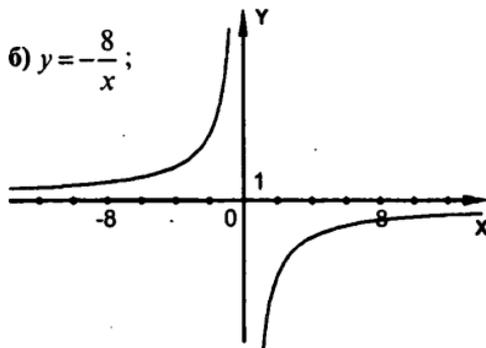
в) $y = -\frac{1}{3}x$;

x	0	-3
y	0	1

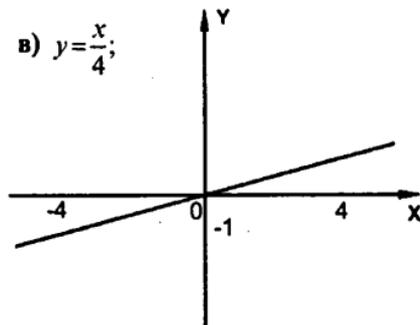
2) а) $y = \frac{6}{x}$;



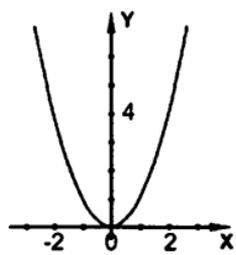
б) $y = -\frac{8}{x}$;



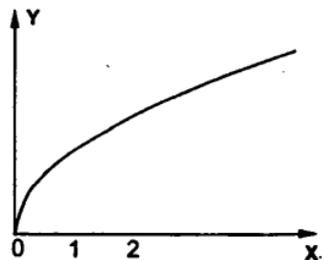
в) $y = \frac{x}{4}$;



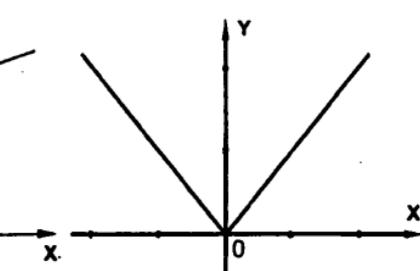
3) а) $y = x^2$;



б) $y = \sqrt{x}; x \geq 0$;

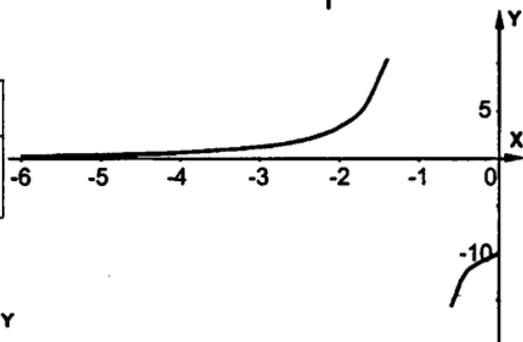


в) $y = |x|$.



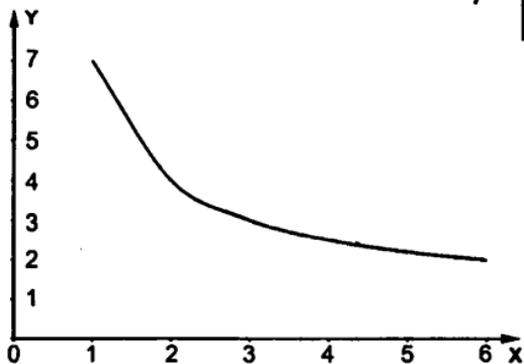
3. а) $y = \frac{10}{x^2 - 1}; -6 \leq x \leq 0$;

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{3}$	-	-10

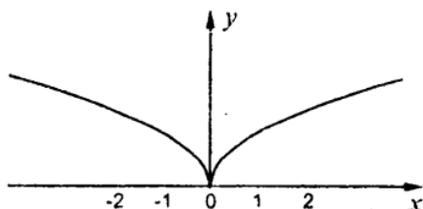
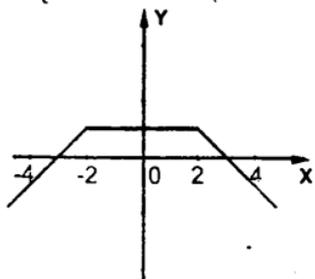


б) $y = \frac{x+6}{x}$; где $1 \leq x \leq 6$.

x	1	2	3	4	5	6
y	7	4	3	2,5	$\frac{11}{5}$	2



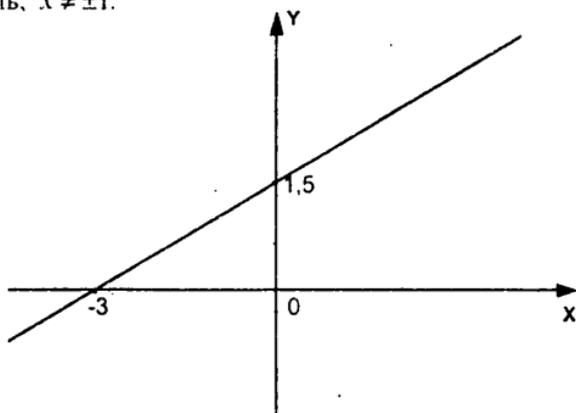
$$4. a) y = \begin{cases} x+3, & \text{если } x < -2; \\ 1, & \text{если } -2 \leq x \leq 2; \\ -x+3, & \text{если } x > 2; \end{cases} \quad б) y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$



$$5. f(x) = \begin{cases} 2x+4, & -2 \leq x \leq -1 \\ 2, & -1 < x \leq 2 \\ 2x-2, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$6. g(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{2(x^2 - 1)} = \frac{x^2(x+3) - (x+3)}{2(x^2 - 1)} = \frac{(x+3)(x^2 - 1)}{2(x^2 - 1)} = \frac{x}{2} + 1,5;$$

$x^2 - 1 \neq 0$, т.к. знаменатель, $x \neq \pm 1$.



7. 1) два привала – 30 мин и 1 ч; 2) 6 км; 6 км; 6 км;

3) 6 км/ч; $\frac{6}{2} = 3$ (км/ч); $\frac{6}{1,5} = 4$ (км/ч); 4) 6 ч; 5) 7,5 км; 10,5 км; 12 км.

8. 1) велосипедист на 3 ч; 2) 6,5 ч; 2,5 ч; 3) $\frac{35}{6,5} = \frac{70}{13}$ (км/ч); $\frac{35}{2,5} = 14$ (км/ч);

4) велосипедист на 1 ч; 5) через 2 ч; 6) 10 (км).

С-3. Свойства функции

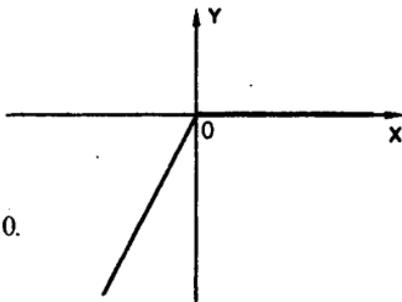
1. 1) а) $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 3$; б) $f(x) > 0$ при $x \in (-2; 1) \cup (3; 4]$; $f(x) < 0$ при $x \in [-3; -2] \cup (1; 3)$; 2) $f(x)$ возрастает при $x \in [-3; -1] \cup [2; 4]$; $f(x)$ убывает при $x \in [-1; 2]$; 3) $x_{\max} = -1, x_{\min} = -3$; 4) $E(f) = [-2; 3]$.
2. 1) а) $y = 25x - 18$; $D(y) = E(y) = R, y > 0$ при $x > \frac{18}{25}, y < 0$ при $x < \frac{18}{25}, y = 0$ при $x = \frac{18}{25}$, $y(x)$ возрастает на R ; б) $y = -0,83x + 16,2$; $D(y) = R, E(y) = R, y > 0$ при $x < \frac{16,2}{0,83} = \frac{1620}{83}, y < 0$ при $x > \frac{1620}{83}, y = 0$ при $x = \frac{1620}{83}$, $y(x)$ убывает на R ; в) $y = -27$; $D(y) = R, E(y) = -27, y < 0$ на R .
- 2) а) $y = \frac{36}{x}$; $D(y) = E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $y > 0$ при $x > 0, y < 0$ при $x < 0, y(x)$ убывает на $D(y)$; б) $y = -\frac{63}{x}$; $D(y) = E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $y > 0$ при $x < 0, y < 0$ при $x > 0, y(x)$ возрастает на R .
3. 1) а) $y = \frac{1}{5}x - 8, \frac{1}{5}x = 8, x = 40$; б) $y = -0,4x + 32, 0,4x = 32, x = 80$;
в) $y = 47$ нет нулей функции.
2) а) $y = 9x(x-5), x_1 = 0, x_2 = 5$;
б) $y = 16(x^2 + 2)$ - нет нулей функции;
в) $y = x(x-1)(x+2), x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -2$;
- 3) а) $y = \sqrt{x-3}; x = 3$; б) $y = \sqrt{x^2-4}; x_1 = 2; x_2 = -2$; в) $y = \sqrt{x^2+4}$, нет нулей функции.
- Ответ: а) 3; б) $x = 2, x = -2$; в) нет.

$$4. g(x) = x - |x|; g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \leq 0 \\ 0, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

Свойства: $D(g) = R, E(g) = (-\infty; 0]$.

Нули функции: $x \geq 0, g(x) < 0$ при $x < 0$.

$g(x)$ возрастает при $x \leq 0, g_{\max} = g(0) = 0$.



5. $D(f) = R, E(f) = [-4; 4]; f(x) > 0$ при $x < 0; f(x) < 0$ при $x > 0; f(x) = 0$ при $x = 0$;
 $f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -2]$ и $[2; +\infty); f(x)$ убывает при $x \in [-2; 2]$.

С-4

1. $y = -\frac{3}{x}$; $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

а) $y(-2) = 1,5$; $y(-1,5) = 2$;

$y(1,5) = -2$; $y(2) = -1,5$

б) $-4 = -\frac{3}{x}$, $x = \frac{3}{4}$;

$-3 = -\frac{3}{x}$, $x = 1$; $x = -\frac{3}{4}$, $x = -1$;

в) $y > 0$ при $x < 0$, $y < 0$ при $x > 0$.

2. $y = \frac{144}{x}$; а) $20 \frac{4}{7} = \frac{144}{-7}$ — ложно, значит, точка А не принадлежит графику;

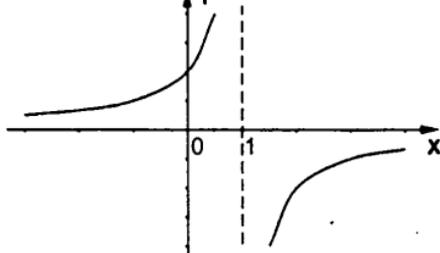
б) $24 = \frac{144}{6}$ — верно, значит, точка В принадлежит графику;

в) $144 = \frac{144}{0}$ — ложно, значит, точка С не принадлежит графику;

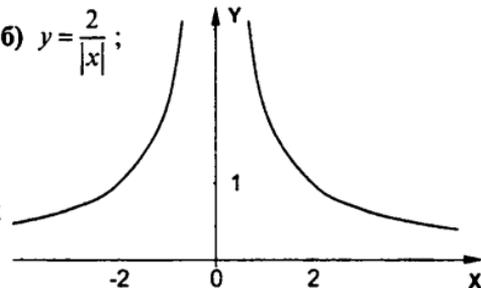
г) $-12 = \frac{144}{12}$ — ложно, значит, точка D не принадлежит графику.

3. $\frac{2}{x} = x + 1$.

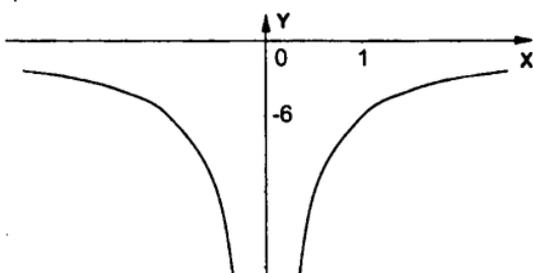
4. а) $y = \frac{4}{1-x}$;



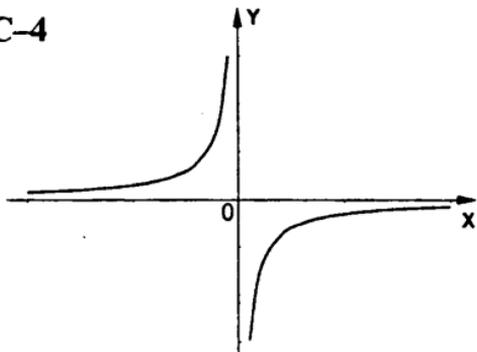
б) $y = \frac{2}{|x|}$;



в) $y = -\frac{6}{|x|}$.



5. $y = \frac{k}{x}$, $0,25 = \frac{k}{4}$, $k = 1$, $y = \frac{1}{x}$.



С-5. Квадратный трехчлен и его корни

1. 1) а) $x^2 - 8x + 15 = 0$; $D = 64 - 60 = 4$; $x_1 = \frac{8+2}{2} = 5$; $x_2 = 3$;

б) $-y^2 + 3y - 10 = 0$; $y^2 - 3y + 10 = 0$; $D = 9 - 4 \cdot 10 < 0$, значит, нет корней;

в) $4b^2 - 16b + 12 = 0$; $b^2 - 4b + 3 = 0$; $D = 16 - 4 \cdot 3 = 4$; $b_1 = \frac{4+2}{2} = 3$; $b_2 = 1$;

г) $2a^2 - a = 0$; $a(2a-1) = 0$; $a_1 = 0$, $a_2 = 0,5$.

2) а) $5y^2 + 14y - 3 = 0$, $D = 196 + 4 \cdot 5 \cdot 3 = 256$, $y_1 = \frac{-14+16}{10} = 0,2$, $y_2 = -3$;

б) $10b^2 - 7b + 1 = 0$, $D = 49 - 4 \cdot 10 = 9$, $b_1 = \frac{7+3}{20} = 0,5$, $b_2 = 0,2$;

в) $-0,4c^2 + 0,8 = 0$, $0,4c^2 = 0,8$, $c^2 = 2$, $c_{1,2} = \pm\sqrt{2}$; г) $7x^2 - 28 = 0$, $x^2 = 4$, $x_{1,2} = \pm 2$;

3) а) $0,5x^2 - x - 1 = 0$; $x^2 - 2x - 2 = 0$; $D = 4 + 4 \cdot 2 = 4 \cdot 3$; $x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$;

б) $-100c^2 + 20c + 3 = 0$; $100c^2 - 20c - 3 = 0$; $D = 400 + 4 \cdot 100 \cdot 3 = 1600$;

$$c_1 = \frac{20+40}{200} = 0,3; \quad c_2 = -\frac{20}{200} = -0,1;$$

в) $-25a^2 + 10a - 1 = 0$; $25a^2 - 10a + 1 = 0$; $D = 100 - 4 \cdot 25 = 0$; $a = \frac{10}{50} = 0,2$.

2. 1) а) $x^2 + 4x + 1 = x^2 + 4x + 4 - 3 = (x+2)^2 - 3$;

б) $3b^2 - 12b + 11 = 3(b^2 - 4b + \frac{11}{3}) = 3(b^2 - 4b + 4 - \frac{1}{3}) = 3(b-2)^2 - 1$;

в) $y^2 + 2y = y^2 + 2y + 1 - 1 = (y+1)^2 - 1$.

2) а) $-b^2 + 6b - 8 = -(b^2 - 6b + 8) = -(b^2 - 6b + 9 - 1) = -(b-3)^2 + 1$;

б) $\frac{1}{4}y^2 - y + 2 = \frac{1}{4}(y^2 - 4y + 8) = \frac{1}{4}(y^2 - 4y + 4 + 4) = \frac{1}{4}(y-2)^2 + 1$.

3. а) $x^2 - 10x + 28 = x^2 - 10x + 25 + 3 = (x-5)^2 + 3 > 0$;

б) $-x^2 + 4x - 6 = -(x^2 - 4x + 6) = -(x^2 - 4x + 4 + 2) = -(x-2)^2 - 2 < 0$.

4. а) $b^2 - 4b + 9$; $b_0 = \frac{4}{2} = 2$; б) $-b^2 + 6b - 14$; $b_0 = \frac{-6}{-2} = 3$.

5. $(12-b)$ см, $(8+b)$ см – новые стороны; $(12-b)(8+b)$ см² – площадь

полученного прямоугольника; $(12-b)(8+b) = -b^2 + 4b + 96$, $b_0 = \frac{-4}{-2} = 2$.

Ответ: $b = 2$ см.

С-6. Разложение квадратного трехчлена на множители

1.1) а) $x^2 - 7x + 10 = 0$; $D = 49 - 40 = 9$; $x_1 = \frac{7+3}{2} = 5$; $x_2 = 2$; $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$;

б) $3x^2 + 3x - 6 = 0$; $x^2 + x - 2 = 0$; $D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$; $x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$; $x_2 = -2$;

$3x^2 + 3x - 6 = (x-1)(x+2)$; в) $7x^2 - 63 = 7(x^2 - 9) = 7(x-3)(x+3)$;

г) $5x^2 + 19x - 4 = 0$; $D = 361 + 4 \cdot 5 \cdot 4 = 441$; $x_1 = \frac{-19+21}{10} = \frac{1}{5}$; $x_2 = -4$;

$5x^2 + 19x - 4 = 5(x - \frac{1}{5})(x+4) = (5x-1)(x+4)$;

2) а) $x^2 + x - 72 = 0$; $D = 1 + 4 \cdot 72 = 289$; $x_1 = \frac{-1+17}{2} = 8$; $x_2 = -9$;

$x^2 + x - 72 = (x-8)(x+9)$; б) $7x^2 + 20x - 3 = 0$; $D = 400 + 4 \cdot 7 \cdot 3 = 484$;

$x_1 = \frac{-20+22}{14} = \frac{1}{7}$; $x_2 = -3$; $7x^2 + 20x - 3 = 7(x - \frac{1}{7})(x+3) = (7x-1)(x+3)$;

в) $12x^2 - 588 = 12(x^2 - 49) = 12(x-7)(x+7)$; г) $3x^2 - 12x + 3 = 3(x^2 - 4x + 1) = 3(x^2 - 4x + 4 - 3) = 3((x-2)^2 - 3) = 3(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$.

2. 1) $x^2 - 5x + 7 = 0$; $D = 25 - 4 \cdot 7 < 0$; б) $-3x^2 + 2x - 1 = 0$; $3x^2 - 2x + 1 = 0$; $D = 4 - 4 \cdot 3 < 0$

2) а) $x^2 - 12x + 39 = 0$; $D = 144 - 4 \cdot 39 < 0$; б) $-4x^2 + 4x - 3 = 0$; $4x^2 - 4x + 3 = 0$; $D = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 3 < 0$; в) $x^2 + 3 = 0$; $D = -4 \cdot 3 < 0$.

3. 1) а) $\frac{4b+12}{b^2-9} = \frac{4(b+3)}{(b-3)(b+3)} = \frac{4}{b-3}$; б) $\frac{c^2+c-6}{7c+21} = \frac{(c-2)(c+3)}{7(c+3)} = \frac{c-2}{7}$;

$c^2+c-6=0$, $D=1+4 \cdot 6=25$; $c_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$, $c_2 = -3$; в) $\frac{16-2x}{8+7x-x^2} = \frac{2(8-x)}{-(x-8)(x+8)} = \frac{2}{x+1}$;

$x^2 - 7x - 8 = 0$, $D = 49 + 4 \cdot 8 = 81$, $x_1 = \frac{7+9}{2} = 8$, $x_2 = -1$;

2) а) $\frac{a^2 - 16a + 63}{a^2 - 81} = \frac{(a-9)(a-7)}{(a-9)(a+9)} = \frac{a-7}{a+9}$, $a^2 - 16a + 63 = 0$, $D = 256 - 4 \cdot 63 = 4$;

$a_1 = \frac{16+2}{2} = 9$, $a_2 = 7$;

б) $\frac{y^3 + 7y^2 - 60y}{10y - 50} = \frac{y(y^2 + 7y - 60)}{10(y-5)} = \frac{y(y-5)(y+12)}{10(y-5)} = \frac{y(y+12)}{10}$;

$y^2 + 7y - 60 = 0$, $D = 49 + 4 \cdot 60 = 289$; $y_1 = \frac{-7+17}{2} = 5$, $a_2 = -12$;

$$в) \frac{3+14b-5b^2}{3b-b^2} = \frac{-(b-3)\left(b+\frac{1}{5}\right) \cdot 5b}{b(3-b)} = \frac{5b+1}{b},$$

$$5b^2 - 14b - 3 = 0, D = 196 + 4 \cdot 5 \cdot 3 = 256; b_1 = \frac{14+16}{10} = 3, b_2 = -\frac{1}{5};$$

$$4. 1) \frac{x^2 - 8x - 33}{10x + 30} = \frac{(x-11)(x+3)}{10(x+3)} = \frac{x-11}{10} = f(x);$$

$$x^2 - 8x - 33 = 0; D = 64 + 4 \cdot 33 = 196; x_1 = \frac{8+14}{2} = 11; x_2 = -3;$$

$$f(-9) = \frac{-9-11}{10} = -2; f(12) = \frac{12-11}{10} = 0,1; f(111) = \frac{111-11}{10} = 10.$$

$$2) \frac{8y-56}{y^2-27y+140} = \frac{8(y-7)}{(y-20)(y-7)} = \frac{8}{y-20} = f(y);$$

$$y^2 - 27y + 140 = 0, D = 729 - 4 \cdot 140 = 169, y_1 = \frac{27+13}{2} = 20, y_2 = 7;$$

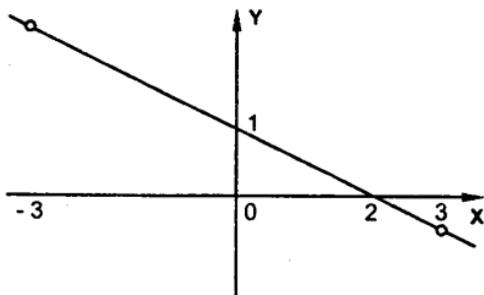
$$f(-4) = \frac{8}{-4-20} = -\frac{1}{3}; f(22,5) = \frac{8}{22,5-20} = 3,2; f(24) = \frac{8}{24-20} = 2.$$

$$5. \frac{9b-4}{b+7} - \frac{44-16b}{b^2+5b-14} = \frac{9b-4}{b+7} - \frac{44-16b}{(b-2)(b+7)} = \frac{(9b-4)(b-2)-44+16b}{(b-2)(b+7)} =$$

$$= \frac{9b^2 - 4b - 18b + 8 - 44 + 16b}{(b-2)(b+7)} = \frac{9b^2 - 6b - 36}{(b-2)(b+7)},$$

$$b^2 + 5b - 14 = 0, D = 25 + 4 \cdot 14 = 81, b_1 = \frac{-5+9}{2} = 2, b_2 = -7.$$

$$6. y(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{18 - 2x^2} = \frac{x^2(x-2) - 9(x-2)}{2(9-x^2)} = \frac{(x-2)(x^2-9)}{2(x^2-9)} = \frac{2-x}{2} = -\frac{x}{2} + 1; x \neq \pm 3.$$



С-7. Функция $y = x^2$, ее график и свойства

1. $g(x) = \frac{1}{10}x^2$;

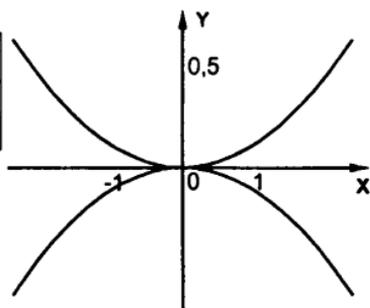
x	0	± 1	± 2	± 4	± 6	± 8
y	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{32}{5}$

$g(-3) = g(3) = 0,9$;

$g(-5) = g(5) = 2,5$;

$f(x) = -\frac{1}{10}x^2$;

$f(-3) = f(3) = -0,9$; $f(-5) = f(5) = -2,5$.



2. $y = -2x^2$; а) $y = -200$, $-200 = -2x^2$, $x^2 = 100$, $x = \pm 10$, $(10; -200)$, $(-10; -200)$;

б) $y = -3200$, $-3200 = -2x^2$, $x^2 = 1600$; $x = \pm 40$; $(40; -3200)$, $(-40; -3200)$;

в) $y = 40x$, $40x = -20x^2$, $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $(0; 0)$, $(-2; -80)$;

г) $y = -1400x$, $-1400x = -2x^2$; $x_1 = 0$; $x_2 = 700$; $(0; 0)$, $(700; -980000)$.

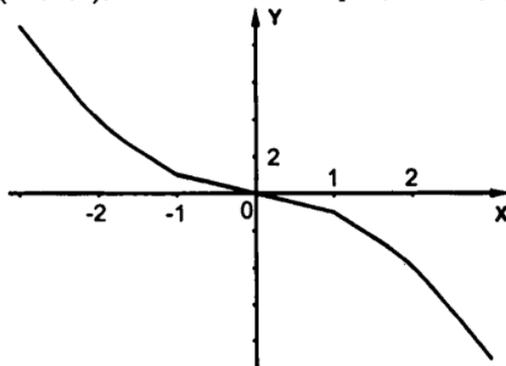
3. $y = 40x^2$;

а) $A(-2; -160)$; $-160 = 40 \cdot 4$ – ложно, значит, не принадлежит;

б) $B(2; 160)$; $160 = 40 \cdot 4$ – верно, значит, принадлежит;

в) $C(0,1; 0,4)$; $0,4 = 40 \cdot 0,01$ – верно, значит, принадлежит.

4.

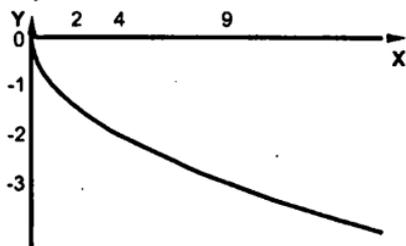


5. а) $y = \frac{1}{4}x^2$, $x \in [-4; 8]$; $y_{\min} = y(0) = 0$; $y_{\max} = y(8) = 16$;

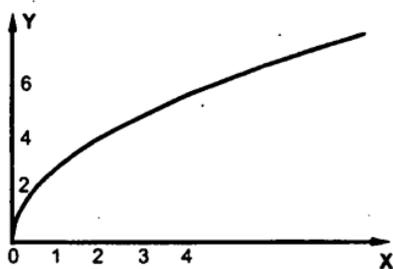
б) $y = -\frac{1}{3}x^2$, $x \in [-6; 3]$; $y_{\min} = y(-6) = -\frac{1}{3} \cdot 36 = -12$; $y_{\max} = y(0) = 0$.

6. $S = \frac{gt^2}{2}$; $560 = \frac{10 \cdot t^2}{2}$; $t^2 = 112$; $t = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$ (с).

7. а)



б)

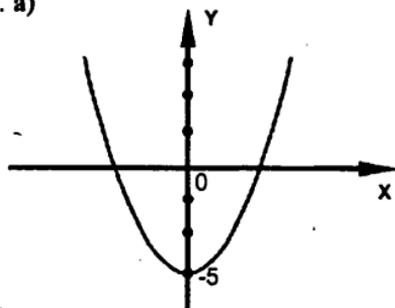


в)

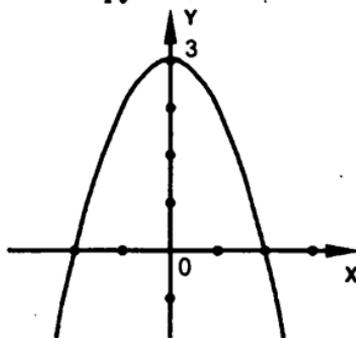


С-8. График квадратичной функции

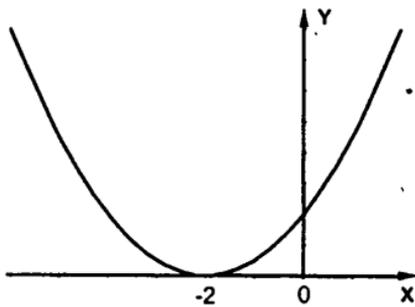
1. а)



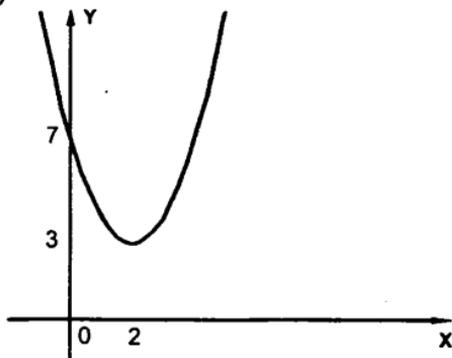
б)



в)



г)



2. а) $g(x) = x^2 + 4x + 2$, $m = -\frac{4}{2} = -2$, $n = f(-2) = 4 - 8 + 2 = -2$, $(-2; -2)$;

б) $g(x) = -x^2 - 6x + 3$; $m = \frac{6}{-2} = -3$; $n = f(-3) = -9 + 18 + 3 = 12$; $(-3; 12)$

в) $g(x) = 4x^2 - 8x - 1$, $m = \frac{8}{8} = 1$, $n = f(1) = 4 - 8 - 1 = -5$, $(1; -5)$;

3. $g(x) = x^2 + 4x + 2$;

а) $x_1 \approx -3,4$; $x_2 \approx -0,6$;

$g(x) > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;

$g(x) < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$;

б) $g(x)$ возрастает при $x \in [-2; +\infty)$;

убывает при $x \in (-\infty; -2]$; $g_{\min} = -2$.

4. $g(x) = -x^2 - 6x + 3$;

а) $x_1 \approx -6,4$; $x_2 \approx 0,4$;

$g(x) > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$;

$g(x) < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;

б) $g(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -3]$;

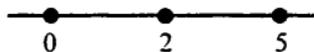
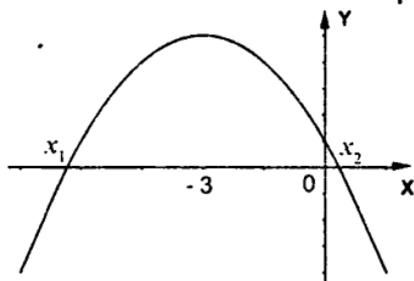
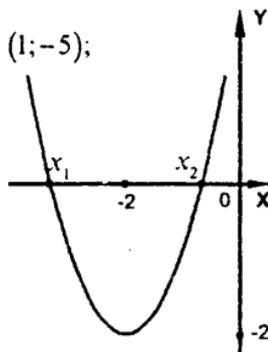
$g(x)$ убывает при $x \in [-3; +\infty)$;

$g_{\max} = 12$.

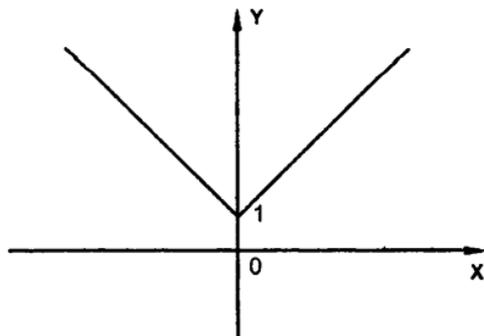
5. $y = -x^2 + 4x + 3$, $x \in [0; 5]$; $m = \frac{-4}{-2} = 2$; $n = y(2) = -4 + 8 + 3 = 7$;

$y(5) = -25 + 20 + 3 = -2$;

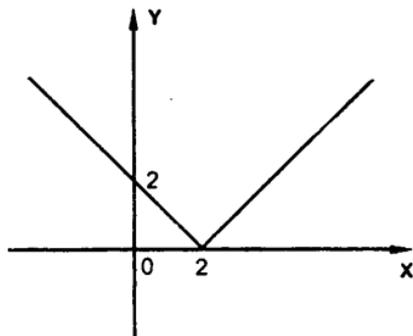
$E(y) = [-2; 7]$.

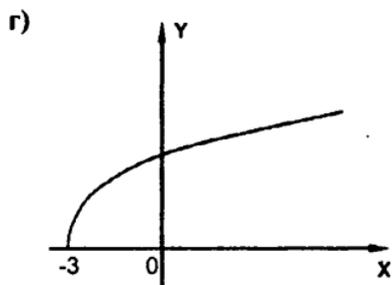
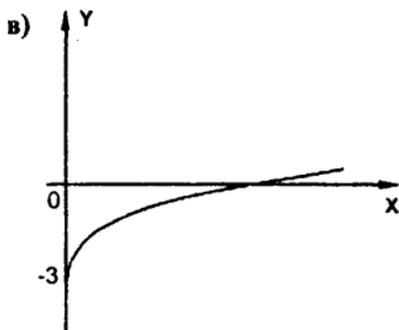


6. а)



б)





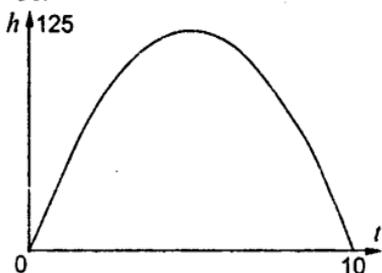
7. $y = x^2 + bx + c$, $K(7; 2)$, $m = -\frac{b}{2} = 7$, $b = -14$,
 $2 = n = f(7) = 49 - 14 \cdot 7 + c = c - 49$, $c = 51$.

8. $S(t) = 50t - 5t^2$;

1) 125 м; 2) стрела поднималась
 вверх при $t \in [0; 5]$,

опускалась вниз при $t \in [5; 10]$;

3) через 10 с.



С-9. Решение неравенства второй степени

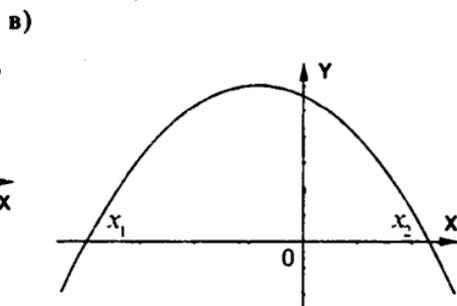
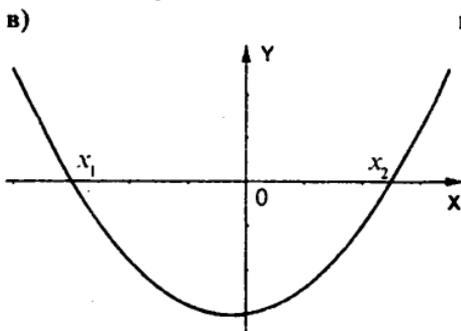
1. 1) $y = 3x^2 + x - 17$; а) вверх;

2) $y = -2x^2 - 5x + 12$; а) вниз;

б) $3x^2 + x - 17 = 0$; $D = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 17 = 205$; б) $2x^2 + 5x - 12 = 0$; $D = 25 + 8 \cdot 12 = 121$;

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 2\sqrt{51}}{6};$$

$$x_2 = \frac{-5 + 11}{4} = 1,5; x_1 = -4;$$



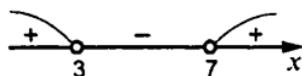
г) $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;
 $y < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$.

г) $y > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$;
 $y < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

2. а) $x^2 - 10x + 21 > 0$; $D = 100 - 4 \cdot 21 = 16$;

$$x_1 = \frac{10+4}{2} = 7; x_2 = 3;$$

Ответ: $(-\infty; 3) \cup (7; +\infty)$.



б) $4x^2 + 11x - 3 < 0$, $D = 121 + 16 \cdot 3 = 169$;

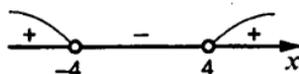
$$x_1 = \frac{-11+3}{8} = \frac{1}{4}; x_2 = -3;$$

Ответ: $(-3; \frac{1}{4})$.



в) $x^2 - 16 > 0$, $(x-4)(x+4) > 0$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.



г) $5x - x^2 > 0$; $x^2 - 5x < 0$; $x(x-5) < 0$.

Ответ: $(0; 5)$.



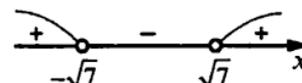
3. а) $x^2 \leq 9$; $(x-3)(x+3) \leq 0$.

Ответ: $[-3; 3]$.



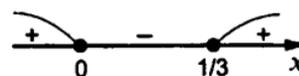
б) $x^2 > 7$; $x^2 - 7 > 0$; $(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) > 0$.

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}; +\infty)$.



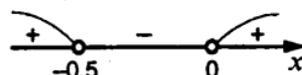
в) $3x^2 \geq x$; $x^2 - \frac{x}{3} \geq 0$; $x(x - \frac{1}{3}) \geq 0$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [\frac{1}{3}; +\infty)$.



г) $-4x < 8x^2$; $8x^2 + 4x > 0$; $x^2 + \frac{x}{2} > 0$; $x(x + \frac{1}{2}) > 0$.

Ответ: $(-\infty; -0,5) \cup (0; +\infty)$.



4. а) $7b^2 - 4b + 1 > 0$, $D = 16 - 4 \cdot 7 < 0$, т.к. $a = 7 > 0$, то любое b – решение, ч.т.д.

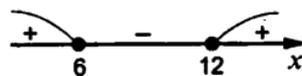
б) $8b < b^2 + 17$, $b^2 - 8b + 17 > 0$, $D = 64 - 4 \cdot 17 < 0$, т.к. $a = 1 > 0$,

то любое b – решение, ч.т.д.

5. а) $y = \sqrt{x^2 - 18x + 72}$; $x^2 - 18x + 72 \geq 0$; $D = 324 - 4 \cdot 72 = 36$;

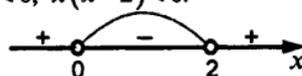
$$x_1 = \frac{18+6}{2} = 12; x_2 = 6;$$

Ответ: $(-\infty; 6] \cup [12; +\infty)$.



б) $y = \frac{7}{\sqrt{6x - 3x^2}}$; $6x - 3x^2 > 0$; $3x^2 - 6x < 0$; $x^2 - 2x < 0$; $x(x-2) < 0$.

Ответ: $(0; 2)$.



$$6. x^2 - 8x + c < 0$$

а) $D = 64 - 4c$, чтобы (3; 5) был решением, нужно $x_1 = 3$, $x_2 = 5$,

$$\text{т.е. } 9 - 27 + c = 0; c = 15.$$

б) ни при каких c .

$$7. \frac{x^2 - 14x + 48}{(x-7)^2} < 0; \frac{(x-6)(x-8)}{(x-7)^2} < 0; x^2 - 14x + 48 = 0; D = 196 - 4 \cdot 48 = 4;$$

$$x_1 = \frac{14+2}{2} = 8; x_2 = 6.$$

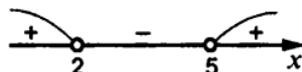
Ответ: $(6; 7) \cup (7; 8)$.



C-10. Решение неравенств методом интервалов

1. 1) а) $(x-2)(x-5) > 0$.

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$.



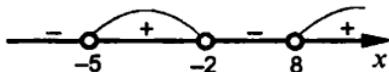
б) $(x+3)(x-7) < 0$.

Ответ: $(-3; 7)$.



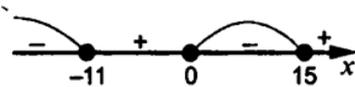
в) $(x+5)(x+2)(x-8) > 0$.

Ответ: $(-5; -2) \cup (8; +\infty)$.



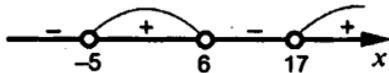
г) $x(x+11)(x-15) \leq 0$.

Ответ: $(-\infty; -11] \cup [0; 15]$.



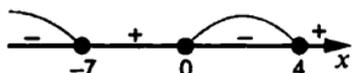
2) а) $(x+5)(x-6)(x-17) > 0$.

Ответ: $(-5; 6) \cup (17; +\infty)$.



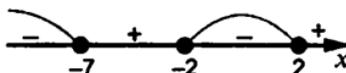
б) $x(x+7)(x-4) \leq 0$.

Ответ: $(-\infty; -7] \cup [0; 4]$.



в) $(x^2 - 4)(x+7) \leq 0$, $(x-2)(x+2)(x+7) \leq 0$.

Ответ: $(-\infty; -7] \cup [-2; 2]$.



г) $(x^2 + 4)(x+4)(x-8) \leq 0$, $(x+4)(x-8) \leq 0$.

Ответ: $[-4; 8]$.



2. 1) а) $(2x-3)(x+5) < 0$; $(x-1,5)(x+5) < 0$.

Ответ: $(-5; 1,5)$.



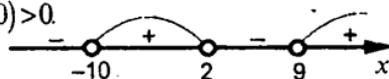
б) $(6-x)(3x+12) \leq 0$; $(x-6)(x+4) \geq 0$.

Ответ: $(-\infty; -4] \cup [6; +\infty)$.



в) $-(x-2)(9-x)(x+10) > 0$, $(x-2)(x-9)(x+10) > 0$.

Ответ: $(-10; 2) \cup (9; +\infty)$.



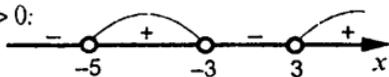
2) а) $(5x+7)(8-x) > 0$; $(x+\frac{7}{5})(x-8) < 0$

Ответ: $(-\frac{7}{5}; 8)$.



б) $(9-x^2)(6x+30) < 0$; $(x-3)(x+3)(x+5) > 0$:

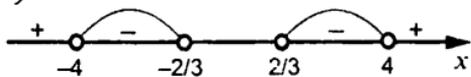
Ответ: $(-5; -3) \cup (3; +\infty)$.



в) $(9x^2-4)(16-x^2)(2x^2+3) > 0$; $(x^2-\frac{4}{9})(x^2-16) < 0$,

$(x-\frac{2}{3})(x+\frac{2}{3})(x-4)(x+4) < 0$.

Ответ: $(-4; -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; 4)$.



3. 1) а) $\frac{x-4}{x+8} < 0$.

Ответ: $(-8; 4)$.



б) $\frac{x+10}{x-3} \geq 0$.

Ответ: $(-\infty; -10] \cup [3; +\infty)$.



в) $\frac{9x}{5x-12} \leq 0$; $\frac{x}{x-2,4} \leq 0$.

Ответ: $[0; 2,4]$.



2) а) $\frac{3x-12}{x+7} < 0$; $\frac{x-4}{x+7} < 0$.

Ответ: $(-7; 4)$.



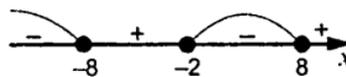
б) $\frac{x^2-25}{x+10} \geq 0$, $\frac{(x-5)(x+5)}{x+10} \geq 0$

Ответ: $(-10; -5] \cup [5; +\infty)$.



в) $\frac{(x+2)(x^2-64)}{x^2+15} \leq 0$; $(x+2)(x-8)(x+8) \leq 0$.

Ответ: $(-\infty; -8] \cup [-2; 8]$.



4. а) $y = \sqrt{(x+34)(20-x)}$; $(x+34)(20-x) \geq 0$;

$(x+34)(x-20) \leq 0$.

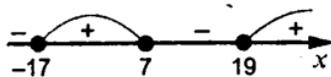
Ответ: $[-34; 20]$.



$$б) y = \sqrt{(x-7)(x+17)(x-19)};$$

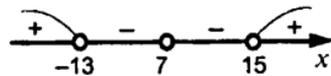
$$(x-7)(x+17)(x-19) \geq 0.$$

$$\text{Ответ: } [-17; 7] \cup [19; +\infty).$$



$$5. а) (x+13)(x-7)^2(x-15) > 0.$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -13) \cup (15; +\infty).$$

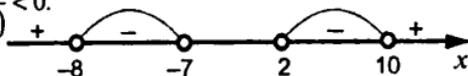


$$б) \frac{x^2+15x+56}{x^2-12x+20} < 0; x^2+15x+56=0; D=225-4 \cdot 56=1; x_1=\frac{-15+1}{2}=-7; x_2=-8;$$

$$x^2-12x+20=0; D=144-4 \cdot 20=64;$$

$$x_1=\frac{12+8}{2}=10; x_2=2; \frac{(x+7)(x+8)}{(x-2)(x-10)} < 0.$$

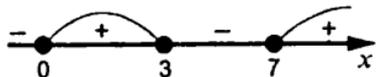
$$\text{Ответ: } (-8; -7) \cup (2; 10).$$



$$в) x^3-10x^2+21x \geq 0; x(x^2-10x+21) \geq 0; x^2-10x+21=0; D=100-4 \cdot 21=16;$$

$$x_1=\frac{10+4}{2}=7; x_2=3; x(x-7)(x-3) \geq 0.$$

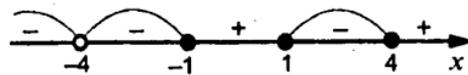
$$\text{Ответ: } [0; 3] \cup [7; +\infty).$$



$$г) \frac{x^4-17x^2+16}{5x+20} \leq 0; x^4-17x^2+16=0; D=289-4 \cdot 16=225, x_1^2=\frac{17+15}{2}=16, x_2^2=1;$$

$$\frac{(x^2-16)(x^2-1)}{x+4} \leq 0,$$

$$\frac{(x-4)(x+4)(x-1)(x+1)}{x+4} \leq 0.$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -4) \cup (-4; -1] \cup [1; 4).$$

С-11. Целое уравнение и его корни

$$1. а) x^4-x^3+2x^5-2=0; 2x^5+x^4-x^3-2=0 \text{ — пятая степень};$$

$$б) (2x-1)(x+4)(x-8)=0 \text{ — третья степень}; в) (x^2+6)(x-5)-x(x+1)(x-1)=0;$$

$$x^3+6x-5x^2-30-x^3+x=0; -5x^2+7x-30=0 \text{ — вторая степень};$$

$$г) (5x^4-1)(5x^2-2)-(5x^3+1)^2=0; 25x^6-5x^2-10x^4+2-25x^6-10x^3-1=0;$$

$$-10x^4-10x^3-5x^2+1=0 \text{ — четвертая степень}.$$

$$2. а) x^3-9x=0; x(x^2-9)=0; x(x-3)(x+3)=0; x_1=0; x_{2,3}=\pm 3.$$

$$б) x^2(x-7)+7(x^2-x)=-6; x^3-7x^2+7x^2-7x+6=0; x^3-7x+6=0;$$

$$(x-1)(x^2+x-6)=0, (x-1)(x-2)(x+3)=0, x_1=1, x_2=2, x_3=-3;$$

$$\text{в)} x^4 - 13x^2 + 36 = 0; D = 169 - 4 \cdot 36 = 25; x_1^2 = \frac{13+5}{2} = 9; x_2^2 = 4; x_{1,2} = \pm 3; x_{3,4} = \pm 2.$$

Ответ: а) -3; 0; 3; б) -3; 1; 2; в) -3; -2; 2; 3.

$$\text{3. 1) а)} (8x+1)(2x-3) - (4x-2)^2 = 1; 16x^2 + 2x - 24x - 3 - 16x^2 + 16x - 4 - 1 = 0; \\ -6x = 8; x = -\frac{4}{3}; \text{б)} 5x(5x-1) - (5x+3)(5x-3) = x-3; 25x^2 - 5x - 25x^2 + 9 = x-3; \\ 6x = 12; x = 2; \text{в)} \frac{2x-1}{5} - \frac{x+1}{2} = 1; 4x-2-5x-5 = 10; x = -17;$$

$$\text{г)} \frac{x(2x-5)}{6} - \frac{x(x-2)}{3} = 1; 2x^2 - 5x - 2x^2 + 4x - 6 = 0, x = -6.$$

$$\text{2) а)} (2x-3)(x+1) = x^2 + 17; 2x^2 - 3x + 2x - 3 = x^2 + 17; x^2 - x - 20 = 0; D = 1 + 4 \cdot 20 = 81;$$

$$x_1 = \frac{1+9}{2} = 5, x_2 = -4; \text{б)} (x-7)(x+7) + (x-2)^2 = 11x + 30 - (x+5)^2;$$

$$x^2 - 49 + x^2 - 4x + 4 = 11x + 30 - x^2 - 10x - 25, 3x^2 - 5x - 50 = 0; D = 25 + 4 \cdot 3 \cdot 50 = 625;$$

$$x_1 = \frac{5+25}{6} = 5, x_2 = -\frac{10}{3}; \text{в)} \frac{x^2}{27} + \frac{x}{3} = \frac{x+9}{3}; \frac{x^2}{27} = 3; x^2 = 81; x_{1,2} = \pm 9;$$

$$\text{г)} \frac{x^2 - 6x - 4}{3} = \frac{11x}{10} + 110x^2 - 60x - 40 = 33x + 30; 10x^2 - 93x - 70 = 0;$$

$$D = 107^2; x_1 = \frac{93+107}{10} = 20, x_2 = -1,4.$$

Ответ: а) -4 и 5; б) $-\frac{10}{3}$ и 5; в) -9 и 9; г) 20 и -1,4.

$$\text{4. а)} x + 11 = 0; \text{б)} (x-2)(x+9) = 0; x^2 + 7x - 18 = 0; \text{в)} (x-4)(x-7)(x+7) = 0;$$

$$(x-4)(x^2 - 49) = 0; x^3 - 4x^2 - 49x + 196 = 0.$$

$$\text{5. а)} \frac{x(2-x)}{2} + \frac{3(x-3)^2}{2} = 2\frac{1}{2} - \frac{2(4-x)^2}{3}, 3x(2-x) + 9(x^2 - 6x + 9) =$$

$$= 15 - 4(16 - 8x + x^2), 6x - 3x^2 + 9x^2 - 54x + 81 = 15 - 64 + 32x - 4x^2,$$

$$10x^2 - 80x + 130 = 0, x^2 - 8x + 13 = 0, D = 64 - 4 \cdot 13 = 4 \cdot 3, x_{1,2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 4 \pm \sqrt{3};$$

$$\text{б)} x = \frac{(3-x)^2}{9} - \frac{x(x-12)}{18} + \frac{(3-x)(x-2)}{36}; 36x = 4(9 - 6x + x^2) - 2x(x-12) +$$

$$+(3x - x^2 - 6 + 2x), 36x = 36 - 24x + 4x^2 - 2x^2 + 24x - x^2 - 6 + 5x,$$

$$x^2 - 31x + 30 = 0, D = 961 - 4 \cdot 30 = 841, x_1 = \frac{31+29}{2} = 30, x_2 = 1.$$

Ответ: а) $4 \pm \sqrt{3}$; б) 1 и 30.

6. а) $x^6 + 3x^4 + x^2 = -16$; $x^6 + 3x^4 + x^2 + 16 = 0$; уравнение не имеет корней, т.к. $x^6 + 3x^4 + x^2 + 16 > 0$ при всех x ;
- б) $25x(x+2) - (5x-1)(5x+1) = 25(2x-1) + 26$, $25x^2 + 50x - 25x^2 + 1 = 50x - 25 + 26$; $1 = 1$ - у этого уравнения корень - любое число;
- в) $6x^5 + 8x^3 + 12x - 41 = 0$; $6x^5 + 8x^3 + 12x = 41$, верно, т.к. если бы был отрицательный корень, то левая часть была бы меньше нуля (т.к. каждое слагаемое было бы меньше нуля), а правая $41 > 0$;
- г) $5x^5 + 25x^4 - 20x^3 + 10x^2 - 5x = 17$, уравнение не имеет целых корней, т.к. если бы был целый корень, то правая часть делилась бы на 5, а левая - нет.

С-12. Уравнения с параметрами

1. а) $5(x-2) - 4(3+x) = 2+ax$; $5(6-2) - 4(3+6) = 2+6a$, $20-36 = 2+6a$, $6a = -18$, $a = -3$; б) $9x^2 + 3(c+2) - (3-2) = 0$; $9 \cdot 25 + 3(c+2) - (3-2) = 0$;
- $$3c + 6 - 3 + 2c + 225 = 0, \quad 5c = -228, \quad c = -\frac{228}{5} = -45,6; \quad x_1 = 5, \quad x_2 = -5.$$

Ответ: а) -3; б) -5 и 5.

2. $kx+1=7$, $kx=6$, $x = \frac{6}{k}$, $k = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$.

3. $4x-2b=5$; $x = \frac{2b+5}{4}$; а) $\frac{2b+5}{4} > 0$; $2b > -5$; $b > -2,5$;

б) $\frac{2b+5}{4} < 0$; $b < -2,5$; в) $\frac{2b+5}{4} > 8$; $2b+5 > 32$; $2b > 27$; $b > 13,5$;

г) $\begin{cases} \frac{2b+5}{4} > 1; & 2b+5 > 4; & b > -0,5 \\ \frac{2b+5}{4} < 3; & 2b+5 < 12; & b < 3,5 \end{cases} \quad -0,5 < b < 3,5.$

Ответ: а) $b > -2,5$; б) $b < -2,5$; в) $b > 13,5$; г) при $-0,5 < b < 3,5$.

4. а) $2x^2 + 4x + t = 0$; $D = 16 - 4 \cdot 2 \cdot t > 0$; $16 - 8t > 0$; $8t < 16$; $t < 2$;

б) $6x^2 + tx + 6 = 0$; $D = t^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6 > 0$; $t^2 - 144 > 0$; $(t-12)(t+12) > 0$.

Ответ: а) $t < 2$; б) $t \in (-\infty; -12) \cup (12; +\infty)$.

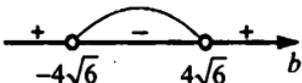
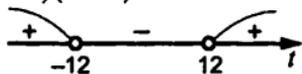
5. а) $4x^2 - 8x + c = 0$, $D = 64 - 4 \cdot 4 \cdot c = 0$, $64 = 16c$, $c = 4$;

б) $x^2 + cx + 16 = 0$; $D = c^2 - 4 \cdot 16 = 0$; $c^2 = 64$; $c_{1,2} = \pm 8$.

6. а) $6x^2 + bx + 4 = 0$; $D = b^2 - 4 \cdot 6 \cdot 4 < 0$;

$$b^2 - 96 < 0; \quad (b - 4\sqrt{6})(b + 4\sqrt{6}) < 0.$$

Ответ: $b \in (-4\sqrt{6}; 4\sqrt{6})$.



б) $x^2 + 8x + b = 0$; $D = 64 - 4b < 0$; $4b > 64$; $b > 16$.

Ответ: $b \in (16; +\infty)$.

7. $b(2-x) = 6$, $2-x = \frac{6}{b}$, $x = 2 - \frac{6}{b}$, $x = \frac{2b-6}{b}$, $\frac{2b-6}{b} < 0$, $\frac{b-3}{b} < 0$.

Ответ: при $b = 1$; 2.



8. $x^2 + ax = 0$; при $a = 0$, $x = 0$ — единственный корень;

$x^2 + ax - 1 = 0$; $D = a^2 + 4 > 0$ при любом a имеет два корня;

$x^2 + ax + 1 = 0$; $D = a^2 - 4 > 0$ не при любом a ;

$x^2 - a = 0$ при $a = 0$, $x = 0$ — единственный корень;

Ответ: $x^2 + ax - 1 = 0$.

9. $2x^2 + nx - (18-x) = 0$, пусть a и $-a$ — корни уравнения, тогда

$$\begin{cases} 2a^2 + na - (18-a) = 0 \\ 2a^2 - na - (18+a) = 0 \end{cases}, \quad na - (18-a) + na + (18+a) = 0,$$

$2na + 2a = 0$, $n+1 = 0$, $n = -1$.

Ответ: при $n = -1$.

10. $x^2 - 4bx + 4b^2 - 1 = 0$, $D = 16b^2 - 4(4b^2 - 1) = 4$, $x_1 = \frac{4b+2}{2} = 2b+1$, $x_2 = 2b-1$,

$$\begin{cases} 1 < 2b+1 < 6 \\ 1 < 2b-1 < 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < 2b < 5 \\ 2 < 2b < 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < b < 2.5 \\ 1 < b < 3.5 \end{cases}$$



Ответ: при $1 < b < 2.5$.

С-13. Решение уравнений с помощью разложения на множители и введения вспомогательной переменной

1. 1) а) $18y^3 - 36y^2 = 0$; $y^2(y-2) = 0$; $y_1 = 0$; $y_2 = 2$;

б) $x^3 - 144x = 0$; $x(x^2 - 144) = 0$; $x(x-12)(x+12) = 0$; $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 12$

в) $x^2 + 0.9x = 0$; $x(x+0.9) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -0.9$;

Ответ: а) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; б) $x_1 = -12$, $x_2 = 0$, $x_3 = 12$; в) $x_1 = 0$, $x_2 = -0.9$.

2) а) $16x^3 - 32x^2 - x + 2 = 0$, $16x^2(x-2) - (x-2) = 0$, $(16x^2 - 1)(x-2) = 0$,

$(4x-1)(4x+1)(x-2) = 0$, $x_{1,2} = \pm 0.25$, $x_3 = 2$; б) $x^6 - x^4 + 5x^2 - 5 = 0$.

$x^4(x^2 - 1) + 5(x^2 - 1) = 0$, $(x^2 - 1)(x^4 + 5) = 0$, $(x-1)(x+1) = 0$, $x_{1,2} = \pm 1$;

в) $y^6 + 4y^2 = y^2 + 4$, $y^4(y^2 + 4) = y^2 + 4$, $y^2 = 1$, $y_{1,2} = \pm 1$.

Ответ: а) $x = -0.25$, $x = 0.25$ и $x = 2$; б) $x = 1$, $x = -1$; в) $y = 1$ и $y = -1$.

2. а) $(x^2 - 10)^2 - 3(x^2 - 10) + 4 = 0$; $x^2 - 10 = y$; $y^2 - 3y + 4 = 0$, $D = 9 - 4 \cdot 4 < 0$; нет корней;

б) $(x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x) + 6 = 0$; $x^2 + x = y$; $y^2 - 5y + 6 = 0$; $D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$;
 $y_1 = \frac{5+1}{2} = 3$, $y_2 = 2$; $x^2 + x = 3$, $x^2 + x - 3 = 0$, $D = 1 + 4 \cdot 3 = 13$, $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$,
 $x^2 + x = 2$, $x^2 + x - 2 = 0$, $D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$, $x_3 = \frac{-1+3}{2} = 1$, $x_4 = -2$;

в) $(x^2 + x + 6)(x^2 + x - 4) = 144$; $x^2 + x + 6 = y$, $y(y - 10) = 144$, $y^2 - 10y - 144 = 0$,
 $D = 100 + 4 \cdot 144 = 676$, $y_1 = \frac{10+26}{2} = 18$, $y_2 = -8$, $x^2 + x + 6 = 18$,
 $x^2 + x - 12 = 0$, $D = 1 + 4 \cdot 12 = 49$, $x_1 = \frac{-1+7}{2} = 3$, $x_2 = -4$, $x^2 + x + 6 = -8$,
 $x^2 + x + 14 = 0$, $D = 1 - 4 \cdot 14 < 0$ - нет корней.

Ответ: а) нет корней; б) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$, $x = 1$, $x = -2$; в) $x = 3$, $x = -4$.

3.а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; $D = 100 - 4 \cdot 9 = 64$; $x_1^2 = \frac{10+8}{2} = 9$; $x_2^2 = 1$; $x_{1,2} = \pm 3$; $x_{3,4} = \pm 1$;

б) $x^4 - 18x^2 + 32 = 0$; $D = 324 - 4 \cdot 32 = 196$; $x_1^2 = \frac{18+14}{2} = 16$ и $x_2^2 = 2$; $x_{1,2} = \pm 4$; $x_{3,4} = \pm \sqrt{2}$;

в) $x^4 - x^2 - 12 = 0$; $D = 1 + 4 \cdot 12 = 49$; $x_1^2 = \frac{1+7}{2} = 4$, $x_2^2 < 0$; $x_{1,2} = \pm 2$;

г) $x^4 + 6x^2 - 27 = 0$; $D = 36 + 4 \cdot 27 = 144$; $x_1^2 = \frac{-6+12}{2} = 3$ и $x_2^2 < 0$; $x_{1,2} = \pm \sqrt{3}$

д) $x^4 + 15x^2 + 54 = 0$; $D = 225 - 4 \cdot 54 = 9$; $x_1^2 = \frac{-15+3}{2} < 0$; $x_2^2 < 0$ нет корней;

е) $x^4 + 25x^2 = 0$; $x^2(x^2 + 25) = 0$, $x^2 = 0$; $x = 0$.

4. $y = x^4 - 3x^2 - 4$, $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$, $D = 9 + 4 \cdot 4 = 25$, $x_1^2 = \frac{3+5}{2} = 4$, $x_2^2 < 0$, $x_{1,2} = \pm 2$.

Ответ: $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$.

5. $x^5 + x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = 0$; $x^4(x+1) + 3x^2(x+1) + 4(x+1) = 0$;

$(x+1)(x^4 + 3x^2 + 4) = 0$; $x_1 = -1$; $x^4 + 3x^2 + 4 = 0$; $D = 9 - 4 \cdot 4 < 0$; нет корней;

Ответ: -1.

6. $\frac{x^2-3}{x} + \frac{x}{x^2-3} = 2\frac{1}{2}$; $\frac{x^2-3}{x} = t$; $t + \frac{1}{t} - \frac{5}{2} = 0$; $2t^2 - 5t + 2 = 0$; $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$;

$t_1 = \frac{5+3}{4} = 2$; $t_2 = \frac{1}{2}$; $\frac{x^2-3}{x} = 2$; $x^2 - 2x - 3 = 0$; $D = 4 + 4 \cdot 3 = 16$; $x_1 = \frac{2+4}{2} = 3$;

$x_2 = -1$; $\frac{x^2-3}{x} = \frac{1}{2}$; $2x^2 - x - 6 = 0$; $D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 6 = 49$; $x_3 = \frac{1+7}{4} = 2$; $x_4 = -1.5$.

7.а) $x^3 - 13x + 12$; $x^3 - x - 12x + 12 = 0$; $x(x^2 - 1) - 12(x - 1) = 0$; $x(x-1)(x+1) - 12(x-1) = 0$

$(x-1)(x^2 + x - 12) = 0$; $x_1 = 1$; $x^2 + x - 12 = 0$; $D = 49$; $x_2 = \frac{-1+7}{2} = 3$; $x_3 = -4$;

а) $x^3 - 13x + 12; x^3 - x - 12x + 12 = 0; x(x^2 - 1) - 12(x - 1) = 0; x(x - 1)(x + 1) - 12(x - 1) = 0;$

$$(x - 1)(x^2 + x - 12) = 0; x_1 = 1; x^2 + x - 12 = 0; D = 49; x_1 = \frac{-1 + 7}{2} = 3; x_2 = -4;$$

б) $x^3 - 31x + 30 = 0, x^3 - x - 30x + 30 = 0, x(x^2 - 1) - 30(x - 1) = 0,$

$$x(x - 1)(x + 1) - 30(x - 1) = 0, (x - 1)(x^2 + x - 30) = 0, x_1 = 1,$$

$$x^2 + x - 30 = 0, D = 121, x_2 = \frac{-1 + 11}{2} = 5, x_3 = -6.$$

Ответ: а) 3; -4; б) -6; 1 и 5.

8. а) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 840, (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 840, x^2 - 5x + 4 = y,$

$$y(y + 2) = 840, y^2 + 2y - 840 = 0, D = 4 + 4 \cdot 840 = 4 \cdot 841, y_1 = \frac{-2 + 58}{2} = 28,$$

$$y_2 = -30, x^2 - 5x + 4 = 28, x^2 - 5x - 24 = 0, D = 25 + 4 \cdot 24 = 121, x_1 = \frac{5 + 11}{2} = 8,$$

$$x_2 = -3, x^2 - 5x + 4 = -30, x^2 - 5x + 34 = 0, D = 25 - 4 \cdot 34 < 0 - \text{нет корней.}$$

б) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) = 945; (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) = 945; x^2 + 8x + 7 = y;$

$$y(y + 8) = 945; y^2 + 8y - 945 = 0; D = 64 + 4 \cdot 945 = 62^2, y_1 = \frac{-8 + 62}{2} = 27; y_2 = -35;$$

$$x^2 + 8x + 7 = 27; x^2 + 8x - 20 = 0, D = 64 + 4 \cdot 20 = 144, x_1 = \frac{-8 + 12}{2} = 2; x_2 = -10;$$

$$x^2 + 8x + 7 = -35, x^2 + 8x + 42 = 0, D = 64 - 4 \cdot 42 < 0 - \text{корней нет.}$$

Ответ: а) $x = 8$ и $x = -3$; б) $x = -10$ и $x = 2$.

9. а) $x^4 - 8x^2 + a = 0; x^2 = y; y^2 - 8y + a = 0; f(y) = y^2 - 8y + a;$

$$D = 64 - 4a < 0 \text{ или } \begin{cases} f(0) > 0 \\ m = \frac{8}{2} = 4 < 0 \end{cases} - \text{нет решений;}$$

$$64 < 4a; a > 16.$$

б) $x^4 + ax^2 + 25 = 0; x^2 = y; y^2 + ay + 25 = 0; f(y) = y^2 + ay + 25, D = a^2 - 4 \cdot 25 < 0;$

$$(a - 10)(a + 10) < 0; -10 < a < 10 \text{ или } \begin{cases} m = -\frac{a}{2} < 0 \\ f(0) = 25 > 0 \end{cases}, a > 0.$$

Ответ: а) $a > 16$; б) $a > -10$.

С-14. Графический способ решения систем уравнений

1. $\begin{cases} xy = 6 \\ y = 0,5x^2 - 8 \end{cases}$. Три решения: $(-3, 6)$; $(-1, 8)$; $(-0, 8; -7, 8)$; $(4, 2; 1, 3)$.

2. $y = -x^2 + 1$;

а)
$$\begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

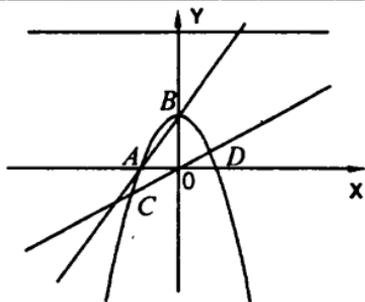
две точки пересечения:

$A(-1; 0), B(0; 1)$.

б)
$$\begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = 0,5x \end{cases}$$

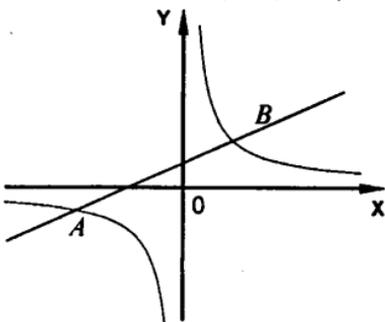
две точки пересечения: $C(-1,4; -0,8), D(0,8; 0,5)$.

в)
$$\begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = 3 \end{cases}$$
; нет точек пересечения.



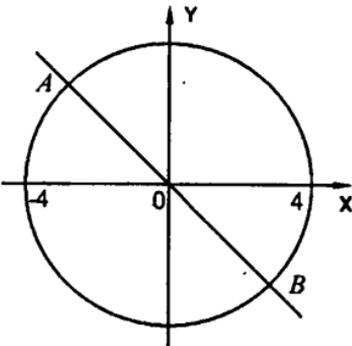
3. а)
$$\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Ответ: (1,6; 2,6), (-2,6; -1,6).



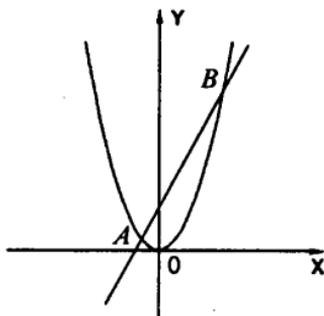
в)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = -x \end{cases}$$

Ответ: (-2,9; 2,9), (2,9; -2,9).



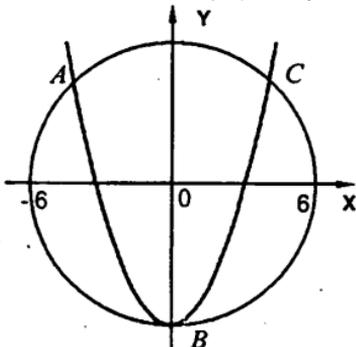
б)
$$\begin{cases} y = 0,5x^2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Ответ: (-0,8; 0,2), (2,5; 3,5).



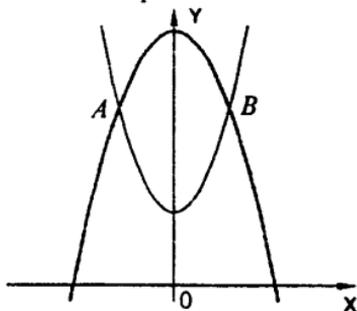
г)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ y = x^2 - 6 \end{cases}$$

Ответ: (-3,4; 5), (3,4; 5), (0; -6).



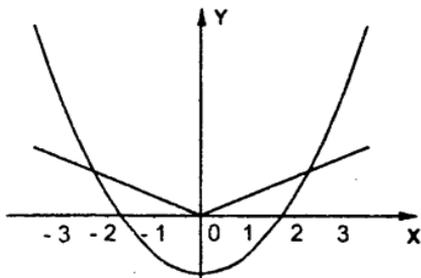
$$4. \text{ а) } \begin{cases} y = -x^2 + 8 \\ y = x^2 + 4 \end{cases}$$

Ответ: два решения.



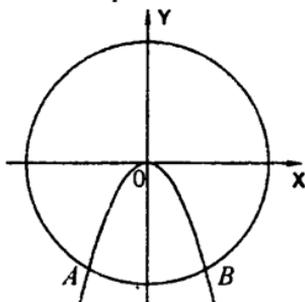
$$5. \text{ а) } \begin{cases} y = |x| \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$$

Две точки пересечения: $A(-2; 2)$, $B(2; 2)$.



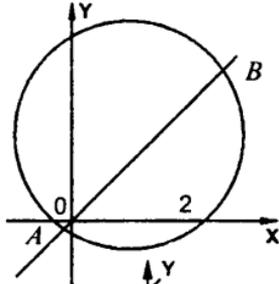
$$6) \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = -x^2 \end{cases}$$

Ответ: два решения.



$$6) \begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16 \\ y = x \end{cases}$$

$A(-0.5; -0.5)$ и $B(5.2; 5.2)$.



$$6. \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - y = m, y = x - m \end{cases}$$

Изобразим графики функций.

Рассмотрим $\triangle AOC$:

$\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \angle O = 45^\circ$.

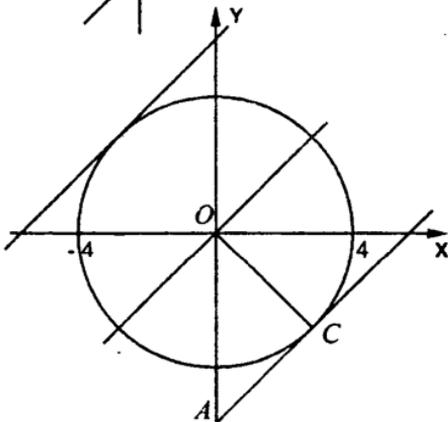
$OC = 3$ (радиус), $AC = 3$;

$OA = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

Ясно, что при $m = \pm 3\sqrt{2}$ получаем одну точку пересечения;

при $m \in (-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$ — две точки; при $|m| > 3\sqrt{2}$ — решений нет.

Ответ: а) $m = \pm 3\sqrt{2}$; б) $(-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$; в) $(-\infty; -3\sqrt{2}) \cup (3\sqrt{2}; +\infty)$.



С-15. Решение систем уравнений второй степени

$$1. \begin{cases} xy+42=0 \\ x^2-2y-61=0 \end{cases}, \begin{cases} 7 \cdot (-6)+42=0 \\ 49-2 \cdot (-6)-61=0 \end{cases} \quad \text{— верно, значит, является.}$$

$$2. \begin{cases} x^2-5y-24=0 \\ y=x-2 \end{cases}, \quad x^2-5(x-2)-24=0, \quad x^2-5x+10-24=0;$$

$$x^2-5x-14=0, \quad D=25+4 \cdot 14=81,$$

$$x_1 = \frac{5+9}{2} = 7; \quad y_1 = 7-2=5, \quad (7; 5); \quad x_2 = -2; \quad y_2 = -2-2 = -4, \quad (-2; -4).$$

$$\text{Проверка: } (7; 5); \quad \begin{cases} 7^2-5 \cdot 5-24=0 \\ 5=7-2 \end{cases} \quad \text{— верно;}$$

$$(-2; -4); \quad \begin{cases} (-2)^2-5 \cdot (-4)-24=0 \\ -4=-2-2 \end{cases} \quad \text{— верно.}$$

Ответ: (7; 5), (-2; -4).

$$3. 1) \text{ а) } \begin{cases} x^2-2y=54 \\ y=x-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-2(x-3)=54 \\ x^2-2x-48=0 \end{cases};$$

$$D=4+4 \cdot 48=196; \quad x_1 = \frac{2+14}{2} = 8; \quad x_2 = -6; \quad y_1 = 8-3=5; \quad y_2 = -6-3=-9.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x=y+3 \\ xy-y=7 \end{cases} \quad \begin{cases} y(y+3)-y=7; \quad y^2+2y-7=0; \\ D=4+4 \cdot 7=32; \end{cases}$$

$$y_{1,2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{2}; \quad x_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2} + 3 = 2 \pm 2\sqrt{2}.$$

$$\text{в) } \begin{cases} xy+x^2=4 \\ y=x+2 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+2)+x^2=4 \\ 2x^2+2x-4=0 \end{cases}; \quad x^2+x-2=0; \quad D=1+4 \cdot 2=9;$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1; \quad x_2 = -2; \quad y_1 = 3; \quad y_2 = 0.$$

Ответ: а) (8; 5), (-6; -9); б) $(2 \pm 2\sqrt{2}; -1 \pm 2\sqrt{2})$; в) (1; 3); (-2; 0).

$$2) \text{ а) } \begin{cases} 4y+x=0 \\ x^2+y^2=17 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-4y \\ 16y^2+y^2=17, \quad 17y^2=17, \quad y_{1,2} = \pm 1, \quad x_{1,2} = \pm 4. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+y^2=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-2y \\ 2-4y+y^2=-1 \end{cases};$$

$$y^2-4y+3=0; \quad D=4; \quad y_1 = \frac{4+2}{2} = 3; \quad y_2 = 1; \quad x_1 = 1-2 \cdot 3 = -5; \quad x_2 = 1-2 \cdot 1 = -1.$$

$$\text{в) } \begin{cases} xy+y^2=24 \\ x-2y=7 \end{cases} \quad \begin{cases} y(7+2y)+y^2=24 \\ x=7+2y \end{cases}, \quad 3y^2+7y-24=0,$$

$$D = 49 + 4 \cdot 3 \cdot 24 = 337, \quad y_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{337}}{6}, \quad x_{1,2} = 7 + \frac{-7 \pm \sqrt{337}}{3} = \frac{14 \pm \sqrt{337}}{3}.$$

Ответ: а) $(\pm 4; \pm 1)$; б) $(-5; 3)$; $(-1; 1)$; в) $\left(\frac{14 \pm \sqrt{337}}{3}; \frac{-7 \pm \sqrt{337}}{6}\right)$.

3) а)
$$\begin{cases} (x-2)(y+1) = 36 \\ x-2y = 6 \end{cases} \quad \left| \begin{cases} (4+2y)(y+1) = 36 \\ x = 6+2y \end{cases} \right. ; 2y^2 + 6y - 32 = 0;$$

$$y^2 + 3y - 16 = 0, \quad D = 9 + 4 \cdot 16 = 73; \quad y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}; \quad x_{1,2} = 6 - 3 \pm \sqrt{73} = 3 \pm \sqrt{73}.$$

б)
$$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 4 \\ 3x + y = 10 \end{cases} \quad \left| \begin{cases} x^2 + x(10-3x) - (10-3x)^2 = 4 \\ y = 10-3x \end{cases} \right. ;$$

$$x^2 + 10x - 3x^2 - 100 + 60x - 9x^2 = 4, \quad 11x^2 - 70x + 104 = 0; \quad D = 4900 - 4 \cdot 11 \cdot 104 = 324;$$

$$x_1 = \frac{70+18}{22} = 4; \quad x_2 = \frac{26}{11}, \quad y_1 = 10 - 3 \cdot 4 = -2, \quad y_2 = 10 - 3 \cdot \frac{26}{11} = \frac{32}{11}.$$

Ответ: а) $(3 \pm \sqrt{73}; \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2})$; б) $(4; -2)$; $(\frac{26}{11}; \frac{32}{11})$.

4.
$$\begin{cases} 5x + 3y = 14 \\ 2x - 5y = 18 \\ x^2 + y^2 + 2xy - x = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{cases} x = \frac{14-3y}{5} \\ \frac{28-6y}{5} - 5y = 18 \end{cases} \right. , \quad 28 - 6y - 25y = 90, \quad 31y = -62;$$

$$y = -2, \quad x = 4, \quad 4^2 + (-2)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-2) - 4 = 0 \quad - \text{верно.}$$

Ответ: одно решение: $(4; -2)$.

5. а)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ xy = 8 \end{cases} \quad \left| \begin{cases} x^2 + \frac{64}{x^2} = 18 \\ y = \frac{8}{x} \end{cases} \right. ; \quad x^4 - 18x^2 + 64 = 0; \quad D = 324 - 4 \cdot 64 = 68;$$

$$x_{1,2}^2 = \frac{18 \pm 2\sqrt{17}}{2} = 9 \pm \sqrt{17}; \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{9 + \sqrt{17}}; \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{9 - \sqrt{17}};$$

$$y_{1,2} = \pm \frac{8}{\sqrt{9 + \sqrt{17}}}, \quad y_{3,4} = \pm \frac{8}{\sqrt{9 - \sqrt{17}}}.$$

б)
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 41 \\ 2x^2 + y^2 = 59 \end{cases} \quad \left| \begin{cases} 4x^2 = 100; \quad x^2 = 25; \quad x_{1,2} = \pm 5; \quad y^2 = 50 - 41 = 9; \quad y_{1,2} = \pm 3. \end{cases} \right.$$

в)
$$\begin{cases} x^2 - 3x - 2y = 4 \\ x^2 + x - 3y = 18 \end{cases} \quad \left| \begin{cases} y = \frac{x^2 - 3x - 4}{2} \\ x^2 + x - \frac{3x^2 - 9x - 12}{2} = 18 \end{cases} \right. , \quad 2x^2 + 2x - 3x^2 + 9x + 12 = 36;$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0; D = 121 - 4 \cdot 24 = 25, x_1 = \frac{11+5}{2} = 8; x_2 = 3,$$

$$y_1 = \frac{64 - 24 - 4}{2} = 18, y_2 = \frac{9 - 9 - 4}{2} = -2.$$

Ответ: а) $\left(\pm\sqrt{9+\sqrt{17}}; \pm\frac{8}{\sqrt{9+\sqrt{17}}} \right), \left(\pm\sqrt{9-\sqrt{17}}; \pm\frac{8}{\sqrt{9-\sqrt{17}}} \right)$

б) $(\pm 5; 3); (\pm 5; -3);$ в) $(8; 18)$ и $(3; -2)$.

$$6. x^2 + (x^2 - 10 - 1)^2 = 13; x^2 + (x^2 - 11)^2 = 13; x^2 + x^4 - 22x^2 + 121 = 13; x^4 - 21x^2 + 108 = 0;$$

$$D = 9; x_1^2 = \frac{21+3}{2} = 12; x_2^2 = 9; x_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}; x_{3,4} = \pm 3; y_{1,2} = 12 - 10 = 2, y_{3,4} = 9 - 10 = -1.$$

Ответ: $(\pm 2\sqrt{3}; 2), (\pm 3; -1)$.

$$7. \text{ а) } \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ 2x - y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{2x-2} = \frac{1}{12} \\ y = 2x - 2 \end{cases}; 12(2x-2) - 12x - x(2x-2) = 0;$$

$$6(2x-2) - 6x - x(x-1) = 0, 12x - 12 - 6x - x^2 + x = 0, x^2 - 7x + 12 = 0,$$

$$D = 1, x_1 = \frac{7+1}{2} = 4; x_2 = 3; y_1 = 6; y_2 = 4.$$

$$\text{ б) } \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3} \\ x - y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{6+y}{y} + \frac{y}{6+y} - \frac{10}{3} = 0 \\ x = 6+y \end{cases},$$

$$3(6+y)^2 + 3y^2 - 10y(6+y) = 0, 3(36 + 12y + y^2) + 3y^2 - 60y - 10y^2 = 0,$$

$$108 + 36y + 3y^2 + 3y^2 - 60y - 10y^2 = 0, 4y^2 + 24y - 108 = 0, y^2 + 6y - 27 = 0,$$

$$D = 36 + 4 \cdot 27 = 144, y_1 = \frac{-6+12}{2} = 3, y_2 = -9, x_1 = 9, x_2 = -3.$$

Ответ: а) $(4; 6), (3; 4);$ б) $(9; 3), (-3; -9)$.

С-16. Решение задач с помощью систем уравнений второй степени

$$1. \text{ Пусть } x - \text{первое число, } y - \text{второе число, тогда } \begin{cases} x + y = 25 \\ xy = 144 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 25 - x \\ x(25 - x) = 144 \end{cases};$$

$$x^2 - 25x + 144 = 0; D = 49; x_1 = \frac{25+7}{2} = 16; x_2 = 9; y_1 = 9; y_2 = 16.$$

Ответ: 16 и 9.

2. Пусть x см – один катет, тогда $(x+4)$ см – другой катет. Используя теорему Пифагора, получаем: $x^2 + (x+4)^2 = 400$.

$$2x^2 + 8x + 16 - 400 = 0, x^2 + 4x - 192 = 0, D = 28^2, x_1 = \frac{-4 + 28}{2} = 12, x_2 < 0.$$

12 см – первый катет, 12 + 4 = 16 см – второй катет.

Ответ: 16 см и 12 см.

3. Пусть x м – длина, y м – ширина, тогда xy м² – площадь или 3250 м²:

$2(x + y)$ м – периметр или 230 м. Получаем систему:

$$\begin{cases} xy = 3250 \\ 2(x + y) = 230 \end{cases} \quad \begin{cases} y(115 - y) = 3250; \\ x = 115 - y \end{cases}; \quad y^2 - 115y + 3250 = 0;$$

$$D = 225; y_1 = \frac{115 + 15}{2} = 65; y_2 = 50; x_1 = 115 - 65 = 50; x_2 = 115 - 50 = 65.$$

Ответ: 50 и 65 м.

4. Пусть x см – длина, y см – ширина, тогда $2(x + y)$ см – периметр или 24 см;
 $(x^2 + y^2)$ см² – сумма площадей квадратов или 148 см². Получаем систему:

$$\begin{cases} 2(x + y) = 24 \\ x^2 + y^2 = 148 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 12 - y \\ (12 - y)^2 + y^2 = 148 \end{cases}$$

$$144 - 24y + 2y^2 = 148, 2y^2 - 24y - 4 = 0, y^2 - 12y - 2 = 0, D = 144 + 4 \cdot 2 = 152,$$

$$y_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{152}}{2} = 6 \pm \sqrt{38}, y = 6 + \sqrt{38}, x = 6 - \sqrt{38}.$$

Ответ: $6 + \sqrt{38}$ см и $6 - \sqrt{38}$ см.

5. Пусть x – первое число, y – второе число, тогда xy – их произведение,
 $(x + y)$ – их сумма, $3y$ – утроенное второе число. Получаем систему:

$$\begin{cases} xy = x + y + 13 \\ x - 3y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} y(3y + 9) = 3y + 9 + y + 13 \\ x = 3y + 9 \end{cases}$$

$$3y^2 + 9y = 4y + 22, 3y^2 + 5y - 22 = 0, D = 25 + 4 \cdot 3 \cdot 22 = 289,$$

$$y_1 = \frac{-5 + 17}{6} = 2, y_2 = -\frac{11}{3}, x_1 = 3 \cdot 2 + 9 = 15, x_2 = -11 + 9 = -2.$$

Ответ: $x = 15, y = 2$ и $x = -2, y = -\frac{11}{3}$.

6. Пусть x км/ч – скорость I автомобиля, y км/ч – скорость II автомобиля,
 $3x, 3y$ км – прошли за 3 ч соответственно I и II автомобили. $\frac{360}{x}$ ч, $\frac{360}{y}$ ч –
 потратили на весь путь I и II автомобили соответственно. Получаем систему:

$$\begin{cases} 3x - 3y = 30 \\ \frac{360}{x} + \frac{1}{2} = \frac{360}{y} \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 10; \\ \frac{360}{10 + y} + \frac{1}{2} - \frac{360}{y} = 0 \end{cases}$$

$$720y + y^2 + 10y - 7200 - 720y = 0, y^2 + 10y - 7200 = 0,$$

$$D = 100 + 4 \cdot 7200 = 170^2, \quad y_1 = \frac{-10 + 170}{2} = 80, \quad y_2 < 0, \quad x_1 = 10 + 80 = 90.$$

90 км/ч и 80 км/ч – скорости I и II автомобилей соответственно

Ответ: 90 км/ч и 80 км/ч.

7. Пусть I – вся работа, x ч – выполняет всю работу I тракторист, тогда $(x+4)$ ч – выполняет всю работу II тракторист, $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+4}$ часть работы – производительность I и II. Известно, что за 2 ч 40 мин оба тракториста, работая совместно,

$$\text{сделают всю работу, т.е. } \frac{8}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} \right) = 1; \quad \frac{8}{3x} + \frac{8}{3(x+4)} - 1 = 0;$$

$$8x + 32 + 8x - 3x^2 - 12x = 0; \quad 3x^2 - 4x - 32 = 0; \quad D = 16 + 12 \cdot 32 = 400; \quad x_1 = \frac{4+20}{6} = 4,$$

$x_2 < 0$; 4 ч и 8 ч потребуется I и II трактористам, чтобы выполнить всю работу.

Ответ: 4 и 8 ч.

С-17. Последовательности

1. а) 14, 13, 12, 11, 10; б) 1, 8, 27, 64, 125; в) 7, 12, 17, 22, 27.

2. $x_n = 6n - 1$, а) $x_1 = 6 \cdot 1 - 1 = 5$, б) $x_4 = 6 \cdot 4 - 1 = 23$, в) $x_{20} = 6 \cdot 20 - 1 = 119$,

г) $x_{100} = 6 \cdot 100 - 1 = 599$, д) $x_k = 6k - 1$, е) $x_{k+2} = 6(k+2) - 1 = 6k + 11$.

3. а) $a_n = n - 2$; $a_3 = 3 - 2 = 1$; $a_6 = 6 - 2 = 4$; $a_{20} = 20 - 2 = 18$;

$$\text{б) } a_n = \frac{3n-1}{2}; \quad a_3 = \frac{9-1}{2} = 4; \quad a_6 = \frac{18-1}{2} = 8,5; \quad a_{20} = \frac{60-1}{2} = 29,5;$$

в) $a_n = n^2$; $a_3 = 3^2 = 9$; $a_6 = 6^2 = 36$; $a_{20} = 20^2 = 400$;

г) $a_n = n(n+1)$; $x_3 = 3(3+1) = 12$; $a_6 = 6(6+1) = 42$; $a_{20} = 20(20+1) = 420$;

д) $a_n = -n^2 + 6$; $a_3 = -9 + 6 = -3$; $a_6 = -36 + 6 = -30$; $a_{20} = -400 + 6 = -394$;

е) $a_n = (-1)^n$; $a_3 = (-1)^3 = -1$; $a_6 = (-1)^6 = 1$; $a_{20} = (-1)^{20} = 1$.

4. $25 = 46 - 3n$, $3n = 21$, $n = 7$.

5. а) $C_1 = 8$, $C_{n+1} = C_n - 1$; $C_2 = C_1 - 1 = 7$, $C_3 = C_2 - 1 = 6$, $C_4 = C_3 - 1 = 5$, $C_5 = C_4 - 1 = 4$.

б) $C_1 = 32$, $C_{n+1} = 0,5C_n$; $C_2 = 0,5C_1 = 16$, $C_3 = 0,5C_2 = 8$, $C_4 = 0,5C_3 = 4$, $C_5 = 0,5C_4 = 2$.

6. 0,2; 0,22; 0,222; 0,2222; 0,22222.

7. $b_n = n^2 - 4n + 9$, а) $9 = n^2 - 4n + 9$, $n^2 - 4n = 0$, $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, значит, $9 = b_4$;

$$\text{б) } 59 = n^2 - 4n + 9, \quad n^2 - 4n - 50 = 0, \quad D = 16 + 4 \cdot 50 = 216, \quad n_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{216}}{2} \notin N,$$

значит, 59 – не член $\{b_n\}$; в) $409 = n^2 - 4n + 9$, $n^2 - 4n - 400 = 0$,

$$D = 16 + 4 \cdot 400 = 1616, \quad n_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{1616}}{2} \notin N, \quad \text{значит, } 409 \text{ – не член } \{b_n\}.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) нет.

8. а) $x_1 = 6$, $x_{n+1} = x_n + 6$, $x_n = 6n$; б) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 3x_n$, $x_n = 3^{n-1}$;

С-18. Арифметическая прогрессия. Формула n -го члена

1. $a_1 = 2,8$; $a_2 = -0,4$; $d = a_2 - a_1 = -0,4 - 2,8 = -3,2$;
 $a_3 = a_2 + d = -0,4 - 3,2 = -3,6$; $a_4 = a_3 + d = -3,6 - 3,2 = -6,8$;
 $a_5 = a_4 + d = -6,8 - 3,2 = -10$; $a_6 = a_5 + d = -10 - 3,2 = -13,2$.
2. $a_1 = -1,2$, $d = 3$; а) $a_4 = a_1 + 3d = -1,2 + 9 = 7,8$; б) $a_8 = a_1 + 7d = -1,2 + 21 = 19,8$;
 в) $a_{21} = a_1 + 20d = -1,2 + 60 = 58,8$; г) $a_{k+2} = a_1 + (k-1)d = -1,2 + 3k - 3 = -4,2 + 3k$;
3. а) $a_1 = 5$, $a_8 = 19$; $a_8 = a_1 + 7d$, $d = \frac{a_8 - a_1}{7} = \frac{19 - 5}{7} = 2$.
 б) $a_1 = 2$, $a_{11} = -5$; $a_{11} = a_1 + 10d$, $d = \frac{a_{11} - a_1}{10} = \frac{-5 - 2}{10} = -0,7$.
- в) $a_1 = -0,3$, $a_7 = 1,9$; $a_7 = a_1 + 6d$, $d = \frac{a_7 - a_1}{6} = \frac{1,9 + 0,3}{6} = \frac{1,1}{3} = \frac{11}{30}$.
4. $a_1 = 80$; $d = 17$; $a_8 = a_1 + 7d = 80 + 7 \cdot 17 = 199$; $a_{12} = a_1 + 11d = 80 + 11 \cdot 17 = 267$.
5. $b_1 = 12$, $d = 3$; а) $b_n = -6 = b_1 + d(n-1) = 12 + 3(n-1) = 3n + 9$, $3n = -15$, $n = -5 \notin N$,
 значит, -6 – не член $\{b_n\}$; б) $0 = 3n + 9$, $n = -3 \notin N$, значит, 0 – не член $\{b_n\}$;
 в) $9 = 3n + 9$, $n = 0 \notin N$, значит, 9 – не член $\{b_n\}$;
6. $a_1 = 6,5$, $d = 8 - 6,5 = 1,5$; а) $13 = a_1 + d(n-1) = 6,5 + 1,5(n-1) = 1,5n + 5$;
 $8n = 1,5n$, $n = \frac{8}{1,5} \notin N$, значит, 13 не встретится;
- б) $22,5 = 1,5n + 5$; $1,5n = 17,5$, $n = \frac{17,5}{1,5} \notin N$, значит, $22,5$ не встретится.
- в) $36 = 1,5n + 5$; $1,5n = 31$, $n = \frac{31}{1,5} \notin N$, значит, 36 не встретится.
7. $64, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, 46$, $a_1 = 64$, $a_7 = 46$, $a_7 = a_1 + 6d$, $d = \frac{a_7 - a_1}{6} = -3$, поэтому,
 $a_2 = a_1 + d = 61$, $a_3 = a_2 + d = 58$, $a_4 = a_3 + d = 55$, $a_5 = a_4 + d = 52$, $a_6 = a_5 + d = 49$.
Ответ: 61, 58, 55, 52, 49.
8. $x_4 = x_1 + 3d$, $x_6 = x_1 + 5d$,
 $x_4 + x_{n-4} = x_1 + 3d + x_1 + (n-4-1)d = 2x_1 + 3d + nd - 5d = 2x_1 + nd - 2d$,
 $x_6 + x_{n-6} = x_1 + 5d + x_1 + d(n-6-1) = 2x_1 + 5d + nd - 7d = 2x_1 + nd - 2d = x_4 + x_{n-4}$.
9. $a_1 = 47$. Пусть $a_2 = x^2$, $a_3 = (x+1)^2$, где $x \in N$. Тогда $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$.
 Получаем: $x^2 - 47 = (x+1)^2 - x^2$; $x^2 - 47 = 2x + 1$; $x^2 - 2x - 48 = 0$,
 $D = 4 + 4 \cdot 48 = 4 \cdot 49$, $x_1 = \frac{2 + 2 \cdot 7}{2} = 8$, $x_2 < 0$. Значит, $a_2 = 8^2 = 64$, $a_3 = 81$.
Ответ: $a_2 = 64$ и $a_3 = 81$.

10. По свойству арифметической прогрессии $\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c}$.

Нужно доказать, что $b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}$.

Докажем это: $\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} = 0$, $\frac{2}{a+c} - \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b} = 0$,

$$2(a+b)(b+c) - (a+b)(a+c) - (a+c)(b+c) = 0,$$

$$2ab + 2b^2 + 2ac + 2bc - a^2 - ab - ac - bc - ab - bc - ac - c^2 = 0, \quad b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}, \text{ ч.т.д.}$$

С-19. Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии

1. $a_1 = 4; a_2 = -6; d = a_2 - a_1 = -10;$

а) $S_8 = \frac{2a_1 + d(8-1)}{2} \cdot 8 = \frac{8 - 10 \cdot 7}{2} \cdot 8 = -62 \cdot 4 = -248;$

б) $S_{18} = \frac{2a_1 + d(18-1)}{2} \cdot 18 = (8 - 10 \cdot 17) \cdot 9 = -1458;$

в) $S_{35} = \frac{2a_1 + d(35-1)}{2} \cdot 35 = \frac{8 - 10 \cdot 34}{2} \cdot 35 = -5810;$

г) $S_k = \frac{2a_1 + d(k-1)}{2} \cdot k = \frac{8 - 10 \cdot (k-1)}{2} \cdot k = k(4 - 5k + 5) = k(9 - 5k).$

2. а) $S_{10} = \frac{2a_1 + d(10-1)}{2} \cdot 10 = \frac{10 + 3 \cdot 9}{2} \cdot 10 = 185;$

б) $S_{10} = \frac{2a_1 + d(10-1)}{2} \cdot 10 = (-16 + 4 \cdot 9) \cdot 5 = 100;$

в) $S_{10} = \frac{2a_1 + d(10-1)}{2} \cdot 10 = (37 - 2,5 \cdot 9) \cdot 5 = 72,5;$

г) $S_{10} = (2a_1 + 9d) \cdot 5 = (4 - 2\sqrt{2} + 9\sqrt{2}) \cdot 5 = 20 + 35\sqrt{2}.$

3. $x_n = 4n + 5, x_1 = 4 + 5 = 9, x_6 = 4 \cdot 6 + 5 = 29, x_{20} = 80 + 5 = 85, x_k = 4k + 5,$

$$S_6 = \frac{x_1 + x_6}{2} \cdot 6 = 38 \cdot 3 = 114, \quad S_{20} = \frac{x_1 + x_{20}}{2} \cdot 20 = 940, \quad S_k = \frac{9 + 4k + 5}{2} \cdot k = k(7 + 2k).$$

Ответ: $S_6 = 114; S_{20} = 940; S_k = k(7 + 2k).$

4. а) $a_1 = 1, d = 1, a_{50} = 50, S_{50} = \frac{1+50}{2} \cdot 50 = 51 \cdot 25 = 1275;$ б) $a_1 = 4, d = 4, a_{25} = 100,$

$$S_{25} = \frac{4+100}{2} \cdot 25 = 1300; \quad в) a_1 = 1, d = 2, a_{50} = 99, S_{50} = \frac{1+99}{2} \cdot 50 = 2500.$$

$$5. \text{ а) } a_1 = 6, a_{11} = 46; d = \frac{a_{11} - a_1}{10} = \frac{40}{10} = 4; S_{12} = \frac{2 \cdot 6 + 4 \cdot 11}{2} \cdot 12 = 28 \cdot 12 = 336;$$

$$6) a_6 = 12, a_{16} = 100, \begin{cases} 12 = a_1 + 5d \\ 100 = a_1 + 15d \end{cases} \left| \begin{array}{l} a_1 = 12 - 5d \\ a_1 = 100 - 15d \end{array} \right., \begin{cases} 12 - 5d = 100 - 15d \\ 10d = 88, d = 8,8, a_1 = 12 - 5 \cdot 8,8 = -32; S_{12} = \frac{-64 + 8,8 \cdot 11}{2} \cdot 12 = 196,8. \end{cases}$$

$$10d = 88, d = 8,8, a_1 = 12 - 5 \cdot 8,8 = -32; S_{12} = \frac{-64 + 8,8 \cdot 11}{2} \cdot 12 = 196,8.$$

$$6. a_1 = 12, d = 3; S_{1800} = \frac{24 + 3 \cdot 1799}{2} \cdot 1800 = 4878900 \text{ (м)}.$$

$$7. S_3 = 60, S_7 = 56, \begin{cases} 60 = \frac{2a_1 + 2d}{2} \cdot 3 \\ 56 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 20 = a_1 + d \\ 8 = a_1 + 3d \end{array} \right., \begin{cases} 20 - d = 8 - 3d \\ 2d = -12, d = -6, a_1 = 8 + 3 \cdot 6 = 26. \end{cases}$$

$$2d = -12, d = -6, a_1 = 8 + 3 \cdot 6 = 26.$$

Ответ: $a_1 = 26$ и $d = -6$.

8. Из условия задачи ясно, что за первый час расстояние между автомобилями сократится на $60 + 45 = 105$ км, а за каждый последующий час — на 5 км больше. Значит, $a_1 = 105, d = 5; S_n = 450; n = ?$;

$$450 = \frac{210 + 5 \cdot (n-1)}{2} \cdot n; 900 = (205 + 5n) \cdot n, 5n^2 + 205n - 900 = 0,$$

$$n^2 + 41n - 180 = 0; D = 49^2; n_1 = \frac{-41 + 49}{2} = 4; n_2 < 0.$$

Итак, через 4ч автомобили встретятся.

$$9. \text{ а) } 2 + 6 + 10 + \dots + x = 450, d = 4, a_1 = 2, S_n = 450, 450 = \frac{4 + 4(n-1)}{2} \cdot n,$$

$$450 = (2 + 2(n-1)) \cdot n, 2n^2 = 450, n^2 = 225, n = 15, a_{15} = a_1 + 14d = 2 + 4 \cdot 14 = 58;$$

$$\text{ б) } 30 + 27 + 24 + \dots + x = 162, d = -3, a_1 = 30, S_n = 162, 162 = \frac{60 - 3(n-1)}{2} \cdot n,$$

$$324 = (63 - 3n) \cdot n, 3n^2 - 63n + 324 = 0, n^2 - 21n + 108 = 0, D = 441 - 4 \cdot 108 = 9,$$

$$n_1 = \frac{21 + 3}{2} = 12, n_2 = 9, a_9 = a_1 + 8d = 30 - 24 = 6; a_{12} = a_1 + 11d = 30 - 33 = -3.$$

Ответ: а) $n = 15, a_{15} = 58$; б) $n_1 = 12, a_{12} = -3$ и $n_2 = 9, a_9 = 6$.

$$10. \text{ а) } S_n = n^2 + n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n, n+1 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} = a_1 + \frac{dn}{2} - \frac{d}{2},$$

$$\begin{cases} 1 = \frac{d}{2}, & d = 2 \\ 1 = a_1 - \frac{d}{2}, & a_1 = 2 \end{cases}, \text{ значит, } \{a_n\} \text{ — арифметическая прогрессия.}$$

$$6) S_n = n(n+4) = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n, \quad n+4 = a_1 + \frac{dn}{2} - \frac{d}{2}, \quad \begin{cases} \frac{d}{2} = 1, & d = 2 \\ 4 = a_1 - \frac{d}{2}, & a_1 = 5 \end{cases}$$

Значит, $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.

$$в) S_n = 4n^2 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n, \quad 4n = a_1 + \frac{dn}{2} - \frac{d}{2}, \quad \begin{cases} \frac{d}{2} = 4, & d = 8 \\ a_1 - \frac{d}{2} = 0, & a_1 = 4 \end{cases}$$

Значит, $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.

С-20. Геометрическая прогрессия. Формула n -го члена

1. $b_1 = 1,6$; $b_2 = 0,8$; $q = \frac{b_2}{b_1} = 0,5$; $b_3 = b_2 \cdot q = 0,4$; $b_4 = b_3 \cdot q = 0,2$;

$$b_5 = b_4 \cdot q = 0,1; \quad b_6 = b_5 \cdot q = 0,05.$$

2. $a_1 = 3,2$; $q = \frac{1}{2}$; а) $a_2 = a_1 q = 1,6$; б) $a_3 = a_1 q^2 = 3,2 \cdot \frac{1}{8} = 0,4$;

в) $a_7 = a_1 q^6 = 3,2 \cdot \frac{1}{64} = 0,05$; г) $a_{k+1} = a_1 q^k = \frac{3,2}{2^k}$.

3. а) $b_1 = 2$; $q = 3$; $b_6 = b_1 q^5 = 2 \cdot 3^5 = 486$; б) $b_1 = 16$; $q = -\frac{1}{2}$; $b_9 = b_1 q^8 = 16 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{1}{16}$;

в) $b_1 = 128$; $q = \frac{1}{4}$; $b_4 = b_1 q^3 = 128 \cdot \frac{1}{64} = 2$; г) $b_1 = 4$; $q = \sqrt{3}$; $b_7 = b_1 q^6 = 4 \cdot (\sqrt{3})^6 = 108$.

4. а) $a_5 = \frac{1}{64}$, $q = \frac{1}{2}$; $a_1 = \frac{a_5}{q^4} = \frac{2^4}{64} = \frac{1}{4}$; б) $a_6 = 243$, $q = -3$; $a_1 = \frac{a_6}{q^5} = -\frac{243}{243} = -1$.

5. а) $b_5 = 11$; $b_7 = 99$; $b_7 = b_5 q^2$; $q = \pm \sqrt{\frac{b_7}{b_5}} = \pm 3$;

б) $b_6 = 100$; $b_8 = 9$; $b_8 = b_6 q^2$; $q = \pm \sqrt{\frac{b_8}{b_6}} = \pm 0,3$.

6. $\frac{1}{16}$, b_2 , b_3 , b_4 , 16 ; $b_5 = b_1 \cdot q^4$; $q = \pm \sqrt[4]{\frac{b_5}{b_1}} = \pm 4$;

$$b_2 = b_1 \cdot q = \pm \frac{1}{4}; \quad b_3 = b_2 \cdot q = 1; \quad b_4 = b_3 \cdot q = \pm 4;$$

Ответ: $\pm \frac{1}{4}$, 1 , ± 4 .

7. а) $a_1 - 1$, $a_2 - 1$, $a_3 - 1$ – не геометрическая прогрессия. Для доказательства можно взять, например, $a_n = 2^n$. Тогда $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_1 - 1 = 1$, $a_2 - 1 = 3$,

$a_3 - 1 = 7, \frac{3}{1} \neq \frac{7}{3}$, значит, это уже не геометрическая прогрессия.

б) $4a_1, 4a_2, 4a_3$ – очевидно, геометр. прогрессия с тем же самым знаменателем.

в) $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}$ – геометрическая прогрессия.

$$8. \begin{cases} b_3 - b_3 = 72 \\ b_4 - b_2 = 36 \end{cases} \left| \begin{array}{l} b_1 q^4 - b_1 q^2 = 72 \\ b_1 q^3 - b_1 q = 36 \end{array} \right. , \frac{q^3 - q}{q^2 - 1} = 2; \frac{q(q^2 - 1)}{q^2 - 1} = 2, q = \pm 1 \text{ или } q = 2,$$

$q = 1$ – не подходит к условию задачи, т.к. тогда бы $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5$, $b_3 - b_3 = 0 \neq 72$, $q = -1$ – не подходит по тем же причинам.

Если $q = 2$, то $b_1 = \frac{36}{q^3 - q} = \frac{36}{6} = 6$.

Ответ: $b_1 = 6$ и $q = 2$.

$$9. \begin{cases} b_1 + b_4 = 13 \\ b_2 + b_3 = 4 \end{cases} \left| \begin{array}{l} b_1 + b_1 q^3 = 13 \\ b_1 q + b_1 q^2 = 4 \end{array} \right. , \frac{1 + q^3}{q + q^2} = \frac{13}{4}, \frac{(1 + q)(1 - q + q^2)}{q(1 + q)} = \frac{13}{4},$$

$$q_1 = -1, 4q^2 - 4q + 4 = 13q, 4q^2 - 17q + 4 = 0, D = 289 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 225, q_2 = \frac{17 + 15}{8} = 4,$$

$$q_3 = \frac{1}{4}, q = -1 \text{ – не подходит, т.к. тогда бы } b_2 = -b_3; b_2 + b_3 = 0 \neq 4.$$

Если $q = 4$, то $b_1 = \frac{13}{1 + q^3} = \frac{13}{65} = \frac{1}{5}$, $b_2 = \frac{4}{5}$, $b_3 = \frac{16}{5}$, $b_4 = \frac{64}{5}$,

Если $q = \frac{1}{4}$, то $b_1 = \frac{13}{1 + \frac{1}{64}} = \frac{64}{5}$, $b_2 = \frac{16}{5}$, $b_3 = \frac{4}{5}$, $b_4 = \frac{1}{5}$

Ответ: $\frac{64}{5}, \frac{16}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}$.

10. a, b, c, d – геометрическая прогрессия, т.е. $b^2 = ac$, $c^2 = bd$. Надо доказать, что $(a - d)^2 = (a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2$, т.е., что $a^2 - 2ad + d^2 = a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 + b^2 - 2bd + d^2$, $2b^2 + 2c^2 = 2ac + 2bc + 2bd - 2ad$, Т.к. a, b, c, d – геометрическая прогрессия, то $bc = ad$; $2b^2 + 2c^2 = 2(ac + bd)$, $2bc - 2ad = 0$, т.е. $2b^2 + 2c^2 = 2(ac + bd) + 2bc - 2ad$. Видим, что левая часть равна правой. Следовательно, данное равенство является тождеством.

С–21. Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии

$$1. \text{ а) } b_1 = 27, q = \frac{1}{3}; S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{27 \left(\frac{1}{729} - 1 \right)}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{27 \cdot 728 \cdot 3}{729 \cdot 2} = \frac{364}{9};$$

$$\text{б) } b_1 = -9, q = 2; S_6 = \frac{-9(2^6 - 1)}{2 - 1} = -567;$$

$$\text{в) } b_1 = 16, q = -\frac{1}{2}; S_6 = \frac{16 \cdot \left(\frac{1}{64} - 1\right)}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{16 \cdot 63 \cdot 2}{64 \cdot 3} = \frac{21}{2};$$

$$\text{г) } b_1 = 3\sqrt{2}, q = \sqrt{2}; S_6 = \frac{3\sqrt{2}(8-1)}{\sqrt{2}-1} = 21\sqrt{2}(\sqrt{2}+1).$$

$$2. \text{ а) } b_1 = 8, q = \frac{1}{2}; S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{8\left(\frac{1}{32} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{8 \cdot 31 \cdot 2}{32} = 15,5;$$

$$\text{б) } b_1 = 1,5, q = -2; S_5 = \frac{1,5(-32-1)}{-2-1} = 16,5; \text{ в) } b_1 = 3, q = 3; S_5 = \frac{3(3^5-1)}{3-1} = 363;$$

$$\text{г) } b_1 = \sqrt{2}, q = \sqrt{2}; S_5 = \frac{\sqrt{2}(4\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}(4\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = \\ = \sqrt{2}(8 - \sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}(7 + 3\sqrt{2}).$$

$$3. \text{ а) } a_1 = 81, q = \frac{1}{3}; S_6 = \frac{81 \cdot \left(\frac{1}{729} - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{364}{3}; \text{ б) } a_1 = 18, q = -\frac{1}{2};$$

$$S_5 = \frac{18\left(-\frac{1}{32} - 1\right)}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{18 \cdot 33 \cdot 2}{32 \cdot 3} = 12,375; \text{ в) } a_1 = 4, q = -3; S_4 = \frac{4(81-1)}{-4} = -80;$$

$$\text{г) } a_1 = \sqrt{3}, q = \sqrt{3}; S_8 = \frac{\sqrt{3}(81-1)}{\sqrt{3}-1} = \frac{80\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2} = 40\sqrt{3}(\sqrt{3}+1).$$

$$4. \text{ а) } b_4 = \frac{1}{16}; b_5 = \frac{1}{64}; q = \frac{1}{4}; b_1 = \frac{b_4}{q^3} = 4; S_5 = \frac{4\left(\frac{1}{1024} - 1\right)}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{4 \cdot 1023 \cdot 4}{1024 \cdot 3} = \frac{341}{64};$$

$$\text{б) } b_2 = 4; b_4 = 36; q = \sqrt{\frac{b_4}{b_2}} = 3; b_1 = \frac{4}{3}; S_5 = \frac{4(243-1)}{3 \cdot 2} = \frac{484}{3}.$$

$$5. \text{ а) } q = \frac{2}{3}; S_4 = 65,65 = \frac{b_1\left(\frac{16}{81} - 1\right)}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{b_1 \cdot 65 \cdot 3}{81}, b_1 = 27.$$

$$\text{б) } q = 2; S_8 = 765,765 = \frac{b_1(256-1)}{2-1} = 255b_1, b_1 = 3.$$

$$\text{6. а) } b_n = 4^n; \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4, \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = 4, \text{ т.е. } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} \text{ для любого } n, \text{ значит,}$$

$$\{b_n\} - \text{геометрическая прогрессия; } b_1 = 4; q = 4, S_4 = \frac{4(256-1)}{3} = \frac{1020}{3} = 340;$$

$$\text{б) } b_n = 2 \cdot 5^n; \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = 5, \text{ значит, } \{b_n\} - \text{геометрическая прогрессия;}$$

$$b_1 = 10; q = 5, S_4 = \frac{10(625-1)}{4} = 1560;$$

$$\text{в) } x_n = 2^n - 1; \frac{x_{n+1}}{x_n} \neq \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}, \text{ значит, } \{x_n\} - \text{не геометрическая прогрессия;}$$

Ответ: а) да, $S_4 = 340$; б) да, $S_4 = 1560$; в) нет.

$$7. \begin{cases} b_3 - b_3 = 144 \\ b_4 - b_2 = 48 \end{cases} \left| \begin{array}{l} b_1 q^4 - b_1 q^2 = 144 \\ b_1 q^3 - b_1 q = 48 \end{array} \right. , \frac{q^3 - q}{q^2 - 1} = 3; \frac{q(q^2 - 1)}{q^2 - 1} = 3, q_1 = 3,$$

$q_{2,3} = \pm 1, q = \pm 1$ - не подходит, т.к. тогда бы $b_5 - b_3 \neq 144$, в этом случае

$$b_1 = \frac{48}{27-3} = 2, S_6 = \frac{2(729-1)}{2} = 728.$$

$$8. \begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 14 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 84 \end{cases}, b_2 = \sqrt{b_1 b_3}, \begin{cases} b_1 + \sqrt{b_1 b_3} + b_3 = 14 \\ b_1^2 + b_1 b_3 + b_3^2 = 84 \end{cases}$$

С-22. Бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем q , где $|q| < 1$

$$1. \text{ а) } b_1 = 49, b_2 = 7, q = \frac{1}{7}, |q| < 1, S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{49 \cdot 7}{6} = \frac{343}{6}; \text{ б) } b_1 = 1, q = \frac{1}{3},$$

$$|q| < 1, S = \frac{1 \cdot 3}{2} = 1,5; \text{ в) } b_1 = 0,4, q = -\frac{0,04}{0,4} = -0,1, |q| < 1, S = \frac{0,4}{1+0,1} = \frac{4}{11};$$

$$\text{г) } b_1 = \sqrt{5}, q = \frac{1}{\sqrt{5}}, |q| < 1, S = \frac{\sqrt{5}}{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{5}{\sqrt{5}-1} = \frac{5(\sqrt{5}+1)}{4}; \text{ д) } b_1 = 4\sqrt{2}, q = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$|q| < 1, S = \frac{4\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{8}{\sqrt{2}-1} = 8(\sqrt{2}+1); \text{ е) } b_1 = \frac{1}{2+\sqrt{2}}, q = \frac{2+\sqrt{2}}{2} > 0.$$

$$2. \text{ а) } S = 16, q = \frac{1}{4}, 16 = \frac{4b_1}{3}, b_1 = 12; \text{ б) } S_1 = 81, q = -\frac{1}{9}, 81 = \frac{9b_1}{10}, b_1 = 90;$$

$$\text{в) } S = 4\sqrt{2} + 4, \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 4\sqrt{2} + 4 = \frac{b_1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}b_1}{\sqrt{2}-1}, \quad 4 = \sqrt{2}b_1, \quad b_1 = 2\sqrt{2};$$

$$\text{г) } S = 3(\sqrt{3}-1), \quad q = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 3(\sqrt{3}-1) = \frac{b_1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}b_1}{\sqrt{3}-1},$$

$$3(3+1-2\sqrt{3}) = \sqrt{3}b_1; \quad b_1 = \sqrt{3}(4-2\sqrt{3}).$$

$$\text{3. а) } 0,(7) = 0,777\dots = 0,7 + 0,07 + 0,007\dots = \frac{0,7}{1-0,1} = \frac{7}{9};$$

$$\text{б) } 0,(28) = 0,2828\dots = 0,28 + 0,0028 + \dots = \frac{0,28}{1-0,01} = \frac{28}{99};$$

$$\text{в) } 3,(1) = 3,111\dots = 3 + 0,1 + 0,01 + \dots = 3 + \frac{0,1}{1-0,1} = 3 + \frac{1}{9} = \frac{28}{9};$$

$$\text{г) } 2,(13) = 2,1313\dots = 2 + 0,13 + 0,0013 + \dots = 2 + \frac{0,13}{1-0,01} = 2 + \frac{13}{99} = \frac{211}{99};$$

$$\text{д) } 0,6(3) = 0,633\dots = 0,6 + 0,03 + 0,003 + \dots = 0,6 + \frac{0,03}{1-0,1} = 0,6 + \frac{1}{30} = \frac{6}{10} + \frac{1}{30} = \frac{19}{30};$$

$$\text{е) } 0,5(14) = 0,51414\dots = 0,5 + 0,014 + 0,00014 + \dots = 0,5 + \frac{0,014}{1-0,01} = \frac{1}{2} + \frac{14}{990} = \frac{509}{990}.$$

$$\text{4. } q = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad S = \frac{16(4+\sqrt{2})}{7}; \quad \frac{16(4+\sqrt{2})}{7} = \frac{b_1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{4b_1}{4-\sqrt{2}};$$

$$b_1 = \frac{4 \cdot 14}{7} = 8; \quad b_3 = b_1 q^2 = 8 \cdot \frac{2}{16} = 1.$$

5. Сторона I треугольника – 16 см, второго – 8 см, третьего – 4 см и т.д. Периметр I треугольника – 48 см, II-го – 24 см, III-го – 12 см и т.д. Т.е. периметры образуют геометрическую прогрессию. $b_1 = 48$, $q = \frac{1}{2}$, $S = \frac{48}{\frac{1}{2}} = 96$.

$$\text{6. } b_2 = 36, \quad S = 144, \quad |q| < 1, \quad S = b_1 + \frac{b_2}{1-q} = \frac{b_2}{q} + \frac{b_2}{1-q} = b_2 \cdot \frac{1}{q(1-q)},$$

$$144 = 36 \cdot \frac{1}{q(1-q)}; \quad 4q(1-q) = 1; \quad 4q^2 - 4q + 1 = 0; \quad (2q-1)^2 = 0; \quad q = \frac{1}{2}; \quad b_1 = \frac{b_2}{q} = 72.$$

С-23. Иррациональные уравнения

$$\text{1. 1) а) } \sqrt{x} = 4, \quad x = 16; \quad \text{б) } \sqrt{x} = \frac{1}{3}, \quad x = \frac{1}{9}; \quad \text{в) } \sqrt{x} = 0, \quad x = 0;$$

$$\text{2) а) } \sqrt{x+1} = 3, \quad x+1=9, \quad x=8; \quad \text{б) } \sqrt{3x-1} = 1,2; \quad 3x-1=1,44; \quad x = \frac{2,44}{3} = \frac{244}{300} = \frac{61}{75};$$

в) $\sqrt{2+x}=0$; $2+x=0$, $x=-2$;

3) а) $\sqrt{6-x}=x$, $x \geq 0$; $6-x=x^2$, $x^2+x-6=0$, $D=1+4 \cdot 6=25$, $x_1=\frac{-1+5}{2}=2$, $x_2 < 0$;

б) $\sqrt{x^2+27}=2x$, $x \geq 0$; $x^2+27=4x^2$, $3x^2=27$, $x_{1,2}=\pm 3$.

в) $\sqrt{2x+3}=x$, $x \geq 0$; $2x+3=x^2$; $x^2-2x-3=0$; $D=4+4 \cdot 3=16$; $x_1=\frac{2+4}{2}=3$, $x_2 < 0$;

Ответ: 1) а) 16; б) $\frac{1}{9}$; в) 0; 2) а) 8; б) $\frac{61}{75}$; в) -2; 3) а) 2; б) 3; в) 3.

2. а) $\sqrt{x}+1=0$, $\sqrt{x}=-1$ - нет корней, т.к. $E(\sqrt{x})=[0; +\infty)$;

б) $\sqrt{-3x}=0$, $x=0$ - корень;

в) $\sqrt{2x+3}=-\sqrt{3}$ - нет корней, т.к. $E(\sqrt{x})=[0; +\infty)$;

г) $\sqrt{-4x^2-16}=2$ - нет корней, т.к. $D(\sqrt{x})=[0; +\infty)$;

д) $\sqrt{2x^2+4}+\sqrt{5}=-\frac{1}{2}$ - нет корней, т.к. $E(\sqrt{x})=[0; +\infty)$;

е) $\sqrt{x+1}=5$ - есть корни.

3. 1) а) $\sqrt{6x^2+3x-2}=\sqrt{3x^2-8x+2}$, $6x^2+3x-2=3x^2-8x+2$, $3x^2+11x-4=0$;

$D=121+4 \cdot 3 \cdot 4=169$, $x_1=\frac{-11+13}{6}=\frac{1}{3}$, $x_2=-4$. Проверка: $x=\frac{1}{3}$,

$\sqrt{\frac{6}{9}+1-2}=\sqrt{\frac{3}{9}-\frac{8}{3}+2}$ - ложно; $x=-4$, $\sqrt{96-12-2}=\sqrt{48+32+2}$ - верно.

б) $x+1=\sqrt{8-4x}$, $x^2+2x+1=8-4x$, $x^2+6x-7=0$; $D=36+4 \cdot 7=64$,

$x_1=\frac{-6+8}{2}=1$, $x_2=-7$. Проверка: $x=1$, $1+1=\sqrt{8-4}$ - верно;

$x=-7$, $-6=\sqrt{8+4 \cdot 7}$ - ложно.

2) а) $\sqrt{4x^2-9x+2}=x-2$, $4x^2-9x+2=x^2-4x+4$, $3x^2-5x-2=0$,

$D=25+4 \cdot 3 \cdot 2=49$, $x_1=\frac{5+7}{6}=2$, $x_2=-\frac{1}{3}$.

Проверка: $x_1=2$, $\sqrt{4 \cdot 4-9 \cdot 2+2}=2-2$ - верно;

$x_2=-\frac{1}{3}$; $\sqrt{\frac{4}{9}+3+2}=-\frac{1}{3}-2$ - ложно;

б) $\sqrt{7x^2+3x}=2x-2$, $7x^2+3x=4x^2+4-8x$, $3x^2+11x-4=0$, $D=121+4 \cdot 4 \cdot 3=169$,

$x_1=\frac{-11+13}{6}=\frac{1}{3}$, $x_2=-4$. Проверка: $x_1=\frac{1}{3}$, $\sqrt{\frac{7}{9}+1}=2-\frac{2}{3}$ - ложно;

$x=-4$, $\sqrt{7 \cdot 16-12}=-8-2$ - ложно.

Ответ: 1) а) $x=-4$; б) $x=1$; 2) а) $x=2$; б) нет корней.

4. а) $\sqrt{x-3} = 2,4$ – нет корней, т.к. $E(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$;

б) $\sqrt{2x} + \sqrt{x-3} = -1$ – нет корней, т.к. $E(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$;

в) $\sqrt{-3-x^2} = 9$ – нет корней, т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$;

г) $\sqrt{-x^2+3x-4} = 6$, $-x^2+3x-4 \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$; $x^2-3x+4 \leq 0$,
 $D = 9 - 4 \cdot 4 < 0$, значит, у неравенства нет решений, следовательно, нет корней и у уравнения.

5. 1) а) $\sqrt{x+17} - \sqrt{x+1} = 2$, $\sqrt{x+17} = 2 + \sqrt{x+1}$, $x+17 = 4 + 4\sqrt{x+1} + x+1$,
 $4\sqrt{x+1} = 12$, $\sqrt{x+1} = 3$, $x+1 = 9$, $x = 8$.

Проверка: $x = 8$, $\sqrt{8+17} - \sqrt{8+1} = 2$ – верно;

б) $\sqrt{1-2x} - \sqrt{13+x} = \sqrt{x+4}$, $1-2x+13+x-2\sqrt{(1-2x)(13+x)} = x+4$,

$2\sqrt{(1-2x)(13+x)} = 10-2x$, $\sqrt{(1-2x)(13+x)} = 5-x$,

$(1-2x)(13+x) = 25+x^2-10x$, $13-25x-2x^2 = 25+x^2-10x$, $3x^2+15x+12=0$,

$x^2+5x+4=0$, $D=25-16=9$, $x_1 = \frac{-5+3}{2} = -1$, $x_2 = -4$. Проверка: $x_1 = -1$,

$\sqrt{1+2} - \sqrt{13-1} = \sqrt{4-1}$ – ложно; $x_2 = -4$, $\sqrt{1+8} - \sqrt{13-4} = 0$ – верно.

Ответ: а) $x = 8$; б) $x = -4$.

2) а) $\sqrt{3-x} \cdot \sqrt{x+4} = \sqrt{6}$; $(3-x)(x+4) = 6$; $-x^2-x+12 = 6$, $x^2+x-6 = 0$,

$D = 25$, $x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$, $x_2 = -3$. Проверка: $x_1 = 2$, $\sqrt{3-2} \cdot \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$ – верно,

$x_2 = -3$, $\sqrt{6} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{6}$ – верно.

б) $\sqrt{4-x} \cdot \sqrt{4+x} = x$, $16-x^2 = x^2$, $2x^2 = 16$, $x_1 = \pm 2\sqrt{2}$,

Проверка: $x_1 = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{4-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4+2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ – верно,

$x_2 = -2\sqrt{2}$, $\sqrt{4-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4+2\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$ – ложно.

Ответ: а) $-3; 2$; б) $2\sqrt{2}$.

3) а) $\sqrt{5+\sqrt{x-1}} = 3$; $5+\sqrt{x-1} = 9$, $\sqrt{x-1} = 4$, $x-1 = 16$, $x = 17$.

Проверка: $\sqrt{5+4} = 3$ – верно.

б) $\sqrt{\sqrt{x+13}} = \sqrt{17-3\sqrt{x}}$, $\sqrt{x+13} = 17-3\sqrt{x}$, $x+13 = 289+9x-102\sqrt{x}$,

$8x-102\sqrt{x}+276=0$, $4x-51\sqrt{x}+138=0$, $\sqrt{x} = y$, $y \geq 0$, $4y^2-51y+138=0$,

$y = \frac{51 \pm \sqrt{393}}{8}$, значит, $\sqrt{x} = \frac{51 \pm \sqrt{393}}{8}$, $x = \frac{(51 \pm \sqrt{393})^2}{64}$,

Проверка: $x = \frac{(51 \pm \sqrt{393})^2}{64}$; $\sqrt{\frac{(51 \pm \sqrt{393})^2}{64} + 13} = \sqrt{17-3\left(\frac{51 \pm \sqrt{393}}{8}\right)}$ – верно.

С-24. Четные и нечетные функции

1. 1) а) $g(-x) = (-x)^8 = x^8 = g(x)$, значит, $g(x)$ – четная;

б) $g(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 = x^4 - 5x^2 = g(x)$, значит, $g(x)$ – четная;

в) $f(-x) = 2|-x| = 2|x| = f(x)$, значит, $f(x)$ – четная.

2) а) $f(-x) = (-x)^6 - 3(-x)^4 = x^6 - 3x^4 = f(x)$, значит, $f(x)$ – четная;

б) $f(-x) = (-x-5)(-x+7) + 2x = (x+5)(x-7) + 2x = x^2 - 35$,

$f(x) = (x-5)(x+7) - 2x = x^2 - 35 = f(-x)$, значит, $f(x)$ – четная;

в) $f(-x) = \frac{1}{(-x)^4 - (-x)^2 + 3} = \frac{1}{x^4 - x^2 + 3} = f(x)$, значит, $f(x)$ – четная.

2. 1) а) $g(-x) = (-x)^9 = -x^9 = -g(x)$, значит, $g(x)$ – нечетная;

б) $g(-x) = -\frac{23}{-x} = \frac{23}{x} = -g(x)$, значит, $g(x)$ – нечетная;

в) $g(-x) = (-x)^5 + x = -x^5 + x = -g(x)$, значит, $g(x)$ – нечетная.

2) а) $f(-x) = (-x)^7 - \frac{1}{(-x)^3} = -x^7 + \frac{1}{x^3} = -f(x)$, значит, $f(x)$ – нечетная.

б) $f(-x) = (-x-3)^2 - (-x+3)^2 = (x+3)^2 - (x-3)^2 = -f(x)$, значит, $f(x)$ – нечетная;

в) $f(-x) = \frac{1}{-x + (-x)^5} = -\frac{1}{x + x^5} = -f(x)$, значит, $f(x)$ – нечетная.

3. $g(-5) = 27$, а) $g(5) = g(-5) = 27$, б) $g(5) = -g(-5) = -27$.

4. 1) а) $y(-x) = \frac{6}{(-x)^6} = \frac{6}{x^6} = y(x)$, значит, y – четная.

б) $y(-x) = -\frac{8}{(-x)^7} = \frac{8}{x^7} = -y(x)$, значит, y – нечетная.

в) $y(-x) = \frac{1}{(-x)^3 + 1} = \frac{1}{-x^3 + 1} \neq \pm y(x)$, значит, y – ни четная, ни нечетная;

г) $y(-x) = \frac{1}{(-x)^x + 1} = \frac{1}{x^x + 1} = y(x)$, значит, y – четная;

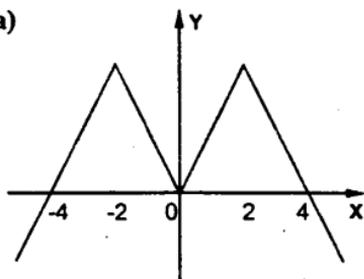
2) а) $y = \frac{x^5}{2x} = \frac{x^4}{2}$, $y(-x) = \frac{(-x)^4}{2} = \frac{x^4}{2} = y(x)$, значит, y – четная;

б) $y = \frac{3x}{x^4} = \frac{3}{x^3}$, $y(-x) = \frac{3}{(-x)^3} = -\frac{3}{x^3} = -y(x)$, значит, y – нечетная;

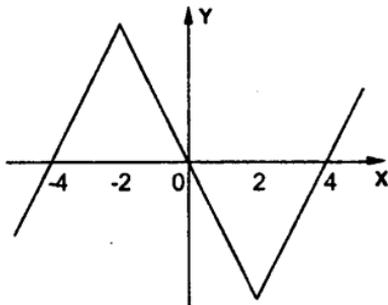
в) $y = \frac{3x^2 - x^3}{6 - 2x} = \frac{x^2(3-x)}{2(3-x)} = \frac{x^2}{2}$, $y(-x) = \frac{(-x)^2}{2} = \frac{x^2}{2} = y(x)$, значит, y – четная;

$$г) y = \frac{2x+8}{x^2+4x} = \frac{2(x+4)}{x(x+4)} = \frac{2}{x}, \quad y(-x) = \frac{2}{-x} = -y(x), \text{ значит, } y \text{ — нечетная.}$$

5. а)

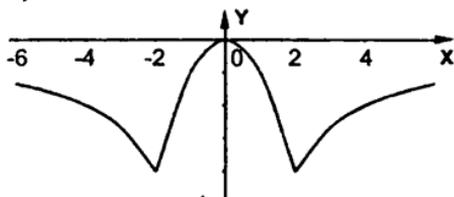


б)

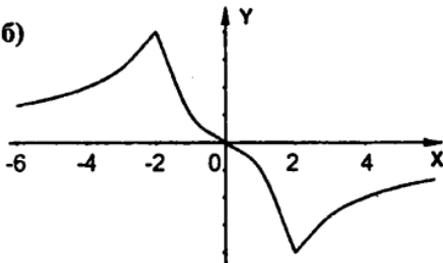


$$6. f(x) = \begin{cases} -0,5x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{4}{x}, & x > 2 \end{cases}$$

а)



б)



$$7. а) g(-x) = |-x+8| - |-x-8| = |x-8| - |x+8| = -g(x), \text{ значит, } g(x) \text{ — нечетная;}$$

$$б) g(-x) = |-x+8| + |-x-8| = |x-8| + |x+8| = g(x), \text{ значит, } g(x) \text{ — четная;}$$

$$в) g(-x) = \frac{7(-x)^2}{(-x)^2 - 16} = \frac{7x^2}{x^2 - 16} = g(x), \text{ значит, } g(x) \text{ — четная;}$$

$$г) g(-x) = \frac{9(-x)^3}{(-x)^2 - 25} = \frac{-9x^3}{x^2 - 25} = -g(x), \text{ значит, } g(x) \text{ — нечетная;}$$

$$д) g(-x) = \frac{5(-x)^3}{(-x-3)^2} = -\frac{5x^3}{(x+3)^2} \neq \pm g(x), \text{ значит, } g(x) \text{ — ни четная, ни нечетная;}$$

$$е) g(x) = \frac{x(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-4)} = x, \quad g(-x) = -x = -g(x), \text{ значит, нечетная.}$$

С-25. Функция $y = x^n$

$$1. 1) g(x) = x^{80} \quad а) g(1,423) > g(1,327), \text{ т.к. } |1,423| > |1,327|;$$

$$б) g(-80,3) > g(-78,2), \text{ т.к. } |-80,3| > |-78,2|; \quad в) g(-23,1) > g(18,7), \text{ т.к. } |-23,1| > |18,7|;$$

г) $g(-42,8) = g(42,8)$, т.к. $|-42,8| = |42,8|$;

2) а) $g\left(\frac{5}{8}\right) < g\left(\frac{2}{3}\right)$, т.к. $\left|\frac{5}{8}\right| < \left|\frac{2}{3}\right|$; б) $g\left(-\frac{4}{9}\right) < g\left(-\frac{1}{2}\right)$, т.к. $\left|-\frac{4}{9}\right| < \left|-\frac{1}{2}\right|$;

в) $g\left(-\frac{17}{20}\right) = g(0,85)$, т.к. $\left|-\frac{17}{20}\right| = |0,85|$; г) $g(-0,72) > g\left(-\frac{5}{7}\right)$, т.к. $|-0,72| > \left|-\frac{5}{7}\right|$

2. $f(x) = x^{95}$; 1) а) $f(23,4) > f(21,8)$; т.к. $23,4 > 21,8$;

б) $f(-3,9) < f(-3,7)$; т.к. $-3,9 < -3,7$; в) $f(-52,3) < f(52,3)$; т.к. $-52,3 < 52,3$;

г) $f(-47,2) < f(45,8)$; т.к. $-47,2 < 45,8$;

2) а) $f\left(\frac{3}{7}\right) < f\left(\frac{4}{9}\right)$; т.к. $\frac{3}{7} < \frac{4}{9}$; б) $f(-0,4) < f\left(\frac{6}{13}\right)$; т.к. $-0,4 < \frac{6}{13}$;

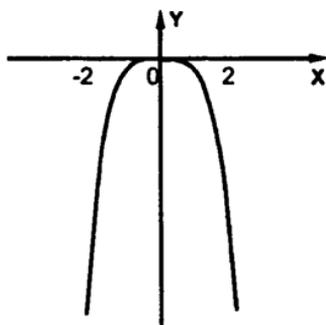
в) $f\left(-\frac{3}{8}\right) = -f(0,375)$; т.к. $-\frac{3}{8} = -0,375$; г) $f(-27,4) < f(27,4)$; т.к. $-27,4 < 27,4$;

3. $x_n = 450$; а) 2 корня; б) 1 корень.

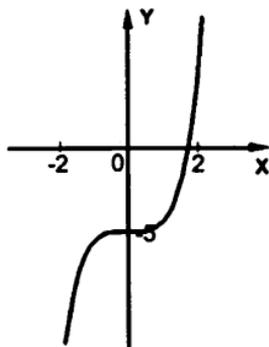
4. а) $x^4 = 441$, $x = \pm\sqrt[4]{441}$; б) $x^4 = -36$, нет корней, т.к. $E(x^4) = [0; +\infty)$;

в) $x^3 = -64$, $x = -4$; г) $x^3 = \frac{27}{125}$, $x = \frac{3}{5}$.

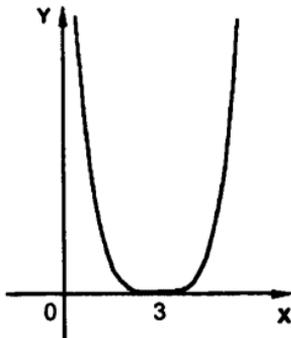
5. а)



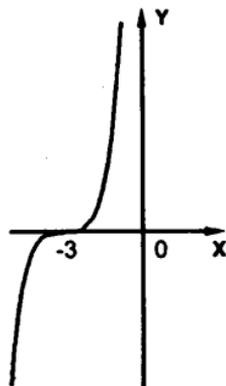
б)



в)



г)



- б) а) $x^3 = 23x + 7$ – три корня; б) $x^3 = 0,25x - 4$ – один корень;
 в) $x^4 = 23x + 7$ – два корня; г) $x^4 = 0,25x - 4$ – нет корней.
 7. а) $y = x^7$; $549,827 = (-3,7)^7$ – ложно, значит, точка M не принадлежит графику;
 $-12,749 = (-0,89)^7$ – ложно, значит, точка K не принадлежит графику;
 б) $y = x^6$; $1,0487 = 1,3^6$ – ложно, значит, точка P не принадлежит графику;
 $1,8724 = (-0,8)^6$ – ложно, значит, точка Q не принадлежит графику.

С-26. Определение корня n -й степени

1. 1) а) $\sqrt{0,25} = 0,5$; б) $\sqrt[3]{343} = 7$; в) $\sqrt[4]{0,0016} = 0,2$; г) $\sqrt[5]{-\frac{1}{243}} = -\frac{1}{3}$.

2) а) $5\sqrt[3]{0,216} = 5 \cdot 0,6 = 3$; б) $0,3\sqrt[4]{64} = 0,3 \cdot 4 = 1,2$;

в) $6\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} = 6 \cdot \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = 6 \left(-\frac{3}{2}\right) = -9$; г) $12\sqrt[4]{7\frac{58}{81}} = 12 \cdot \sqrt[4]{\frac{625}{81}} = 12 \cdot \frac{5}{3} = 20$.

2. 1) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$; б) $\sqrt[3]{0,00001} - \sqrt[4]{-0,064} = 0,1 + 0,4 = 0,5$;

в) $2,5\sqrt[3]{\frac{1}{32}} - \sqrt[4]{15\frac{5}{8}} = 2,5 \cdot 0,5 - \frac{5}{2} = 2,5 \cdot 0,5 - 2,5 = -1,25$.

2) а) $\sqrt[6]{\frac{64}{729}} - \sqrt[4]{\frac{16}{625}} = \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{4}{15}$; б) $\sqrt[3]{0,343} - \sqrt[4]{-0,00243} = 0,7 + 0,3 = 1$;

в) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}} - \sqrt[3]{0,125} = \frac{5}{3} - 0,5 = \frac{5}{3} - \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$.

3. а) $3 = \sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16} = 4$; б) $3 = \sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{57} < \sqrt[3]{64} = 4$;

в) $0 < \sqrt[3]{0,6} < 1$; г) $2 = \sqrt[3]{32} < \sqrt[3]{48} < \sqrt[3]{243} = 3$.

Ответ: а) 3 и 4; б) 3 и 4; в) 0 и 1; г) 2 и 3.

4. 1) а) $(\sqrt{15})^2 = 15$; б) $(\sqrt[3]{9})^3 = 9$; в) $(-\sqrt[4]{17})^4 = 17$; г) $-\sqrt[4]{17^4} = -17$; д) $(-\sqrt[3]{3})^7 = -3$.

2) а) $(3 \cdot \sqrt{2})^3 = 27 \cdot 2 = 54$; б) $(-2\sqrt[4]{7})^4 = 16 \cdot 7 = 112$; в) $(-\sqrt[3]{26})^5 = -26$;

г) $-3 \cdot \sqrt[6]{6^5} = -3 \cdot 6 = -18$; д) $(-\sqrt[8]{3})^8 = 3$.

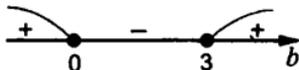
5. а) $x^4 = 7$, $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{7}$; б) $x^5 = 30$, $x = \sqrt[5]{30}$; в) $\frac{1}{32}x^6 - 2 = 0$, $x^6 = 64$, $x_{1,2} = \pm 2$;

г) $\frac{1}{4}x^5 + 7 = 0$, $x^5 = -28$, $x = -\sqrt[5]{28}$.

6. а) $\sqrt[3]{x+8}$, $x+8 \geq 0$, $y \geq -8$; б) $\sqrt[3]{y-2}$, y – любое;

в) $\sqrt{b(b-3)}$, $b(b-3) \geq 0$,

$b \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$;



г) $\sqrt{a^2 - a - 30}$, $a^2 - a - 30 \geq 0$, $D = 1 + 4 \cdot 30 = 121$, $a_1 = \frac{1+11}{2} = 6$, $a_2 = -5$;

$a \in (-\infty; -5] \cup [6; +\infty)$.



Ответ: а) $y \geq -8$; б) при всех x ; в) $b \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$; г) при $a \leq -5$ и $a \geq 6$.

7. а) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$, $x^4 = y \geq 0$, тогда $y^2 - 15y - 16 = 0$, $D = 289$,

$y_1 = \frac{15+17}{2} = 16$, $y_2 < 0$, $x^4 = 16$, $x_{1,2} = \pm 2$;

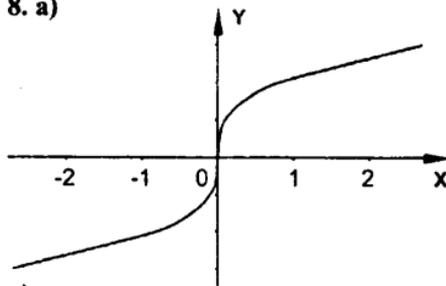
б) $x^4 - 10x^2 + 27 = 0$, $x^2 = y \geq 0$, тогда $y^2 - 10y + 27 = 0$, $D < 0$, нет корней;

в) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$, $x^3 = y$, тогда $y^2 - 7y - 8 = 0$, $D = 81$.

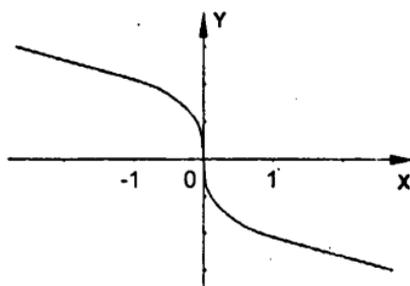
$y_1 = \frac{7+9}{2} = 8$, $y_2 = -1$, $x^3 = 8$, $x = 2$, $x^3 = -1$, $x = -1$.

Ответ: а) ± 2 ; б) нет; в) -1 и 2 .

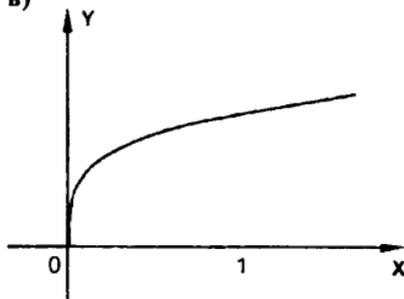
8. а)



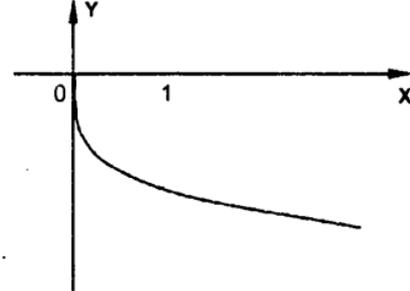
б)



в)



г)



С-27. Свойства арифметического корня

1. а) $\sqrt[3]{27 \cdot 64} = 3 \cdot 4 = 12$; б) $\sqrt[3]{3^8 \cdot 2^4} = 3^2 \cdot 2 = 18$; в) $\sqrt[4]{0,0081 \cdot 6^4} = 0,3 \cdot 6^2 = 10,8$;

г) $\sqrt[7]{\frac{5^7}{2^{14}}} = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}$; д) $\sqrt[3]{\frac{3^9}{0,125}} = \frac{3^3}{0,5} = 54$; е) $\sqrt[8]{\frac{2^8 \cdot 3^{24}}{5^{16}}} = \frac{2 \cdot 3^3}{5^2} = \frac{54}{25}$.

2. а) $\sqrt[4]{8 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[4]{8 \cdot 2} = 2$; б) $\sqrt[3]{5 \cdot \sqrt[3]{25}} = \sqrt[3]{125} = 5$; в) $\sqrt[4]{135 \cdot \sqrt[3]{375}} = \sqrt[4]{135 \cdot 375} = 15$;

- г) $\sqrt[3]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}$; д) $\sqrt[3]{3^7 \cdot 5^4} \cdot \sqrt[3]{5^3} = 3 \cdot \sqrt[3]{5^7} = 3 \cdot 5 = 15$;
- е) $\sqrt[6]{2^{11}} \cdot \sqrt[6]{3^{12} \cdot 2^7} = \sqrt[6]{2^{18} \cdot 3^{12}} = 2^3 \cdot 3^2 = 72$.
3. а) $\sqrt{49a^2} = 7a$; б) $\sqrt[3]{8b^6} = 2b^2$; в) $\sqrt[4]{625a^8b^4} = 5a^2b$; г) $\sqrt{\frac{243a^{10}b^{15}}{32}} = \frac{3}{2}a^2b^3$.
4. а) $\sqrt{25x} = 5\sqrt{x}$; б) $\sqrt{72y^3} = \sqrt{36 \cdot 2y^2 \cdot y} = 6y\sqrt{2y}$;
- в) $\sqrt[3]{54 \cdot x^8} = \sqrt[3]{27 \cdot 2 \cdot x^6 \cdot x^2} = 3x^2 \cdot \sqrt[3]{2x^2}$; г) $\sqrt[4]{162y^9} = \sqrt[4]{81 \cdot 2y^8 \cdot y} = 3y^2 \cdot \sqrt[4]{2y}$.
5. а) $5\sqrt{2a} = \sqrt{50a}$; б) $3\sqrt[3]{2b} = \sqrt[3]{54b}$; в) $x\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5x^4}$; г) $y\sqrt[3]{8y^4} = \sqrt[3]{8y^9}$.
6. а) $\sqrt{6-\sqrt{11}} \cdot \sqrt{6+\sqrt{11}} = \sqrt{(6-\sqrt{11})(6+\sqrt{11})} = \sqrt{36-11} = 5$;
- б) $\sqrt{5+\sqrt{17}} \cdot \sqrt{5-\sqrt{17}} = \sqrt{(5+\sqrt{17})(5-\sqrt{17})} = \sqrt{25-17} = 2$;
- в) $\sqrt{10+\sqrt{19}} \cdot \sqrt{10-\sqrt{19}} = \sqrt{(10+\sqrt{19})(10-\sqrt{19})} = \sqrt{100-19} = 3$;
7. а) $\sqrt[4]{x^4y} = x\sqrt[4]{y}$; $x, y \geq 0$; б) $\sqrt[4]{x^4y} = -x\sqrt[4]{y}$; $x \leq 0, y \geq 0$;
- в) $\sqrt[4]{x^5y^5} = xy\sqrt[4]{xy}$; $xy \geq 0$, т.е. $x, y \geq 0$ или $x, y \leq 0$.
8. а) $\sqrt[4]{625a^4b} = 5a\sqrt[4]{b}$; б) $\sqrt{-98c^7} = \sqrt{-49 \cdot 2 \cdot c^6 \cdot c} = -7c^3\sqrt{-2c}$; в) $\sqrt[4]{x^5y^5} = xy\sqrt[4]{xy}$.
9. а) $x \cdot \sqrt{\frac{3}{y^4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{y^4}}$; б) $bc \cdot \sqrt{\frac{3}{b^3c^3}} = \sqrt{\frac{3b^2c^2}{b^3c^3}} = \sqrt{\frac{3}{bc}}$; в) $ax \cdot \sqrt{\frac{5}{a^4x^5}} = \sqrt{\frac{5a^6x^6}{a^4x^5}} = \sqrt{5a^2x}$.
10. $5a \cdot \sqrt[4]{2a^{-5}} - \sqrt[4]{162a} - a^2 \cdot \sqrt[4]{2a^{-7}} = 5a \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{a^5}} - 3 \cdot \sqrt[4]{2a} - a^2 \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{a^7}} =$
 $= 5 \cdot \sqrt[4]{\frac{2a^4}{a^5}} - 3 \cdot \sqrt[4]{2a} - \sqrt[4]{\frac{2a^8}{a^7}} = 5 \cdot \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{a}} - 3 \cdot \sqrt[4]{2a} - \sqrt[4]{2a} = 5 \cdot \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{a}} - 4 \cdot \sqrt[4]{2a} = \frac{5 \cdot \sqrt[4]{2} - 4 \cdot \sqrt[4]{2a^2}}{\sqrt[4]{a}}$.

С-28. Свойства арифметического корня (продолжение)

1. а) $\sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$; б) $\sqrt[3]{\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{2}$; в) $\sqrt{\frac{1}{b^4}} = \frac{1}{b}$; г) $\sqrt{\frac{10}{a^{15}}} = \frac{\sqrt[3]{10}}{a^5}$.
2. а) $\frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{14} = \frac{7}{14}\sqrt{14}$; б) $\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$; в) $\frac{5}{\sqrt[3]{9}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{9^2}}{9} = \frac{5}{9} \cdot \sqrt[3]{81}$;
- г) $\frac{9}{\sqrt[3]{8}} = \frac{9 \cdot \sqrt[3]{8^3}}{8} = \frac{9}{8} \cdot \sqrt[3]{512}$; д) $\frac{12}{\sqrt[3]{81}} = \frac{12 \cdot \sqrt[3]{81^4}}{81} = \frac{4}{27} \cdot \sqrt[3]{43046721}$.
3. а) $\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt{5}} = \sqrt[8]{5}$; в) $\sqrt[3]{3^4} = \sqrt{3}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[3]{3} = \sqrt{3}$;
- д) $\sqrt[4]{x^5} = \sqrt{x}$; е) $\sqrt{b\sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt{b^3}} = \sqrt[4]{b^3}$; ж) $\sqrt[3]{a \cdot \sqrt{a}} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^4}$;

$$3) \sqrt[3]{y^2 \cdot \sqrt[3]{y^2}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{y^8}} = \sqrt[3]{y}.$$

$$4. \text{ а) } \sqrt[3]{5} > \sqrt[3]{24}, \sqrt[3]{25} > \sqrt[3]{24}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{10}; \quad \text{в) } \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{64};$$

$$\text{г) } \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^4}}, \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{16}, \sqrt[3]{216} < \sqrt[3]{256}.$$

$$5. \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{3^6}, \sqrt[3]{4^4}, \sqrt[3]{5^3}, \sqrt[3]{729}, \sqrt[3]{256}, \sqrt[3]{125}, \text{ значит, } \sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{3}.$$

$$6. \text{ а) } \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{xy} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})} = \sqrt[3]{\frac{x}{y}};$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b}} = \frac{(\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b}} = \frac{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b})}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b};$$

$$\text{в) } \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xy}} + \frac{1}{\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})} + \frac{1}{\sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})} = \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})} = \frac{1}{\sqrt[3]{xy}}.$$

$$7. \text{ а) } \sqrt{x} - 8\sqrt[3]{x} = 0, \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} - 8) = 0, \sqrt[3]{x_1} = 0, x_1 = 0, \sqrt{x_2} - 8 = 0, \sqrt{x_2} = 8, x_2 = 4096;$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{x} = 0, \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} + 3) = 0, \sqrt[3]{x_1} = 0, x_1 = 0, \sqrt[3]{x_2} = -3 - \text{нет корней};$$

$$\text{в) } \sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x} + 2 = 0, \sqrt[3]{x} = y \geq 0, y^2 - 3y + 2 = 0; D = 1, y_1 = \frac{3+1}{2} = 2, y_2 = 1, \\ \sqrt[3]{x_1} = 2, x_1 = 2^{10}, x_1 = 1024, \sqrt[3]{x_2} = 1, x_2 = 1;$$

$$\text{г) } \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 4 = 0, \sqrt[3]{x} = y \geq 0, y^2 + 3y - 4 = 0, D = 9 + 4 \cdot 4 = 25, \\ y_1 = \frac{-3+5}{2} = 1, y_2 < 0, \sqrt[3]{x} = 1, x = 1.$$

$$\text{Ответ: а) } x_1 = 0, x_2 = 4096; \quad \text{б) } x = 0; \quad \text{в) } x_1 = 1024, x_2 = 1; \quad \text{г) } x = 1.$$

$$8. \text{ а) } x - 5\sqrt{x} < 0, \sqrt{x} = y, y^2 - 5y < 0,$$

$$y(y-5) < 0, 0 < y < 5, 0 < \sqrt{x} < 5, 0 < x < 25.$$

$$\text{Ответ: } (0; 25).$$



$$\text{б) } x + 4\sqrt{x} > 0, \sqrt{x} = y, y^2 + 4y > 0, y(y+4) > 0, y < -4, \sqrt{x} < -4 - \text{нет решений}, \\ y > 0, \sqrt{x} > 0, x > 0.$$

$$\text{Ответ: } (0; +\infty).$$

$$\text{в) } \sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x} + 6 \geq 0, \sqrt[3]{x} = y, y^2 - 5y + 6 \geq 0, D = 1, y_1 = \frac{5+1}{2} = 3, y_2 = 2, y \leq 2, \sqrt[3]{x} \leq 2,$$

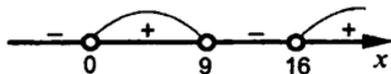
$$0 \leq x \leq 256, y \geq 3, \sqrt[3]{x} \geq 3, x \geq 6561.$$

$$\text{Ответ: } [0; 256] \cup [6561; +\infty).$$



$$\text{г) } \sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 4) > 0, 0 < \sqrt{x} < 3, 0 < x < 9, \sqrt{x} > 4, x > 16.$$

$$\text{Ответ: } (0; 9) \cup (16; +\infty).$$



С-29. Степень с целыми показателями

$$1. \text{ а) } 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}; \text{ б) } 12^{-1} = \frac{1}{12}; \text{ в) } c^{-7} = \frac{1}{c^7}; \text{ г) } 2ab^{-3} = \frac{2a}{b^3}; \text{ д) } 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001.$$

$$2. \text{ а) } \frac{1}{6^5} = 6^{-5}; \text{ б) } \frac{1}{a^3} = a^{-3}; \text{ в) } \frac{1}{7} = 7^{-1}; \text{ г) } \frac{1}{1000} = 10^{-3}; \text{ д) } 0,00001 = 10^{-5};$$

$$2) \text{ а) } \left(\frac{1}{18}\right)^3 = 18^{-3}; \text{ б) } \frac{1}{x^2 y^2} = (xy)^{-2};$$

$$\text{в) } \frac{1}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \frac{1}{a^3-b^3} = (a^3-b^3)^{-1}; \text{ г) } \frac{1}{(x-y)(x-y)} = \frac{1}{(x-y)^2} = (x-y)^{-2}.$$

$$3. \text{ а) } \left(\frac{7}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 < 1; \text{ б) } 12,3^0 = 1; \text{ в) } 10^{-5} = \frac{1}{10^5} < 1;$$

$$\text{г) } \left(-3\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{11}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{11}\right)^2 = \left(\frac{3}{11}\right)^2 < 1.$$

$$4. 1) \text{ а) } (1,1)^{-2} = \frac{1}{1,1^2} = \frac{1}{1,21}; \text{ б) } (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}; \text{ в) } (-12,7)^0 = 1;$$

$$\text{г) } 1^{-13} = 1; \text{ д) } -12,7^0 = -1;$$

$$2) \text{ а) } (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}; \text{ б) } \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = (-3)^2 = 9;$$

$$\text{в) } \left(\frac{7}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{7}; \text{ г) } \left(2\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{8}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}.$$

$$3) \text{ а) } 7^5 \cdot 7^{13} \cdot 7^{-5} = 7^{5+13-5} = 7^3 = 343; \text{ б) } 2^{-5} \cdot 2^{-9} = 2^{-5+(-9)} = 2^{-14} = \frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{16384};$$

$$\text{в) } (0,2)^3 : (0,2)^{-3} = 0,2^{3-(-3)} = 0,2^6 = 0,000064;$$

$$\text{г) } \left(\frac{2}{5}\right)^{-6} : \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-6-(-3)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}.$$

$$4) \text{ а) } (-2)^{-1} + 3^{-1} = \frac{1}{(-2)^1} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = -\frac{1}{6};$$

$$\text{б) } \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} - 2^{-4} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{2^4} = \frac{25}{16} - \frac{1}{16} = \frac{24}{16} = 1,5;$$

$$\text{в) } (-0,1)^{-3} + (-0,2)^{-3} = \frac{1}{(-0,1)^3} + \frac{1}{(-0,2)^3} = \frac{1}{-0,001} + \frac{1}{-0,008} = -1000 - 125 = -1125;$$

$$\text{г) } (0,2)^{-3} + (0,5)^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 125 + 8 = 133.$$

$$5) \text{ а) } \left(\frac{1}{7}\right)^{-2} - 7^{-2} \cdot 7^{-4} = 49 - 7^2 = 0; \text{ б) } 5^{-3} \cdot 5^{-5} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = 5^{-8} - 5^4 = -600;$$

$$в) 10^5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 10^5 \cdot 3 = 9,3.$$

$$5. а) (b^{-3} - b^{-2})^2 + \frac{2}{b^5} = \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{2}{b^5} = \left(\frac{1-b}{b^3}\right)^2 + \frac{2}{b^5} = \frac{1-2b+b^2+2b}{b^6} = \frac{1+b^2}{b^6};$$

$$б) (a+a^{-1})^3 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 = \left(\frac{a^2+1}{a}\right)^3 = \frac{(a^2+1)^3}{a^3};$$

$$в) (a^{-2} - b^{-2}) : (a^{-1} + b^{-1}) = \frac{(a^{-1} + b^{-1})(a^{-1} - b^{-1})}{a^{-1} + b^{-1}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}.$$

С-30. Степень с целым показателем (продолжение)

$$1. а) (a-1)^2 = \frac{1}{(a-1)^2}; \quad б) (3bc)^{-3} = \frac{1}{27b^3c^3}; \quad в) a^{-1} + 1 = \frac{1}{a} + 1 = \frac{1+a}{a};$$

$$г) x^{-3} - x^{-1} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} = \frac{1-x^2}{x^2}; \quad д) a^{-2} - b^{-2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2}.$$

$$2. а) (a^3)^{-2} = a^{-6} = \frac{1}{a^6}; \quad б) (xy^{-1})^{-3} = x^{-3}y^3 = \frac{y^3}{x^3}; \quad в) (-5c^{-1})^2 = 25c^{-8} = \frac{25}{c^8};$$

$$г) \left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-1} = \frac{b^3}{a^2}; \quad д) \left(\frac{x^{-3}}{3y^2}\right)^{-2} = \frac{9x^6}{y^4} = 9x^6y^4.$$

$$3. а) 8^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = (2^3)^{-3} \cdot 2^{-3} = 2^{-9-3} = \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4096};$$

$$б) 25^{-3} \cdot 15^4 = \frac{(5 \cdot 3)^4}{25^3} = \frac{5^4 \cdot 3^4}{5^6} = \frac{3^4}{5^2} = \frac{81}{25}; \quad в) 6^{-4} \cdot 3^{-6} = \frac{3^6}{6^4} = \frac{3^6}{2^4 \cdot 3^4} = \frac{3^2}{2^4} = \frac{9}{16};$$

$$г) \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} : \left(-\frac{4}{3}\right)^8 = \frac{4^5 \cdot 3^8}{3^5 \cdot 4^8} = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}; \quad д) \frac{2^{-5} \cdot 16^2}{8^4} = \frac{2^{-5} \cdot 2^8}{2^{12}} = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}.$$

$$4. а) a^3b^3(a^{-3} + b^{-3}) = a^3b^3\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right) = b^3 + a^3;$$

$$б) (x-y)^{-2} \cdot \frac{1}{(y-x)^{-1}} = \frac{1}{(x-y)^2} \cdot (y-x) = \frac{y-x}{(y-x)^2} = \frac{1}{y-x};$$

$$в) a^9(a^{-3} - a^{-5})(a^4 + a^5)^{-1} = \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^5}\right) \cdot \frac{1}{a^4 + a^5} \cdot a^9 = \\ = \frac{a^2 - 1}{a^5} \cdot \frac{1}{a^4(1+a)} \cdot a^9 = \frac{(a-1)(a+1)}{1+a} = a-1.$$

$$5. \left((ab^{-1})^{-2} - a^0b^2\right) : \frac{a^2 - b^4}{b} = \left(\frac{a^2 - b^4}{b^2} - b^2\right) \cdot \frac{b}{a^2 - b^4} = \frac{(a^2 - b^4) \cdot b}{b^2(a^2 - b^4)} = \frac{1}{b} = \frac{1}{17}.$$

$$6. 1) а) 100^3 = (10^2)^3 = 10^6; \quad б) 0,0003^2 = (3 \cdot 10^{-4})^2 = 9 \cdot 10^{-8};$$

$$\text{в)} 1000^{-2} = (10^3)^{-2} = 10^{-6}; \quad \text{г)} (0,0001)^{-4} = (10^{-4})^{-4} = 10^{16}.$$

$$2) \text{ а)} 0,0000016 = 1,6 \cdot 10^{-6}; \quad \text{б)} 0,00007142 = 7,142 \cdot 10^{-5};$$

$$\text{в)} \frac{1}{16} = 0,0625 = 6,25 \cdot 10^{-2}; \quad \text{г)} \frac{1}{32} = 0,03125 = 3,125 \cdot 10^{-2}.$$

$$7. \text{ а)} (2x^{-2} - y)(y + 2x^{-2}) = (2x^{-2})^2 - y^2 = 4x^{-4} - y^2 = \frac{4}{x^4} - y^2 = \frac{4 - x^4 y^2}{x^4};$$

$$\text{б)} (a^{-2} - b^{-2})(a^{-4} + (ab)^{-2} + b^{-4}) = (a^{-2})^3 - (b^{-2})^3 = a^{-6} - b^{-6} = \frac{1}{a^6} - \frac{1}{b^6} = \frac{b^6 - a^6}{a^6 b^6};$$

$$\text{в)} (a^{-1} + 4)(a^{-2} - (0,25a)^{-1} + 16) = (a^{-1})^3 + 4^3 = \frac{1}{a^3} + 64 = \frac{1 + 64a^3}{a^3}.$$

C-31. Определение степени с рациональным показателем

$$1. 1) \text{ а)} 6^{1/2} = \sqrt{6}; \quad 5^{3/4} = \sqrt[4]{5^3}; \quad 12^{-1/3} = \sqrt[3]{12^{-1}}; \quad 23^{-4/5} = \sqrt[5]{23^{-4}};$$

$$\text{б)} a^{0,5} = \sqrt{a}; \quad b^{2,5} = b^{5/2} = \sqrt{b^5}; \quad x^{-0,5} = \sqrt{x^{-1}}; \quad y^{-1,5} = \sqrt{y^{-3}};$$

$$2) \text{ а)} 3a^{1/3} = 3\sqrt[3]{a}; \quad -5b^{3/4} = -5\sqrt[4]{b^3}; \quad (3x)^{0,5} = \sqrt{3x}; \quad (4y)^{-1,5} = \sqrt{(4y)^{-3}};$$

$$\text{б)} (x-a)^{2/3} = \sqrt[3]{(x-a)^2}; \quad y^{3/5} - b^{3/5} = \sqrt[5]{y^3} - \sqrt[5]{b^3}; \quad ab^{0,5} + xy^{0,5} = a\sqrt{b} + x\sqrt{y}.$$

$$2. 1) \text{ а)} \sqrt{5} = 5^{1/2}; \quad \sqrt[3]{7} = 7^{1/3}; \quad \sqrt[3]{3} = 3^{1/3}; \quad \sqrt[4]{4^2} = 4^{2/4};$$

$$\text{б)} \sqrt[3]{x^3} = x^{3/3}; \quad \sqrt[7]{y^4} = y^{4/7}; \quad \sqrt[10]{4a} = (4a)^{1/10}; \quad \sqrt[10]{16b^4} = (16b^4)^{1/10};$$

$$2) \text{ а)} \sqrt[5]{5^{-1}} = 5^{-1/5}; \quad \sqrt[4]{8} = 8^{1/4}; \quad \sqrt[10]{25^3} = 25^{3/10};$$

$$\text{б)} \sqrt[6]{a^{-2}} = a^{-1/3}; \quad \sqrt[7]{(x+y)^3} = (x+y)^{3/7}; \quad \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

$$3.1) \text{ а)} 16^{1/2} = 4; \quad \text{б)} 25^{-1/2} = \frac{1}{25^{1/2}} = \frac{1}{5}; \quad \text{в)} 7 \cdot 81^{-1/4} = 7 \cdot 3 = 21;$$

$$\text{г)} -5 \cdot 0,001^{-2/3} = -5 \cdot (10^{-3})^{-2/3} = -5 \cdot 10^2 = -500.$$

$$2) \text{ а)} 0,0625^{-1/4} = \frac{1}{0,0625^{1/4}} = \frac{1}{0,5} = 2; \quad \text{б)} 0,0049^{0,5} = 0,07;$$

$$\text{в)} \left(3\frac{3}{8}\right)^{-4/3} = \left(\frac{27}{8}\right)^{-4/3} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^{-4/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81};$$

$$\text{г)} \left(4\frac{17}{27}\right)^{-1/6} = \left(\frac{27}{125}\right)^{1/6} = \left(\left(\frac{3}{5}\right)^3\right)^{1/6} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$$

$$4. \text{ а)} 0 \leq y \leq 0,00032; \quad 0 \leq y^{0,6} \leq (0,2^3)^{3/5}; \quad 0 \leq y^{0,6} \leq 0,008;$$

$$\text{б)} 1 \leq y \leq 243; \quad 1 \leq y^{0,6} \leq (3^5)^{3/5}; \quad 1 \leq y^{0,6} \leq 27;$$

$$\text{в)} 0,00001 \leq y \leq 1; \quad (10^{-5})^{3/5} \leq y \leq 1; \quad 0,001 \leq y \leq 1;$$

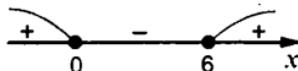
$$r) 32 \leq y \leq 1024; (2^5)^{3/5} \leq y^{0.6} \leq (2^{10})^{3/5}; 8 \leq y^{0.6} \leq 64;$$

$$5. a) y = x^{-4/9} = \sqrt[9]{x^{-4}}; D(y) = R; б) y = x^{-0.7} = \frac{1}{x^{7/10}} = \frac{1}{\sqrt[10]{x^7}}; D(y) = (0; +\infty);$$

$$в) y = (x+5)^{-0.1} = \frac{1}{(x+5)^{0.1}} = \frac{1}{\sqrt[10]{x+5}}; x+5 > 0; x > -5; D(y) = (-5; +\infty);$$

$$r) y = (x^2 - 6x)^{3/4} = \sqrt[4]{(x^2 - 6x)^3}; x^2 - 6x \geq 0; x(x-6) \geq 0;$$

$$D(y) = (-\infty; 0] \cup [6; +\infty).$$



$$6. a) x^{1/2} = 5, x = 25; б) x^{1/3} = 3, x = 27; в) (x-2)^{0.5} = 7, x-2 = 49, x = 51;$$

$$r) (x+3)^{1/4} = 0, x+3 = 0, x = -3; д) (x^2 - 16)^{0.5} = 3, x^2 - 16 = 9, x^2 = 25, x_{1,2} = \pm 5;$$

$$e) (x^2 + 7x)^{1/3} = 2; x^2 + 7x = 8; x^2 + 7x - 8 = 0; D = 49 + 4 \cdot 8 = 81; x_1 = \frac{-7+9}{2} = 1; x_2 = -8;$$

С-32. Свойства степени с рациональным показателем

$$1. 1) a) a^{1/2} \cdot a^{1/5} = a^{1/2+1/5} = a^{0.7}; б) (a^{1/2})^{1/5} = a^{1/10}; в) a^{1/2} : a^{1/5} = a^{1/2-1/5} = a^{0.3};$$

$$r) a : a^{3/5} = a^{1-3/5} = a^{2/5}; д) a^{2/3} a^{1/6} a^{-1/2} = a^{4/6+1/6-3/6} = a^{1/3}.$$

$$2) a) (b^{0.6})^{0.3} \cdot b^{0.32} = b^{0.18} \cdot b^{0.32} = b^{0.5}; б) (b^{3/8})^{1.6} \cdot (b^{-2/7})^{1.4} = b^{0.6} \cdot b^{-0.4} = b^{0.2};$$

$$в) \frac{b^{5/8} \cdot b^{1/4}}{b^{-0.125}} = b^{3/8+1/8} = b^{0.5}; r) \frac{b^{4.7} b^{-3.9}}{b^{-2.1} b^{1.9}} = b.$$

$$2. 1) a) (5^{0.6})^{-0.6} \cdot (0.2)^{-2.36} = 5^{-0.36} \cdot (5^{-1})^{-2.36} = 5^{-0.36} \cdot 5^{2.36} = 5^2 = 25;$$

$$б) (2^{-1/7})^{1.4} \cdot 4^{0.1} = 2^{-0.2} \cdot (2^2)^{0.1} = 2^{-0.2} \cdot 2^{0.2} = 2;$$

$$2) a) 81^{0.25} \cdot 27^{-1/6} \cdot 9^{0.75} = (3^4)^{0.25} \cdot (3^3)^{-1/6} \cdot (3^2)^{0.75} = 3^1 \cdot 3^{-0.5} \cdot 3^{1.5} = 3^2 = 9;$$

$$б) \frac{32^{0.42} \cdot 4^{0.6}}{16^{0.3} \cdot 2^{0.1}} = \frac{(2^5)^{0.42} \cdot 2^{1.2}}{(2^4)^{0.3} \cdot 2^{0.1}} = \frac{2^{2.1} \cdot 2^{1.2}}{2^{1.2} \cdot 2^{0.1}} = \frac{2^{3.3}}{2^{1.3}} = 2^2 = 4.$$

$$3. x^8 = (x^4)^2; x^{-4} = (x^{-2})^2; x^5 = (x^{5/2})^2; x = (\sqrt{x})^2; x^{1/4} = (x^{1/8})^2; x^{1/5} = (x^{1/10})^2; x^{4/9} = (x^{4/18})^2.$$

$$4. y^9 = (y^3)^3; y^{-6} = (y^{-2})^3; y^2 = (y^{2/3})^3; y = (\sqrt[3]{y})^3; y^{1/3} = (y^{1/9})^3; y^{3/5} = (y^{1/5})^3.$$

$$5. a) (a^{1/2} - 2) \cdot 3a^{1/2} + 6a^{1/2} = 3a - 6a^{1/2} + 6a^{1/2} = 3a; б) (a^{0.5} - b^{0.5})(a^{0.5} + b^{0.5}) = a - b;$$

$$в) (1 + a^{0.5})^2 + 2a^{0.5} = 1 + 2a^{0.5} + a + 2a^{0.5} = 1 + 4a^{0.5} + a;$$

$$r) (b^{1/3} + 1)(b^{2/3} - b^{1/3} + 1) = (b^{1/3})^3 + 1^3 = b + 1.$$

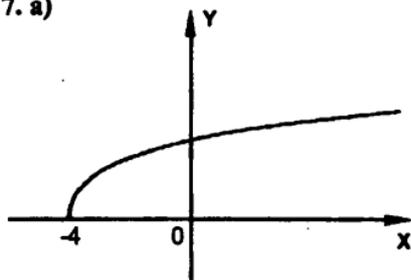
$$6. a) x = a^{0.49}, y = a^{-0.49}; x \cdot y = a^{0.49} \cdot a^{-0.49} = a^0 = 1, \text{ т.е. } xy = 1;$$

$$б) x = a^{1/2}, y = a^{1/4}; x \cdot y^{-2} = a^{1/2} \cdot a^{-1/2} = 1, \text{ т.е. } xy^{-2} = 1, x = y^2;$$

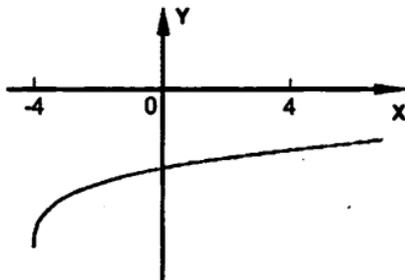
$$в) x = a^{1/6}, y = \sqrt{1 - a^{1/3}}; x^2 + y^2 = (a^{1/6})^2 + (\sqrt{1 - a^{1/3}})^2 = a^{1/3} + 1 - a^{1/3} = 1, \text{ т.е. } x^2 + y^2 = 1;$$

г) $x = \sqrt[4]{a}$, $y = \sqrt[4]{a-5}$; $x^4 - y^4 = (\sqrt[4]{a})^4 - (\sqrt[4]{a-5})^4 = a - (a-5) = 5$, т.е. $x^4 - y^4 = 5$.

7. а)



б)



С-33. Преобразования выражений, содержащих степени с дробными показателями

1. 1) а) $a - 4a^{1/2} = a^{1/2}(a^{1/2} - 4) = a^{1/2}(a^{1/4} - 2)(a^{1/4} + 2)$; б) $b^{1/2} + 3b^{1/4} = b^{1/4}(b^{1/4} + 3)$;

в) $(x^{1/2})^2 - 9 = (x^{1/2} - 3)(x^{1/2} + 3)$; г) $(y^{1/3})^3 - 27 = (y^{1/3} - 3)(y^{1/3} + 3y^{2/3} + 9)$;

д) $a^{2/3} - b^{2/3} = (a^{1/3} - b^{1/3})(a^{1/3} + b^{1/3})$; е) $x^{3/2} + y^{3/2} = (x^{1/2} + y^{1/2})(x - x^{1/2}y^{1/2} + y)$;

2) а) $x^{1/2} + 10x^{1/4} = x^{1/4}(x^{1/4} + 10)$; б) $y^{3/4} - 2y^{1/2} = y^{1/4}(y^{1/4} - 2)$;

в) $cd^{1/10} + cd^{1/5} = cd^{1/10}(1 + d^{1/10})$; г) $p^{2/9} - p^{1/9} = p^{1/9}(p^{1/9} - 1)$;

д) $b - 25 = (\sqrt{b} - 5)(\sqrt{b} + 5)$; е) $a - 125 = (a^{1/3} - 5)(a^{2/3} + 5a^{1/3} + 25)$.

2. 1) а) $\frac{a + 6a^{1/2}}{a^{1/2} + 6} = \frac{a^{1/2}(a^{1/2} + 6)}{a^{1/2} + 6} = a^{1/2}$; б) $\frac{5b^{1/2}}{b^{1/2} + 3b^{1/4}} = \frac{5b^{1/2}}{b^{1/4}(b^{1/4} + 3)} = \frac{5b^{1/4}}{b^{1/4} + 3}$;

в) $\frac{x - y}{x^{0.5} + y^{0.5}} = \frac{(x^{0.5} + y^{0.5})(x^{0.5} - y^{0.5})}{x^{0.5} + y^{0.5}} = x^{0.5} - y^{0.5}$;

г) $\frac{x^{1.5}y + xy^{1.5}}{xy^{0.5} + x^{0.5}y} = \frac{xy(x^{0.5} + y^{0.5})}{x^{0.5}y^{0.5}(x^{0.5} + y^{0.5})} = x^{0.5}y^{0.5}$;

д) $\frac{a^{3/2} + b^{3/2}}{a - a^{1/2}b^{1/2} + b} = \frac{(a^{1/2} + b^{1/2})(a - a^{1/2}b^{1/2} + b)}{a - a^{1/2}b^{1/2} + b} = a^{1/2} + b^{1/2}$;

е) $\frac{p - q}{p^{1/3} - q^{1/3}} = \frac{(p^{1/3} - q^{1/3})(p^{2/3} + p^{1/3}q^{1/3} + q^{2/3})}{p^{1/3} - q^{1/3}} = p^{2/3} + p^{1/3}q^{1/3} + q^{2/3}$;

2) а) $\frac{x - 3x^{1/2}}{x^{3/2} - 3x} = \frac{x^{1/2}(x^{1/2} - 3)}{x(x^{1/2} - 3)} = \frac{1}{x^{1/2}}$; б) $\frac{y^{1/3} + y^{5/6}}{y^{1/3} - y^{5/6}} = \frac{y^{1/3}(1 + y^{1/2})}{y^{1/3}(1 - y^{1/2})} = \frac{1 + y^{1/2}}{1 - y^{1/2}}$;

в) $\frac{9a - b}{3a - a^{0.5}b^{0.5}} = \frac{(3a^{0.5} - b^{0.5})(3a^{0.5} + b^{0.5})}{a^{0.5}(3a^{0.5} - b^{0.5})} = \frac{3a^{0.5} + b^{0.5}}{a^{0.5}}$;

$$\text{г) } \frac{p^{2/5} - q^{2/5}}{p + p^{2/5}q^{1/5}} = \frac{(p^{1/5} - q^{1/5})(p^{1/5} + q^{1/5})}{p^{4/5}(p^{1/5} + q^{1/5})} = \frac{p^{1/5} - q^{1/5}}{p^{4/5}};$$

$$\text{д) } \frac{a^{3/2}b^{1/2} - ab + a^{1/2}b^{3/2}}{a + b} = \frac{a^{3/2}b^{1/2} - ab + a^{1/2}b^{3/2}}{a + b};$$

$$\text{е) } \frac{x^{0,3} - y^{0,3}}{x^{0,1} - y^{0,1}} = \frac{(x^{0,1} - y^{0,1})(x^{0,2} + x^{0,1}y^{0,1} + y^{0,2})}{x^{0,1} - y^{0,1}} = x^{0,2} + x^{0,1}y^{0,1} + y^{0,2};$$

$$\begin{aligned} 3. \frac{y - 49y^{0,5}}{y^{0,75} - 7y^{0,5}} &= \frac{y^{0,5}(y^{0,5} - 49)}{y^{0,5}(y^{0,25} - 7)} = \frac{(y^{0,25} - 7)(y^{0,25} + 7)}{y^{0,25} - 7} = y^{0,25} + 7 = \\ &= (2,25)^{0,25} + 7 = \sqrt{1,5} + 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ а) } \frac{b}{81-b} - \frac{9}{b^{0,5}+9} + \frac{b^{0,5}}{b^{0,5}-9} &= \frac{b}{(9-b^{0,5})(9+b^{0,5})} - \frac{9}{9+b^{0,5}} - \frac{b^{0,5}}{9-b^{0,5}} = \\ &= \frac{b-9(9-b^{0,5})-b^{0,5}(9+b^{0,5})}{(9-b^{0,5})(9+b^{0,5})} = -\frac{81}{81-b} = \frac{81}{b-81}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \left(\frac{6x^{0,5}+1}{x^{0,5}-3} + \frac{6x^{0,5}-1}{x^{0,5}+3} \right) \cdot \frac{x-9}{2x+1} &= \frac{(6x^{0,5}+1)(x^{0,5}+3) + (6x^{0,5}-1)(x^{0,5}-3)}{x-9} \cdot \frac{x-9}{2x+1} = \\ &= \frac{6x+19x^{0,5}+3+6x-19x^{0,5}+3}{2x+1} = \frac{12x+6}{2x+1} = 6. \end{aligned}$$

С-34. Радианная мера угла

$$1. \text{ а) } \frac{\pi}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ; \quad \text{б) } \frac{3\pi}{2} = 3 \cdot \frac{\pi}{2} = 3 \cdot 90^\circ = 270^\circ; \quad \text{в) } \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ = 120^\circ;$$

$$\text{г) } \frac{4}{5}\pi = \frac{4}{5} \cdot 180^\circ = 144^\circ; \quad \text{д) } 2\pi = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

$$2. \text{ а) } 75^\circ = 75 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}; \quad \text{б) } 50^\circ = 50 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{18}; \quad \text{в) } 720^\circ = 720 \cdot \frac{\pi}{180} = 4\pi;$$

$$\text{г) } 15^\circ = 15 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}; \quad \text{д) } 10^\circ = 10 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{18}.$$

$$3. \frac{5\pi}{9} = \frac{5}{9} \cdot 180^\circ = 100^\circ.$$

Градусы	60°	30°	120°	150°	100°	72°	108°	135°	20°	450°
Радианы	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{9}$	2,5π

4. а) $\frac{\pi}{4} \approx 0,79$; б) $\frac{\pi}{6} \approx 0,52$; в) $\frac{\pi}{3} \approx 1,05$; г) $\pi \approx 3,14$; д) $\frac{3\pi}{2} \approx 4,71$.

5. а) $\frac{\pi}{4} > 0, (7)$; б) $-\frac{\pi}{6} < -\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{2}\pi < 4,8$.

6. Длина окружности равна $2\pi R \approx 21,35$ (см). За 10 мин конец стрелки пройдет одну шестую длины, т.е. 3,56 см.

7. Пусть x – коэффициент пропорциональности. Тогда $2x$, $3x$ и $5x$ – углы треугольника. Их сумма равна π , т.е. $2x + 3x + 5x = \pi$, $10x = \pi$, $x = \frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{10}$, $\frac{\pi}{2}$ – углы треугольника.

8. Пусть x – угол, $\pi \cdot 4,5^2$ см² – площадь круга, $\frac{\pi \cdot 4,5^2}{2\pi} \cdot x = \frac{4,5^2 \cdot x}{2}$ см² – площадь сектора или 20,25 см². Получаем: $\frac{4,5^2 \cdot x}{2} = 20,25$; $x = 2$.

9. $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ – угол при вершине; $\frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8}$ – II и III углы.

10. Внутренний угол правильного n -угольника равен $\pi \left(1 - \frac{2}{n}\right)$.

Внешний равен: $\pi - \pi \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \pi \left(1 - 1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{2\pi}{n}$. Получаем: $\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{6}$; $n = 12$.

С-35 Поворот точки вокруг начала координат

1. 1) а) $(-1; 0)$; б) $(0; 1)$; в) $(0; -1)$; г) $(-1; 0)$; д) $(1; 0)$.

2) а) $(1; 0)$; б) $(0; -1)$; в) $(-1; 0)$; г) $(1; 0)$; д) $(0; -1)$.

2. а) III; б) III; в) I; г) IV; д) III.

3. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$. в) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

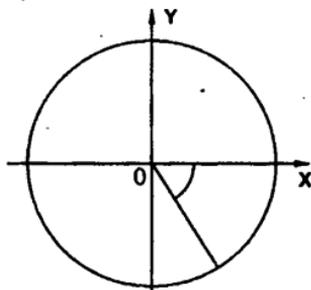
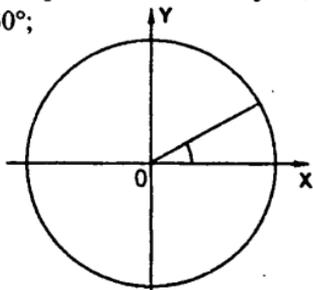
4. а) $(0; -1)$; б) $(0; -1)$; в) $(-1; 0)$.

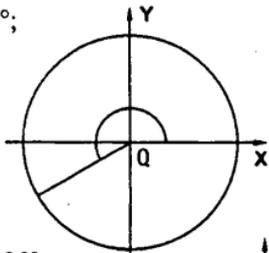
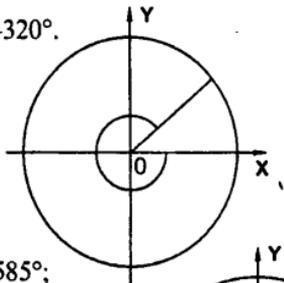
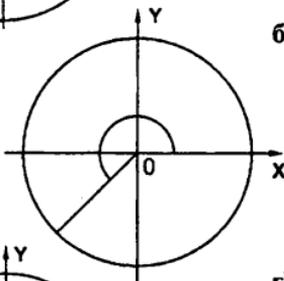
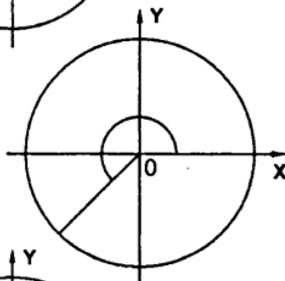
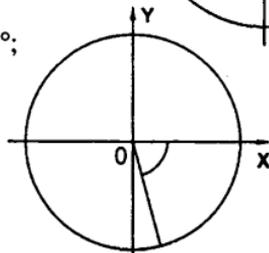
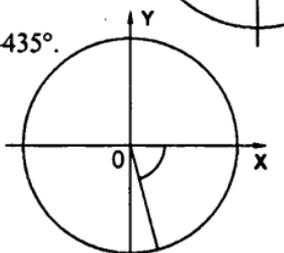
5. а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{4\pi}{3} + 2\pi l$; $l \in \mathbb{Z}$.

С-36. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса

1. 1) а) 30° ;

б) -60° ;



в) 210° ;г) -320° .2) а) 225° ;б) 585° ;в) -75° ;г) -435° .

2. 1) а) III; б) II; в) II; г) III.

2) а) III; б) II; в) I; г) IV.

3.

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	-	0	-	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	0	-	0	-

4. 1) а) $\varphi = 180^\circ$; б) $\varphi = 450^\circ$; в) $\varphi = 270^\circ$;2) а) $\varphi = 270^\circ$; б) $\varphi = 360^\circ$; в) $\varphi = 180^\circ$.5. а) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; $4 - 1 \leq 4 + \sin \alpha \leq 4 + 1$; $3 \leq 4 + \sin \alpha \leq 5$;б) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; $-1 \leq -\sin \alpha \leq 1$; $3 \leq 4 - \sin \alpha \leq 5$;в) $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$; $6 - 1 \leq 6 + \cos \alpha \leq 6 + 1$; $5 \leq 6 + \cos \alpha \leq 7$;г) $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$; $-1 \leq -\cos \alpha \leq 1$; $5 \leq 6 - \cos \alpha \leq 7$.6. а) нет, т.к. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; а $\frac{\sqrt{10}}{3} > 1$; б) нет, т.к. $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$; а $\frac{\sqrt{10}}{3} > 1$;

в) да; г) да.

7. 1) а) $\cos 180^\circ + 5 \sin 90^\circ = -1 + 5 = 4$; б) $\sin 180^\circ - 3 \cos 0^\circ = 0 - 3 = -3$;
 в) $5 \operatorname{ctg} 90^\circ - 7 \operatorname{tg} 180^\circ = 5 \cdot 0 - 7 \cdot 0 = 0$; г) $\operatorname{tg} 360^\circ - 2 \operatorname{ctg} 270^\circ + 3 = 0 - 2 \cdot 0 + 3 = 3$;
- 2) а) $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$; б) $\sin 30^\circ - \cos 60^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$;
 в) $\sin 45^\circ - \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$; г) $\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ = 1 + \sqrt{3}$.
8. а) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\sin x = -1$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 в) $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; г) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 д) $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; е) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
9. а) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$;
 б) $\operatorname{tg}^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1,5$; в) $\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 180^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 = 0$.
10. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $\sin \alpha > 0$, $\sin \alpha < 2$, значит, $\sin^2 \alpha < 2 \sin \alpha$.
11. $\alpha = 30^\circ$; а) $\sin 2\alpha = \sin(2 \cdot 30^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $2 \sin \alpha = 2 \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$;
 в) $\cos 3\alpha = \cos(3 \cdot 30^\circ) = \cos 90^\circ = 0$; $3 \cos \alpha = 3 \cos 30^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

С-37. Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса

1. а) $\sin 13^\circ > 0$, $\sin 103^\circ > 0$, $\sin 218^\circ < 0$, $\sin 302^\circ < 0$;
 б) $\cos 41^\circ > 0$, $\cos 179^\circ < 0$, $\cos 273^\circ > 0$, $\cos 354^\circ > 0$;
 в) $\operatorname{tg} 14^\circ > 0$, $\operatorname{tg} 86^\circ > 0$, $\operatorname{tg} 191^\circ > 0$, $\operatorname{tg} 311^\circ < 0$;
 г) $\operatorname{ctg} 67^\circ > 0$, $\operatorname{ctg} 98^\circ < 0$, $\operatorname{ctg} 195^\circ > 0$, $\operatorname{ctg} 279^\circ < 0$.
2. 1) а) $\sin 169^\circ > 0$; б) $\cos 110^\circ < 0$; в) $\operatorname{tg} 203^\circ > 0$; г) $\operatorname{ctg} 288^\circ < 0$;
 2) а) $\sin 409^\circ > 0$; б) $\cos 372^\circ > 0$; в) $\operatorname{tg} 540^\circ = 0$; г) $\operatorname{ctg} 364^\circ > 0$;
 3) а) $\sin(-88^\circ) < 0$; б) $\cos(-12^\circ) > 0$; в) $\operatorname{tg}(-72^\circ) < 0$; г) $\operatorname{ctg}(-110^\circ) > 0$.
- 3.

α	116°	208°	367°	-43°	-105°
$\sin \alpha$	+	-	+	-	-
$\cos \alpha$	-	-	+	+	-
$\operatorname{tg} \alpha$	-	+	+	-	+
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	+	+	-	+

4. а) $\sin 16^\circ \cdot \cos 206^\circ = \ll - \gg \cdot \ll - \gg < 0$; б) $\sin 108^\circ \cdot \cos 300^\circ = \ll + \gg \cdot \ll + \gg > 0$;

в) $\frac{\sin 267^\circ}{\cos 167^\circ} = \frac{\ll - \gg}{\ll + \gg} < 0$; г) $\frac{\cos 140^\circ}{\cos 14^\circ} = \frac{\ll - \gg}{\ll + \gg} < 0$;

д) $\sin 160^\circ \cdot \cos 205^\circ \cdot \operatorname{tg} 97^\circ = \ll + \gg \cdot \ll - \gg \cdot \ll - \gg > 0$;

е) $\cos 155^\circ \cdot \sin 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 105^\circ = \ll - \gg \cdot \ll + \gg \cdot \ll - \gg > 0$.

5. а) $\sin \alpha > 0$ и $\operatorname{tg} \alpha < 0$, I или II, II или IV, значит, II четверть;

б) $\cos \alpha < 0$ и $\operatorname{tg} \alpha > 0$, II или III, I или III, значит, III четверть.

6. 1) а) $\sin(-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos(-60^\circ) = \frac{1}{2}$; в) $\operatorname{tg}(-30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\operatorname{ctg}(-45^\circ) = -1$;

2) а) $\sin(-60^\circ) + \sin 0^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin(-30^\circ) + \cos(-60^\circ) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$;

в) $\sin(-90^\circ) + \cos(-90^\circ) = -1 + 0 = -1$; г) $\cos(-60^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-45^\circ) = -\frac{1}{2}$.

7. а) $\sin 420^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos 390^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\operatorname{tg} 405^\circ = 1$;

г) $\operatorname{ctg} 390^\circ = \sqrt{3}$; д) $\sin 750^\circ = \frac{1}{2}$; е) $\cos 720^\circ = 1$.

8. $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; а) $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \ll - \gg \cdot \ll + \gg < 0$; б) $\frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\ll + \gg}{\ll - \gg} < 0$;

в) $\frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\ll - \gg}{\ll - \gg} > 0$; г) $\sin \alpha + \cos \alpha = \ll - \gg + \ll - \gg < 0$.

9. $\cos \alpha = a$; а) $1 + \cos \alpha = 1 + a$; б) $1 - \cos(-\alpha) = 1 - a$;

в) $\cos(\alpha + 720^\circ) = a$; г) $\cos(\alpha - 720^\circ) = \cos(720^\circ - \alpha) = a$;

д) $\cos(360^\circ + \alpha) = a$; е) $\cos(360^\circ - \alpha) = a$.

10. $\sin \alpha + \cos \alpha = -1.03$; III четверти.

11. $\varphi \in$ III четверти;

а) $|\sin \varphi| + \sin \varphi = -\sin \varphi + \sin \varphi = 0$; б) $\cos \varphi - |\cos \varphi| = \cos \varphi + \cos \varphi = 2 \cos \varphi$;

в) $\operatorname{tg} \varphi + |\operatorname{tg} \varphi| = \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi = 2 \operatorname{tg} \varphi$; г) $|\sin \varphi| - |\operatorname{tg} \varphi| = -\sin \varphi - \operatorname{tg} \varphi$.

С-38. Вычисление значений тригонометрических функций

1. 1) а) $3 \cos 60^\circ - 2 \sin 30^\circ + 6 \operatorname{ctg} 60^\circ - 2 \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 2 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}$;

б) $\sin(-30^\circ) + \cos(-60^\circ) - 2 \operatorname{tg}(-30^\circ) \cdot \operatorname{ctg}(-60^\circ) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}$;

в) $5 \sin(-45^\circ) + 5 \cos(-45^\circ) - \sqrt{3} \operatorname{tg}(-30^\circ) + \sin(-30^\circ) = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;

$$2) \text{ а) } 3 \cos \frac{\pi}{3} - 2 \sin \frac{\pi}{6} + 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 - 1 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2};$$

$$\text{б) } \sin(-\pi) + 2 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 3 \sin \frac{\pi}{4} + 3 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0 + 2 \cdot 0 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$\text{в) } 6 \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 5 \cos(-\pi) = 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 1 + 5 = 22.$$

$$2. \text{ а) } \sin 0 - \cos 0 = -1 + 0 = -1; \quad \sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1; \quad \sin \pi - \cos \pi = 0 - (-1) = 1;$$

$$\sin 2\pi - \cos 2\pi = 0 - 1 = -1;$$

$$\text{б) } 2 \sin 0 + \cos(2 \cdot 0) = 0 + 1 = 1; \quad 2 \sin \frac{\pi}{6} + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$2 \sin \frac{\pi}{2} + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 1 - 1 = 1; \quad 2 \sin \pi + \cos(2\pi) = 2 \cdot 0 + 1 = 1;$$

$$\text{в) } 3 \sin 0 - \cos(3 \cdot 0) = 3 \cdot 0 - 1 = -1; \quad 3 \sin \frac{\pi}{6} - \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} - 0 = \frac{3}{2};$$

$$3 \sin \frac{\pi}{3} - \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - (-1) = \frac{3\sqrt{3} + 2}{2}; \quad 3 \sin \frac{\pi}{2} - \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot 1 - 0 = 3;$$

$$\text{г) } \sin(3 \cdot 0) + \cos 0 = 0 + 1 = 1; \quad \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + \cos \frac{\pi}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2};$$

$$\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \cos \frac{\pi}{3} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \quad \sin(3 \cdot \pi) + \cos \pi = 0 - 1 = -1.$$

$$3. \text{ 1) а) } \sin^2 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0;$$

$$\text{б) } 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} + 3 \cos^2 \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2};$$

$$\text{в) } \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{9}; \quad \text{г) } \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{6};$$

$$2) \text{ а) } \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1;$$

$$\text{б) } 3 \cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3}{4};$$

$$\text{в) } \operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}; \quad \text{г) } \operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$4. \text{ а) } \frac{2 \sin^2 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot 3}{\frac{1}{2}} = -3,5;$$

$$6) \frac{3,5 - \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{3,5 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{-2} = \frac{5}{4}.$$

$$5. \text{ а) } \frac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin(\alpha - 15^\circ) + 2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin 90^\circ - \cos 90^\circ}{\sin 30^\circ + 2\operatorname{tg}45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{2}{5};$$

$$6) \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin 90^\circ + \sin 30^\circ}{2\sin 90^\circ} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4};$$

$$\text{ в) } \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha + \sin(-\alpha) + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2};$$

$$\text{ г) } \frac{3\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta) - 3\cos \alpha} = \frac{3\sin \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{6} - 3\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}} = -3.$$

$$6. \text{ а) } \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 1; \quad \text{ б) } \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} > 1;$$

$$\text{ в) } \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2; \quad \text{ г) } 2\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{2} = \sqrt{3} + 0 < 2.$$

Ответ: а) верно; б) верно; в) не верно; г) не верно.

$$7. \sin \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}; \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} \cdot \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{3})^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2},$$

значит, $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} \cdot \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{4}\right)$, что и требовалось доказать.

С-39. Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла

$$1. \text{ а) } \sin \alpha = -0,8; \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{4}{3};$$

$$\text{ б) } \cos \alpha = \frac{-24}{25}; \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}; \quad \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{24^2}{25^2}} = -\frac{7}{25};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{7 \cdot 25}{25 \cdot 24} = \frac{7}{24}; \quad \text{ в) } \sin \alpha = \frac{24}{25}; \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{24^2}{25^2}} = -\frac{7}{25}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{24}{7}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{7}{24};$$

$$\text{r) } \cos \alpha = -\frac{12}{13}, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}; \quad \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{12^2}{13^2}} = -\frac{5}{13};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{12}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{12}{5}; \quad \text{л) } \operatorname{tg} \alpha = 2,4, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + 2,4^2}} = -\frac{1}{2,6} = -\frac{5}{13}; \quad \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{5^2}{13^2}} = -\frac{12}{13};$$

$$\text{е) } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{12}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{5^2}{12^2}}} = \frac{12}{13}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{12^2}{13^2}} = \frac{5}{13}.$$

2. а) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \neq 1$, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

б) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1^2 + (-1)^2 \neq 1$. значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

$$\text{3. а) } \cos^2 \alpha = \frac{1}{4}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}; \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4};$$

$$\frac{15}{16} \neq \frac{3}{4}, \quad \text{значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.}$$

$$\text{б) } \sin \alpha = 0,7; \quad \operatorname{ctg} \alpha = 2\sqrt{2}; \quad \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - 0,7^2 = 0,51;$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{8}{9}; \quad 0,51 \neq \frac{8}{9},$$

ложно, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

$$\text{4. а) } \sin \beta = -\frac{40}{41}, \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}; \quad \text{т.к. } \sin \beta < 0; \quad \text{то } \pi < \beta < \frac{3\pi}{2};$$

$$\cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\sqrt{1 - \frac{40^2}{41^2}} = -\frac{9}{41}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{40}{9}; \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{9}{40};$$

$$\text{б) } \cos \beta = \frac{4}{5}, \quad 0 < \beta < \pi; \quad \text{т.к. } \cos \beta > 0, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}; \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{4^2}{5^2}} = \frac{3}{5};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{4}{3}; \quad \text{в) } \operatorname{tg} \beta = -1, \quad \pi < \beta < 2\pi; \quad \text{т.к. } \operatorname{tg} \beta < 0, \quad \text{то } \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi;$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \operatorname{ctg} \beta = -1;$$

$$\text{г) } \operatorname{ctg} \beta = 2, 0 < \beta < \pi, \text{ т.к. } \operatorname{ctg} \beta > 0; \text{ то } 0 < \beta < \frac{\pi}{2}; \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 \beta}} = -\frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\cos \beta = \sqrt{1-\sin^2 \beta} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}.$$

$$5. \sin \alpha; \cos \alpha = \pm \sqrt{1-\sin^2 \alpha}; \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha};$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1-\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}; \operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}; \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}}.$$

$$6. 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ, \cos \alpha = 1+a; \sin \alpha = \sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \sqrt{1-(1+a)^2} = \sqrt{-a^2-2a};$$

$$0 \leq \cos \alpha \leq 1 \text{ при } 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ; 0 \leq 1+a \leq 1; -1 \leq a \leq 0.$$

$$\text{Ответ: } \sin \alpha = \sqrt{-a-2a}; -1 \leq a \leq 0.$$

$$7. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{1-a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1-2a}}{1-a}\right)^2 = \frac{a^2+1-2a}{(1-a)^2} = \frac{(1-a)^2}{(1-a)^2} = 1, \text{ значит, могут.}$$

С- 40. Преобразование тригонометрических выражений

$$1. 1) \text{ а) } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \quad \text{б) } \sin^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \sin^2 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

$$\text{в) } 1 - \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha} = -\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -\operatorname{ctg}^2 \alpha; \quad \text{г) } 4 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 4 - 1 = 3.$$

$$2) \text{ а) } \cos^2 \beta - \cos^2 \beta \sin^2 \beta = \cos^2 \beta (1 - \sin^2 \beta) = \cos^2 \beta \cos^2 \beta = \cos^4 \beta;$$

$$\text{б) } \sin^4 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \beta = \sin^2 \beta (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = \sin^2 \beta;$$

$$\text{в) } \operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{ctg}^2 \beta - \sin^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta; \quad \text{г) } \frac{1-\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta - 1} = -\frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} = -\operatorname{tg}^2 \beta.$$

$$2. 1) \text{ а) } \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha = \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sin \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{б) } \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + 1 = \frac{\cos \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha \sin \alpha} + 1 = \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \text{ ч.т.д.}$$

$$2) \text{ а) } \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)} = \frac{\cos^2 \alpha \sin \alpha}{\sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = \cos^2 \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{б) } \frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha) \cos \alpha}{\sin \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)} = \operatorname{ctg} \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$3. 1) (1 - \cos(-\alpha))(1 + \cos(-\alpha)) = (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha;$$

$$б) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg}(-\alpha) + \cos^2(-\alpha) = -1 + \cos^2 \alpha = -\sin^2 \alpha;$$

$$в) \sin(-\alpha) - \sin \alpha \operatorname{ctg}^2(-\alpha) = -\sin \alpha - \sin \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha = \\ = -\sin \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = -\sin \alpha \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} = -\frac{1}{\sin \alpha};$$

$$2) а) \frac{1 + \cos(-\beta)}{\sin(-\beta)} - \operatorname{ctg}(-\beta) = -\frac{1 + \cos \beta}{\sin \beta} + \operatorname{ctg} \beta = \frac{-1 - \cos \beta + \cos \beta}{\sin \beta} = -\frac{1}{\sin \beta};$$

$$б) \frac{\sin^2(-\beta) - \sin^4(-\beta)}{\cos^2(-\beta)} = \frac{\sin^2 \beta - \sin^4 \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{\sin^2 \beta (1 - \sin^2 \beta)}{1 - \sin^2 \beta} = \sin^2 \beta;$$

$$в) \frac{\sin(-\alpha)}{1 - \cos(-\alpha)} - \operatorname{ctg}(-\alpha) = \operatorname{ctg} \alpha - \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \\ = \frac{\cos \alpha - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha (1 - \cos \alpha)} = \frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha (\cos \alpha - 1)} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

$$4. \frac{1 + \operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi} - \operatorname{ctg}^2 \varphi = \frac{1 + \operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg}^2 \varphi}{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg} \varphi} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \varphi}} - \operatorname{ctg}^2 \varphi = \frac{(1 + \operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg}^2 \varphi) \operatorname{ctg}^2 \varphi}{\operatorname{ctg}^2 \varphi + \operatorname{ctg} \varphi + 1} - \operatorname{ctg}^2 \varphi = 0.$$

Т.е. значение выражения не зависит от φ .

$$5. а) \frac{1 - \cos^4 \beta}{4 \cos \beta + 4 \cos^3 \beta} = \frac{(1 - \cos^2 \beta)(1 + \cos^2 \beta)}{4 \cos \beta (1 + \cos^2 \beta)} = \frac{\sin^2 \beta}{4 \cos \beta};$$

$$б) \cos^3 \beta \operatorname{tg}^3 \beta + 9 \sin^3 \beta = \cos^3 \beta \cdot \frac{\sin^3 \beta}{\cos^3 \beta} + 9 \sin^3 \beta = 10 \sin^3 \beta.$$

$$-1 \leq \sin \beta \leq 1; \quad -1 \leq \sin^3 \beta \leq 1; \quad -10 \leq 10 \sin^3 \beta \leq 10;$$

т.е. наименьшее значение равно -10 .

$$6. \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{ctg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi} = \frac{\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}}{\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}} = \frac{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi = \\ = 1 - \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi = 1 - 2 \cos^2 \varphi = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{9}{25} = \frac{7}{25}.$$

С-41. Преобразование тригонометрических выражений (продолжение)

$$1. 1) а) \frac{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{1 + \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\cos \alpha (\sin \alpha + 1)}{\sin \alpha (\sin \alpha + 1)} = \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$б) (1 - \cos^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

$$в) \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + 1 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{2 + 2 \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha};$$

$$г) \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)} = \\ = -\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = -\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = -2 \operatorname{tg} \alpha;$$

$$2) а) \frac{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \sin \alpha - \cos \alpha;$$

$$б) \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha = \\ = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha;$$

$$в) \frac{1 + \operatorname{ctg}^4 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 + \operatorname{ctg}^4 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{1 + \operatorname{ctg}^4 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1} \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha;$$

$$г) \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

$$2. а) \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \\ = \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$б) \frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{1 + \sin \alpha \cos \alpha} = \\ = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(1 + \sin \alpha \cos \alpha)}{1 + \sin \alpha \cos \alpha} = \sin \alpha - \cos \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$3. \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \\ = \frac{(1 - \cos^2 \alpha)^2}{\cos^2 \alpha} = \frac{\left(1 - \frac{4}{9}\right)^2}{\frac{4}{9}} = \frac{25 \cdot 9}{81 \cdot 4} = \frac{25}{36}.$$

$$4. а) \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha} = \frac{\cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \\ = \frac{\cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)} = \frac{\cos^4 \alpha}{\sin^4 \alpha} = \operatorname{ctg}^4 \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$6) \frac{3 \sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha} = \frac{3 \sin^2 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha)^2}{1 + \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha} =$$

$$= \frac{3 \sin^2 \alpha + 1 - 2 \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha} = \frac{1 + \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha} = 1, \text{ ч.т.д.}$$

$$5. \frac{\cos^2 \beta - \sin \beta \cos \beta}{\sin^2 \beta - \sin \beta \cos \beta} = \frac{\cos \beta (\cos \beta - \sin \beta)}{\sin \beta (\sin \beta - \cos \beta)} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{0,25} = 4$$

$$6. \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{1 - \sin^4 \varphi - \cos^4 \varphi} = \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(1 - \sin^2 \varphi)(1 + \sin^2 \varphi) - \cos^4 \varphi} = \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi (1 + \sin^2 \varphi) - \cos^4 \varphi} =$$

$$= \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi - \cos^4 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} = \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} = \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} = \frac{1}{2}.$$

$$7. y = 4 \cos^2 x - 3 \sin^2 x = 4(1 - \sin^2 x) - 3 \sin^2 x = 4 - 7 \sin^2 x,$$

т.к. $0 \leq \sin^2 x \leq 1$, то $y_{\max} = 4$, $y_{\min} = -3$.

Ответ: наименьшее значение функции (-3), наибольшее значение 4.

$$8. 2 \cos x = \sqrt{3}, \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}.$$

С-42. Формулы сложения

$$1. 1) \text{ а) } \cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4};$$

$$\text{б) } \cos \frac{5}{4}\pi = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \pi \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \pi \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2) \text{ а) } \cos 72^\circ \cos 18^\circ - \sin 72^\circ \sin 18^\circ = \cos(72^\circ + 18^\circ) = \cos 90^\circ = 0;$$

$$\text{б) } \cos \frac{8\pi}{3} \cos \frac{7\pi}{3} + \sin \frac{8\pi}{3} \sin \frac{7\pi}{3} = \cos\left(\frac{8\pi}{3} - \frac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{2};$$

$$\text{в) } \cos 15^\circ 30' \cos 29^\circ 30' - \sin 15^\circ 30' \sin 29^\circ 30' = \cos(15^\circ 30' + 29^\circ 30') = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$3) \text{ а) } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,8^2} = -0,6;$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-0,6 + 0,8) = \frac{\sqrt{2}}{10};$$

$$\text{б) } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{15^2}{17^2}} = -\frac{8}{17};$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\alpha \cos\frac{\pi}{3} - \sin\alpha \sin\frac{\pi}{3} = \frac{15}{17} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{17} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15 + 8\sqrt{3}}{34};$$

$$\text{в) } \sin\alpha = -\frac{8}{17}; \quad \cos\beta = -\sqrt{1 - \sin^2\beta} = -\frac{5}{13};$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta = -\frac{15}{17} \cdot \frac{5}{13} + \frac{8}{17} \cdot \frac{12}{13} = \frac{21}{221}; \quad \cos(\alpha - \beta) = -\frac{171}{221}$$

$$2. \text{ а) } \cos 2\alpha \cos 3\alpha - \sin 2\alpha \sin 3\alpha = \cos(2\alpha + 3\alpha) = \cos 5\alpha;$$

$$\text{б) } \cos\alpha \cos 2\alpha - \sin(-\alpha) \sin 2\alpha = \cos\alpha \cos 2\alpha + \sin\alpha \sin 2\alpha = \cos(\alpha - 2\alpha) = \cos 2\alpha;$$

$$\text{в) } \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\pi = -1;$$

$$\text{г) } \sin\left(\frac{3}{7}\pi - \alpha\right) \sin\left(\frac{4}{7}\pi + \alpha\right) - \cos\left(\frac{3}{7}\pi - \alpha\right) \cos\left(\frac{4}{7}\pi + \alpha\right) = -\cos\left(\frac{3}{7}\pi - \alpha + \frac{4}{7}\pi + \alpha\right) = -\cos\pi = 1;$$

$$\text{д) } \cos(\alpha + \beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha \cos\beta = -\sin\alpha \sin\beta.$$

$$3. \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \sin\beta} = \frac{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta} = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1; \quad \text{ч.т.д.}$$

$$4. \text{ а) } \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\frac{3\pi}{2} \cos\alpha - \sin\frac{3\pi}{2} \sin\alpha = \sin\alpha, \quad \text{ч.т.д.}$$

$$\text{б) } \cos(\pi - \alpha) = \cos\pi \cdot \cos\alpha + \sin\pi \cdot \sin\alpha = -\cos\alpha, \quad \text{ч.т.д.}$$

$$\begin{aligned} 5. \text{ а) } \cos\left(\frac{2}{3}\pi - \alpha\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos\frac{2}{3}\pi \cdot \cos\alpha + \sin\frac{2}{3}\pi \cdot \sin\alpha - \cos\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \sin\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \\ &= -\frac{1}{2} \cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\alpha - \frac{1}{2} \cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\alpha = -\cos\alpha + \sqrt{3} \sin\alpha; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos\alpha \cos\beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \sin\beta} = \frac{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta - \sin\alpha \sin\beta} = -\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta.$$

С-43. Формулы сложения (продолжение)

$$1. 1) \text{ а) } \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 180^\circ \cos 30^\circ - \cos 180^\circ \sin 30^\circ = 0,5;$$

$$\text{б) } \sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\pi \cos\frac{\pi}{3} + \cos\pi \sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2) \text{ а) } \sin 33^\circ \cdot \cos 63^\circ - \cos 33^\circ \sin 63^\circ = \sin(33^\circ - 63^\circ) = -\sin 30^\circ = -0,5;$$

$$\text{б) } \sin\frac{5\pi}{7} \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} \sin\frac{2\pi}{7} = \sin\left(\frac{5\pi}{7} + \frac{2\pi}{7}\right) = 0;$$

$$\text{в) } \sin 27^\circ 20' \cdot \cos 32^\circ 40' + \cos 27^\circ 20' \sin 32^\circ 40' = \sin(27^\circ 20' + 32^\circ 40') = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$3) \text{ а) } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{4}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5};$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{21}}{10};$$

$$\text{б) } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -0,8;$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos \alpha \sin \frac{\pi}{6} = 0,6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,8 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10};$$

$$\text{в) } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{3^2}{4^2}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}; \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = 0,6 = \frac{3}{5};$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4\sqrt{7} - 6}{20}; \quad \sin(\alpha + \beta) = \frac{-6 - 4\sqrt{7}}{20}.$$

$$2. \text{ а) } \sin \alpha \cos 2\alpha - \cos \alpha \sin 2\alpha = \sin(\alpha - 2\alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\text{б) } \sin 2\alpha \cdot \cos 3\alpha + \cos 2\alpha \sin 3\alpha = \sin(2\alpha + 3\alpha) = \sin 5\alpha;$$

$$\text{в) } \sin\left(\frac{3\pi}{5} - \alpha\right) \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5} - \alpha\right) \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{5} - \alpha + \alpha + \frac{2\pi}{5}\right) = \sin \pi = 0;$$

$$\text{г) } \sin(\alpha - \beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta;$$

$$3. \sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta) = (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = \\ = \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \cos^2 \beta (1 - \cos^2 \alpha) - \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$4. \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{(\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta) \cdot \cos \alpha \cos \beta}{(\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) \cdot \cos \alpha \cos \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \text{ ч.т.д.}$$

$$5. \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{5}{3} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{3 \cdot 3}{29 \cdot 3} = \frac{3}{29}.$$

$$6. \text{ а) } \frac{\operatorname{tg} 73^\circ - \operatorname{tg} 13^\circ}{1 + \operatorname{tg} 73^\circ \operatorname{tg} 13^\circ} = \operatorname{tg}(73^\circ - 13^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

$$\text{б) } \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{18} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{18} \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{9}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$7. \text{ а) } \operatorname{ctg} 150^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ + 60^\circ) = \frac{\operatorname{ctg} 30^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ - 1}{\operatorname{ctg} 90^\circ + \operatorname{ctg} 60^\circ} = -\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3};$$

$$\text{б) } \operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 180^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ}{1 + \operatorname{tg} 180^\circ \operatorname{tg} 60^\circ} = -\sqrt{3};$$

$$\text{в) } \operatorname{ctg}(-240^\circ) = -\operatorname{ctg}(270^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{ctg} 270^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ + 1}{\operatorname{ctg} 270^\circ - \operatorname{ctg} 30^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

С-44. Синус и косинус двойного угла

$$1. 1) \text{ а) } 2 \sin 22^\circ 30' \cos 22^\circ 30' = \sin(2 \cdot 22^\circ 30') = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{б) } 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{12} \right) = 0,5; \quad \text{в) } \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$\text{г) } (\sin 15^\circ - \cos 15^\circ)^2 = \sin^2 15^\circ - 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1 - \sin 30^\circ = 1 - 0,5 = 0,5;$$

$$\text{д) } (\cos 75^\circ + \sin 75^\circ)^2 = \cos^2 75^\circ + 2 \cos 75^\circ \sin 75^\circ + \sin^2 75^\circ = 1 + \sin 150^\circ = 1,5;$$

$$\text{е) } \cos^2 22^\circ 30' - \sin^2 22^\circ 30' = \cos(2 \cdot 22^\circ 30') = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{ж) } \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{з) } 1,5 - (\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)^2 = 1,5 - \cos^2 15^\circ + 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \\ = 1,5 - 1 + \sin 30^\circ = 0,5 + 0,5 = 1;$$

$$2) \text{ а) } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9};$$

$$\text{б) } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{3}{5}; \quad \sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25};$$

$$3) \text{ а) } \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{9}; \quad \text{б) } \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9};$$

$$4) \text{ т.к. } \operatorname{tg} \alpha < 0, \text{ то } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \quad \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\frac{1}{2,6};$$

$$\sin \alpha = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{2,4}{2,6}; \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - 2,4^2}{2,6^2} = \frac{4,76}{6,76} = -\frac{119}{169};$$

$$\sin 2\alpha = -2 \frac{2,4}{2,6^2} = -\frac{2,4}{2,6 \cdot 1,3} = -\frac{24}{26 \cdot 1,3} = -\frac{12}{13 \cdot 1,3} = -\frac{120}{169}.$$

$$2. 1) \text{ а) } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 1,1}{1 - 1,1^2} = -\frac{2,2}{0,21} = -\frac{220}{21};$$

$$\text{б) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3 \left(1 - \frac{5}{9} \right)} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 9}{3 \cdot 4} = \frac{3\sqrt{5}}{2};$$

$$2) \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{12}{13}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}; \quad \cos 2\alpha = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = -\frac{119}{169};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{24}{5 \left(1 - \frac{144}{25} \right)} = -\frac{24 \cdot 25}{5 \cdot 119} = -\frac{100}{119}.$$

$$3. \text{ а) } \frac{4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}} = 2 \operatorname{tg} \left(2 \cdot \frac{\pi}{12} \right) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$\text{б) } \frac{2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\cos^2 67,5^\circ - \sin^2 67,5^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 135^\circ} = -\frac{1 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$4. \text{ а) } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}; \quad (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{9}; \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin 2\alpha = \frac{1}{9}; \quad \sin 2\alpha = -\frac{8}{9};$$

$$\text{б) } \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{3}; \quad \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 = \frac{1}{9}; \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin \alpha = \frac{1}{9}; \quad \sin \alpha = \frac{8}{9}.$$

С-45. Синус и косинус двойного угла (продолжение)

$$1. \text{ а) } 2 \sin \alpha \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha;$$

$$\text{б) } 1 + \cos 2\alpha = 1 + 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cos^2 \alpha;$$

$$\text{в) } \frac{\cos 2\alpha + 1}{\sin 2\alpha} = \frac{1 + 2 \cos^2 \alpha - 1}{\sin 2\alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\text{г) } \frac{\cos \alpha \sin 2\alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \cos^3 \alpha;$$

$$\text{д) } 2 \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha + 1 = 1; \quad \text{е) } \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\text{ж) } \frac{1 - \sin 2\alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = \frac{\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = 1;$$

$$\text{з) } \cos 2\alpha + 2 \sin^2(-\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha = 1;$$

$$\text{и) } \operatorname{ctg}^2 \alpha (1 - \cos 2\alpha)^2 = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} (1 - 1 + 2 \sin^2 \alpha)^2 = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot 4 \sin^4 \alpha = 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^2 2\alpha;$$

$$\begin{aligned} \text{к) } \frac{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha - 2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} &= \frac{2 \cos^2 \alpha - 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \\ &= -\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = -(\sin \alpha + \cos \alpha). \end{aligned}$$

$$2. \text{ а) } \frac{\sin 2\alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{\sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)}{\cos \alpha (2 \cos \alpha - 1)} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$б) \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{1 + 2\cos^2 \alpha - 1}{1 - 1 + 2\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha;$$

$$3. а) \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha; \quad б) \cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$4. а) \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 2\sin \frac{\alpha}{2};$$

$$б) \cos 20^\circ \cdot \cos 70^\circ = \cos 20^\circ \cdot \cos(90^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ \sin 20^\circ = \frac{1}{2} \cos 40^\circ;$$

$$в) \cos \alpha \cos(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha;$$

$$г) \frac{\cos 160^\circ}{\cos^4 10^\circ - \sin^4 10^\circ} = \frac{\cos(180^\circ - 20^\circ)}{(\cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ)(\cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ)} = -\frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = -1;$$

$$д) \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 15^\circ}{2\operatorname{tg} 15^\circ} = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3};$$

5. а) $\frac{1 - \cos \alpha + \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha}$ в задаче допущена опечатка, данный пример следует читать как:

$$\frac{1 - \cos \alpha + \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha + 2\cos^2 \alpha - 1}{2\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha (2\cos \alpha - 1)}{\sin \alpha (2\cos \alpha - 1)} = \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$б) \frac{\operatorname{ctg}^2(45^\circ + \alpha) - 1}{\operatorname{ctg}^2(45^\circ + \alpha) + 1} = \frac{\frac{\cos^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(45^\circ + \alpha)}{\sin^2(45^\circ + \alpha)}}{\frac{1}{\sin^2(45^\circ + \alpha)}} =$$

$$= \cos(2(45^\circ + \alpha)) = \cos(90^\circ + 2\alpha) = -\sin 2\alpha, \text{ т.д.}$$

6. а) $\sin 36^\circ \cdot \cos 72^\circ =$ Опечатка.

$$б) 8\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \frac{\sin \frac{\pi}{9} \cdot 8\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{4\sin \frac{2\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} =$$

$$= \frac{2\sin \frac{4\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{8\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} = 1; \text{ ч.т.д.}$$

С-46. Формулы приведения

$$1. \text{ а) } \sin 570^\circ = \sin(540^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -0,5;$$

$$\text{б) } \cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{в) } \operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1; \quad \text{г) } \operatorname{ctg} 315^\circ = \operatorname{ctg}(270^\circ + 45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1;$$

$$\text{д) } \sin \frac{13\pi}{6} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = 0,5; \quad \text{е) } \cos \frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{ж) } \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \text{з) } \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3} = \operatorname{ctg}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{и) } \sin(-630^\circ) = -\sin 630^\circ = -\sin(720^\circ - 90^\circ) = 1;$$

$$\text{к) } \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \cos \frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = 0,5;$$

$$\text{л) } \operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = -\operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{м) } \operatorname{ctg}(-945^\circ) = -\operatorname{ctg} 945^\circ = -\operatorname{ctg}(1080^\circ - 135^\circ) = \operatorname{ctg} 135^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ + 45^\circ) = -1.$$

$$2. \text{ а) } \cos(-225^\circ) + \sin 945^\circ - \operatorname{tg} 1125^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) + \sin(1080^\circ - 135^\circ) - \operatorname{tg}(1080^\circ + 45^\circ) = \\ = -\cos 45^\circ - \sin 135^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = -1 - \sqrt{2};$$

$$\text{б) } \operatorname{ctg} 570^\circ + \sqrt{3}(\sin 300^\circ - \cos 3630^\circ) = \\ = \operatorname{ctg}(360^\circ + 210^\circ) + \sqrt{3}(\sin(360^\circ - 60^\circ) - \cos(3600^\circ + 30^\circ)) = \\ = \operatorname{ctg}(180^\circ + 30^\circ) + \sqrt{3}(-\sin 60^\circ - \cos 30^\circ) = \\ = \operatorname{ctg} 30^\circ + \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} - 3;$$

$$\text{в) } \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - 0,5 \sin \frac{11\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{21\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - 0,5 \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{tg}\left(5\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \\ = -\cos \frac{\pi}{3} + 0,5 \sin \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}.$$

$$3. \text{ а) } 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos(\pi - \alpha) = 1 + \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha;$$

$$\text{б) } \sin(2\pi + \alpha) \sin(\pi - \alpha) + \sin^2 \alpha = \sin \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\text{в) } \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha; \quad \text{г) } \cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\text{д) } \operatorname{tg}(\alpha - \pi) = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$е) \frac{2\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(-2\alpha)} = \frac{-2\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha \cdot \sin 2\alpha} = -2 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha \cdot 2\sin\alpha} = -\frac{1}{\cos^3\alpha};$$

$$ж) \cos(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \sin^2(-\alpha) = -\cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin^2\alpha = -1;$$

$$з) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \sin^2(\pi-\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha.$$

$$4. а) \frac{\cos(2\pi-x)\cos^2(1,5\pi+x)}{\operatorname{tg}(x-\pi)\sin(0,5\pi+x)} = \frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{\operatorname{tg}x \cdot \cos x} = \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\sin x} = 0,5 \sin 2x, \text{ ч.т.д.}$$

$$б) \sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = 0, \text{ ч.т.д.}$$

$$в) \frac{\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha; \text{ ч.т.д.}$$

$$5. \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\pi)\cos(\alpha+\pi)}{\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}^4\alpha;$$

$$б) \frac{\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}{c \operatorname{tg}^2(\alpha-\pi) \cdot \operatorname{tg}^2(\alpha-3\pi)} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{c \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha} = 1.$$

$$6. A+B+C=180^\circ; C=180^\circ-(A+B); \sin C = \sin(180^\circ-(A+B)) = \sin(A+B), \text{ ч.т.д.}$$

$$7. \text{ Пусть } \beta \text{ — смежный угол, тогда } \beta = 180^\circ - \alpha; \sin \beta = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha = 0,6;$$

$$\cos \beta = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm 0,8.$$

С-47. Формулы суммы и разности тригонометрических функций

$$1. 1) а) \sin 48^\circ + \sin 36^\circ = 2 \sin \frac{48^\circ + 36^\circ}{2} \cos \frac{48^\circ - 36^\circ}{2} = 2 \sin 42^\circ \cos 6^\circ;$$

$$б) \sin 12^\circ + \sin 7^\circ = 2 \sin \frac{12^\circ + 7^\circ}{2} \cos \frac{12^\circ - 7^\circ}{2} = 2 \sin 9,5^\circ \cos 2,5^\circ;$$

$$в) \sin 10^\circ + \sin 88^\circ = 2 \sin \frac{10^\circ + 88^\circ}{2} \cos \frac{10^\circ - 88^\circ}{2} = 2 \sin 49^\circ \cos 39^\circ;$$

$$r) \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = 2 \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2};$$

$$2) a) \sin 66^\circ - \sin 56^\circ = 2 \sin \frac{66^\circ - 56^\circ}{2} \cos \frac{66^\circ + 56^\circ}{2} = 2 \sin 5^\circ \cos 61^\circ;$$

$$b) \sin 18^\circ - \sin 9^\circ = 2 \sin \frac{18^\circ - 9^\circ}{2} \cos \frac{18^\circ + 9^\circ}{2} = 2 \sin 4,5^\circ \cos 13,5^\circ;$$

$$в) \sin 14^\circ - \sin 36^\circ = 2 \sin \frac{14^\circ - 36^\circ}{2} \cos \frac{14^\circ + 36^\circ}{2} = -2 \sin 11^\circ \cos 25^\circ;$$

$$r) \sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} = 2 \sin \frac{\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{5}}{2} \cos \frac{\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{5}}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{3\pi}{10};$$

$$3) \cos 38^\circ + \cos 18^\circ = 2 \cos \frac{38^\circ + 18^\circ}{2} \cos \frac{38^\circ - 18^\circ}{2} = 2 \cos 28^\circ \cos 10^\circ;$$

$$b) \cos 16^\circ + \cos 9^\circ = 2 \cos \frac{16^\circ + 9^\circ}{2} \cos \frac{16^\circ - 9^\circ}{2} = 2 \cos 12,5^\circ \cos 3,5^\circ;$$

$$в) \cos 34^\circ + \cos 74^\circ = 2 \cos \frac{34^\circ + 74^\circ}{2} \cos \frac{34^\circ - 74^\circ}{2} = 2 \cos 54^\circ \cos 20^\circ;$$

$$r) \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{8} = 2 \cos \frac{\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{8}}{2} \cos \frac{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{8}}{2} = 2 \cos \frac{7\pi}{16} \cos \frac{5\pi}{16};$$

$$4) a) \cos 44^\circ - \cos 38^\circ = -2 \sin \frac{44^\circ + 38^\circ}{2} \sin \frac{44^\circ - 38^\circ}{2} = -2 \sin 41^\circ \sin 3^\circ;$$

$$b) \cos 4^\circ - \cos 16^\circ = -2 \sin \frac{4^\circ + 16^\circ}{2} \sin \frac{4^\circ - 16^\circ}{2} = 2 \sin 10^\circ \sin 6^\circ;$$

$$в) \cos 15^\circ - \cos 8^\circ = -2 \sin \frac{15^\circ + 8^\circ}{2} \sin \frac{15^\circ - 8^\circ}{2} = -2 \sin 11,5^\circ \sin 3,5^\circ;$$

$$r) \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} = -2 \sin \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}.$$

$$2. 1) a) \sin 9\alpha + \sin \alpha = 2 \sin 5\alpha \cos 4\alpha; \quad б) \sin 6\alpha - \sin 2\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 4\alpha;$$

$$в) \cos 5\alpha + \cos 9\alpha = 2 \cos 7\alpha \cos 2\alpha; \quad r) \cos 6\alpha - \cos \alpha = -\sin \frac{5\alpha}{2} \sin \frac{7\alpha}{2};$$

$$2) a) \sin(\alpha + 12^\circ) + \sin(\alpha - 12^\circ) = 2 \sin \frac{2\alpha}{2} \cos \frac{24^\circ}{2} = 2 \sin \alpha \cos 12^\circ;$$

$$б) \sin(20^\circ - \alpha) - \sin(20^\circ + \alpha) = 2 \sin \frac{20^\circ - \alpha - 20^\circ - \alpha}{2} \cos \frac{20^\circ - \alpha + 20^\circ + \alpha}{2} = -2 \sin \alpha \cos 20^\circ;$$

$$в) \cos(23^\circ + \beta) + \cos(23^\circ - \beta) = 2 \cos \frac{23^\circ + \beta + 23^\circ - \beta}{2} \cos \frac{23^\circ + \beta - 23^\circ + \beta}{2} = 2 \cos 23^\circ \cos \beta;$$

$$г) \cos(23^\circ + \beta) - \cos(23^\circ - \beta) = -2 \sin \frac{23^\circ + \beta - 23^\circ + \beta}{2} \sin \frac{23^\circ + \beta + 23^\circ - \beta}{2} = -2 \sin \beta \cdot \sin 23^\circ;$$

$$д) \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta - \alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2} = 2 \sin \beta \cos \alpha;$$

$$е) \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \frac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta - \alpha + \beta}{2} = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

$$3. а) \frac{\sin 8\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 8\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin 5\alpha \cos 3\alpha}{2 \cos 5\alpha \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 5\alpha;$$

$$б) \frac{\cos \alpha + \cos 7\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{2 \cos 4\alpha \cos 3\alpha}{2 \cos 4\alpha \cos 2\alpha} = \frac{\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha};$$

$$в) \frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\cos 5\alpha - \cos \alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha \cos 3\alpha}{-2 \sin 2\alpha \sin 3\alpha} = -\operatorname{ctg} 3\alpha;$$

$$г) \frac{\cos 9\alpha - \cos 5\alpha}{\sin 9\alpha + \sin 5\alpha} = \frac{-2 \sin 2\alpha \sin 7\alpha}{2 \sin 7\alpha \cos 2\alpha} = -\operatorname{tg} 2\alpha.$$

$$4. а) \sin^2 42^\circ - \sin^2 12^\circ = (\sin 42^\circ - \sin 12^\circ)(\sin 42^\circ + \sin 12^\circ) = \\ = 2 \sin 15^\circ \cos 27^\circ \cdot 2 \sin 27^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ \cdot \sin 54^\circ;$$

$$б) \cos^2 53^\circ - \cos^2 33^\circ = (\cos 53^\circ - \cos 33^\circ)(\cos 53^\circ + \cos 33^\circ) = \\ = -2 \sin 10^\circ \sin 43^\circ \cdot 2 \cos 10^\circ \cos 43^\circ = -\sin 20^\circ \cdot \sin 86^\circ;$$

$$5. а) \frac{\sin 44^\circ + \sin 26^\circ}{\cos 44^\circ + \cos 26^\circ} = \frac{2 \sin 35^\circ \cos 9^\circ}{2 \cos 35^\circ \cos 9^\circ} = \operatorname{tg} 35^\circ = \operatorname{ctg} 55^\circ, \text{ т.е. равенство верно;}$$

$$б) \frac{\sin 84^\circ - \sin 54^\circ}{\cos 84^\circ + \cos 54^\circ} = \frac{2 \sin 15^\circ \cos \frac{84^\circ + 54^\circ}{2}}{2 \cos 15^\circ \cos \frac{84^\circ + 54^\circ}{2}} = \operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{ctg} 75^\circ, \text{ т.е. равенство верно.}$$

$$6. а) \frac{\cos 5\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 5\alpha + \sin 9\alpha} = \frac{2 \cos 7\alpha \cos 2\alpha}{2 \sin 7\alpha \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg} 7\alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 7\alpha \right), \text{ ч.т.д.}$$

$$б) \frac{\cos \alpha + \cos 5\alpha + \cos 9\alpha + \cos 13\alpha}{\sin \alpha + \sin 5\alpha + \sin 9\alpha + \sin 13\alpha} = \frac{2 \cos 3\alpha \cos 2\alpha + 2 \cos 2\alpha \cos 1\alpha}{2 \sin 3\alpha \cos 2\alpha + 2 \sin 1\alpha \cos 2\alpha} = \\ = \frac{\cos 3\alpha + \cos 1\alpha}{\sin 3\alpha + \sin 1\alpha} = \frac{2 \cos 4\alpha \cos 7\alpha}{2 \sin 7\alpha \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg} 7\alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$в) \operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{ctg} 45^\circ \operatorname{ctg} \alpha - 1}{\operatorname{ctg} 45^\circ + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + 1} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - 1}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 1} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}, \text{ ч.т.д.}$$

$$д) \sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) = \\ = 2 \sin \beta \cdot \cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta, \text{ ч.т.д.}$$

С-48. Решение тригонометрических уравнений

1. а) $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, $\alpha = 30^\circ$; б) $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$.

$$2. \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}; \quad \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}; \quad 2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{23\pi}{12}.$$

3. $a_n = \pi(n-1)$, $b_n = -\pi n$; $\sin a_n = \sin(\pi n - \pi) = -\sin(\pi - \pi n) = -\sin \pi n = 0$;
 $\sin b_n = \sin(-\pi n) = -\sin \pi n = 0$, значит, любое число, являющееся членом (a_n)
или (b_n) – корень данного уравнения, ч.т.д.

$$4. 1) \text{ а) } \cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \text{ б) } \sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{ в) } \operatorname{tg} x = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad 2) \text{ а) } \cos x - 1 = 0, \quad \cos x = 1, \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{ б) } \sin x + 1 = 0, \quad \sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \text{ в) } 3 \operatorname{tg} x = 0, \quad \operatorname{tg} x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

5. Так как φ – угол треугольника, то $0 < \varphi < \pi$;

$$\text{ а) } \cos \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}; \quad \text{ б) } \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

$$6. 1) \text{ а) } \sin 2x = 0, \quad 2x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{ б) } \cos 3x = 1, \quad 3x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \text{ а) } \cos^2 x - \cos x = 0, \quad \cos x(\cos x - 1) = 0; \quad \cos x = 0, \quad \cos x = 1,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x_2 = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \text{ б) } \sin^2 x + \sin x = 0, \quad \sin x(\sin x + 1) = 0;$$

$$\sin x = 0, \quad \sin x = -1, \quad x_1 = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$3) \text{ а) } \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = 0; \quad \cos(x + 2x) = 0, \quad \cos 3x = 0, \quad 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \text{ б) } \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 0; \quad \sin(2x + x) = 0,$$

$$\sin 3x = 0, \quad 3x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$4) \text{ а) } \sin^2 x = -\cos 2x, \quad \sin^2 x = 2 \sin^2 x - 1, \quad \sin^2 x = 1, \quad \sin x = \pm 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{ б) } \sin 2x = 2 \cos x; \quad 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \cos x; \quad \cos x = 0, \quad \sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$7. \text{ а) } \sin x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 1; \quad 2 \sin x \cdot \cos x = 2; \quad \sin 2x = 2 - \text{нет корней,}$$

т.к. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ для любого α ;

$$\text{ б) } \frac{\cos 2x}{1 - 2 \sin^2 x} = 0; \quad \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 - 2 \sin^2 x} = 0; \quad 1 = 0 - \text{нет корней.}$$

Итоговое повторение по темам (к учебнику под редакцией Теляковского)

Квадратная функция

1. Функция — такая зависимость переменной y от переменной x , при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y .

а) $f(x) = \frac{3x}{x+1}$; $f(0) = \frac{3 \cdot 0}{0+1} = 0$; $f(5) = \frac{3 \cdot 5}{5+1} = \frac{15}{6} = 2,5$; $f(-1,5) = \frac{-3 \cdot 1,5}{-1,5+1} = \frac{4,5}{0,5} = 9$;

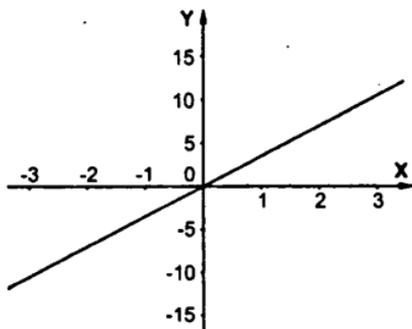
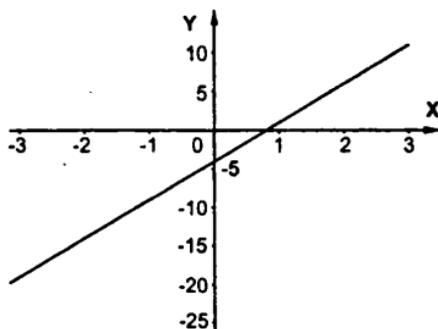
б) $f(x) = 2x^2 + x - 3$; $f(0) = -3$; $f(5) = 2 \cdot 25 + 5 - 3 = 52$; $f(-1,5) = 2 \cdot 2,25 - 1,5 - 3 = 0$.

2. Область определения функции — все значения независимой переменной.

Область значения функции — все значения, которые принимает зависимая переменная. График функции — множество всех точек координатной плоскости абсциссы, которые равны значениям аргумента, ординаты равны соответствующим значениям функции.

а) $y = 5x - 4$; $D(y) = E(y) = R$;

б) $y = 3,5x$; $D(y) = E(y) = R$;

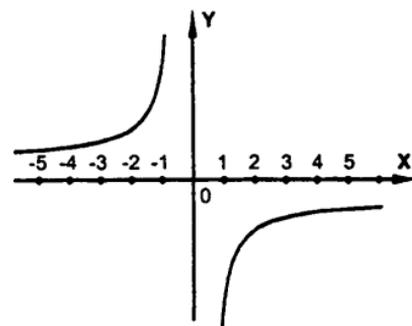
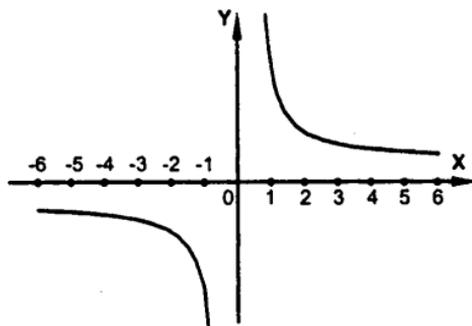


в) $y = \frac{6}{x}$;

$D(y) = E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

г) $y = -\frac{8}{x}$;

$D(y) = E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.



3. а) $y = 1,7x - 0,03$; $D(y) = R$; б) $y = \frac{1,6+x}{0,8-2x}$; $0,8-2x \neq 0$, т.к. знаменатель

$x \neq 0,4$; $D(y) = (-\infty; 0,4) \cup (0,4; +\infty)$; в) $y = \frac{4}{12+x^2}$; $D(y) = R$;

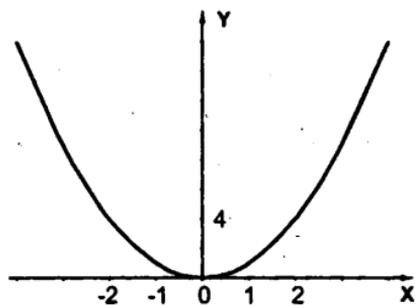
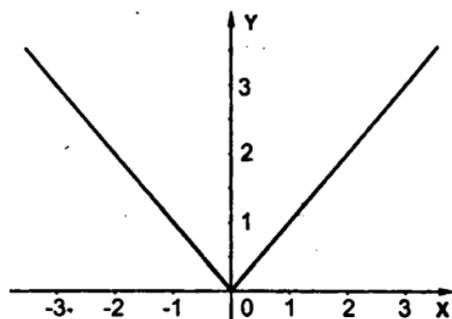
г) $y = \frac{|x|}{4}$; $D(y) = R$; д) $y = \sqrt{3x-7}$; $3x-7 \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$; $x \geq 7/3$;

$D(y) = [7/3; +\infty)$; е) $y = \sqrt{x^2-4}$; $x^2-4 \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$;
 $(x-2)(x+2) \geq 0$; $D(y) = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

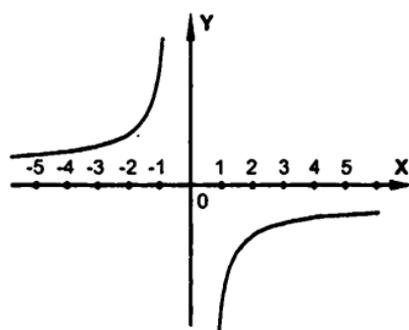
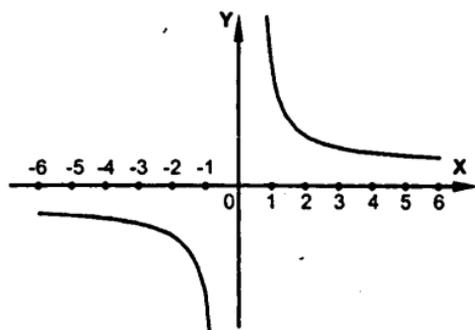
4. Возрастающая в промежутке функция, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции. Убывающая в промежутке функция, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

а) $y = |x|$, y возрастающая при $x \geq 0$, убывающая при $x \leq 0$;

б) $y = x^2$, y возрастающая при $x \geq 0$, убывающая при $x \leq 0$;



в) $y = \frac{12}{x}$, y убывающая при $x \neq 0$; г) $y = -\frac{4}{x}$, y возрастающая при $x \neq 0$.



5. $y = x - 4,3$ — возрастающая,

$y = 1,6 - x$; $y = -4,2x + 8,1$; $y = 5,2 - x$ — убывающая.

6. Теорема: Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$; а) $4x^2 + 11x - 3 = 0$; $D = 121 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 169$;

$$x_1 = \frac{-11+13}{8} = \frac{1}{4}; x_2 = -3; 4x^2 + 11x - 3 = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)(x + 3) = (4x - 1)(x + 3);$$

б) $-2x^2 - 9x + 18 = 0$; $2x^2 + 9x - 18 = 0$; $D = 81 + 4 \cdot 2 \cdot 18 = 225$; $x_1 = \frac{-9+15}{4} = \frac{3}{2}$;

$$x_2 = -6; -(2x^2 + 9x - 18) = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 6) = -(2x - 3)(x + 6) = (3 - 2x)(x + 6);$$

в) $5x^2 - 30x + 45 = 0$; $x^2 - 6x + 9 = 0$; $(x - 3)^2 = 0$; $x_{1,2} = 3$; $5x^2 - 30x + 45 = 5(x - 3)^2$.

7. а) $\frac{2x^2 + 13x - 24}{4x^2 - 9} = \frac{2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 8)}{(2x - 3)(2x + 3)} = \frac{x + 8}{2x + 3}$; $2x^2 + 13x - 24 = 0$;

$$D = 169 + 4 \cdot 2 \cdot 24 = 361; x_1 = \frac{-13+19}{4} = \frac{3}{2}; x_2 = -8;$$

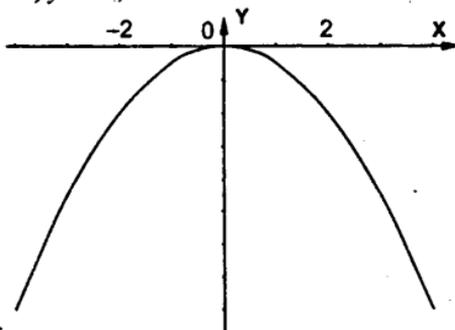
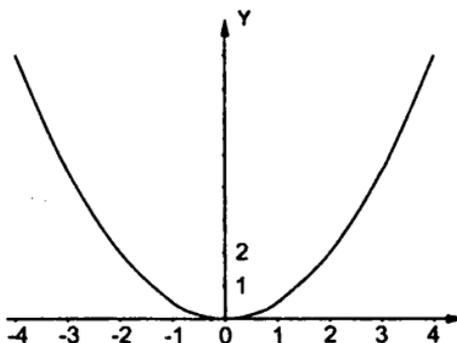
б) $\frac{5x^2 + 34x - 7}{25x^2 - 10x + 1} = \frac{5\left(x - \frac{1}{5}\right)(x + 7)}{(5x - 1)^2} = \frac{x + 7}{5x - 1}$; $5x^2 + 34x - 7 = 0$;

$$D = 1156 + 20 \cdot 7 = 36^2; x_1 = \frac{-34+36}{10} = \frac{1}{5}; x_2 = -7.$$

8. Квадратичная функция — функция, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x — независимая переменная, a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$. График квадратичной функции — парабола.

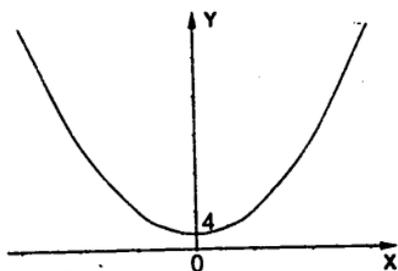
9. а) $y = 0,5x^2$;

б) $y = -0,4x^2$

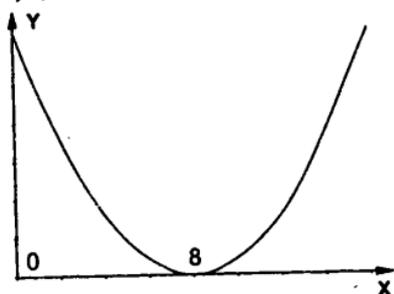


Свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$: 1) если $x = 0$, то $y = 0$; 2) если $x \neq 0$, то $y > 0$, 3) функция является четной, 4) функция убывает в промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает в промежутке $[0; +\infty)$, 5) $y_{\min} = y(0) = 0$, $E(y) = [0; +\infty)$.

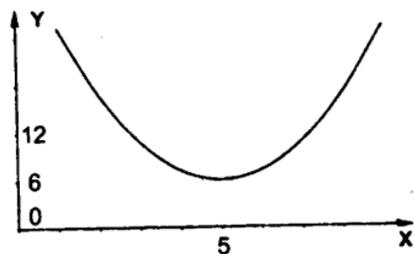
10. а) I, II – четверти;



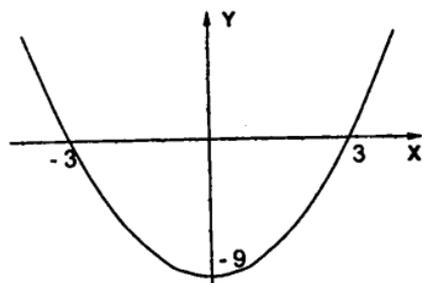
в) I, II – четверти;



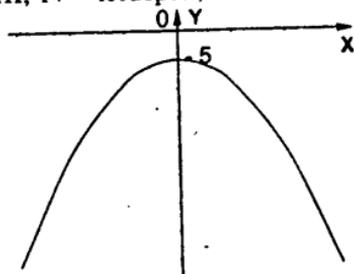
д) I, II – четверти;



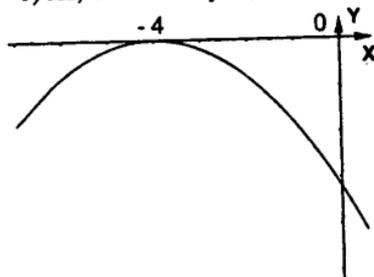
11. а) $y = x^2 - 9$;



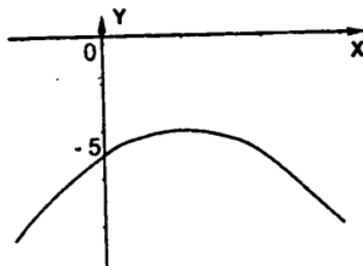
б) III, IV – четверти;



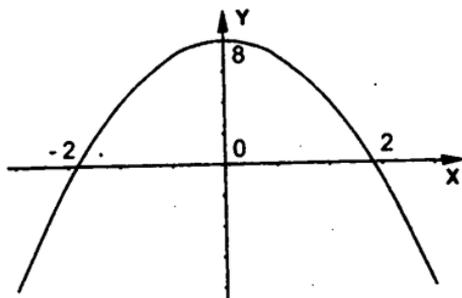
г) III, IV – четверти;



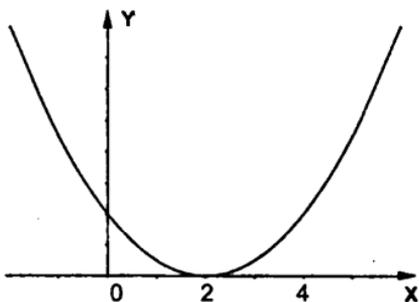
е) III, IV – четверти;



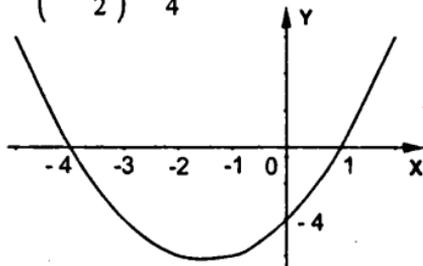
б) $y = -x^2 + 8$;



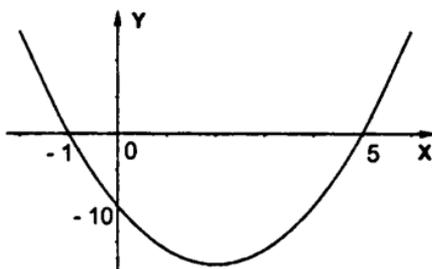
в) $y = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$;



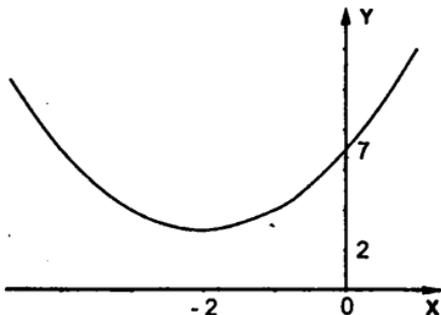
г) $y = x^2 + 3x - 4 = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{25}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$;



д) $y = 2x^2 - 8x - 10$; $m = \frac{8}{4} = 2$;
 $n = 8 - 16 - 10 = -18$;



е) $y = x^2 + 4x + 7$; $m = -2$; $n = 3$.



12. а) $x^2 - 16 > 0$; $(x - 4)(x + 4) > 0$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

б) $-x^2 - 12 < 0$; $x^2 + 12 > 0$.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

в) $x^2 > 3x$; $x^2 - 3x > 0$; $x(x - 3) > 0$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

г) $x^2 < 25$; $(x - 5)(x + 5) < 0$.

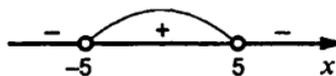
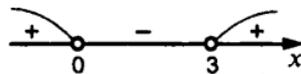
Ответ: $(-5; 5)$.

д) $x^2 - 22x + 121 > 0$; $(x - 11)^2 > 0$; $x \neq 11$.

Ответ: $x \neq 11$.

е) $x^2 - 12x + 36 < 0$; $(x - 6)^2 < 0$.

Ответ: нет решения.



ж) $2x^2 - 14x + 12 > 0$; $x^2 - 7x + 6 > 0$; $D = 49 - 4 \cdot 6 = 25$;

$$x_1 = \frac{7+5}{2} = 6; x_2 = 1; (x-6)(x-1) > 0.$$

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (6; +\infty)$.



13. а) $y = \sqrt{6x - 30x^2}$; $6x - 30x^2 \geq 0$; $30x^2 - 6x \leq 0$;

$$x^2 - \frac{x}{5} \leq 0; x \left(x - \frac{1}{5} \right) \leq 0.$$

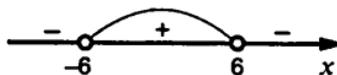
Ответ: $[0; 0,2]$



б) $y = \frac{1}{\sqrt{36-x^2}}$; $36-x^2 > 0$; $x^2 - 36 < 0$;

$$(x-6)(x+6) < 0.$$

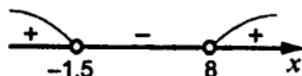
Ответ: $(-6; 6)$.



в) $y = \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 13x - 24}}$; $2x^2 - 13x - 24 > 0$; $D = 169 + 8 \cdot 24 = 361$;

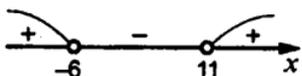
$$x_1 = \frac{13+19}{4} = 8; x_2 = -1,5.$$

Ответ: $(-\infty; -1,5) \cup (8; +\infty)$.



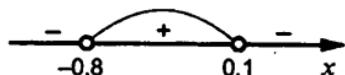
14. а) $(x+6)(x-11) > 0$.

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (11; +\infty)$.



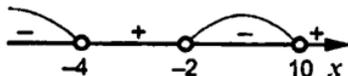
б) $(x-0,1)(x+0,8) < 0$.

Ответ: $(-0,8; 0,1)$.



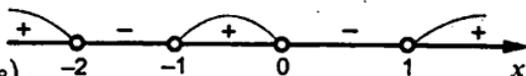
в) $(x+4)(x+2)(x-10) < 0$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-2; 10)$.



г) $x(x+2)(x+1)(x-1) > 0$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (1; +\infty)$.



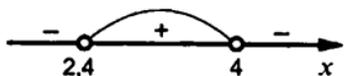
15. а) $(x+7)(x-8) > 0$

Ответ: $(-\infty; -7) \cup (8; +\infty)$.



б) $(x-4)(5x-12) < 0$; $(x-4) \left(x - \frac{12}{5} \right) < 0$

Ответ: $(2,4; 4)$.



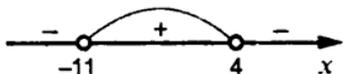
$$в) \frac{x-2}{3x+6} > 0; \frac{x-2}{x+2} > 0$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.



$$г) \frac{2x-8}{x+11} < 0; \frac{x-4}{x+11} < 0$$

Ответ: $(-11; 4)$.



Уравнения и системы уравнений

1. Целое уравнение – уравнение, в котором обе части являются целыми выражениями. Например: $x^4 - 10x^2 + 3 = 0$.

2. Степень целого выражения – степень многочлена $P(x)$, когда уравнение записано в виде $P(x) = 0$; $(x^2 - 8)(3x^2 - 4x) = 3x^5$; $3x^5 - 24x^3 - 4x^3 + 32x = 3x^5$; $-28x^3 + 32x = 0$. – значит, степень уравнения равна трем. **Ответ: 3.**

3. а) $(2x+4)(3x-1) - (6x-12)(x+3) = 100$; $(x+2)(3x-1) - (3x-6)(x+3) = 50$;
 $3x^2 + 5x - 2 - 3x^2 - 3x + 18 - 50 = 0$; $2x = 2 - 18 + 50$; $x = 1 - 9 + 25$; $x = 17$;

б) $6x(x+1) - (x^2 - x - 2) = 68$; $6x^2 + 6x - x^2 + x + 2 - 68 = 0$;

$$5x^2 + 7x - 66 = 0; D = 37^2; x_1 = \frac{-7+37}{10} = 3; x_2 = -4,4.$$

Ответ: а) 17; б) 3 и -4,4.

4. При $D > 0$ – 2 корня, при $D = 0$ – 1 корень, при $D < 0$ – нет корней.

а) $3x^2 + kx + 12 = 0$; $D = k^2 - 144 > 0$; $(k-12)(k+12) > 0$.

Ответ: $(-\infty; -12] \cup [12; +\infty)$.

б) $3x^2 + 6x + k = 0$; $D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot k = 0$; $36k = 12k$, $k = 3$.

в) $15x^2 + kx + 60 = 0$; $D = k^2 - 4 \cdot 15 \cdot 60 < 0$; $(k-60)(k+60) < 0$.

6. а) $(x^2 + 2x)^2 - 10(x^2 + 2x) + 21 = 0$; $x^2 + 2x = y$; $y^2 - 10y + 21 = 0$;

$$D = 100 - 84 = 16, y_1 = \frac{10+4}{2} = 7; y_2 = 3; x^2 + 2x - 7 = 0,$$

$$D = 4 + 4 \cdot 7 = 32; x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{2}; x^2 + 2x = 3;$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0; D = 4 + 4 \cdot 3 = 16; x_3 = \frac{-2+4}{2} = 1; x_4 = -3.$$

Ответ: $-1 \pm \sqrt{2}$; 1; -3.

б) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 4) = 50$; $x^2 + x + 1 = y$; $y(y+3) = 50$; $D = 9 + 4 \cdot 50 = 209$.

7. Биквадратное уравнение – уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$. Оно может иметь от одного до четырех корней или не иметь корней.

а) $x^4 - 11x^2 - 80 = 0$; $x^2 = y \geq 0$; $y^2 - 11y - 80 = 0$; $D = 121 + 4 \cdot 80 = 21^2$;

$$y_1 = \frac{11+21}{2} = 16; y_2 < 0; x^2 = 16; x_{1,2} = \pm 4.$$

$$\text{б) } 9x^4 + 17x^2 - 2 = 0; x^2 = y \geq 0, 9y^2 + 17y - 2 = 0;$$

$$D = 289 + 4 \cdot 9 \cdot 2 = 19^2, y_1 = \frac{-17+19}{18} = \frac{1}{9}, y_2 < 0; x^2 = \frac{1}{9}; x_{1,2} = \pm \frac{1}{3}.$$

$$\text{в) } 12x^4 + 19x^2 + 5 = 0; x^2 = y \geq 0, 12y^2 + 19y + 5 = 0;$$

$$D = 361 - 48 \cdot 5 = 121, y_1 = \frac{-19+21}{24} = \frac{1}{12}, y_2 < 0; x^2 = \frac{1}{12}; x_{1,2} = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

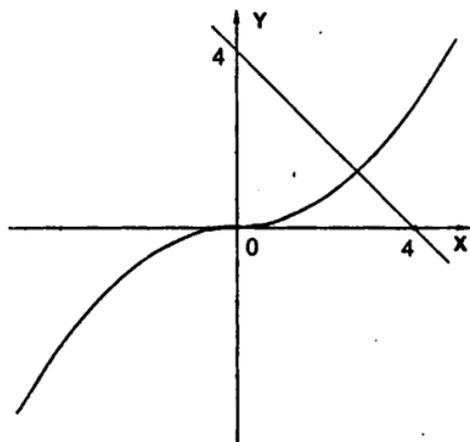
$$\text{г) } (2x^2 - 1)(2x^2 + 1) - 12x(x^2 + 7) = 131; x^2 = y \geq 0;$$

$$(2y-1)(2y+1) - 12(y+7) - 131 = 0; 4y^2 - 1 - 12y - 84 - 131 = 0;$$

$$4y^2 - 12y - 216 = 0; y^2 - 3y - 54 = 0; D = 15^2; y_1 = \frac{3+15}{2} = 9, y_2 < 0; x^2 = 9; x_{1,2} = \pm 3.$$

$$\text{Ответ: а) } x_{1,2} = \pm 4; \text{ б) } x_{1,2} = \pm \frac{1}{3}; \text{ в) } x_{1,2} = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}; \text{ г) } x_{1,2} = \pm 3.$$

$$8. x^3 = 4 - x; x \approx 1,4 \text{ уточненное значение } x \approx 1,38$$

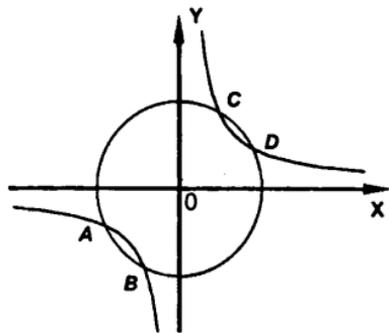


9. Решение системы с двумя неизвестными x и y – пара чисел (x_0, y_0) , при подстановлении короткой в систему получаются верные равенства.

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x^2 + 3y = 37 \end{cases}; \begin{cases} (-5)^2 - 4^2 = 9 \\ (-5)^2 + 3 \cdot 4 = 37 \end{cases} \text{ — верно, значит } (-5; 4) \text{ — решение.}$$

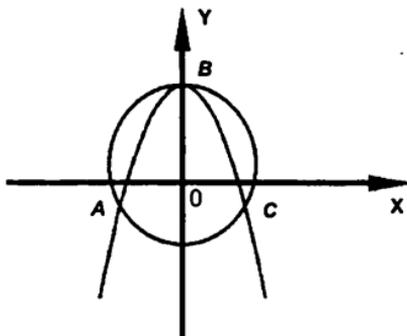
$$\text{б) } \begin{cases} x^2 + 3xy = 5 \\ xy = -20 \end{cases}; \begin{cases} (-5)^2 + 3(-5) \cdot 4 = 5 \\ -5 \cdot 4 = -20 \end{cases} \text{ — ложно, значит, } (-5; 4) \text{ — не является решением.}$$

10. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ xy = 4 \end{cases}$;

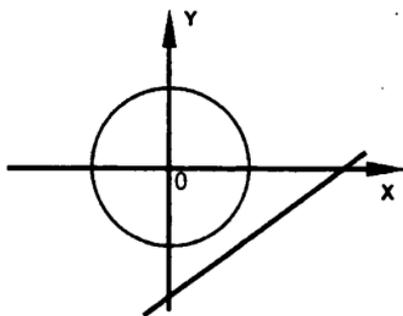


Ответ: $(\pm 2,6; \pm 1,6), (\pm 1,6; \pm 2,6)$.

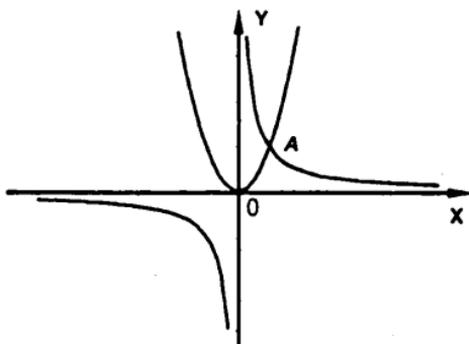
б) $\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$



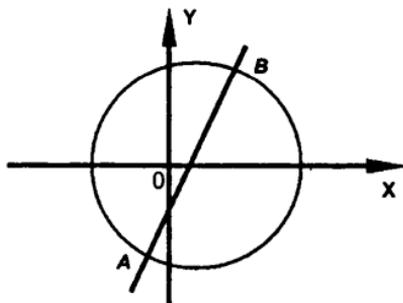
Ответ: $(0; 2), (1,7; -1), (-1,7; -1)$.



11. а) Ответ: нет.



б) Ответ: да.



в) Ответ: да.

$$11. \text{ а) } \begin{cases} 2x - y = 13 \\ x^2 - y^2 = 23 \end{cases}; y = 2x - 13; x^2 - (2x - 13)^2 = 23;$$

$$x^2 - 4x^2 + 52x - 169 = 23; 3x^2 - 52x + 192 = 0;$$

$$D = 400, x_1 = \frac{52 + 20}{6} = 12, x_2 = \frac{16}{3}; y_1 = 9, y_2 = -\frac{7}{3}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 73 \end{cases}; x = 5 - 3y; 25 - 30y + 9y^2 - 5y + 3y^2 + y^2 - 73 = 0$$

$$13y^2 - 35y - 48 = 0; D = 61^2, y_1 = \frac{35 + 61}{26} = \frac{48}{13}, y_2 = -1; x_1 = \frac{-79}{13}, x_2 = 8.$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 23 \\ 2x^2 + y^2 = 41 \end{cases}; 4x^2 = 64; x^2 = 16; x_{1,2} = \pm 4; 32 - y^2 = 23; y^2 = 9; y_{1,2} = \pm 3.$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \end{cases}; y = 7 - 2x; \frac{1}{x} + \frac{1}{7 - 2x} - \frac{5}{6} = 0;$$

$$6(7 - 2x) + 6x - 5x(7 - 2x) = 0; 42 - 12x + 6x - 35x + 10x^2 = 0;$$

$$10^2 - 41x + 42 = 0; D = 1, x_1 = \frac{41 + 1}{20} = \frac{21}{10} = 2,1; x_2 = 2; y_1 = 2,8, y_2 = 3.$$

$$\text{Ответ: а) } (12; 9), \left(\frac{16}{3}; -\frac{7}{3}\right) \text{ б) } (8; -1), \left(-\frac{79}{13}; \frac{48}{13}\right) \text{ в) } (4; \pm 3), (-4; \pm 3);$$

$$\text{г) } (2,1; 2,8), (2; 3).$$

12. Пусть x м – длина, y м – ширина, тогда xy м² – площадь или 4800 м², $2(x+y)$ м – периметр или 280 м. Получаем систему:

$$\begin{cases} xy = 4800 \\ 2(x+y) = 280 \end{cases}; \begin{cases} xy = 4800 \\ x = 140 - y \end{cases}; y(140 - y) = 4800;$$

$$y^2 - 140y + 4800 = 0; D = 20^2; y_1 = \frac{140 + 20}{2} = 80, y_2 = 60; x_1 = 60, x_2 = 80.$$

Ответ: 60 м и 80 м – стороны прямоугольника.

Арифметическая и геометрическая прогрессии

1. а) 6; 12; 18; 24; 30; 36; б) 1; 4; 9; 16; 25; 36.

2. а) $a_n = n^2 - 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 4 - 1 = 3$, $a_3 = 8$, $a_4 = 15$, $a_5 = 24$;

б) $a_n = \frac{n}{n+2}$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 3/5$, $a_4 = 2/3$, $a_5 = 5/7$;

в) $a_n = 0,5^n = 2^{n-1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 16$;

3. а) $a_1 = 20$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, $a_2 = \frac{a_1}{2} = 10$, $a_3 = \frac{a_2}{2} = 5$, $a_4 = \frac{a_3}{2} = 2,5$, $a_5 = \frac{a_4}{2} = 1,25$;

б) $a_1 = -3$; $a_{n+1} = (-1)^n a_n$; $a_2 = -a_1 = 3$, $a_3 = a_2 = 3$, $a_4 = -a_3 = -3$, $a_5 = a_4 = -3$.

4. Арифметическая прогрессия – числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, постоянным для этой последовательности. $a_1 = 37$, $d = 4$.
 $a_2 = a_1 + d = 41$; $a_3 = a_2 + d = 45$; $a_4 = a_3 + d = 49$; $a_5 = a_4 + d = 53$.

5. $a_n = a_1 + d(n-1)$; а) $a_{11} = a_1 + 10d = -3 + 10 \cdot 11 = 107$;

б) $a_{31} = a_1 + 30d = 0,8 - 30 \cdot 0,2 = -5,2$.

6. 12; 17...; $a_1 = 12$; $d = -5$; $a_n = a_1 + d(n-1) = 12 - 5(n-1) = 17 - 5n$;

$-58 = 17 - 5n$; $5n = 75$; $n = 15$, значит $-58 = a_{15}$;

$-76 = 17 - 5n$; $5n = 93$; $n = \frac{93}{5} \notin N$, значит -76 – не член (a_n) .

7. $a_n = kn + b$; $a_{n-1} = k(n-1) + b$; $a_{n+1} = k(n+1) + b$; $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$;

$k_{n+1} = \frac{k(n-1) + b + k(n+1) + b}{2}$ – верно для любого $n \in N$,

значит (a_n) – арифметическая прогрессия, ч.т.д.

а) $a_n = 3n - 1$ – арифметическая прогрессия с $k = 3$, $b = -1$;

б) $a_n = -n + 16$ – арифметическая прогрессия с $k = -1$, $b = 16$;

в) $a_n = 0,4n$ – арифметическая прогрессия с $k = 0,4$, $b = 0$;

г) $a_n = 14n^2$; $a_1 = 14$; $a_2 = 56$; $a_3 = 126$;

$56 - 14 \neq 126 - 56$, значит (a_n) – не арифметическая прогрессия;

д) $a_n = \frac{n}{4}$ – арифметическая прогрессия с $k = \frac{1}{4}$, $b = 0$;

8. $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$; 1,5; 4,5; 7,5; ...; $a_1 = 1,5$, $d = 3$; $S_6 = \frac{2 \cdot 1,5 + 3 \cdot 5}{2} \cdot 6 = 54$.

9. а) $a_1 = -8$, $d = 5$; $S_{10} = \frac{-16 + 5 \cdot 9}{2} \cdot 10 = 145$;

б) $a_1 = 0,4$, $d = -0,2$; $S_{10} = \frac{0,8 - 0,2 \cdot 9}{2} \cdot 10 = -5$.

10. 50; 51; 52; ...; 70; $n = 21$; $a_1 = 50$, $d = 1$; $S_{21} = \frac{100 + 20}{2} \cdot 21 = 1260$.

11. Геометрическая прогрессия – такая числовая последовательность, в которой первый член отличен от нуля, а каждый из последующих равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной последовательности число, отличное от нуля. $b_1 = 72$, $q = 0,5$;

$b_2 = 72 \cdot 0,5 = 36$; $b_3 = 36 \cdot 0,5 = 18$; $b_4 = 18 \cdot 0,5 = 9$; $b_5 = 9 \cdot 0,5 = 4,5$.

12. $b_n = b_1 q^{n-1}$; а) $b_1 = 2$, $q = -1$, $b_5 = 2 \cdot q^4 = 2 \cdot (-1)^4 = 2$;

б) $b_1 = 8$, $q = 1/2$, $b_6 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{4}$;

в) $b_1 = 2$, $q = \sqrt{2}$, $b_7 = 2 \cdot (\sqrt{2})^6 = 2 \cdot 2^3 = 16$.

$$13. S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ при } q \neq 1; 12; -6; 3; \dots \quad b_1 = 12; q = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2};$$

$$S_6 = \frac{12 \left(\frac{1}{67} - 1 \right)}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{12 \cdot 63 \cdot 2}{64 \cdot 3} = \frac{21 \cdot 3}{8} = \frac{63}{8}.$$

$$14. \text{ а) } b_1 = 12; q = -2; S_6 = \frac{12(64 - 1)}{-3} = \frac{-12 \cdot 63}{3} = -252;$$

$$\text{ б) } b_1 = 3; q = \sqrt{3}; S_6 = \frac{3(27 - 1)}{\sqrt{3} - 1} = \frac{78}{\sqrt{3} - 1}.$$

$$15. S = \frac{b_1}{1 - q}; b_1 = 6; q = -0,1.$$

$$16. \text{ а) } 12; -4; 1; \dots; q = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}; |q| < 1; b_1 = 12; S = \frac{12 \cdot 3}{4} = 9;$$

$$\text{ б) } 2; \sqrt{2}; 1; \dots; q = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}; |q| < 1; b_1 = 2; S = \frac{2}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}.$$

$$17. \text{ а) } 0,(5) = 0,555\dots = 0,5 + 0,05 + \dots = \frac{0,5}{1 - 0,1} = \frac{5}{9};$$

$$\text{ б) } 0,(26) = 0,2626\dots = 0,26 + 0,0026 + \dots = \frac{0,26}{1 - 0,01} = \frac{26}{99};$$

$$\text{ в) } 0,3(2) = 0,3222\dots = 0,3 + 0,02 + 0,002 + \dots = 0,3 + \frac{0,02}{1 - 0,1} = \frac{3}{10} + \frac{2}{90} = \frac{29}{90}.$$

Степень с рациональным показателем

1. Функция $f(x)$ называется четной, если для любого x из ее области определения $f(-x) = f(x)$. Функция называется нечетной, если для любого x из ее области определения $f(-x) = -f(x)$. $f(x) = x^2$ — четная, $g(x) = x$ — нечетная.

2. а) $y = 15x^2$; $y(-x) = 15 \cdot (-x)^2 = 15x^2 = y(x)$, значит $y(x)$ — четная;

б) $y = -46x^3$; $y(-x) = -46 \cdot (-x)^3 = 46x^3 = -y(x)$, значит $y(x)$ — нечетная;

в) $y = |x|$; $y(-x) = |-x| = |x| = y(x)$, значит $y(x)$ — четная;

г) $y = 2x|x|$; $y(-x) = 2(-x)|x| = -2x|x| = -y(x)$, значит $y(x)$ — нечетная;

д) $y = x^4 + x^2 + 1$; $y(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1 = y(x)$,

значит $y(x)$ — четная; е) $y = x^3 + x - 2$; $y(-x) = (-x)^3 + (-x) - 2 = -x^3 - x - 2 \neq \pm y(x)$, значит $y(x)$ — ни четная и ни нечетная;

ж) $y = (x - 8)^2$; $y(-x) = (-x - 8)^2 \neq \pm y(x)$, значит $y(x)$ — ни четная и ни нечетная;

з) $y = \frac{10}{x}$; $y(-x) = \frac{10}{-x} = -y(x)$, значит $y(x)$ — нечетная;

и) $y = \frac{4}{x^2}$; $y(-x) = \frac{4}{(-x)^2} = \frac{4}{x^2} = y(x)$, значит $y(x)$ – четная;

к) $y = \frac{13}{x+2}$; $y(-x) = \frac{13}{-x+2} \neq \pm y(x)$, значит $y(x)$ – ни четная и ни нечетная;

3. $y = x^a$, где $a \in \mathbb{N}$. Например: $y = x^2$; $y = x^3$.

4. 1) Если $x = 0$, то $y = 0$. 2) Если $x \neq 0$, то $y > 0$. 3) Функция является четной.

4) Функция возрастает в промежутке $[0; +\infty)$ и убывает в $(-\infty; 0]$. 5) Область значения функции есть множество неотрицательных чисел.

5. $f(x) = x^{12}$; а) $f(-4) > 0$; $f(0) = 0$; $f(4) > 0$;

б) $f(5,6) < f(7,6)$ т.к. $|5,6| < |7,6|$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) > f\left(-\frac{1}{3}\right) > 0$; т.к. $\left|-\frac{1}{2}\right| > \left|-\frac{1}{3}\right|$.

6. 1) Если $x = 0$, то $y = 0$. 2) Если $x > 0$, то $y > 0$ и если $x < 0$, то $y < 0$. 3) Функция является нечетной. 4) Функция возрастает на всей области определения.

5) Область значения функции есть множество всех действительных чисел.

7. $f(x) = x^{13}$; а) $f(-2,5) < 0$; $f(0) = 0$; $f(1,5) > 0$;

б) $f(1,4) < f(1,6)$ т.к. $1,4 < 1,6$; $f(-3) > f(-5)$ т.к. $-3 > -5$.

8. Арифметический корень n -ой степени из числа a – неотрицательное число, n -ая степень которого равна a .

а) $\frac{1}{3} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}}$ т.к. $\frac{1}{3} \geq 0$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$; б) $-\frac{1}{5} \neq \sqrt[3]{-\frac{1}{125}}$ т.к. $-\frac{1}{5} < 0$.

9. а) $\sqrt[3]{216} = 6$; б) $\sqrt[3]{-\frac{1}{32}} = -0,5$; в) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = 1,5$; г) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} = -\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = -1,5$;

д) $-0,5\sqrt[4]{81} = -0,5 \cdot 3 = -1,5$; е) $0,1\sqrt[3]{64} + 0,2\sqrt[3]{-27} = 0,1 \cdot 2 - 0,2 \cdot 3 = -0,4$.

10. а) $x^3 = 8$; $x = 2$; б) $x^3 + 27 = 0$; $x^3 = -27$; $x = -3$; в) $x^6 = 5$; $x_{1,2} = \pm\sqrt[6]{5}$;

г) $x^8 = -9$; нет корней; д) $81x^4 - 1 = 0$; $x^4 = \frac{1}{81}$; $x_{1,2} = \pm\frac{1}{3}$;

е) $16x^4 + 4 = 0$; $16x^4 = -4$; нет корней; ж) $\frac{1}{16}x^5 + 2 = 0$; $x^5 = -32$; $x_{1,2} = -2$.

11. Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению

корней из этих множителей $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $a, b \geq 0$. Докажем, что $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$ и $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab$. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$, т.к. $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b} \geq 0$.

По свойству степени произведения $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n = ab$, ч.т.д.

а) $\sqrt[3]{0,0016 \cdot 81} = 0,2 \cdot 3 = 0,6$; б) $\sqrt[3]{2^4 \cdot 3^2} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{2^5 \cdot 3^5} = 6$.

12. Если $a \geq 0, b > 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Докажем, что $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \geq 0$ и $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$.

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \geq 0$, т.к. $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b} \geq 0$. По свойству степени частного $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$ ч.т.д.

а) $\sqrt[3]{\frac{2^{12}}{3^6}} = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$; б) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{32}{2}} = \sqrt[4]{16} = 2$.

13. а) $\frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$; б) $\frac{6}{\sqrt[3]{25}} = \frac{6\sqrt[3]{25^2}}{25} = \frac{6}{25}\sqrt[3]{625}$; в) $\frac{8}{\sqrt[4]{4}} = \frac{8\sqrt[4]{4^3}}{4} = 2\sqrt[4]{64}$.

14. а) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{32}} = \sqrt{\sqrt[3]{32}} = \sqrt{2}$;

в) $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \sqrt{4-3} = 1$.

15. Если $a > 0$ и x — произвольное рациональное число, представленное дробью

$\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное, то $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$;

а) $100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$; б) $81^{\frac{-1}{4}} = \sqrt[4]{81^{-1}} = \frac{1}{3}$; в) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{27}{8}} = 1,5$.

16. Для любых $a, b > 0$ и любых рациональных p и q :

1) $a^p a^q = a^{p+q}$; 2) $a^p : a^q = a^{p-q}$; 3) $(a^p)^q = a^{pq}$; 4) $(ab)^p = a^p b^p$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

а) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{11}{12}}$; б) $a^{\frac{4}{5}} : a^{0,1} = a^{0,8-0,1} = a^{0,7}$; в) $(a^{0,2})^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{1,5}{6}} = a^{\frac{1}{4}}$.

17. а) $\frac{\sqrt[3]{a^2 \cdot a^{0,5}}}{a^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = a$; б) $\frac{a^{0,3} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{a^{-1,3}} = \frac{a^{0,3} \cdot a^{0,4}}{a^{-1,3}} = a^{0,3+0,4+1,3} = a^2$.

18. а) $\frac{27^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{4^2}}{\sqrt{3} \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{3}{2}} \cdot (2^2)^{\frac{2}{4}}}{3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = 3 \cdot 2^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} = 6$; б) $\frac{\sqrt[3]{16} \cdot 25^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{-0,6}} = \frac{2^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{5}}}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{-\frac{3}{5}}} = 2 \cdot 5 = 10$.

Тригонометрические выражения и их преобразования

1. Синус угла a — число, равное ординате конца единичного радиуса, задающего угол a . Косинус угла a — число, равное абсциссе конца единичного радиуса, задающего угол a . Тангенс угла a — число, равное отношению синуса угла a такого, что $\alpha \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, к косинусу этого угла.

Котангенс угла a — число, равное отношению косинуса угла a такого,

что $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, к синусу этого угла.

а) $2 \sin 30^\circ - \cos 60^\circ + 3 \operatorname{tg} 45^\circ = 2 \cdot 0,5 - 0,5 + 3 = 3,5$;

б) $4 \operatorname{ctg} 45^\circ - \sin 60^\circ + \cos 30^\circ = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$.

2. а) $\sin 143^\circ > 0$; б) $\cos 108^\circ < 0$; в) $\operatorname{tg} 61^\circ > 0$; г) $\operatorname{ctg} 280^\circ < 0$;
 д) $\sin 125^\circ \cdot \cos 200^\circ = \ll + \gg \cdot \ll - \gg < 0$; е) $\operatorname{tg} 160^\circ \operatorname{ctg} 200^\circ = \ll - \gg \cdot \ll + \gg < 0$.

четверть	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-	+	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	-	+	-

3. $\sin 763^\circ = \sin(720^\circ + 43^\circ) = \sin 43^\circ$;

При этом использовалось следующее свойство: $\sin(2\pi \cdot k + \alpha) = \sin \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$.

Косинус, тангенс и котангенс обладают аналогичным свойством.

4. $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ - нечетные, $y = \cos x$ - четная;

а) $\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -0,5$; б) $\operatorname{tg}(-45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$;

в) $\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = 0,5$; г) $\operatorname{ctg}(-30^\circ) = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3}$.

5. Угол в 1 рад - центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная длине радиуса окружности.

а) $2,5 = \left(2,5 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{450}{\pi}\right)^\circ$; б) $\frac{\pi}{4} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$;

в) $-\frac{\pi}{2} = -\frac{180^\circ}{2} = -90^\circ$; г) $10\pi = 10 \cdot 180^\circ = 1800^\circ$.

а) $120^\circ = 120 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$; б) $270^\circ = 270 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{2}$;

в) $-180^\circ = -180 \cdot \frac{\pi}{180} = -\pi$; г) $-150^\circ = -150 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{5\pi}{6}$.

6. а) $3 \sin \pi - \cos \frac{3\pi}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 0 - 0 - 3 = -3$; б) $2 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos(-\pi) + \operatorname{tg} 2\pi + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$
 $= -2 \sin \frac{\pi}{6} + \cos \pi + \operatorname{tg} 2\pi - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -2 \cdot 0,5 - 1 + 0 - 1 = -3$.

7. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$; $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$; $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$;

а) $1 - \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1 - \sin \alpha \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$;

б) $2 - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 - 1 = 1$;

в) $\frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - 1} = -\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = -\operatorname{tg}^2 \alpha$.

8. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; а) $\sin \alpha = 0,6$; $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -0,8$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{0,6}{0,8} = -\frac{3}{4}$;

б) $\cos \alpha = -\frac{15}{17}$; $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{15^2}{17^2}} = \frac{8}{17}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{8}{15}$;

$$в) \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}; \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1+3}} = -\frac{1}{2}; \sin \alpha = \sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$9. а) \sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha; б) \cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha; в) \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

$$г) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha; д) \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha; е) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$10. \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta; \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta;$$

$$а) \frac{\sin(\alpha - \beta) + \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \sin \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - \cos \alpha \sin \beta} = 1;$$

$$б) \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \\ = \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{-2 \sin \alpha \sin \beta} = -\operatorname{ctg} \beta.$$

$$11. а) \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}; б) \cos 15^\circ = \cos(90^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4};$$

$$в) \sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4};$$

$$г) \cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ = -\sin(45^\circ - 30^\circ) = \\ = -\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4}.$$

$$12. \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; а) \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos \alpha} = \sin \alpha;$$

$$б) \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha;$$

$$в) \sin 2\alpha - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin 2\alpha - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha) = \\ = \sin 2\alpha - 1 - \sin 2\alpha = -1;$$

$$г) \frac{2\sqrt{3} \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ} = \sqrt{3} \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1;$$

$$13. а) 2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = 0,5;$$

$$б) \cos^2 165^\circ - \sin^2 165^\circ = \cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$в) \frac{2 \operatorname{tg} 105^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 105^\circ} = \operatorname{tg} 210^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$14. \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

а) $\sin 3\alpha + \sin 5\alpha = 2 \sin 4\alpha \cos \alpha$; б) $\sin 3\beta - \sin \beta = 2 \sin \beta \cos 2\beta$;

в) $\cos 4\alpha + \cos 2\alpha = 2 \cos 3\alpha \cos \alpha$;

г) $\cos \alpha - \cos 5\alpha = -2 \sin 3\alpha \sin(-2\alpha) = 2 \sin 3\alpha \sin 2\alpha$.

15. а) $\frac{\sin 5\alpha + \sin \alpha}{\cos 5\alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \sin 3\alpha \cos 2\alpha}{2 \cos 3\alpha \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$;

б) $\frac{\cos 4\alpha - \cos 6\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha} = \frac{2 \sin 5\alpha \sin \alpha}{2 \cos 5\alpha \cos \alpha} = \operatorname{tg} 5\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

16. а) $\frac{\cos 58^\circ - \cos 32^\circ}{\sin 58^\circ - \sin 32^\circ} = \frac{-2 \sin 45^\circ \sin 13^\circ}{2 \sin 13^\circ \cos 45^\circ} = -1$;

б) $\frac{\sin 130^\circ + \sin 50^\circ}{\cos 130^\circ - \cos 50^\circ} = \frac{2 \sin 90^\circ \sin 40^\circ}{2 \sin 90^\circ \cos 40^\circ}$; данное выражение не имеет смысла,

т.к. $\cos 90^\circ = 0$.

Итоговое повторение по темам.

(к учебнику под научным руководством Тихонова)

Степень с рац-показателем

1. Пусть a —действительное число, $a \neq 0$, n —натур. число. Тогда $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^0 = 1$.

1) а) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$; б) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$; в) $1^{-10} = \frac{1}{1^{10}} = 1$; г) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$;

д) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$; е) $(-2)^0 = 1$; ж) $1,075^0 = 1$; з) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2$;

2) а) $\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$; б) $\frac{1}{3^2} = 3^{-2}$; в) $\frac{1}{a^6} = a^{-6}$; г) $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$.

2. $a, b \neq 0$; $m, n \in \mathbb{Z}$; 1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 2) $a^m + a^n = a^{m-n}$; 3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

4) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

1) а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$; б) $\left(\frac{-1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{-1}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{-1}{7}\right)^{2-3} = \left(\frac{-1}{7}\right)^{-1} = -7$;

в) $2^3 + 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = \frac{1}{4}$; г) $(0,1)^2 + (0,1)^{-2} = (0,1)^{2+2} = (0,1)^4 = 0,0001$; д) $(a^2)^{-3} = a^{-6}$;

е) $(b^{-3})^2 = b^{-6}$; ж) $(ab)^{-2} = a^{-2}b^{-2}$; з) $(a^2b)^{-1} = a^{-2}b^{-1}$; и) $(2a^2)^{-2} = 2^{-2}a^{-4} = \frac{a^{-4}}{4}$;

к) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{b^3}{a^3}$; л) $\left(\frac{-2xy^{-2}}{z^{-3}}\right)^2 = \frac{(-2)^2 \cdot x^2 \cdot y^{-4}}{z^{-6}} = \frac{4x^2z^6}{y^4}$;

2) а) $300000^2 = (3 \cdot 10^5)^2 = 9 \cdot 10^{10}$; б) $0,001^3 = (10^{-3})^3 = 10^{-9}$;

в) $\frac{1}{625} = 0,0016 = 1,6 \cdot 10^{-3}$.

3. Арифметический корень n -ой степени из числа a – неотрицательное число, n -ая степень которого равна a . $\sqrt[3]{27} = 3$, т.к. $3 \geq 0$ и $3^3 = 27$.

4. Извлечение корня n -ой степени. Оно является обратным к возведению в степень n

5. а) $\sqrt{25} = 5$; б) $\sqrt[3]{27} = 3$; в) $\sqrt{\frac{1}{625}} = \frac{1}{25}$; г) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^8} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$;

д) $\sqrt[12]{10^{12}} = 10^{\frac{12}{12}} = 10^1 = 10000$.

6. Уравнение $x^{2k+1} = a$ имеет единственный корень, равный $\sqrt[2k+1]{a}$; ($a < 0$).

1) а) $\sqrt[3]{-8} = -2$; б) $\sqrt[3]{-1} = -1$; в) $\sqrt[4]{\frac{-1}{27}}$; г) $\sqrt[3]{-3^5} = -3$;

2) а) $x^3 = -27$; $x\sqrt{-27}$; $x = -3$; б) $x^4 = 625$; $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{625}$; $x_{1,2} = \pm 5$.

7. а) $\sqrt[3]{-64} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{64} = -4 - \frac{1}{2} \cdot 2 = -5$; б) $\sqrt[4]{10000} - 2\sqrt{0,001} = 10 + 2 \cdot 0,1 = 10,2$;

в) $\sqrt{3-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{2}} = \sqrt{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \sqrt{9-2} = \sqrt{7}$.

8. 1) $\sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b}$; 2) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; 3) $\sqrt[4]{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$; 4) $\sqrt[4]{a^{m^k}} = \sqrt[4]{a^m}$.

9. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; $a, b \geq 0$ - левая и правая части неотрицательны. Возведем правую часть равенства в степень n и убедимся, что она равна b .

По свойству степеней с натуральным показателем получаем

$$(\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b})^n = (\sqrt[4]{a})^n \cdot (\sqrt[4]{b})^n = a \cdot b, \text{ ч.т.д.}$$

10. а) $\sqrt[3]{216 \cdot 0,027} = \sqrt[3]{216} \cdot \sqrt[3]{0,027} = 6 \cdot 0,3 = 1,8$; б) $\sqrt[3]{108} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[3]{108 \cdot 2} = \sqrt[3]{216} = 6$;

в) $\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{81}} = \frac{4}{9}$; г) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$; д) $(\sqrt{200} - \sqrt{32}) + \sqrt{2} = (\sqrt{100 \cdot 2} - \sqrt{16 \cdot 2}) + \sqrt{2} =$
 $= (10\sqrt{2} - 4\sqrt{2}) + \sqrt{2} = 6\sqrt{2} + \sqrt{2} = 6$; е) $(\sqrt[3]{2})^5 = \sqrt[3]{2^5} = 2$; ж) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{64} = 2$.

11. а) $\sqrt[3]{3a^2b^3} \cdot \sqrt[3]{9a} = \sqrt[3]{3 \cdot 9 \cdot a^3b^3} = 3ab$; б) $\sqrt{\frac{a^2b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{a^2b^3}{c^3}} = \sqrt{\frac{a^2b \cdot a^2b^3}{c \cdot c^3}} = \frac{ab}{c}$.

12. Если $a > 0$, x — произвольное рациональное число, представленное дробью $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное, то число $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

1) а) $15^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{15^1}$; б) $27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}}$;

2) а) $\sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$; б) $\sqrt{2^5} = 2^{\frac{5}{2}}$; в) $\sqrt[5]{5^{-3}} = 5^{-\frac{3}{5}}$.

13. Если a и b положительные действит. числа, а x и y — рациональные числа, то

1) $a^x a^y = a^{x+y}$; 2) $(a^x)^y = a^{xy}$; 3) $(ab)^x = a^x b^x$; 4) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

14. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Доказательство: Рассмотрим два рациональных числа, представленные в виде дробей $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$. Их всегда можно представить в виде

$\frac{p_1 q_2}{q_1 q_2}$ и $\frac{p_2 q_1}{q_1 q_2}$, где знаменатели дробей равны. Поэтому будем считать, что

рациональные числа x и y уже представлены в виде двух дробей с одинаковыми знаменателями $\frac{m_1}{n}$ и $\frac{m_2}{n}$. По свойству арифметических корней n -ой степени

получаем: $a^x a^y = a^{\frac{m_1}{n}} \cdot a^{\frac{m_2}{n}} = \sqrt[n]{a^{m_1}} \cdot \sqrt[n]{a^{m_2}} = \sqrt[n]{a^{m_1+m_2}} = a^{\frac{m_1+m_2}{n}} = a^{\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}} = a^{x+y}$. ч.т.д

15. а) $9^{\frac{1}{5}} \cdot 27^{\frac{1}{5}} = (3^2)^{\frac{1}{5}} \cdot (3^3)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{2}{5}} \cdot 3^{\frac{3}{5}} = 3$; б) $\left(\frac{25}{64}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{25^{\frac{1}{2}}}{64^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}$.

16. $a^{\frac{1}{4}} \sqrt{a^3 \sqrt{a}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot \left(a \cdot a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{11}{12}}$.

17. а) $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$; б) $\frac{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}{\left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right) \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)} = \frac{1}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$

18. 1) а) если $a > b > 0$, $r > 0$, то $a^r > b^r$; б) если $a > b > 0$, $r < 0$, то $a^r < b^r$;

2) а) $3 > 2$; $2 > 0$, то $3^2 > 2^2$, т.к. $9 > 4$; б) $3 > 2$; $-1 < 0$, то $3^{-1} < 2^{-1}$, т.к. $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

19. а) $\left(\frac{13}{14}\right)^{-\frac{1}{2}}$ и $\left(\frac{14}{13}\right)^{-\frac{1}{2}}$ т.к. $\frac{14}{13} > \frac{13}{14}$; $-\frac{1}{2} < 0$, то $\left(\frac{13}{14}\right)^{-\frac{1}{2}} > \left(\frac{14}{13}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{3}}$ и $(0,755)^{\sqrt{3}}$, т.к. $\frac{3}{4} < 0,755$; $\sqrt{3} > 0$, то $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{3}} < (0,755)^{\sqrt{3}}$.

Степенная функция

1. Область определения функции — все значения независимой переменной.

2. Найти все значения аргумента, при которых формула имеет смысл.

3. а) $y = 2x + 4$; $D(y) = R$; б) $y = 4x^2 + 3x + 5$; $D(y) = R$;

в) $y = \frac{1}{x}; x \neq 0; D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty);$ г) $y = \sqrt{x}; x \geq 0; D(y) = [0; +\infty);$

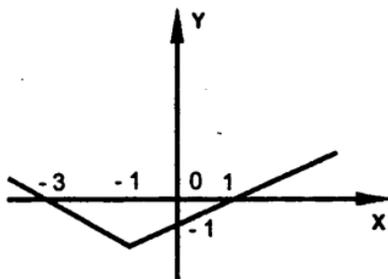
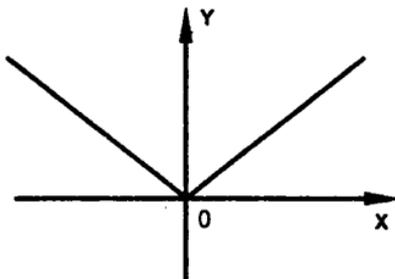
д) $y = \sqrt{x+1}; x+1 \geq 0; x \geq -1; D(y) = [-1; +\infty);$

е) $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}; x-2 > 0; x > 2; D(y) = (2; +\infty).$

4. График функции – множество точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

5. а) $y = |x|;$

б) $y = |x+1|-2.$



6. Функция называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

а) $y = x^2$ на $[1; 3);$ б) $y = -x$ на $[-1; 0).$

7. От значения показателя степени $r.$

8. 1) а) степенная функция $y = x^r$ возрастает на промежутке $x \geq 0$, если $r > 0;$

б) степенная функция $y = x^r$ убывает на промежутке $x > 0$, если $r < 0;$

2) $y = x$ возрастает на $x \geq 0;$ $y = \frac{1}{x}$ убывает на $x > 0.$

9. $x^{\frac{1}{2}} = 4, \sqrt{x} = 4, x = 16.$

10. а) $y = x^{-\frac{2}{3}}$ – убывает, т.к. $r = -\frac{2}{3} < 0;$ б) $y = x^{\frac{2}{3}}$ – возрастает, т.к. $r = \frac{2}{3} > 0;$

в) $y = x^{\frac{3}{2}}$ – возрастает, т.к. $r = \frac{3}{2} > 0;$ г) $y = x^{-\frac{3}{2}}$ – убывает, т.к. $r = -\frac{3}{2} < 0.$

11. Функция $f(x)$ называется четной, если для любого x из ее области определения $f(-x) = f(x),$

$y = \frac{1}{x^2}; y(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = y(x),$ значит, $y(x)$ – четная, ч.т.д.

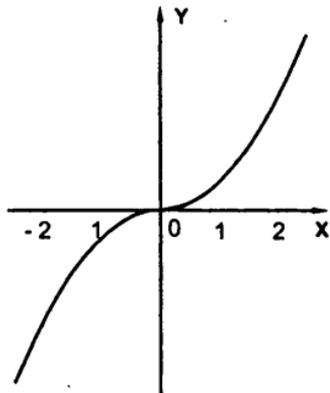
12. $y = x^3$; $D(y) = E(y) = R$;

$y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$,

$y = 0$ при $x = 0$;

y возрастает на R ;

нечетная.



13. Функция $f(x)$ называется нечетной, если для любого x из ее области определения $f(-x) = -f(x)$,

$y = x^3$; $y(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -y(x)$, значит, $y(x)$ – нечетная, ч.т.д.

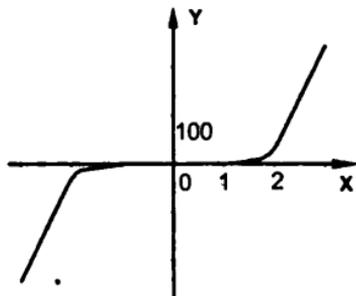
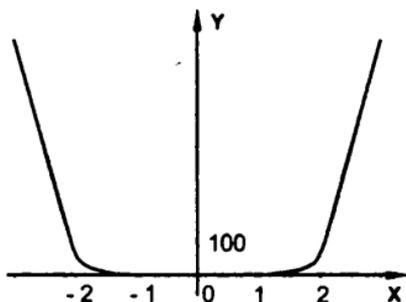
14. Область определения симметрична относительно нуля.

15. а) симметричен относительно оси ординат;

б) симметричен относительно начала координат.

16. а) $y = x^6$;

б) $y = x^5$.



17. $y = \sqrt[3]{x}$;

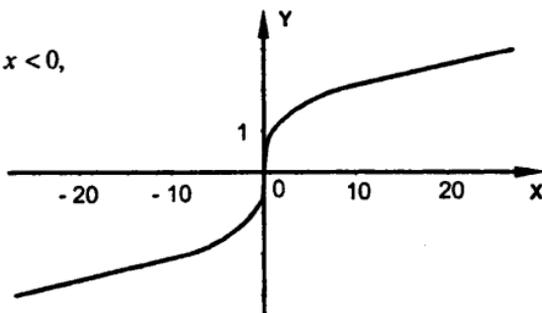
$D(y) = E(y) = R$;

$y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$,

$y = 0$ при $x = 0$;

y возрастает на R ;

нечетная.



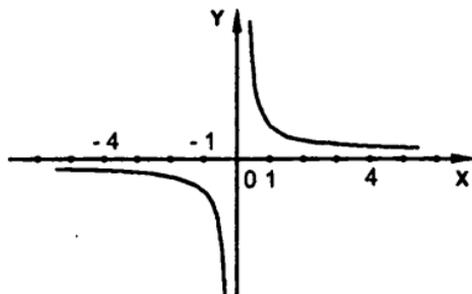
18. $y = \frac{1}{x}$;

$D(y) = E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

$y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$,

убывает на $D(y)$;

нечетная.



19. Гипербола.

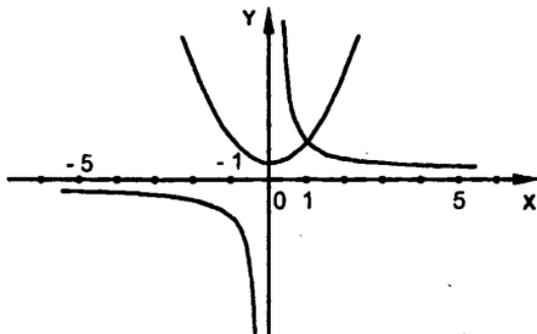
20. а) Растяжение в 2 раза вдоль оси ОУ. б) График первой функции расположен в 1 и 3 четвертях, график второй – в 2 и 4 четвертях.

21. Обратная пропорциональность.

22. а) $x^3 > 27$; $x > \sqrt[3]{27}$; $x > 3$; б) $x^4 \leq 625$; $-\sqrt[4]{625} \leq x \leq \sqrt[4]{625}$; $-5 \leq x \leq 5$.

23. $\frac{2}{x} = x^2 + 1$.

Ответ: 1.



24. а) $\sqrt{2+x} = 3$; $2+x = 9$; $x = 7$;

Ответ: 7.

б) $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 4 - x$; $2x^2 - 3x + 2 = 16 + x^2 - 8x$; $x^2 + 5x - 14 = 0$;

$D = 25 + 56 = 81$; $x_1 = \frac{-5+9}{2} = 2$; $x_2 = -7$. Проверка: $x = 2$;

$\sqrt{2 \cdot 4 + 6 + 2} = 4 - 2$ – верно; $x = -7$; $\sqrt{2 \cdot 49 + 21 + 2} = 4 + 7$ – верно.

Ответ: -7; 2.

Элементы тригонометрии

1. Угол в 1 рад – центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная длине радиуса окружности.

2. $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$; а) $\pi = 180^\circ$; б) $\frac{\pi}{4} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$; в) $\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ = 120^\circ$; г) $\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4} \cdot 180^\circ = 135^\circ$.

3. $\frac{\pi}{180}$ рад. а) $180^\circ = \pi$; б) $90^\circ = 90 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$;

в) $20^\circ = 20 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{9}$; г) $150^\circ = 150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$.

4. а) $\pi \approx 3,14$; б) $\frac{2}{3}\pi \approx 2,09$; в) $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$; г) $2\pi \approx 6,28$.

5. а) $-\frac{\pi}{2} > -2$; б) $\pi < 3,2$; в) $2\pi < 6,72$.

6. Единичная окружность – окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

7. а) против часовой стрелки; б) по часовой стрелке.

8. а) (0; 1); б) (0; 1); в) (-1; 0); г) (1; 0); д) (1; 0); е) (-1; 0).

9. Каждой точке сопоставим угол α , а углу α – его тангенс, т.е. действительное число.

10. а) $A(-1; 0)$; $\alpha = \pi + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$; б) $B(0; 1)$; $\beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$;

в) $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\gamma = \frac{\pi}{4} + 2\pi l$; $l \in \mathbb{Z}$.

11. а) (0; 1); б) (0; 1); в) (0; -1).

12. Синус угла a — число, равное ординате конца единичного радиуса, задающего угол a . Косинус угла a — число, равное абсциссе конца единичного радиуса, задающего угол a . Тангенс угла a — число, равное отношению синуса угла a такого, что $\alpha \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, к косинусу этого угла. Котангенс угла a — число, равное отношению косинуса угла a такого, что $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, к синусу этого угла.

13. а) $\sin x = 0$; $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

в) $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; г) $\cos x = 1$; $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

14.

α	$0^\circ(0)$	$30^\circ\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^\circ\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^\circ\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90^\circ\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$$15. \text{ а) } 4 \cos \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 1 + \frac{3}{2} = 2,5;$$

$$\text{ б) } 2 \sin \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + 1.$$

16.

четверть	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-	+	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	-	+	-

$$\text{ а) } \sin 275^\circ < 0; \quad \text{ б) } \cos 130^\circ < 0; \quad \text{ в) } \operatorname{tg} 50^\circ > 0; \quad \text{ г) } \operatorname{ctg} 105^\circ < 0;$$

$$\text{ д) } \sin \frac{2\pi}{3} > 0; \quad \text{ е) } \cos \frac{\pi}{4} > 0; \quad \text{ ж) } \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} < 0; \quad \text{ з) } \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{3} < 0.$$

$$17. \text{ а) } \sin 1 > 0; \quad \text{ б) } \cos 3 < 0; \quad \text{ в) } \operatorname{tg}(-3,4) < 0; \quad \text{ г) } \operatorname{ctg} 2 < 0;$$

$$\text{ д) } \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{3\pi}{4} = \ll + \gg \cdot \ll - \gg < 0;$$

$$\text{ е) } \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \frac{3\pi}{4} = \ll - \gg \cdot \ll + \gg < 0; \quad \text{ ж) } \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} \sin \frac{5\pi}{4} = \ll + \gg \cdot \ll - \gg < 0.$$

$$18. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

$$19. \text{ а) } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \quad \cos \alpha = -\frac{7}{25}; \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{49}{625}} = \frac{24}{25};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{24}{7}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{7}{24};$$

$$\text{ б) } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad \sin \alpha = 0,28; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,28^2} = 0,96;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,28}{0,96} = \frac{7}{24}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{24}{7}.$$

$$20. \text{ а) } \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1; \quad \text{ б) } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad \text{ в) } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

$$21. \text{ а) } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{5,2} = \frac{5}{26}; \quad \text{ б) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - 0,6^2}}{0,6} = \frac{4}{3};$$

$$\text{ в) } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \text{ г) } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\text{ д) } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{15^2}{8^2}}} = \frac{8}{17}; \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17}.$$

$$22. \text{ а) } (1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha;$$

$$\text{ б) } (\cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 1) = \cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha;$$

$$\text{ в) } \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right) \cdot \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha;$$

$$\text{ г) } \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha; \text{ д) } \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha - 1 = \sin \alpha - \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 1 = -\cos^2 \alpha;$$

$$\text{ е) } \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - 1} = -\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -\operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

$$23. \text{ а) } (1 - \cos^2 \alpha)(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = \sin^2 \alpha \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1, \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{ б) } \cos^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$24. \sin(-\alpha) = -\sin \alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha; \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha;$$

$$\text{ а) } \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{ б) } \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{ в) } \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1;$$

$$\text{ г) } \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4}.$$

$$25. \text{ а) } \frac{\sin \alpha}{1 + \cos(-\alpha)} - \frac{1 + \cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha + 1 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{2 + 2 \cos \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{2}{\sin \alpha};$$

$$\text{ б) } \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(-\alpha)} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2(-\alpha)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

$$26. \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta; \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta;$$

$$1) \text{ а) } \frac{\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta} = -\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta;$$

$$\text{ б) } \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} =$$

$$= \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{2 \sin \alpha \sin \beta} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$2) \text{ а) } \cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}; \quad \text{ б) } \sin 15^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4};$$

$$\text{в) } \cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}; \quad \text{г) } \sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \\ = \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4};$$

$$\text{д) } \sin 74^\circ \cos 16^\circ + \cos 74^\circ \sin 16^\circ = \sin(74^\circ + 16^\circ) = \sin 90^\circ = 1;$$

$$\text{е) } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2\sqrt{3}};$$

$$\text{ж) } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{2}{9}} = -\frac{\sqrt{7}}{3};$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{6}.$$

$$27. \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$1) \text{ а) } \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1 - 1 + 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\text{б) } (1 - \cos 2\alpha) \operatorname{ctg} \alpha = (1 - 1 + 2 \sin^2 \alpha) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha;$$

$$\text{в) } \cos 2\alpha + 2 \sin^2(-\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha = 1;$$

$$\text{г) } \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha;$$

$$2) \text{ а) } 1 - \left(\sin \frac{\pi}{8} - \cos \frac{\pi}{8}\right) = 1 - \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} - 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}\right) =$$

$$= 1 - \left(1 - \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{б) } \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{в) } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8; \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -2 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = -0,96;$$

$$\text{г) } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0,64 - 0,36 = 0,28;$$

$$\text{д) } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 4} = -\frac{4}{3}.$$

$$28. 1) \text{ а) } \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \quad \text{б) } \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha; \quad \text{в) } \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\text{г) } \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha; \quad \text{д) } \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \quad \text{е) } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha;$$

$$2) \text{ а) } \cos 17\pi = \cos(16\pi + \pi) = \cos \pi = -1; \quad \text{б) } \cos \frac{13\pi}{6} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{в) } \sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ г) } \operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 45^\circ) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1;$$

$$\text{д) } \cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\text{е) } \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2};$$

$$\text{ж) } \operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = -\operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{з) } \sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\sin \frac{7\pi}{3} = -\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Элементы тригонометрии

$$1. 1) 1; 4; 9; 16; 25.$$

$$2) \text{ а) } a_n = \frac{1}{n}, \quad a_1 = 1; \quad a_2 = \frac{1}{2}; \quad a_3 = \frac{1}{3}; \quad a_4 = \frac{1}{4}; \quad a_5 = \frac{1}{5};$$

$$\text{б) } a_n = n(n+2), \quad a_1 = 1(1+2) = 3; \quad a_2 = 2(2+2) = 8; \quad a_3 = 3(3+2) = 15;$$

$$a_4 = 4(4+2) = 24; \quad a_5 = 5(5+2) = 35;$$

$$\text{в) } a_n = \frac{n}{n-1}, \quad a_2 = \frac{2}{2-1} = 2; \quad a_3 = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}; \quad a_4 = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3};$$

$$a_5 = \frac{5}{5-1} = \frac{5}{4}; \quad a_6 = \frac{6}{6-1} = \frac{6}{5};$$

$$\text{г) } a_n = -n^2, \quad a_1 = -1; \quad a_2 = -4; \quad a_3 = -9; \quad a_4 = -16; \quad a_5 = -25;$$

$$3) b_1 = 2, \quad b_{n+1} = 2b_n + 1;$$

$$b_2 = 2b_1 + 1 = 5; \quad b_3 = 2b_2 + 1 = 11; \quad b_4 = 2b_3 + 1 = 23; \quad b_5 = 2b_4 + 1 = 47.$$

2. Арифметическая прогрессия – числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, постоянным для этой последовательности. 2; 4; 6; 8;.....

$$3. a_n = 4 - 2n; \quad a_{n-1} = 4 - 2(n-1); \quad a_{n+1} = 4 - 2(n+1);$$

$$a_n = \frac{a_n - 1 + a_{n+1}}{2}; \quad 4 - 2n = \frac{4 - 2(n-1) + 4 - 2(n+1)}{2} \quad \text{– верно для любого } n \in \mathbb{N},$$

значит, (a_n) – арифмет. прогрессия, ч.т.д.

$$4. a_n = a_1 + d(n-1); \quad a_1 = -2, \quad d = 4; \quad a_n = -2 + 4 \cdot 99 = 394.$$

$$5. \text{ а) } 2; 5; 8; 11; \dots; \quad a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1;$$

$$\text{б) } 1; -1; -3; -5; \dots; \quad a_n = 1 - 2(n-1) = 3 - 2n;$$

$$6. 3; 5; \dots; \quad a_n = 3 + 2(n-1) = 1 + 2n; \quad 101 = 1 + 2n; \quad 2n = 100; \quad n = 50.$$

$$7. S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n; \quad a_1 = 10, \quad d = 2; \quad n = 91; \quad S = S_{91} = \frac{20 + 90}{2} \cdot 91 = 5005.$$

$$8. 1; 3; 5; \dots; 101; a_1 = 1, d = 2; n = 51; S = S_{51} = \frac{2 + 2 \cdot 50}{2} \cdot 51 = 2601.$$

9. Геометрическая прогрессия – числовая последовательность, в которой первый член отличен от нуля, а каждый из последующих равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной последовательности число, отличное от нуля. 2; 4; 8; 16; …

$$10. b_n = 3^{2n}, b_{n-1} = 3^{2(n-1)}, b_{n+1} = 3^{2(n+1)}; b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, (3^{2n})^2 = 3^{2(n-1)} \cdot 3^{2(n+1)} \text{ – верно}$$

для любого $n \in N$, значит, (b_n) – геометрическая прогрессия.

$$11. 2; 1; \frac{1}{2}; b_1 = 2, q = \frac{1}{2}; b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{4}{2^n}.$$

$$12. b_1 = -\frac{1}{12}, q = -12; b_2 = -\frac{1}{12} \cdot (-12) = 1; b_3 = 1 \cdot (-12) = -12;$$

$$b_4 = -12 \cdot (-12) = 144; b_5 = 144 \cdot (-12) = -1728; b_6 = -1728 \cdot (-12) = 20736.$$

$$13. b_n = b_1 \cdot q^{n-1}; b_1 = 80; q = \frac{1}{2}; b_7 = 80 \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{80}{64} = 1,25.$$

$$14. 2; 8; 32; b_1 = 2; q = 4; b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 4^{n-1} = 2 \cdot 2^{2n-2} = 2^{2n-1};$$

$$512 = 2^{2n-1}; 2^9 = 2^{2n-1}; 2n-1 = 9; 2n = 10; n = 5, \text{ значит, } 512 = b_5.$$

$$15. S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1; b_1 = 11; q = 2; S_5 = \frac{11(2^5 - 1)}{2 - 1} = 341.$$

$$16. q = 2; S_7 = 635; 635 = \frac{b_1(2^7 - 1)}{2 - 1} = 126b_1; b_1 = 5; b_7 = b_1 q^6 = 5 \cdot 2^6 = 320.$$

17. Геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей, если ее знаменатель по абсолютной величине меньше единицы. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots$

$$18. q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2 \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot 2} = \frac{1}{3}; \left| \frac{1}{3} \right| < 1, \text{ значит, } (b_n) \text{ – бесконечно убывающая, ч.т.д.}$$

$$19. S = \frac{b_1}{1 - q}; 30; 3; 0,3, \dots; b_1 = 30; q = \frac{3}{30} = 0,1; S = \frac{30}{1 - 0,1} = \frac{300}{9} = \frac{100}{3} = 33 \frac{1}{3}.$$

$$20. b_3 = 1; q = -\frac{1}{7}; b_3 = b_1 \cdot q^2; b_1 = \frac{b_3}{q^2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{7}\right)^2} = 49; S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{49}{1 + \frac{1}{7}} = \frac{49 \cdot 7}{8} = \frac{343}{8}.$$

$$21. \text{ а) } 0,(3) = 0,333\dots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots = \frac{0,3}{1 - 0,1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ б) } 0,(15) = 0,1515\dots = 0,15 + 0,0015 + \dots = \frac{0,15}{1 - 0,01} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$$

$$\text{ в) } 0,1(2) = 0,122\dots = 0,1 + 0,02 + 0,002 + \dots = 0,1 + \frac{0,02}{1 - 0,1} = \frac{1}{10} + \frac{2}{90} = \frac{11}{90}.$$

ПОВТОРЕНИЕ ПО КУРСУ АЛГЕБРЫ

VII–IX КЛАССОВ

Вариант 1

П-1

$$1. \text{ а) } 4 \cdot (1,22 + 0,4 - 3,7) + \frac{2}{3} = 4(3,05 - 3,7) + \frac{2}{3} = -2,6 + \frac{2}{3} = -\frac{13}{2} + \frac{2}{3} = -\frac{13}{5} + \frac{2}{3} = \frac{-39 + 10}{15} = -\frac{29}{15} = -1\frac{14}{15}.$$

$$\text{б) } 1\frac{1}{2} + (0,4 \cdot 3,25 - 3,15) + 0,2 = 1,5 - 1,85 + 0,2 = 1,5 - 9,25 = -7,75;$$

$$\text{в) } \frac{-30,4 + 15,2 \cdot 2,5}{1\frac{5}{9} \cdot 3 - 4\frac{5}{9}} = \frac{7,6}{\frac{14}{9} \cdot 3 - \frac{41}{9}} = 7,6 \cdot 9 = 68,4$$

$$2. 1) \frac{a+b^2}{ab}; \text{ а) } a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{6}; \quad \frac{a+b^2}{ab} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{36}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{13 \cdot 6 \cdot 3}{36} = \frac{13}{2} = 6,5;$$

$$\text{б) } a = 0,4, \quad b = -0,3; \quad \frac{a+b^2}{ab} = -\frac{0,4 + 0,09}{0,4 \cdot 0,3} = -\frac{0,49}{0,12} = -\frac{49}{12} = -4\frac{1}{12};$$

$$2) \frac{a-b^2}{ab}; \text{ а) } a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{2}; \quad \frac{a-b^2}{ab} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 4} = 1,25;$$

$$\text{б) } a = 0,3, \quad b = -0,4; \quad \frac{a-b^2}{ab} = -\frac{0,3 - 0,16}{0,12} = -\frac{14}{12} = -\frac{7}{6} = -1\frac{1}{6};$$

$$3) \frac{x-y}{xy^2}; \text{ а) } x = \frac{5}{6}, \quad y = \frac{2}{3}; \quad \frac{x-y}{xy^2} = \frac{\frac{5}{6} - \frac{2}{3}}{\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{9}} = \frac{6 \cdot 9}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{9}{20};$$

$$\text{б) } x = 0,5, \quad y = 0,6; \quad \frac{x-y}{xy^2} = \frac{0,5 - 0,6}{0,5 \cdot 0,36} = -\frac{0,1}{0,18} = -\frac{10}{18} = -\frac{5}{9}.$$

$$3. \text{ а) } 2 \cdot 4^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{27}{8} - 1 = \frac{20}{8} = 2,5;$$

$$\text{б) } \frac{3}{4} \cdot 25^{\frac{1}{2}} + 64^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{4} = 4; \quad \text{в) } 12 \cdot 3^{-3} + \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{12}{27} + \frac{25}{9} - 1 = \frac{4}{9} + \frac{25}{9} - \frac{9}{9} = 2\frac{2}{9};$$
$$\text{г) } \frac{2}{5} \cdot 8^{\frac{2}{3}} - 25^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \cdot (2^3)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{5} = \frac{8}{5} - \frac{1}{5} = 1,4;$$

$$\begin{aligned} \text{д)} \left(\frac{3}{5}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-6} - 3^{-11} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-9} &= \left(\frac{5}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^6 - \left(\frac{1}{3}\right)^{11} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \\ &= \frac{25-1}{9} = \frac{24}{9} = 2\frac{2}{3}; \quad \text{е)} \left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + 32^{-0.2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2. \end{aligned}$$

$$4. \text{ а)} \sqrt{4 \cdot 25 \cdot 4^3} = \sqrt{4^4 \cdot 25} = 4^2 \cdot 5 = 80; \quad \text{б)} (\sqrt{5} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3;$$

$$\text{в)} 7^{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{4}{3}} \cdot 7^{\frac{2}{3}} = 7^2 = 49; \quad \text{г)} \sqrt[3]{5^6 \cdot 64 \cdot 5^3} = \sqrt[3]{5^9 \cdot 4^3} = 5^3 \cdot 4 = 500;$$

$$\text{д)} (2\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 10; \quad \text{е)} 3^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} = 3^2 = 9;$$

$$\text{ж)} \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} + \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{9 + 5 - 6\sqrt{5} + 9 + 5 + 6\sqrt{5}}{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{28}{4} = 7;$$

$$\text{з)} \sqrt{12 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{8}} = \sqrt{12 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{8}} = \sqrt{36 \cdot 4} = 6 \cdot 2 = 12.$$

П-2

$$1. \text{ а)} 2y(y+5) - 3y(y-3) = 2y^2 + 10y - 3y^2 + 9y = 19y - y^2;$$

$$\text{б)} (2a-b)^2 - (2a+b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2 - 4a^2 - 4ab - b^2 = -8ab;$$

$$\text{в)} 5x(x^2+3) - 3x(x^2-5) = 5x^3 + 15x - 3x^3 + 15x = 2x^3 + 30x;$$

$$\text{г)} (a-3b)^2 - (a+b)^2 = a^2 - 6ab + 9b^2 - a^2 - 2ab - b^2 = 8b^2 - 8ab;$$

$$\begin{aligned} \text{д)} 5x(x^2-3) - (5x+2)(x^2-3x-1) &= 5x^3 - 15x - (5x^3 + 2x^2 - 6x - 5x - 2) = \\ &= 5x^3 - 15x - 5x^3 - 2x^2 + 15x + 6x + 5x + 2 = 13x^3 - 4x + 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{е)} 3b(2a-b)^2 - (a+3b)(b^2-3a^2) &= 3b(4a^2 - 4ab + b^2) - (ab^2 + 3b^3 - 3a^3 - 9a^2b) = \\ &= 12a^2b - 12ab^2 + 3b^3 - ab^2 - 3b^3 - 3a^3 + 9a^2b = 3a^3 + 21a^2b - 13ab^2. \end{aligned}$$

$$2. \text{ 1) а)} 2ab - 2b^2 = 2b(a-b); \quad \text{б)} x^4 + 3x^6 = x^4(1+3x^2);$$

$$\text{в)} 6mn - 3m^2n + 3mn^2 = 3mn(2-m+n); \quad \text{г)} 0,25 - m^2 = (0,5-m) \cdot (0,5+m);$$

$$\text{д)} y^3 - 4y = y \cdot (y^2 - 4) = y \cdot (y-2)(y+2); \quad \text{е)} a^4 - 9x^2 = (a^2 - 3x)(a^2 + 3x);$$

$$2) \text{ а)} -15ax^2 - 15ay^2 - 30axy = -15a(x^2 + y^2 + 2xy) = -15a(x+y)^2;$$

$$\begin{aligned} \text{б)} 4a^2 - 6a - b^2 + 3b &= (4a^2 - b^2) - (6a - 3b) = \\ &= (2a-b)(2a+b) - 3(2a-b) = (2a-b)(2a+b-3); \end{aligned}$$

$$\text{в)} 81 - (x+7)^2 = (9-x-7)(9+x+7) = (2-x)(16+x).$$

$$3. \text{ а)} \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} = \frac{x^2 + xy - xy + y^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}; \quad \text{б)} \frac{4}{a-2} + \frac{8}{2a-a^2} = \frac{4}{a-2} - \frac{8}{a(a-2)} =$$

$$= \frac{4a-8}{a(a-2)} = \frac{4(a-2)}{a(a-2)} = \frac{4}{a}; \quad \text{в)} \frac{m^2}{m^2-25}(m^2+5m) = \frac{m^2 \cdot m(m+5)}{(m+5)(m-5)} = \frac{m^3}{m-5};$$

$$\text{г)} \frac{1}{a^2+ab} + \frac{1}{a^2-ab} = \frac{a(a-b)}{a(a+b)} = \frac{a-b}{a+b}.$$

$$4. \frac{x+y}{2xy-y^2} \cdot \left(x+y - \frac{x^2}{x+y} \right) = \frac{x+y}{y(2x-y)} \cdot \frac{x^2+2xy+y^2-x^2}{x+y} = \frac{y(2x+y)}{y(2x-y)} = \frac{2x+y}{2x-y}.$$

$$5. \text{ а)} \frac{2}{a-b} - \frac{2}{a+b} - \frac{4a}{b^2-a^2} = \frac{2}{a-b} - \frac{2}{a+b} + \frac{4a}{(a-b)(a+b)} = \frac{2a+2b-2a+2b+4a}{(a-b)(a+b)} =$$

$$= \frac{4(a+b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{4}{a-b}; \quad \text{б)} \frac{x^2-5x}{y} \cdot \frac{y^2}{x^2+5xy} = \frac{x(x-5)}{y} \cdot \frac{y^2}{x(x+5y)} = \frac{y(x-5)}{x+5y};$$

$$\text{в)} \frac{m^2-n^2}{m^2} + (m^2+mn) = \frac{(m-n)(m+n)}{m^2} \cdot \frac{1}{m(m+n)} = \frac{m-n}{m^3}.$$

$$6. \text{ а)} \frac{2x^2-2y^2}{x} \cdot \frac{4x}{x-y} - \frac{16xy}{x+y} = \frac{2(x-y)(x+y) \cdot 4}{x-y} - \frac{16xy}{x+y} = 8(x+y) - \frac{16xy}{x+y} =$$

$$= \frac{8x^2+8y^2+16xy-16xy}{x+y} = \frac{8(x^2+y^2)}{x+y}.$$

$$\text{б)} \left(\frac{a}{b^2} - \frac{2}{b} + \frac{1}{a} \right) \cdot \frac{ab}{b^2-a^2} - \frac{2}{a-b} = \frac{a^2-2ab+b^2}{ab^2} \cdot \frac{ab}{(b-a)(b+a)} + \frac{2}{b-a} =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{b(b-a)(b+a)} + \frac{2}{b-a} = \frac{a^2-2ab+b^2+2b^2+2ab}{b(b^2-a^2)} = \frac{a^2+3b^2}{b(b^2-a^2)};$$

$$\text{в)} \frac{x-3}{x^2+3x} - \frac{x}{9+3x} + \left(\frac{9}{x^3-9x} + \frac{1}{x+3} \right) =$$

$$= \frac{x-3}{x(x+3)} - \frac{x}{3(x+3)} + \left(\frac{9}{x(x-3)(x+3)} + \frac{1}{x+3} \right) =$$

$$= \frac{x-3}{x(x+3)} - \frac{x}{3(x+3)} \cdot \frac{x(x-3)(x+3)}{9+x^2-3x} = \frac{3(x-3)(9+x^2-3x) - x^3(x^2-9)}{3x(x+3)(9+x^2-3x)} =$$

$$= \frac{3(9x-27+x^3-3x^2-3x^2+9x) - x^5+9x^3}{3x(x+3)(9+x^2-3x)} = \frac{-x^5+12x^3-18x^2+54x-81}{3x(x+3)(9+x^2-3x)}.$$

$$7. \text{ а)} (10^3)^2 \cdot 10^{-8} = 10^6 \cdot 10^{-8} = 10^{-2} = 0,01; \quad \text{б)} \frac{25^{-3} \cdot 5^4}{5^{-2}} = \frac{5^{-6} \cdot 5^4}{5^{-2}} = \frac{5^{-2}}{5^{-2}} = 1;$$

$$\text{в)} \frac{81^{-2} \cdot 3^5}{9^{-9}} = \frac{3^{-8} \cdot 3^5}{3^{-4}} = \frac{3^{-3}}{3^{-4}} = 3; \quad \text{г)} \frac{0,125^2 \cdot 32^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot 2^{10} \cdot 2^{-8} = \frac{2^2}{2^6} = \frac{1}{16}.$$

$$8. \text{ а) } (\sqrt{18} - 5\sqrt{2} + \sqrt{48})\sqrt{3} = (3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3})\sqrt{3} = (4\sqrt{3} - 2\sqrt{2})\sqrt{3} = 12 - 2\sqrt{6};$$

$$\text{б) } (\sqrt{3} - 2)^2 = 3 + 4 - 4\sqrt{3} = 7 - 4\sqrt{3}; \quad \text{в) } \frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} - 2)}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - 2}{2};$$

$$\text{г) } (2\sqrt{5} - \sqrt{18} + \sqrt{45}) + \sqrt{5} = (2\sqrt{5} - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{5}) + \sqrt{5} = \frac{5\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{25 - 3\sqrt{10}}{5};$$

$$\text{д) } (\sqrt{2} - 3)^2 = 2 + 9 - 6\sqrt{2} = 11 - 6\sqrt{2}; \quad \text{е) } \frac{\sqrt{14} - 2\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{2} - 2)}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}.$$

$$9. \text{ а) } \sin 300^\circ - \cos(-240^\circ) = \sin(360^\circ - 60^\circ) - \cos(180^\circ + 60^\circ) = \\ = -\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2};$$

$$\text{б) } \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg} \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg} \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{ctg} \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{в) } \cos 330^\circ - \sin(-135^\circ) = \cos(360^\circ - 30^\circ) + \sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ + \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2};$$

$$\text{г) } \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6} = \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{ctg} \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3};$$

$$\text{д) } \sin \frac{5\pi}{2} - \cos \left(-\frac{13\pi}{6}\right) = 1 - \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \cos \frac{\pi}{6} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2};$$

$$\text{е) } \operatorname{tg}(-540^\circ) \operatorname{ctg} 420^\circ = -\operatorname{tg} 180^\circ \cdot \operatorname{ctg} 420^\circ = 0.$$

$$10. \text{ а) } \frac{\sin(\pi - \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(-\alpha)} = \frac{\sin \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\text{б) } \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \frac{1}{2} \cos \alpha = \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha;$$

$$\text{в) } \frac{\cos(\pi - \alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(-\alpha)} = \frac{-\cos \alpha - \cos \alpha}{-\sin \alpha} = 2 \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\text{г) } \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha;$$

$$\text{д) } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos(2\pi - \alpha) + \sin(-\alpha) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \cos 2\alpha.$$

$$11. \text{ а) } \cos 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha = 1;$$

$$\text{б) } \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (2 \cos^2 \alpha - 1) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha.$$

П-3

1. а) $3(x-1,5)+2x=5(2,5+2x)$; $3x-4,5+2x=12,5+10x$; $5x=-17$; $x=-3,4$;

б) $3x^2-21=0$; $x^2-7=0$; $x^2=7$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{7}$;

в) $8x^2+6x-2=0$; $4x^2+3x-1=0$; $D=9+4\cdot4=25$; $x_1=\frac{-3+5}{8}=\frac{1}{4}$, $x_2=-1$;

г) $2-\frac{3}{x-2}=\frac{7}{x+2}$; $2-\frac{3}{x-2}-\frac{7}{x+2}=0$; $\frac{2(x^2-4)-3(x+2)-7(x-2)}{x^2-4}=0$;

$2x^2-8-3x-6-7x+14=0$; $2x^2-10x=0$; $x(x-5)=0$; $x_1=0$, $x_2=5$.

2. а) $x^3-25x=0$; $x(x^2-25)=0$; $x(x-5)(x+5)=0$; $x_1=0$; $x_{2,3}=\pm 5$.

б) $3(x+4)^2-9(x+4)$; $(x+4)(3(x+4)-9)=0$; $x+4=0$; $x+4=3$;

$x_1=-4$, $x_2=-1$.

Ответ: а) -5; 0 и 5; б) -4 и -1.

3. а) $5(x-2,5)-4x=3(2,5+3x)$; $5x-12,5-4x=7,5+9x$; $8x=-20$; $x=-2,5$;

б) $75-3x^2=0$; $3x^2=75$; $x^2=25$; $x_{1,2}=\pm 5$; в) $-4x^2+10x+6=0$; $4x^2-10x+6=0$;

$2x^2-5x-3=0$; $D=25+4\cdot3\cdot2=49$; $x_1=\frac{5+7}{4}=3$, $x_2=-\frac{1}{2}$;

г) $\frac{5}{x-1}+\frac{30}{x+1}=5$; $\frac{1}{x-1}+\frac{6}{x+1}-1=0$; $\frac{x+1+6x-6-x^2+1}{x^2-1}=0$;

$-x^2+7x-4=0$; $x^2-7x+4=0$; $D=49-16=33$; $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{33}}{2}$.

Ответ: а) -2,5; б) -5 и 5; в) $-\frac{1}{2}$ и 3; г) $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{33}}{2}$.

4. а) $x^3-9x=0$; $x(x^2-9)=0$; $x(x-3)(x+3)=0$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 3$;

б) $(x+5)^2-4(x+5)=2(x+5)$; $x+5=0$; $x+5-4=2$; $x_1=-5$, $x_2=1$.

5. а) $\frac{x+1,5}{8}-\frac{3}{4}=\frac{3x-1}{24}$; $3x+4,5-18=3x-1$; $4,5-18=-1$ - нет корней;

б) $\frac{1}{2}x^2-x-1=0$; $x^2-2x-2=0$; $D=4+4\cdot2=13$; $x_{1,2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$;

в) $\frac{x}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}$; $\frac{x}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}-\frac{8}{(x+2)(x-2)}=0$;

$\frac{x^2-2x+x^2+4x+4-8}{x^2-4}=0$; $2x^2+2x-4=0$; $x^2+x-2=0$;

$D=1+4\cdot2=9$; $x_1=\frac{-1+3}{2}=1$, $x_2=-2$.

Ответ: а) нет корней; б) $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$; в) $x_1=1$, $x_2=-2$.

6. а) $2x^4 - 2x = 0$; $x^4 - x = 0$; $x(x^3 - 1) = 0$; $x = 0$; $x^3 - 1 = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

б) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; $x^2 = y$; $y \geq 0$; $y^2 - 10y + 9 = 0$; $D = 100 - 36 = 64$;

$$y_1 = \frac{10+8}{2} = 9, \quad y_2 = 1; \quad x^2 = 9; \quad x^2 = 1; \quad x_{1,2} = \pm 3, \quad x_{3,4} = \pm 1;$$

в) $2(x^2 - 1)^2 + 6(x^2 - 1) = 0$; $x^2 - 1 = 0$; $2(x^2 - 1) + 6 = 0$; $x_{1,2} = \pm 1$; $x^2 - 1 = -3$;

$$x^2 = -2 \text{ - нет корней.}$$

Ответ: а) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; б) $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = \pm 1$; в) $x_{1,2} = \pm 1$.

7. а)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 & 2y = 7 - 3x; \\ 9x - 8y = 35 & 9x - 4 \cdot (7 - 3x) = 35; \end{cases}$$

$$9x - 28 + 12x = 35; \quad 21x = 63; \quad x = 3; \quad y = \frac{7 - 3 \cdot 3}{2} = -1;$$

б)
$$\begin{cases} xy = -6 & x = 11 - 3y; \\ x - 3y = 11 & y(11 + 3y) + 6 = 0; \quad 3y^2 + 11y + 6 = 0; \quad D = 121 - 12 \cdot 6 = 49 \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{-11+7}{6}; \quad y_2 = -3; \quad x_1 = 11 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 9; \quad x_2 = 11 - 3 \cdot 3 = 2;$$

в)
$$\begin{cases} x^2 + y = 26; \\ x + y = 6 \end{cases}; \quad y = 6 - x; \quad x^2 + 6 - x - 26 = 0; \quad x^2 - x - 20 = 0;$$

$$D = 1 + 4 \cdot 20 = 81; \quad x_1 = \frac{1+9}{2} = 5; \quad x_2 = -4; \quad y_1 = 6 - 5 = 1; \quad y_2 = 6 + 4 = 10.$$

Ответ: а) $(3; -1)$; б) $\left(9; -\frac{2}{3}\right)$, $(2; -3)$; в) $(5; 1)$, $(-4; 10)$.

8. а)
$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 6x + 4y = 17 \end{cases}; \quad 2x - y = 1; \quad y = 2x - 1; \quad 6x + 4(2x - 1) = 17; \quad 6x + 8x - 4 = 17;$$

$$14x = 21; \quad x = \frac{21}{14} = 1,5; \quad y = 2 \cdot 1,5 - 1 = 2;$$

б)
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2xy = 3 \end{cases}; \quad y = 4 - 2x; \quad 2x(4 - 2x) - 3 = 0; \quad 8x - 4x^2 - 3 = 0; \quad 4x^2 - 8x + 3 = 0;$$

$$D = 64 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 16; \quad x_1 = \frac{8+4}{8} = 1,5; \quad x_2 = 0,5; \quad y_1 = 4 - 2 \cdot 1,5 = 1; \quad y_2 = 4 - 2 \cdot 0,5 = 3.$$

в)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}; \quad y = 3 - x; \quad x^2 + (3 - x)^2 = 9; \quad x^2 + 9 - 6x + x^2 = 9;$$

$$2x^2 - 6x = 0; \quad x^2 - 3x = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 3; \quad y_1 = 3; \quad y_2 = 0.$$

Ответ: а) $(1,5; 2)$; б) $(1,5; 1)$, $(0,5; 3)$; в) $(0; 3)$, $(3; 0)$.

$$9. \text{ а) } \begin{cases} \frac{x-3y}{2} + 3 = \frac{2x+y}{5}; & 5x-15y+30=4x+2y; & x=17y-30; \\ \frac{2x+4y}{4} + 2 = 3y & ; & 2x+4y+8=12y; & 2x=8y-8; & x=4y-4; \end{cases}$$

$$17y-30=4y-4; \quad 13y=26; \quad y=2; \quad x=4 \cdot 2-4=4;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2+xy+y^2=13; & x=2y-5; & 4y^2+25-20y+2y^2-5y+y^2-13=0; \\ x-2y=-5 & ; & 7y^2-25y+12=0; \end{cases}$$

$$D=289; \quad y_1 = \frac{25+17}{14} = 3; \quad y_2 = \frac{4}{7}; \quad x_1 = 2 \cdot 3 - 5 = 1; \quad x_2 = 2 \cdot \frac{4}{7} - 5 = -\frac{27}{7}.$$

$$\text{Ответ: а) } (4; 2); \quad \text{б) } \left(-\frac{27}{7}; \frac{4}{7}\right).$$

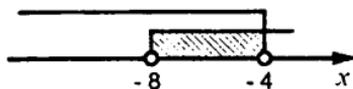
$$10. y=9x^2-4x+5; \quad y=2x+4; \quad 9x^2-4x+5=2x+4; \quad 9x^2-6x+1=0;$$

$$(3x-1)^2=0; \quad 3x=1; \quad x=\frac{1}{3}; \quad y=2 \cdot \frac{1}{3} + 4 = \frac{14}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1}{3}; \frac{14}{3}\right).$$

$$11. \text{ а) } \begin{cases} 4x-15 > 8x+1; & 4x < -16, & x < -4; \\ 3x-2 > x-18; & 2x > -16, & x > -8; \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (-8; -4).$$



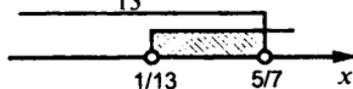
$$\text{б) } \begin{cases} 3x+8 < 7x+10; & 4x > -2, & x > -0,5 \\ 2x-3(x-5) > 10-3x; & 2x-3x+15 > 10-3x, & 2x > -5; & x > -2,5; \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (-0,5; +\infty).$$



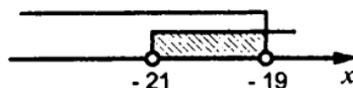
$$\text{в) } \begin{cases} \frac{y+5}{4} - 2y > 0; & y+5-8y > 0, & 7y < 5; & y < \frac{5}{7} \\ y - \frac{2y-4}{5} > 1-2y; & 5y-2y+4 > 5-10y, & 13y > 1, & y > \frac{1}{13}; \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1}{13}; \frac{5}{7}\right).$$

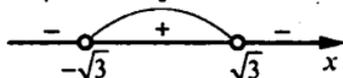


$$12. \begin{cases} \frac{y+3}{2} < \frac{y-5}{3}; & 3y+9 < 2y-10, & y < -19; \\ \frac{y+1}{4} > \frac{y-4}{5}; & 5y+5 > 4y-16, & y > -21; \end{cases}$$

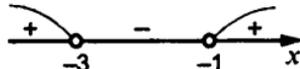
$$\text{Ответ: } 20.$$



13. а) $x^2 - 3 < 0$; $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) < 0$; б) $x^2 + 4x + 6 > 3$; $x^2 + 4x + 3 > 0$;
 $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$. $D = 16 - 12 = 4$; $x = -1$, $x = -3$



Ответ: $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

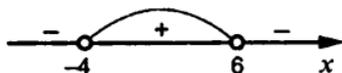


Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$.

в) $2x^2 - 3x + 5 > 0$; $D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 5 < 0$;

г) $(x - 6)(x + 4) < 0$; $x_1 = -4$, $x_2 = 6$.

т.к. $a = 2 > 0$, то любое x — решение.



Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Ответ: $(-4; 6)$.

П-4

1. а) $y = \frac{2x - 3}{x + 4}$; $x + 4 \neq 0$, т.к. знаменатель, $x \neq -4$;

б) $y = \sqrt{3 - 2x}$; $3 - 2x \geq 0$; т.к. $D = (\sqrt{x}) = [0; +\infty)$; $2x \leq 3$; $x \leq 1,5$;

в) $y = \frac{2x + 3}{x - 4}$; $x - 4 \neq 0$, т.к. знаменатель, $x \neq 4$;

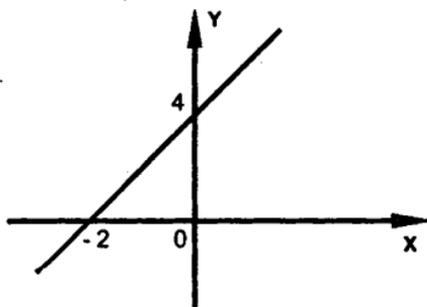
г) $y = \sqrt{2x - 4}$; $2x - 4 \geq 0$; $2x \geq 4$; $x \geq 2$.

2. а) $y = 2x + 4$;

1) $y = 0$ при $x = -2$; $y > 0$ при $x > -2$;

$y < 0$ при $x < -2$;

2) y — возрастающая;

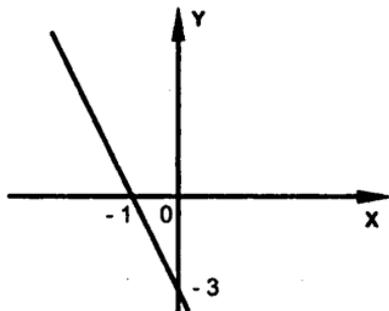


б) $y = -3x - 3$;

1) $y = 0$ при $x = -1$; $y > 0$ при $x < -1$;

$y < 0$ при $x > -1$;

2) y — убывающая.

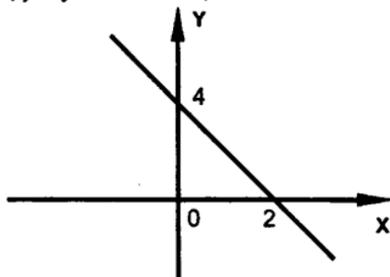


3. а) $y = -2x + 4$;

1) $y = 0$ при $x = 2$; $y > 0$ при $x < 2$;

$y < 0$ при $x > 2$;

2) y – убывающая;

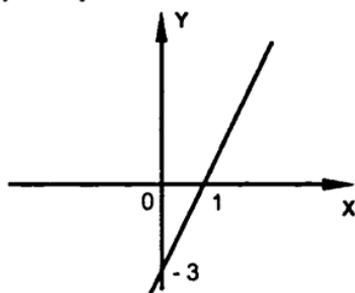


б) $y = 3x - 3$;

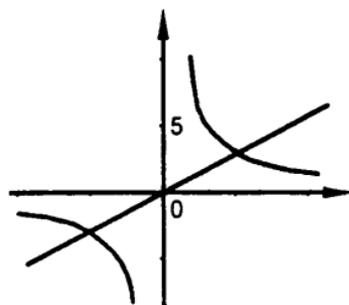
1) $y = 0$ при $x = 1$; $y > 0$ при $x > 1$;

$y < 0$ при $x < 1$;

2) y – возрастающая.



4. $y = \frac{8}{x}$, $y = 5x$; $\frac{8}{x} = 5x$; $x^2 = \frac{8}{5}$; $x_{1,2} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.



5. а) $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$;

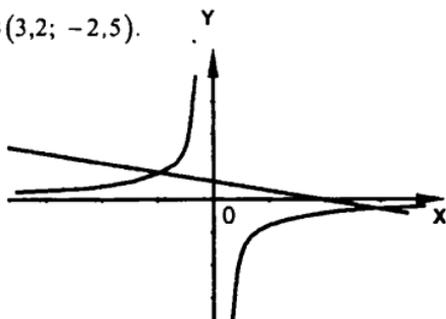
б) y убывает на $D(y)$.

6. $y = \frac{6}{x}$, $y = 1,5x$; $\frac{6}{x} = 1,5x$; $x^2 = 4$; $x_{1,2} = \pm 2$.

7. а) $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$;

б) y убывает на $D(y)$.

8. $y = -\frac{8}{x}$, $y = -2x + 4$; А(-1,2; 6,3); В(3,2; -2,5).



9. а) $y > 0$ при $x < 0$; $y < 0$ при $x > 0$;

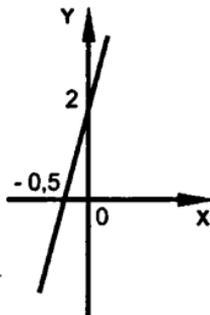
б) y возрастает на $D(y)$.

10. $y = 4x + b$; $6 = 4 + b$; $b = 2$; $y = 4x + 2$;

а) $y = 0$ при $x = -0,5$;

$y > 0$ при $x > -0,5$; $y < 0$ при $x < -0,5$;

б) y – возрастающая.



11. а) $y = \frac{1}{3}x - 5$, $y = \frac{1}{2}x - 5$; $\frac{1}{3}x - 5 = \frac{1}{2}x - 5$; $x = 0$, т.е. пересекаются;

б) $y = 3x + 7$, $y = 3x - 4$; $3x + 7 = 3x - 4$; $7 \neq -4$ – нет корней, т.е. не пересекаются.

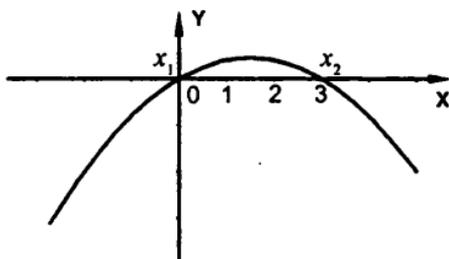
12. $y = -x^2 + 3x$;

а) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; $y > 0$ при $x \in (0; 3)$;

$y < 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$;

б) y возрастает при $x \leq 1,5$;

y убывает при $x \geq 1,5$.



13. $y = 2x^2 + 5x - 3$; $y(0) = -3$, $(0; -3)$; $2x^2 + 5x - 3 = 0$;

$$D = 25 + 8 \cdot 3 = 49; x_1 = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{1}{2}; x_2 = -3; \left(\frac{1}{2}; 0\right), (-3; 0).$$

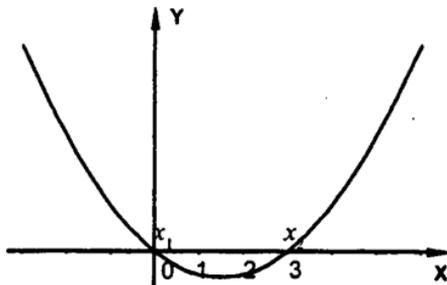
14. $y = x^2 - 3x$;

а) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; $y < 0$ при $x \in (0; 3)$;

$y > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$;

б) y возрастает при $x \geq 1,5$;

y убывает при $x \leq 1,5$.



15. $y = -2x^2 - 5x + 3$; $y(0) = 3$, $(0; 3)$; $2x^2 + 5x - 3 = 0$;

$$D = 25 + 8 \cdot 3 = 49; x_1 = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{1}{2}; x_2 = -3.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 0\right), (-3; 0)$.

$$16. y = -x^2 + 2x - 3 = -(x^2 - 2x + 3) =$$

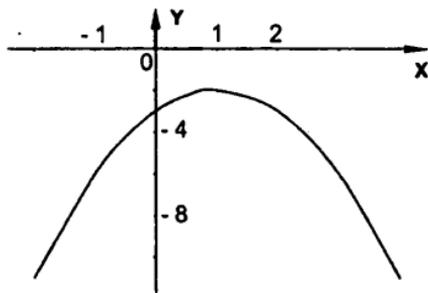
$$= -(x^2 - 2x + 1 + 2) = -(x-1)^2 - 2;$$

а) $y < 0$ при любых x ;

б) y возрастает при $x \leq 1$;

y убывает при $x \geq 1$.

в) $y_{\max} = -2$.



Вариант II

II-1

$$1. \text{ а) } \frac{1}{3} + 1,2(2,3 - 0,061 + 0,2) = \frac{1}{3} + 1,2 \cdot 1,995 = \frac{1}{3} + 2,394 = \frac{1}{3} + \frac{2394}{1000} = \frac{1}{3} + \frac{1197}{500} =$$

$$= \frac{4091}{1500} = 2 \frac{1091}{1500}; \quad \text{б) } 5,07 + (0,6 \cdot 3,25 - 2,25) - 3 \frac{1}{4} = -5,07 + 0,3 - 3,25 = -20,15;$$

$$\text{в) } \frac{-12,4 \cdot 1,5 + 24 \frac{4}{5}}{2 \frac{5}{6} \cdot 3 - 8 \frac{5}{6}} = \frac{6,2}{\frac{51}{6} - \frac{53}{6}} = -6,2 \cdot 3 = -18,6.$$

$$2. 1) \frac{xy^2}{x-y}; \quad \text{а) } \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9}\right) : \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4; \quad \text{б) } \frac{1,6 \cdot 0,25}{1,6 + 0,5} = \frac{0,4}{2,1} = \frac{4}{21};$$

$$2) \frac{xy}{x-y^2}; \quad \text{а) } \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{5} = \frac{4}{5} = 0,8; \quad \text{б) } \frac{-1,2 \cdot 0,6}{1,2 - 0,36} = -\frac{0,72}{0,84} = -\frac{72}{84} = -\frac{6}{7}.$$

$$3) \frac{ab}{a+b^2}; \quad \text{а) } \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}\right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{36}\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{36}{25} = \frac{4}{25}; \quad \text{б) } -\frac{0,5 \cdot 0,4}{0,5 + 0,16} = -\frac{0,2}{0,66} = -\frac{10}{33}.$$

$$3. \text{ а) } \left(\frac{1}{8}\right)^0 + 6 \cdot 2^{-2} + \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = 1 + \frac{6}{8} + \frac{25}{4} = 1 + \frac{3}{4} + \frac{25}{4} = 8; \quad \text{б) } \frac{1}{4} \cdot 16^{\frac{1}{2}} + 32^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{2} = 1,5;$$

$$\text{в) } 4 \frac{1}{2} \cdot 6^{-2} + \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} - \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{125}{8} - 1 = \frac{118}{8} = 14,75;$$

$$\text{г) } \frac{2}{7} \cdot 27^{\frac{2}{3}} + 49^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{7} \cdot (3^3)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{7} = \frac{18}{7} + \frac{1}{7} = 2 \frac{5}{7};$$

$$\text{д) } 2^{-12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-10} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = 2^{-12} \cdot 2^{10} + \left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = 2^{-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 2,5;$$

$$\text{е) } \left(3 \frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + (0,01)^{-0,5} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + (10^{-2})^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} + 10 = 11,5.$$

$$4. \text{ а) } \sqrt{3^3 \cdot 16 \cdot 3^5} = \sqrt{3^8 \cdot 16} = 3^4 \cdot 4 = 324; \quad \text{ б) } (\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2 = 7 - 3 = 4;$$

$$\text{ в) } 6^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{6^3} = 6^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{3}{4}} = 6; \quad \text{ г) } \sqrt[3]{2^8 \cdot 125 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^9 \cdot 5^3} = 2^3 \cdot 5 = 40;$$

$$\text{ д) } (3\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} + \sqrt{3}) = (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 18 - 3 = 15; \quad \text{ е) } 5^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{3}{3}} = 5^1 = 5;$$

$$\text{ ж) } \frac{4 - \sqrt{6}}{4 + \sqrt{6}} + \frac{4 + \sqrt{6}}{4 - \sqrt{6}} = \frac{16 + 6 - 8\sqrt{6} + 16 + 6 + 8\sqrt{6}}{(4 + \sqrt{6})(4 - \sqrt{6})} = \frac{44}{10} = 4,4;$$

$$\text{ з) } \sqrt{8\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3\sqrt{12}} = \sqrt{8\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{12}} = \sqrt{24 \cdot 6} = 12.$$

П-2

$$1. \text{ а) } (a-3)(a+3) - 2a(4-a) = a^2 - 9 - 8a + 2a^2 = 3a^2 - 8a - 9;$$

$$\text{ б) } (3x+1)^2 - (3x-1)^2 = 9x^2 + 6x + 1 - 9x^2 + 6x - 1 = 12x;$$

$$\text{ в) } (x+5)(x-5) - 3x(2-x) = x^2 - 25 - 6x + 3x^2 = 4x^2 - 6x - 25;$$

$$\text{ г) } (2x-1)^2 - (x+3)^2 = 4x^2 - 4x + 1 - x^2 - 6x - 9 = 3x^2 - 10x - 8;$$

$$\text{ д) } 3x^2(x+4) - (3x-1)(x^2-2x+3) =$$

$$= 13x^3 + 12x^2 - 3x^3 + x^2 + 6x^2 - 2x - 9x + 3 = 10x^3 - 7x + 3;$$

$$\text{ е) } 2a(a+3b)^2 - (2a-b)(a^2+2b^2) = 2a(a^2+6ab+9b^2) - (2a^3 - a^2b + 4ab^2 - 2b^3) =$$

$$= 2a^3 + 12a^2b + 18ab^2 - 2a^3 + a^2b - 4ab^2 + 2b^3 = 13a^2b + 14ab^2 + 2b^3;$$

$$2. \text{ 1) а) } 5a^2 + 5ab = 5a(a+b); \quad \text{ б) } x^8 - 2x^5 = x^5(x^3 - 2);$$

$$\text{ в) } 4ac^2 - 8ac + 4a^2c = 4ac(c-2+a); \quad \text{ г) } x^2 - 4y^2 = (x-2y)(x+2y);$$

$$\text{ д) } 9n - n^3 = n(9 - n^2) = n(3-n)(3+n); \quad \text{ е) } 49x^2 - y^4 = (7x - y^2)(7x + y^2);$$

$$2) \text{ а) } 5ab - 25a^2 - 25b^2 = -(25a^2 - 5ab + 25b^2) = -5(5a^2 - ab + 5b^2);$$

$$\text{ б) } x^2 - 3x - y^2 - 3y = (x^2 - y^2) - (3x + 3y) = (x-y)(x+y) - 3(x+y) =$$

$$= (x+y)(x-y-3); \quad \text{ в) } (a-3)^2 - 25 = (a-3-5)(a-3+5) = (a-8)(a+2).$$

$$3. \text{ а) } \frac{a}{a-3} - \frac{3}{a+3} = \frac{a^2 + 3a - 3a + 9}{(a-3)(a+3)} = \frac{a^2 + 9}{a^2 - 9};$$

$$\text{ б) } \frac{2}{x-y} - \frac{2y}{xy-x^2} = \frac{2}{x-y} - \frac{2y}{x(y-x)} = \frac{2}{x-y} + \frac{2y}{x(x-y)} = \frac{2x+2y}{x(x-y)};$$

$$\text{ в) } (n^2 - 6n) \cdot \frac{n^2}{n^2 - 36} = \frac{n(n-6) \cdot n^2}{(n-6)(n+6)} = \frac{n^3}{n+6};$$

$$\text{ г) } \frac{1}{2x^2 - 4x} + \frac{1}{2x^2 + 4x} = \frac{2x(x+2)}{2x(x-2)} = \frac{x+2}{x-2}.$$

$$4. \left(m+1 - \frac{m^2}{m+1} \right) \frac{m^2-1}{2m^2+m} = \frac{(m+1)^2 - m^2}{m+1} \cdot \frac{(m+1)(m-1)}{2m^2+m} =$$

$$= \frac{(m^2+2m+1-m^2)(m-1)}{2m^2+m} = \frac{(2m+1)(m-1)}{m(2m+1)} = \frac{m-1}{m}.$$

$$5. \text{ а) } \frac{3}{x+2} + \frac{3}{x-2} + \frac{12}{4-x^2} = \frac{3}{x+2} + \frac{3}{x-2} - \frac{12}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{3x-6+3x+6-12}{(x-2)(x+2)} = \frac{6(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{6}{x+2}; \quad \text{ б) } \frac{2ab+a^2}{2b} \cdot \frac{2b}{2a^2+a} =$$

$$= \frac{a(2b+a)}{a(2a+1)} = \frac{a+2b}{2a+1}; \quad \text{ в) } (x^2-y^2) + \frac{(x+y)^2}{2x} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2} \cdot 2x = \frac{2x(x-y)}{x+y}.$$

$$6. \text{ а) } \frac{3m^2-18}{m} \cdot \frac{2m}{m+3} + \frac{36m}{m-3} =$$

$$= \frac{3(m-3)(m+3) \cdot 2}{m+3} + \frac{36m}{m-3} = \frac{6(m^2-6m+9)+36m}{m-3} = \frac{6m^2+54}{m-3};$$

$$\text{ б) } \left(\frac{y}{x} - 2 + \frac{x}{y} \right) \cdot \frac{x^2}{x^2-y^2} = \frac{y^2-2xy+x^2}{xy} \cdot \frac{x^2}{x^2-y^2} = \frac{(x-y)^2 \cdot x}{y(x-y)(x+y)} = \frac{x(x-y)}{y(x+y)};$$

$$\text{ в) } \left(\frac{25}{a^3-25a} + \frac{1}{a+5} \right) + \left(\frac{a-5}{a^2+5a} - \frac{a}{25+5a} \right) = \left(\frac{25}{a(a-5)(a+5)} + \frac{1}{a+5} \right) +$$

$$+ \left(\frac{a-5}{a(a+5)} - \frac{a}{5(a+5)} \right) = \frac{25+a^2-5a}{a(a-5)(a+5)} \cdot \frac{5a(a+5)}{5a-25-a^2} = \frac{5}{5-a}.$$

$$7. \text{ а) } (2^{13} \cdot 2^{-11})^{-1} = (2^2)^{-1} = \frac{1}{4}; \quad \text{ б) } \frac{0,001^5 \cdot 10^{10}}{10^{-4}} = \frac{(10^{-3})^5 \cdot 10^{14}}{1} = 0,1;$$

$$\text{ в) } \frac{27^{-2} \cdot 9^2}{3^{-4}} = \frac{(3^3)^{-2} \cdot (3^2)^2}{3^{-4}} = \frac{3^{-6} \cdot 3^4}{3^{-4}} = 9; \quad \text{ г) } \frac{0,25^3 \cdot 16^2}{2^4} = \frac{(2^{-2})^3 \cdot (2^4)^2}{2^4} = \frac{2^{-6} \cdot 2^8}{2^4} = \frac{1}{4}.$$

$$8. \text{ а) } (\sqrt{8} - 4\sqrt{3} + \sqrt{12})\sqrt{2} = (2\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3})\sqrt{2} = (2\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\sqrt{2} = 4 - 2\sqrt{6};$$

$$\text{ б) } (1-\sqrt{5})^2 = 1-2\sqrt{5}+5 = 6-2\sqrt{5}; \quad \text{ в) } \frac{\sqrt{12}+3\sqrt{6}}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+3)}{3\sqrt{6}} = \frac{3+\sqrt{2}}{3};$$

$$\text{ г) } (\sqrt{32} - 3\sqrt{2} + \sqrt{20})\sqrt{2} = (4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{10};$$

$$\text{ д) } (\sqrt{7}-1)^2 = 7+1-2\sqrt{7} = 8-2\sqrt{7}; \quad \text{ е) } \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-3)}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-3}{3}.$$

$$9. \text{ а) } \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + \sin\frac{4\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1-\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{б) } \operatorname{tg}(-210^\circ) \cdot \operatorname{ctg}135^\circ = -\operatorname{tg}(180^\circ + 30^\circ) \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg}30^\circ \cdot \operatorname{tg}45^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{в) } \sin\frac{2\pi}{3} + \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{г) } \operatorname{tg}(-120^\circ) \cdot \operatorname{ctg}315^\circ = -\operatorname{tg}(90^\circ + 30^\circ) \cdot \operatorname{ctg}(360^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{ctg}30^\circ \cdot \operatorname{ctg}45^\circ = -\sqrt{3};$$

$$\text{д) } \sin(-390^\circ) + \cos 405^\circ = -\sin(360^\circ + 30^\circ) + \cos(360^\circ + 45^\circ) =$$

$$= -\sin 30^\circ + \cos 45^\circ = -0,5 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2};$$

$$\text{е) } \operatorname{tg}\frac{7\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -\sqrt{3}.$$

$$10. \text{ а) } \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(2\pi - \alpha)}{\sin(-\alpha)} = -\frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{1}{\sin\alpha};$$

$$\text{б) } \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\alpha = \cos\frac{\pi}{4} \cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4} \sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\alpha;$$

$$\text{в) } \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(\pi + \alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha};$$

$$\text{г) } \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\alpha = \cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos\alpha + \sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\alpha = \frac{1}{2} \sin\alpha;$$

$$\text{д) } \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(2\pi - \alpha) - \cos\alpha \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \cdot \sin\alpha + \cos\alpha \cdot \cos\alpha = 1.$$

$$11. \text{ а) } \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}\alpha;$$

$$\text{б) } (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - \sin 2\alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha - \sin 2\alpha = 1.$$

П-3

$$1. \text{ а) } 4x - 5(3x - 0,5) = 3(7 - 3x); 4x - 15x + 2,5 = 21 - 9x; 2x = -18,5; x = -9,25;$$

$$\text{б) } 18x - 8x^2 = 0; 9x - 4x^2 = 0; x(9 - 4x) = 0; x_1 = 0; 9 - 4x = 0; x_2 = 2,25;$$

$$\text{в) } 6x^2 - 8x + 2; 3x^2 - 4x + 1 = 0; D = 16 - 4 \cdot 3 = 4; x_1 = \frac{4+2}{6} = 1; x_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3};$$

$$\text{г) } 2x - \frac{4}{x-3} = 4; 2x^2 - 6x - 4 - 4x + 12 = 0; 2x^2 - 10x + 8 = 0; x^2 - 5x + 4 = 0;$$

$$D = 9; x_1 = \frac{5+3}{2} = 4; x_2 = 1. \text{ Ответ: а) } -9,25; \text{ б) } 0 \text{ и } 2,25; \text{ в) } 1 \text{ и } \frac{1}{3} \text{ г) } 4 \text{ и } 1.$$

2. а) $x^4 - 4x^2 = 0$; $x^2(x^2 - 4) = 0$; $x^2(x-2)(x+2) = 0$; $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 2$

б) $5(x-6)^2 + 11(x-6) = x-6$; $x-6=0$; $x_1 = 6$; $5(x-6) + 11 = 1$;

$5(x-6) = -10$; $x_2 = 4$.

3. а) $7x - 3(2x - 1,5) = 4(x + 3)$; $7x - 6x + 4,5 = 4x + 12$; $3x = -7,5$; $x = -2,5$;

б) $8x - 2x^2 = 0$; $4x - x^2 = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 4$;

в) $-3x^2 - 5x + 2 = 0$; $3x^2 + 5x - 2 = 0$; $D = 25 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49$; $x_1 = -2$; $x_2 = \frac{1}{3}$;

г) $2 + \frac{8}{x-3} = \frac{4}{x}$; $2x(x-3) + 8x = 4(x-3)$; $2x^2 - 6x + 8x = 4x - 12$;

$x^2 - x + 6 = 0$; $D = 1 - 4 \cdot 6 < 0$ – нет корней.

Ответ: а) $-2,5$; б) 0 и 4; в) -2 и $\frac{1}{3}$; г) нет корней.

4. а) $x^4 - x^2 = 0$; $x^2(x^2 - 1) = 0$; $x^2(x-1)(x+1) = 0$; $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 1$;

б) $2(x-1)^2 + 3(x-1) = x-1$; $x-1=0$; $x_1 = 1$; $2(x-1) + 3 = 1$;

$2(x-1) = -2$; $x-1 = -1$; $x_2 = 0$.

Ответ: а) -1 ; 0 и 1; б) 0 и 1.

5. а) $\frac{4x-1}{9} - \frac{3x+1}{12} = \frac{2}{3}$; $16x - 4 - 9x - 3 = 24$; $7x = 31$; $x = 4\frac{3}{7}$;

б) $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$; $x^2 - 2x - 1 = 0$; $D = 4 + 4 = 8$; $x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

в) $\frac{x}{x+5} + \frac{x+5}{x-5} = \frac{50}{x^2-25}$; $\frac{x}{x+5} + \frac{x+5}{x-5} - \frac{50}{(x-5)(x+5)} = 0$;

$x^2 - 5x + x^2 + 10x + 25 - 50 = 0$; $2x^2 + 5x - 25 = 0$; $D = 25 + 4 \cdot 2 \cdot 25 = 225$;

$x_1 = \frac{-5+15}{4} = 2,5$; $x_2 = -5$ – посторонний корень, т.к. $x \neq \pm 5$.

Ответ: а) $4\frac{3}{7}$; б) $1 \pm \sqrt{2}$; в) $-2,5$.

6. а) $x^3 - 81x = 0$; $x(x^2 - 81) = 0$; $x(x-9)(x+9) = 0$; $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 9$;

б) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; $x^2 = y \geq 0$; $y^2 - 5y + 4 = 0$; $D = 25 - 16 = 9$;

$y_1 = \frac{5+3}{2} = 4$; $y_2 = 1$; $x^2 = 4$; $x_{1,2} = \pm 2$; $x_{3,4} = \pm 1$;

в) $(x^2 - 4)^2 + 5(x^2 - 4) = 0$; $x^2 - 4 = 0$; $x_{1,2} = \pm 2$; $x^2 - 4 + 5 = 0$; $x^2 = -1$ – нет корней.

Ответ: а) 0 и ± 9 ; б) ± 1 и ± 2 ; в) ± 2 .

7. а) $\begin{cases} 2x + 4y = 16; & x + 2y = 8; & 2y = 8 - x \\ 3x - 2y = -16; & 2y = 3x + 16 \end{cases}$; $3x + 16 = 8 - x$; $4x = -8$; $x = -2$; $y = \frac{8+2}{2} = 5$;

Ответ: $(-2; 5)$.

$$6) \begin{cases} 2x + y^2 = 11 \\ x - y = 4; x = 4 + y \end{cases}; \quad 8 + 2y + y^2 - 11 = 0; \quad y^2 + 2y - 3 = 0;$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 = 16; \quad y_1 = \frac{-2 + 4}{2} = 1; \quad y_2 = -3; \quad x_1 = 4 + 1 = 5; \quad x_2 = 4 - 3 = 1;$$

Ответ: (5; 1) и (1; -3).

$$в) \begin{cases} xy = -8 \\ x + 2y = 6; x = 6 - 2y \end{cases}; \quad y(6 - 2y) + 8 = 0; \quad 2y^2 - 6y - 8 = 0; \quad y^2 - 3y - 4 = 0;$$

$$D = 9 + 4 \cdot 4 = 25; \quad y_1 = \frac{3 + 5}{2} = 4; \quad y_2 = -1; \quad x_1 = 6 - 2 \cdot 4 = -2; \quad x_2 = 6 + 2 = 8.$$

Ответ: (-2; 4) и (8; -1).

$$8. а) \begin{cases} 3x - 2y = 3; \\ 2x - 4y = 10; x - 2y = 5; x = 5 + 2y \end{cases}; \quad 3(5 + 2y) - 2y = 3;$$

$$15 + 6y - 2y = 3; \quad 4y = -12; \quad y = -3; \quad x = 5 - 2 \cdot 3 = -1;$$

$$б) \begin{cases} x + 3y = 3; x = 3 - 3y \\ 3xy = 2 \end{cases}; \quad 3y(3 - 3y) = 2; \quad 9y - 9y^2 = 2; \quad 9y^2 - 9y + 2 = 0;$$

$$D = 81 - 4 \cdot 9 \cdot 2 = 9; \quad y_1 = \frac{9 + 3}{18} = \frac{2}{3}; \quad y_2 = \frac{1}{3}; \quad x_1 = 3 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 1; \quad x_2 = 3 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 2.$$

$$в) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ x - y = 5; x = 5 + y \end{cases}; \quad 25 + 10y + y^2 + y^2 = 25; \quad 2y^2 + 10y = 0;$$

$$y_1 = 0; \quad y_2 = -5; \quad x_1 = 5; \quad x_2 = 0;$$

Ответ: а) (-1; -3); б) $\left(1; \frac{2}{3}\right); \left(2; \frac{1}{3}\right)$; в) (5; 0) и (0; -5).

$$9. а) \begin{cases} \frac{2x - 5y}{3} + \frac{3x - 2y}{4} = 5; \quad 8x - 20y + 9x - 6y = 60 \\ \frac{x - 2y}{4} - 2y = 3; \quad x - 2y - 8y = 12 \end{cases}; \quad \begin{cases} 17x - 26y = 60 \\ x = 10y + 12 \end{cases};$$

$$170y + 84 - 26y = 60; \quad 144y = -24; \quad y = -\frac{1}{6}; \quad x = -\frac{10}{6} + 12 = \frac{31}{3};$$

$$б) \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7; \\ x - y = -1; \quad y = x + 1 \end{cases}; \quad x^2 - x|x + 1| + |x + 1|^2 = 7;$$

$$x^2 - x^2 - x + x^2 + 2x + 1 - 7 = 0; \quad x^2 + x - 6 = 0; \quad D = 1 + 4 \cdot 6 = 25;$$

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{2} = 2; \quad x_2 = -3; \quad y_1 = 3; \quad y_2 = -2.$$

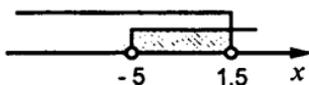
Ответ: а) $\left(\frac{31}{3}; -\frac{1}{6}\right)$; б) (2; 3) и (-3; -2).

10. $y = -2x^2 - 2x + 4$; $y = 9 - 5x$; $-2x^2 - 2x + 4 = 9 - 5x$;
 $2x^2 - 3x + 5 = 0$; $D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 5 < 0$ - нет корней.

Ответ: нет корней.

11. а) $\begin{cases} 3x + 7 > 5x + 10; & 2x < 3; & x < -1,5 \\ 4x - 1 > x - 16; & 3x > -15; & x > -5 \end{cases}$

Ответ: $(-5; -1,5)$

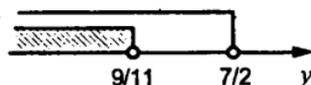


б) $\begin{cases} x - 10 > 2x - 4; & x < -6 \\ 3x - 4(x - 7) < 16 - 3x; & 3x - 4x + 28 + 3x < 16; & 2x < -12; & x < -6 \end{cases}$

Ответ: $(-\infty; -6)$.

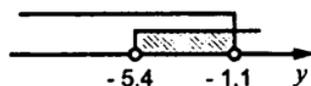
в) $\begin{cases} \frac{y-5}{3} - 2y > 2y - 8; & y - 5 - 6y > 6y - 24; & 11y < 19; & y < \frac{19}{11} \\ 3y - \frac{2y+10}{2} < 2; & 6y - 2y - 10 < 4; & 4y < 14; & y < \frac{7}{2} \end{cases}$

Ответ: $(-\infty; \frac{19}{11})$.



12. $\begin{cases} \frac{y-5}{4} < \frac{2y+3}{3}; & 3y - 15 < 8y + 12; & 5y > -27; & y > -\frac{27}{5} \\ \frac{4y+1}{2} < \frac{y-4}{3}; & 12y + 3 < 2y - 8; & 10y < -11; & y < -1,1 \end{cases}$

Ответ: -5 ; -4 ; -3 ; -2 .



13. а) $x^2 - 7 \leq 0$; $(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) \leq 0$.

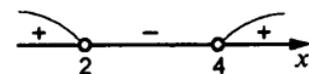
Ответ: $[-\sqrt{7}; \sqrt{7}]$.



б) $x^2 - 6x + 10 > 2$; $x^2 - 6x + 8 > 0$; $D = 36 - 32 = 4$;

$$x_1 = \frac{6+2}{2} = 4; \quad x_2 = 2.$$

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.



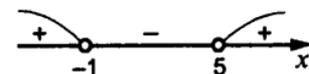
в) $x^2 - 5x + 7 < 0$; $D = 25 - 47 < 0$; т.к. $a = 1 > 0$, то нет решений.

Ответ: нет решений.

г) $(x - 5)(x + 1) > 0$;

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -1.$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.



П-4

1. а) $y = \frac{x-1}{x+5}$; $x+5 \neq 0$, т.к. знаменатель; $x \neq -5$;

б) $y = \sqrt{4-x}$; $4-x \geq 0$; $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$; $x \leq 4$;

в) $y = \frac{5}{x-1}$; $x-1 \neq 0$; $x \neq 1$; г) $y = \sqrt{3x+6}$; $3x+6 \geq 0$; $3x \geq -6$; $x \geq -2$.

2. а) $y = 3x + 3$;

б) $y = -2x - 4$;

1) $y = 0$ при $x = -1$; $y > 0$ при $x > -1$;

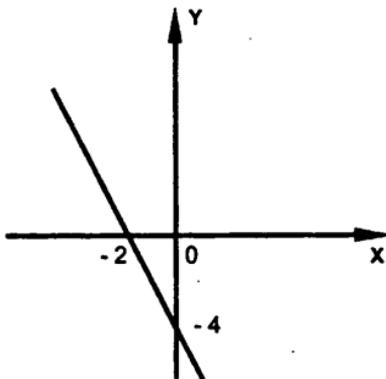
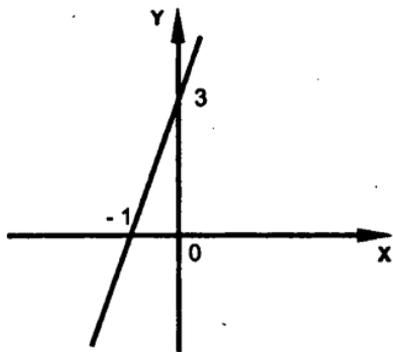
1) $y = 0$ при $x = -2$; $y > 0$ при $x < -2$;

$y < 0$ при $x < -1$;

$y < 0$ при $x > -2$;

2) y – возрастающая;

2) y – убывающая.



3. а) $y = -3x + 3$;

б) $y = 2x - 4$;

1) $y = 0$ при $x = 1$; $y > 0$ при $x < 1$;

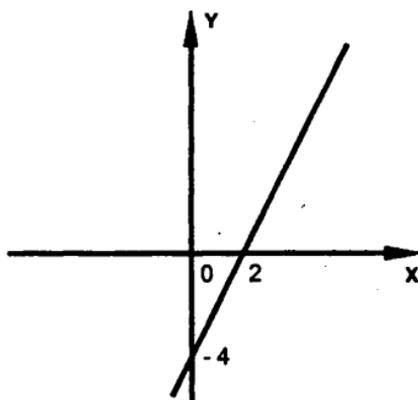
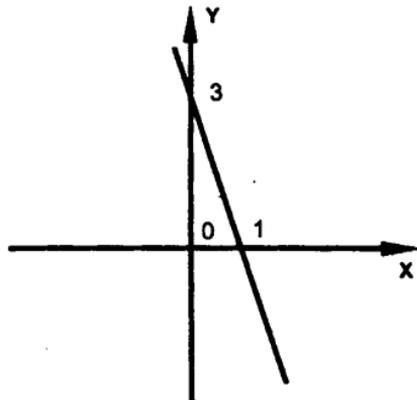
1) $y = 0$ при $x = 2$; $y > 0$ при $x > 2$;

$y < 0$ при $x > 1$;

$y < 0$ при $x < 2$;

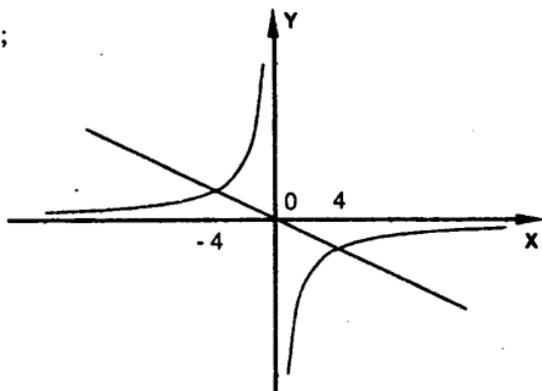
2) y – убывающая;

2) y – возрастающая.



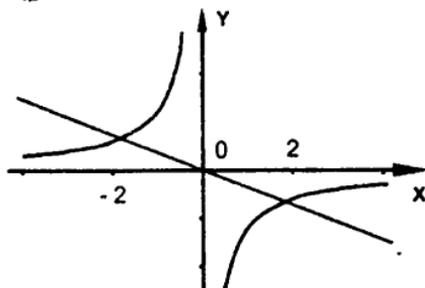
$$4. y = -\frac{4}{x}, y = -\frac{1}{4}x; -\frac{4}{x} = -\frac{1}{4}x;$$

$$x^2 = 16; x_{1,2} = \pm 4.$$



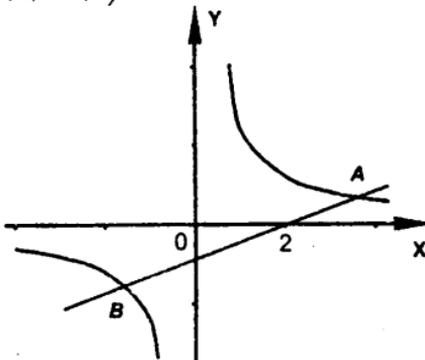
$$5. y = -\frac{4}{x}; \text{ а) } y > 0 \text{ при } x < 0; y < 0 \text{ при } x > 0; \text{ б) } y \text{ возрастает на } D(y).$$

$$6. y = -\frac{6}{x}, y = -1,5x; -\frac{6}{x} = -1,5x; x^2 = 4; x_{1,2} = \pm 2.$$



$$7. y = -\frac{6}{x}; \text{ а) } y > 0 \text{ при } x < 0; y < 0 \text{ при } x > 0; \text{ б) } y \text{ возрастает на } D(y).$$

$$8. y = \frac{12}{x}, y = 2x - 4; A(3,5; 3,2); B(-1,2; -5,8).$$



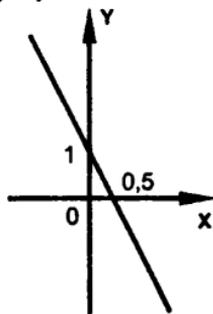
9. $y = \frac{12}{x}$; а) $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$; б) y возрастает на $D(y)$.

10. $y = -2x + b$; $-1 = -2 + b$; $b = 1$; $y = -2x + 1$

а) $y = 0$ при $x = 0,5$;

$y > 0$ при $x < 0,5$; $y < 0$ при $x > 0,5$;

б) y — убывающая.



11. а) $y = 3x - 5$, $y = 2x - 5$; $3x - 5 = 2x - 5$; $x = 0$, т.е. пересекаются;

б) $y = -\frac{1}{2}x + 3$, $y = -\frac{1}{2}x - 7$; $-\frac{1}{2}x + 3 = -\frac{1}{2}x - 7$ — нет корней, т.е. не пересекаются.

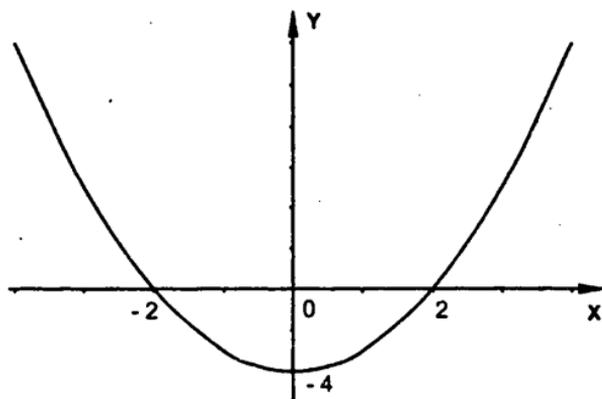
12. $y = x^2 - 4$;

а) $x_{1,2} = \pm 2$; $y > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$;

$y < 0$ при $x \in (-2; 2)$;

б) y возрастает при $x \geq 0$;

y убывает при $x \leq 0$.



13. $y = -2x^2 + x + 3$; $y(0) = 3$, $(0; 3)$; $2x^2 - x - 3 = 0$;

$D = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$; $x_1 = \frac{1+5}{4} = 1,5$; $x_2 = -1$; $(1,5; 0)$, $(-1; 0)$.

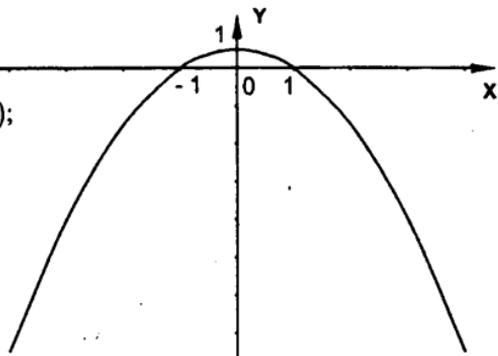
14. $y = -x^2 + 1$;

а) $x_{1,2} = \pm 1$; $y > 0$ при $x \in (-1; 1)$;

$y < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;

б) y возрастает при $x \leq 0$;

y убывает при $x \geq 0$.



15. $y = 2x^2 - x - 3$; $y(0) = -3$, $(0; -3)$; $2x^2 - x - 3 = 0$;

$D = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$; $x_1 = \frac{1+5}{4} = 1,5$; $x_2 = -1$; $(1,5; 0)$, $(-1; 0)$.

16. $y = x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x + 1 - 2 = (x-1)^2 - 2$;

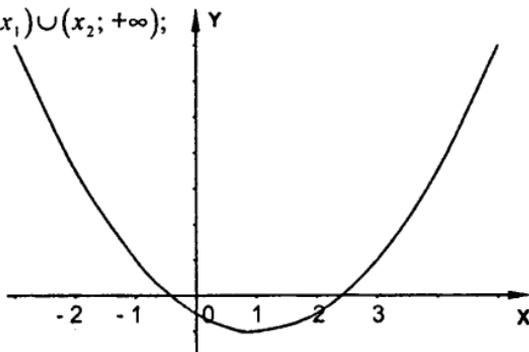
а) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$; $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;

$y < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$;

б) y возрастает при $x \geq 1$;

y убывает при $x \leq 1$.

в) $y_{\min} = 2$.



ЗАДАНИЯ ДЛЯ ШКОЛЬНЫХ ОЛИМПИАД

Осенняя олимпиада

1. Пусть x – цифра десятков, y – цифра единиц, тогда $10x + y$ – данное число.

Получаем уравнение: $10x + y = xy + 12$.

Перепишем его в виде: $(10 - y)(x - 1) = 2$.

В последнем уравнении слева стоит произведение двух натуральных чисел, значит, возможны два случая:

$$1) \begin{cases} 10 - y = 2; & y = 8 \\ x - 1 = 1; & x = 2 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} 10 - y = 1; & y = 9 \\ x - 1 = 2; & x = 3 \end{cases}$$

Ответ: 2 и 8 или 3 и 9.

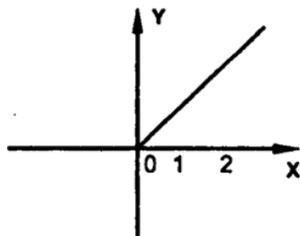
2. Предположим, что дробь $\frac{a}{b}$ сократима, т.е. $a = ak$; $b = bk$, где $k \neq 1$ –

натуральное число. Тогда получаем: $\frac{a-b}{a+b} = \frac{ak-bk}{ak+bk} = \frac{k(a-b)}{k(a+b)} = \frac{a-b}{a+b}$,

т.е. дробь $\frac{a-b}{a+b}$ сократима, что противоречит условию. Значит, наше

предположение неверно. Значит, дробь $\frac{a}{b}$ несократима, ч.т.д.

$$3. y = x + |x| = \begin{cases} x + x = 2x, & x \geq 0 \\ x - x = 0, & x < 0 \end{cases}$$



$$4. \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \text{ ч.т.д.}$$

5. $(1+x)^2 = 4x(1-x^2)$; пусть $x^2 = a > 0$ имеем: $x^2 = -1 - 4x$;

$$(1+a)^2 = 4x(1-a); a^2 + (2+4x)a + 1 - 4x = 0; D = 16x^2;$$

$$a_1 = \frac{-2-4x+4x}{2} = -1 < 0; a_2 = \frac{-2-4x-4x}{2} = -1-4x;$$

$$x^2 + 4x + 1 = 0; D = 16 - 4 = 12; x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}. \quad \text{Ответ: } -2 \pm \sqrt{3}.$$

6. $|x-1| + |x+2| \leq 3$. Нули модулей $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

а) $(-\infty; -2]$; $1-x-x-2 \leq 3$; $2x \geq -4$; $x \geq -2$; $x = -2$;

б) $[-2; 1]$; $1-x+x+2 \leq 3$; $3 \leq 3$; $x \in [-2; 1]$;

в) $[1; +\infty)$; $x-1+x+2 \leq 3$; $2x \leq 2$; $x \leq 1$; $x = 1$;



Итого получаем: $-2 \leq x \leq 1$.

Ответ: $-2 \leq x \leq 1$.

7. Пусть $AB = a$ км, x км/ч, y км/ч – скорости пешехода и велосипедиста соответственно.

$$\text{Получаем: } \begin{cases} \frac{a-6}{y} = \frac{6}{x}, & \frac{x}{y} = \frac{6}{a-6} \\ \frac{a}{y} = \frac{a-16}{x}, & \frac{x}{y} = \frac{a-16}{a} \end{cases}; \quad \frac{6}{a-6} = \frac{a-16}{a};$$

$$a^2 - 22a + 96 = 6a; \quad a^2 - 28a + 96 = 0; \quad D = 400;$$

$$a_1 = \frac{28+20}{2} = 24; \quad a_2 = 4 \text{ – не подходит по условию. Ответ: } AB = 24 \text{ км.}$$

8. $x^2y^2 - 9x^2 - 4y^2 + 36 = 0; \quad 9x^2 + 4y^2 + 12xy = x^2y^2 + 12xy + 36;$

$$(3x+2y)^2 = (xy+6)^2;$$

$$3x+2y = xy+6;$$

$$3x+2y = -(xy+6);$$

$$3x - xy = 6 - 2y;$$

$$3x + xy = -6 - 2y;$$

$$x = \frac{6-2y}{3-y} = 2;$$

$$x = \frac{-6-2y}{3+y} = -2;$$

$$y = 3.$$

$$y = -3.$$

Ответ: графики уравнения – объединение четырех прямых:

$$x = -2; \quad x = 2; \quad y = -3; \quad y = 3.$$

Весенняя олимпиада

1. $x^6 - x^5 + x^3 - x + 1 = x^6 - x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^2 + x^2 - x + 1 =$

$$= x^4(x^2 - x + 1) - x^2(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1).$$

2. $2x^2 + 2xy + 4y^2 + 2x + 6y + 5 \geq 1$

$$x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + 2x + 1 + 3y^2 + 6y + 3 = (x+y)^2 + (x+1)^2 + 3(y+1)^2 \geq 0$$

При любых x и y , значит, исходное неравенство так же верно для любых x и y , ч.т.д.

3. $|x| + |y| = 1.$

4. а) $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \sqrt{x}; \quad x + \sqrt{x} + x - \sqrt{x} - 2\sqrt{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})} = \sqrt{x};$

$$2x - 2\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{x}; \quad 2x = 2\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x}; \quad 4x^2 = 4x^2 - 4x + x + 4\sqrt{x(x^2 - x)};$$

$$3x = 4\sqrt{x(x^2 - x)}; \quad 9x^2 = 16x(x^2 - x), \quad x_1 = 0; \quad 9 = 16(x-1), \quad x_2 = 1\frac{9}{16}.$$

$$6) \sqrt[3]{(1+x)^2} - \sqrt[3]{(1-x)} = \sqrt[3]{1-x^2};$$

$$(1+x^2) - 3\sqrt[3]{(1+x)^4(1-x)^2} + 3\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)^4} - (1-x)^2 = 1-x^2.$$

$$5. \frac{a_1}{1-q} = 56.$$

Квадраты образуют новую бесконечную геометр. прогрессию $cb_1 = a_1^2, q_1 = q^2$.

$$\text{Имеем: } \frac{a_1^2}{1-q^2} = 448; \quad \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 56; & a_1 = 56(1-q) \\ \frac{a_1^2}{1-q^2} = 448 \end{cases}; \quad \frac{56^2(1-q)^2}{(1-q)(1+q)} = 448;$$

$$\frac{56(1-q)}{1+q} = 8; \quad 7(1-q) = 1+q; \quad 7-7q = 1+q; \quad 8q = 6; \quad q = \frac{3}{4}; \quad a_1 = 56 \cdot \frac{1}{4} = 14.$$

$$\text{Ответ: } a_1 = 14, \quad q = \frac{3}{4}$$

$$6. \sqrt{3+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(1+\sqrt{3}) = \sqrt{6} + \sqrt{2}, \text{ ч.т.д.}$$

$$7. \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} = 2+\sqrt{2} + 2-\sqrt{2} = 4.$$

$$8. x^2 - y^2 = 21; \quad (x-y)(x+y) = 21; \quad x > y;$$

$(x-y), (x+y)$ – натуральные; $21 = 3 \cdot 7$ или $21 = 1 \cdot 21$;

$$\text{Получаем: } \begin{cases} x-y=3; & x=3+y \\ x+y=7 \end{cases}; \quad 3+2y=7; \quad 2y=4; \quad y=2; \quad x=5;$$

или

$$\begin{cases} x-y=1; & x=y+1 \\ x+y=21 \end{cases}; \quad 2y=20; \quad y=10; \quad x=11.$$

Ответ: (5; 2) или (11; 10).